Matematični tabor za nadarjene

Math camp for the gifted

Vesna Harej
Osnovna šola Dravlje

Σ Povzetek

V okviru običajnega pouka si učitelj težko privošči, da bi učencem nudil dovolj priložnosti celovite obravnave problemov oziroma obravnave, pri kateri bi bil poudarek predvsem na povezovanju obravnavane snovi z ostalimi znanji oziroma izkušnjami. Prav zaradi tega so za delo z nadarjenimi učenci pomembne tudi drugačne oblike dela. V prispevku predstavljam nekatere naloge, ki jih nadarjeni učenci rešujejo na matematičnem taboru.

Ključne besede: nadarjeni, matematika, matematični tabor, naloge za nadarjene.

Σ Abstract

During the course of normal instructions, the teacher can hardly afford to provide pupils with enough opportunities for a holistic discussion of problems or discussion in which the emphasis would lay primarily on the integration of the treated material with other knowledge or experiences. That is why diverse types of work are so important for work with gifted students. The paper presents some of the exercises which gifted pupils solved in math camp.

Keywords: *gifted, mathematics, math camp, exercises for the gifted*

α Delo z nadarjenimi učenci pri matematiki

O tem, kako delati z nadarjenimi učenci, katera temeljna načela upoštevati, je veliko zapisanega v konceptu »Odkrivanje in delo z nadarjenimi učenci v devetletni šoli«, ki ga je izdal Nacionalni kurikularni svet leta 1999. Tudi Strmčnik (1998) navaja določena izhodišča in načela, ki jih je treba upoštevati pri delu z nadarjenimi učenci. Predlagane oblike dela in aktivnosti za nadarjene učence se lahko izvajajo pri rednem pouku ali pa izven njega. Verjetno se prav vsi učitelji, ki smo že imeli priliko delati z nadarjenimi učenci, zavedamo, da ni ene same metode, s katero bi poskrbeli zanje. Učinkovite so vse tiste oblike in metode, ki poudarjajo razvijanje zahtevnejših miselnih sposobnosti. Nadarjenosti ne smemo enačiti s popolnostjo, saj popolnosti ne moremo zahtevati od nikogar. Učence lahko samo spodbujamo in jim pomagamo, ne smemo pa jim česarkoli vsiljevati.

β Matematični tabor za nadarjene

Na naši šoli že dvanajsto leto organiziramo matematični tabor za nadarjene učence. Njegov glavni namen je ustvariti primerne razmere in omogočiti vsem udeležencem razvijanje njihovih ustvarjalnih sposobnostih. Učenci s svojim znanjem samostojno in celovito obravnavajo problemsko situacijo, ki jo najprej definirajo, postavijo raziskovalna vprašanja, oblikujejo hipoteze, načrtujejo poti reševanja in na koncu ovrednotijo rešitve. Tako jih vodimo k samostojnemu odkrivanju. Naloge, s katerimi se srečujejo učenci na taboru, so kompleksnejše, čeprav običajno niso prezahtevne, njihova glavna značilnost pa je odprtost. Za take naloge je značilno, da je podano le izhodišče razmišljanja, cilj naloge je okvirno določen, prav tako nista določena postopek reševanja naloge oziroma pot do cilja.

Matematični tabor organiziramo za učence od 7. do 9. razreda, izjemoma pa na tabor povabimo tudi učence 6. razreda. Učenci 9. razreda, ki so se že v preteklih letih udeleževali matematičnega tabora, so pri nekaterih nalogah že v vlogi mentorja mlajšim udeležencem. Tak način dela je pokazal pozitivne odzive prav pri vseh učencih in seveda tudi pri učiteljih, ki sodelujejo na taboru. Običajno organiziramo petdnevni tabor v domovih ZPM ali v CŠOD v mesecu aprilu.

Pri načrtovanju vsebine tabora za nadarjene sem seveda izhajala iz koncepta

»Odkrivanje in delo z nadarjenimi učenci« in želje, da udeleženci tabora poglobijo svoje znanje z odkrivanjem in raziskovanjem. Razpravljati o matematičnih idejah, ne da bi ob tem predstavili najrazličnejše matematične probleme, se mi je zdelo nesmiselno. Tako sem vsebino in delo tabora razdelila na štiri stopnje (Cofman, 2001):

1. stopnja: Spodbujanje k samostojnemu raziskovanju

Samostojna pot do odgovora na zastavljeno vprašanje ponuja užitek prav vsem reševalcem, zato se na začetku lotimo lažjih nalog, ki jih učenci lahko rešujejo sami brez dodatnih nasvetov.

2. stopnja: Razne poti reševanja nalog

Po samostojnem reševanju učenci postanejo kritični do svojih rešitev in se sprašujejo, ali morda obstaja boljša, hitrejša, enostavnejša ali lepša rešitev zastavljene naloge.

V tem delu sem učence naučila kar nekaj tehnik reševanja matematičnih problemov.

3. stopnja: Znani matematični problemi iz preteklosti

Učence sem seznanila z nekaterimi problemi, s katerimi so se srečali matematiki v prejšnjih stoletjih. Ob tem se ne le ostri veščina reševanja, temveč učenci začnejo ceniti matematiko tudi kot pomemben del kulture človeštva.

4. stopnja: Sodobni problemi matematike

Kljub današnji zahtevnosti matematike obstajajo problemi v teoriji števil ali kombinatoriki, ki jih lahko razumemo brez obsežnega znanja matematike.

δ Vsebina raziskovalnega tabora

Že zelo zgodaj lahko opazovanje številskih vzorcev in oblik človeka vodi k presenetljivim odkritjem, ki so osnova mnogih zanimivih problemov. Tako raziskovanje nam utira pot k umetnosti reševanja problemov.

Kaj naj raziskujemo in kako naj to počnemo?

Znani načini raziskovanja:

- Ponavljanje nekega postopka in analiza dobljenih rezultatov.
- Iskanje vzorcev. Iskanje izjem in posebnih primerov znotraj ugotovljenih vzorcev.
- Posploševanje danih problemov.
- Preučevanje obratnih problemov.

Različni načini reševanja nalog:

- Formulacija naloge na drugačen način.
- Dokazovanje s protislovjem.
- Uporaba analogij iz fizike.

ε Cilji, ki sem jih zasledovala pri izvajanju raziskovalnega tabora

- Razvijati sposobnosti, motivacijo in ustvarjalnost učencev.
- Krepiti zaupanje učencev v lastne sposobnosti.
- Razvijati pozitivni odnos učencev do pridobljenega znanja.
- Družiti nadarjene učence med seboj.
- Spodbujati in razvijati samostojno učenje.
- Seznanjanje učencev z oblikami in metodami dela pri raziskovanju.
- Pri učencih uveljavljati sodelovalno učenje.
- Razširiti interes učencev in spodbuditi njihovo sodelovanje pri izbiri programa.
- Skrbeti za celostni osebnostni razvoj nadarjenih učencev.

γ Metode in oblike dela

Delo je potekalo v majhnih skupinah z začetnim uvodnim frontalnim delom. Udeležence sem seznanila z načini raziskovanja pri matematiki, jim nakazala problem in sodelovala pri njihovem delu. Ves čas sem spodbujala njihovo ustvarjalnost, izvirnost in kreativnost.

Skozi različne aktivnosti sem pripravljala učence na samostojno razmišljanje ter jih seznanjala s terminologijo in abstraktnimi strukturami.

η Primeri vsebin z nalogami

V nadaljevanju je predstavljenih nekaj vsebin, ki jih na taboru obravnavamo, in naloge[1], ki jih učenci rešujejo.

1 *Nekatere naloge navajamo vključno z rešitvami.*

1. Ponavljanje nekega postopka in analiza dobljenih rezultatov

Naj bo dan enakostranični trikotnik, katerega ploščina znaša eno ploščinsko enoto. Trikotnik razdelimo na štiri skladne trikotnike tako, da povežemo razpolovišča stranic prvotnega trikotnika. Zatem odstranimo osrednjega od dobljenih štirih trikotnikov, nato odstranimo »sredine« preostalim trem trikotnikom in ponovimo opisani postopek n-krat (slika 1).

Ugotovi:

a) Skupno ploščino trikotnikov, ki jih odstranimo, ko postopek 2-krat, 3-krat, …, n-krat ponovimo.

b) Kaj se dogaja s ploščino, ko se n veča čez vse meje?

[Slika 1] Trikotnik Sierpinskega

Ponavljanje postopka pripelje učence do pojma *fraktal* in pri tem tudi spoznajo, kako rastejo fraktali.

Izberemo začetni geometrijski objekt, na primer daljico, geometrijski lik ali geometrijsko telo. Na njem izvajamo določen postopek – algoritem. Izhodni podatki po prvem koraku predstavljajo vhodne podatke za drugi korak, izhodni podatki po drugem koraku so vhodni podatki za tretji korak in tako naprej. Nešteto ponovitev algoritma nas pripelje do fraktala.

Omenjene lastnosti si ogledamo na *Kochovi krivulji in* trikotniku Sierpinskega.

2. Iskanje vzorcev

Poligonska števila

Izraz mnogokotniška – poligonska števila so vpeljali že stari Grki, ko so določena naravna števila predstavili kot obliko mnogokotnika iz točk oziroma kamenčkov.

Gre za naravna števila, ki so enolično določena z mrežo pravilnega mnogokotnika različnih dimenzij.

Razišči trikotniška, kvadratna, petkotniška, šestkotniška in poljubna mnogokotniška števila.

Trikotniška števila

Trikotniško število je število, ki je predstavljeno v obliki točk mreže trikotnika, kjer na posamezni stranici leži ena točka več kot na stranici manjšega trikotnika, kar je ponazorjeno spodaj (slika 2). Trikotniška števila ob višanju dimenzije lahko strnemo v zaporedje naravnih števil.

Vsota zaporednih naravnih števil so trikotniška števila.

Primer :

$1 + 2 = 3$

$1 + 2 + 3 = 6$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

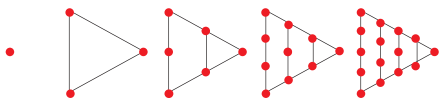
Koliko pik sestavlja 5. člen vzorca?

Koliko pik sestavlja 7. člen vzorca?

Ali opaziš preprosto pravilo, ki povezuje število pik z zaporednim številom člena?

Koliko pik sestavlja n-ti člen vzorca?

Ugotovitve sproti vnašaj v preglednico 1.



[Slika 2] Trikotniška števila

ime	n=1	2	3	4	5	6	7	8	…	n
Trikotniško T_n	1	3								

[Preglednica 1] Trikotniška števila

Če seštejemo kakšno trikotno in nadaljnje večje trikotno število, vedno dobimo kvadratno število.

Primer:

$1 + 3 = 4 = 2^2$

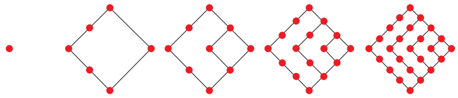
$3 + 6 = 9 = 3^2$

$6 + 10 = 16 = 4^2$

Vsa trikotniška števila nastopajo v Pascalovem trikotniku.

Kvadratna števila

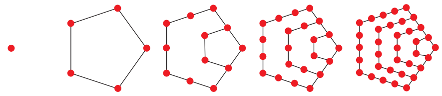
Kvadratna števila (slika 3) prikažemo kot točke v kvadratni mreži, potrebne za kvadrat ustrezne dimenzije. Že iz opazovanja spreminjanja števila točk v mreži z višanjem dimenzije uganemo splošno formulo za kvadratna števila.



[Slika 3] Kvadratna števila

Petkotniška števila

Petkotniška (pentagonalna) števila (slika 4) prikažemo kot točke v mreži, potrebni za oglišča pravilnega petkotnika ustrezne dimenzije.



[Slika 4] Petkotna števila

Vsota prvih zaporednih lihih števil je zmeraj kvadrat naravnega števila – kvadratna števila.

Primer :

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

Koliko pik sestavlja 5. člen vzorca?

Koliko pik sestavlja 7. člen vzorca?

Ali opaziš preprosto pravilo, ki povezuje število pik z zaporednim številom člena?

Koliko pik sestavlja n-ti člen vzorca?

Petkotniška števila pa lahko dobimo tudi kot vsoto trikotniških in kvadratnih pri $n \geq 2$.

$P_n = K_n + T_{n-1}$; $n \geq 2$

$5 = 4 + 1$

$12 = 9 + 3$

Koliko pik sestavlja 5. člen vzorca?

Koliko pik sestavlja 7. člen vzorca?

Ali opaziš preprosto pravilo, ki povezuje število pik z zaporednim številom člena?

Koliko pik sestavlja n-ti člen vzorca?

ime	n=1	2	3	4	5	6	7	8	…	n
Kvadratno K_n	1	4								

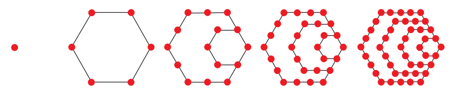
[Preglednica 2] Kvadratna števila

ime	n=1	2	3	4	5	6	7	8	…	n
Petkotniško P_n	1	5								

[Preglednica 3] Petkotna števila

Šestkotniška števila

Šestkotniška (heksagonalna) števila (Slika 5) so naravna števila, določena s številom točk mreže v obliki pravilnega 6-kotnika različnih dimenzij.



[Slika 5] Šestkotniška števila

Koliko pik sestavlja 5. člen vzorca?
Koliko pik sestavlja 7. člen vzorca?
Ali opaziš preprosto pravilo, ki povezuje število pik z zaporednim številom člena?
Koliko pik sestavlja n-ti člen vzorca?

Šestkotniška števila pa lahko dobimo tudi kot vsoto trikotniških in petkotniških. Velja namreč:

$H_n = P_n + T_{n-1}$; $n \geq 2$
$6 = 5 + 1$
$15 = 12 + 3$
$28 = 22 + 6$

Spoznali smo trikotniška, kvadratna, petkotniška in šestkotniška števila. Seveda se red mnogokotnika lahko tudi poljubno viša. Tako poznamo tudi heptagonalna, oktagonalna, nonagonalna, dekagonalna . . . števila.

Če je s število stranic mnogokotnika, je enačba za n-to s-mnogokotniško število:

$$\frac{n((s-2)n+4-s)}{2}$$

Če okoli dveh kvadratnih števil, ki na diagonali sledita druga za drugim, narišemo kvadrat, ki zajema štiri števila, in seštejemo števila v njem, dobimo kvadratno število.

1	2	3	4	5	6
2	**4**	6	8	10	12
3	6	**9**	12	15	18
4	8	12	**16**	20	24

[Preglednica 5] Kvadratna števila

Primer: glej preglednico 5
$1 + 2 + 2 + 4 = 9 = 3^2$
$4 + 6 + 6 + 9 = 25 = 5^2$

Še nekaj dodatnih zanimivih nalog o številih

Pravokotna števila

Vsota zaporednih prvih sodih števil je zmnožek dveh zaporednih naravnih števil, lahko pa ga ponazorimo s točkami, ki dolo-

ime	n=1	2	3	4	5	6	7	8	…	n
Šestkotniško H_n	1	6								

[Preglednica 4] Šestkotniška števila

čajo pravokotnik. Temu zmnožku pravimo pravokotno število.

Primer:

$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3$

$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4$

Pomembna je tudi razdelitev naravnih števil na praštevila ali primitivna števila in na sestavljena števila.

Obstojna praštevila

Če v praštevilu zamenjamo vrstni red števk in spet dobimo praštevilo, so to obstojna praštevila. Ko v številu 13 zamenjamo vrstni red števk, dobimo praštevilo 31.

Med praštevili do 100 poišči vsa obstojna praštevila. Kaj ugotoviš?

V desetiškem zapisu obstojnega števila nastopajo le števke 1, 3, 7 in 9.

Med praštevili do 100 so taka praštevila 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97, ki so vsa razen 19 obstojna. Vseh dvomestnih praštevil je 21, 9 pa je obstojnih.

Popolna števila

Odkritje popolnih števil po navadi povezujejo s šolo Pitagorejcev. Pitagorejci (učenci matematika Pitagore iz 6. stoletja pr. Kr.) so opazili, da imajo nekatera števila posebno lastnost, in sicer da je vsota deliteljev števila enaka številu samemu (pri tem gledamo samo delitelje manjše od števila samega). Popolno ali perfektno število je število, ki je enako vsoti vseh svojih pravih deliteljev. Je tudi samo sebi prijateljsko število. Najmanjše tako število je 6.

Prva štiri popolna števila so:

$6 = 1 + 2 + 3$

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$

$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 +508 + 1016 + 2032 + 4064$

Prijateljski števili

Prijateljski števili sta števili, katerih vsota njunih pravih deliteljev je križno enaka drugemu številu.

Prvi tak par je 220 in 284.

Pravi delitelji števila 220 so 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, njihova vsota pa je 284.

Pravi delitelji števila 284 so 1, 2, 4, 71, 142, njihova vsota pa je 220.

Dokaži, da so naslednji trije pari: 1184 in 1210, 2620 in 2924 in pa 5020 in 5564 prijateljska števila.

Vzvišeno število

Vzvišeno število je število, katerega število pozitivnih deliteljev je popolno število in katerih vsota je spet popolno število.

Primer: Število 12 je vzvišeno. Število njegovih pozitivnih deliteljev (6) je popolno število: 1, 2, 3, 4, 6 in 12; njihova vsota pa je spet popolno število: $1+ 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

Kot zanimivost: Znani sta le dve taki števili: 12 in 6 086 555 670 238 378 989 670 371 734 243 169 622 657 830 773 351 885 970 528 324 860 512 791 691 264.

Srečno število

Srečna števila tvorimo s podobnim postopkom kot praštevila z Eratostenovim sitom.

Postopek, po katerem je Poljski matematik Ulam opredelil srečna števila, je naslednji:

Najprej prečrtamo vsa soda števila.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

…

[Preglednica 6] Kako poiščemo srečna števila

Dobimo zaporedje lihih števil. Drugi člen je število 3. Sedaj prečrtamo vsako tretje število, ki je ostalo na seznamu. Tretje število je sedaj 7. Prečrtamo torej vsako sedmo število in postopek ponavljamo po zgoraj opisanem načinu.

Če ta postopek ponovimo velikokrat, ostanejo vsa srečna števila do 100:

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, 51, 63, 67, 69, 73, 75, 79, 87, 93, 99.

Med srečnimi števili do 100 so kar štirje kvadrati naravnih števil $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $49 = 7^2$

Praštevilo je srečno ali pa tudi ne. Do 100 je 25 praštevil, med njimi so srečna 3, 7, 13, 31, 37, 43, 67, 73 in 97.

Srečno število je zmeraj liho število. Včasih sta zaporedni lihi števili obe srečni. Do 100 imamo pare (1, 3), (7, 9), (13, 15), (31, 33), (49, 51), (67, 69), (73, 75). Takšnim parom pravimo srečni dvojčki.

3 Vsote in vrste

Pri obravnavanju končnih in neskončnih vrst se naučimo dokazovanja formul, kot na primer:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

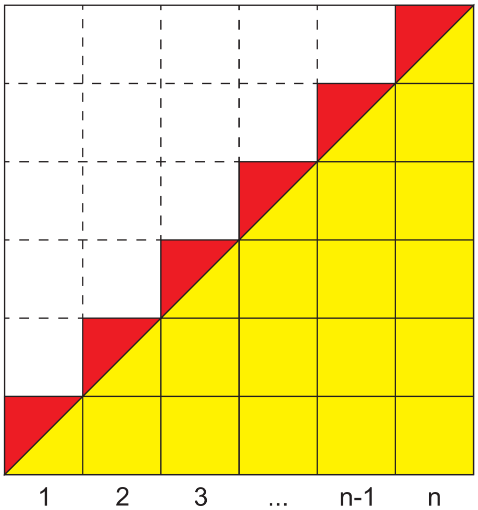
s popolno matematično indukcijo. Izjava je pravilna za vsak $k = n$, če je pravilna za $k = 1$ in če iz pravilnosti za $k = n$ sledi tudi pravilnost $k = n + 1$.

Vsota prvih *n* naravnih števil

Zapiši vsoto prvih n naravnih števil: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = ???$

n	vsota
1	1
2	1 + 2
3	1 + 2 + 3
4	1 + 2 + 3 + 4
5	1 + 2 + 3 + 4 + 5
…	
n	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + *n*

[Preglednica 7] Vsota prvih n naravnih števil



[Slika 6] Ponazoritev vsote prvih n naravnih števil s pomočjo kvadrata s stranico dolžine n

Vsoto prvih n naravnih števil lahko ponazorimo s pomočjo kvadrata s stranico dolžine n. Razišči geometrijski prikaz vsote prvih n naravnih števil.

Narišemo mrežo kvadratkov s ploščino 1. S slike prepoznamo zaporedne člene 1, 2, 3 … n, saj so to ravno ploščine posameznih stolpcev. Obarvane kvadratke na sliki lahko razdelimo na:

- rumeni del, katerega ploščina je enaka polovici ploščine kvadrata s stranico n,
- rdeči del, ki je sestavljen iz n enakih trikotnikov s ploščino 1/2.

S pomočjo geometrijskega prikaza zapiši vsoto prvih n naravnih števil.

$1 + 2 + 3 + ... + n =$

Vsota prvih *n* lihih števil

Zapiši vsoto prvih n lihih števil:

$1 + 3 + 5 + … + (2n – 1) = ???$

n	vsota
1	1
2	1 + 3
3	1 + 3 + 5
4	1 + 3 + 5 + 7
5	1 + 3 + 5 + 7 + 9
…	
n	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + … + n$

[Preglednica 8] Vsota prvih n lihih števil

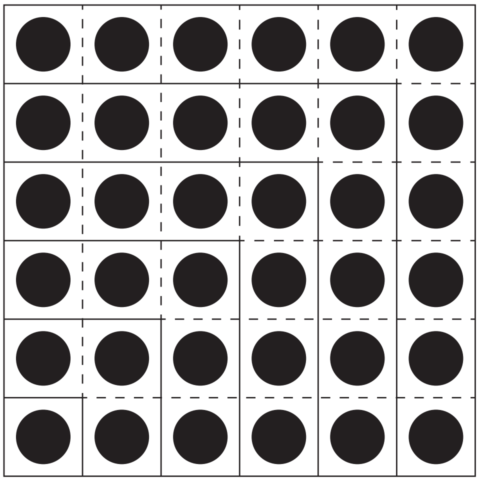
Vsoto prvih n lihih števil lahko ponazorimo s pomočjo kvadrata s stranico dolžine n.

Narišemo mrežo kvadratkov s ploščino 1.

Kaj so zaporedni členi 1, 3, 5, 7, …, $2n$-1 ?

Kaj pa njihove vsote?

Razišči geometrijski prikaz vsote prvih n lihih števil.



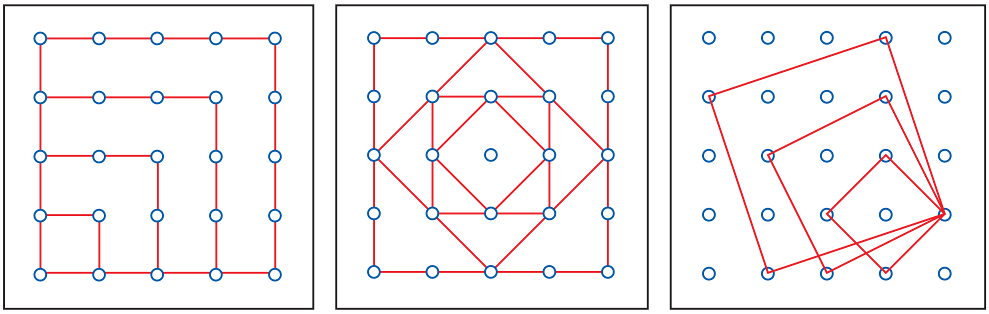
[Slika 7] Ponazoritev vsote prvih n lihih števil s pomočjo kvadrata s stranico dolžine n

4 Uporaba geoplošče pri raziskovanju

Geopološče omogočajo izvajanje raznovrstnih aktivnosti s področja elementarne geometrije. Skozi različne aktivnosti omogočajo pripravo učencev na samostojno razmišljanje ter seznanjanje s terminologijo in abstraktnimi strukturami.

Uporaba: raziskovanje različnih strategij iskanja ploščine lika, risanje različnih likov z istimi ploščinami, vrste trikotnikov, risanje štirikotnikov, večkotnikov, prikaz delov celote, preslikave, simetrije, podobnost, iskanje skladnosti likov, risanje mrež, primitivne pitagorejske trojke ... itd.

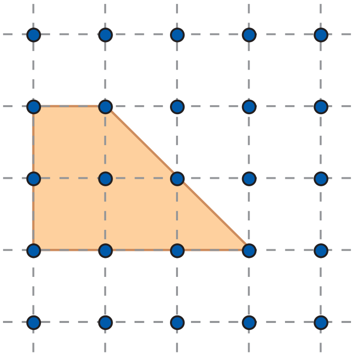
Poišči vse možne, ploščinsko različne, kvadrate (pravokotnike, paralelograme, pravokotne trikotnike …), na geoplošči 5 X 5.



[Slika 8] *Ploščinsko različni kvadrati na geoplošči 5 X 5*

5 Posploševanje problemov

PICKOV IZREK na celoštevilski kvadratni mreži



[Slika 9] *Primer Pickovega izreka*

Leta 1899 je matematik George Pick dokazal trditev, ki opisuje zvezo med ploščino večkotnika na celoštevilski mreži in številom notranjih in robnih točk na mreži.

(Večkotnik na sliki ima 8 robnih točk, kar zapišemo $B = 8$. Prav tako ima 1 notranjo točko in zapišemo $I = 1$).

Razišči Pickov izrek na kvadratni mreži. Ali bi podobno veljalo tudi na trikotni mreži, šestkotni mreži?

Konstruiraj večkotnike brez notranjih točk ($I = 0$). Zapiši ploščino vsakega večkotnika v preglednico.

Število notranjih točk [*I*]	Število robnih točk [*B*]	Ploščina [*S*] v enot. kvadratih
0	3	
0	4	
0	5	
0	6	
0	7	
…	…	…

[Preglednica 9] *Pickov izrek v večkotnikih brez notranjih točk*

Naslednji večkotniki naj vsebujejo po eno notranjo točko. Zapiši ploščino v preglednico.

Število notranjih točk [*I*]	Število robnih točk [*B*]	Ploščina [*S*] v enot. kvadratih
1	4	
1	5	
1	6	
1	7	
1	8	
…	…	…

[Preglednica 10] *Pickov izrek v večkotnikih z eno notranjo točko*

Naslednji večkotniki naj vsebujejo natančno dve točki v notranjosti. Poišči ploščino in jo zapiši v tabelo.

Število notranjih točk [I]	Število robnih točk [B]	Ploščina [S] v enot. kvadratih
2	6	
2	7	
2	8	
2	9	
2	10	
…	…	…

[Preglednica 11] Pickov izrek v večkotnikih z dvema notranjima točkama

Zapiši pravilo, ki si ga odkril.
Pravilo povezuje:

- ploščino večkotnika … S
- število notranjih točk … I
- število robnih točk … B

6 Znani matematični problemi iz preteklosti

Grafi

Graf je diagram, ki ga sestavljajo točke, imenovane tudi vozlišča. Točke so povezane s črtami, ki jih poimenujemo povezave grafa.

Kot prvi primer vzamemo nalogo napeljav.

Povezati želimo tri hiše s tremi napeljavami: plinovodom, vodovodom in električno napeljavo. Zaradi varnosti zahtevamo, da se napeljave ne smejo križati. Ali lahko naredimo vse povezave?

Kaj pa če bi nalogo predstavili z grafom? Poznamo točke grafa in vemo, kateri pari

[Slika 10] Tri hiše s tremi napeljavami

točk so povezani s povezavami. Narišimo povezave.

Raziskovalčev problem

Raziskovalec bi rad pregledal vse ceste med številnimi mesti.

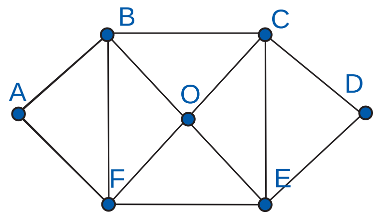
Ali lahko najde tak obhod, da bo vsako cesto prehodil natanko enkrat? (Eulerjev obhod)

Popotnikov problem

Popotnik bi rad obiskal določena mesta.

Ali lahko najde tak obhod, da bo obiskal vsako mesto natanko enkrat? (Hamiltonov cikel)

Zapiši oba obhoda.

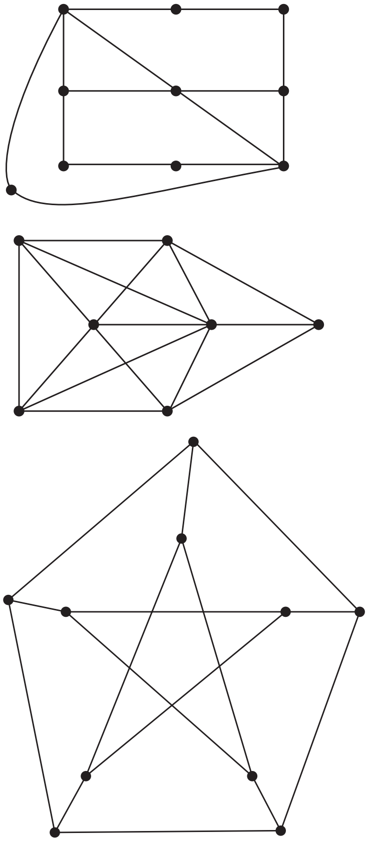


[Slika 11] Popotnikov problem

Barvanje grafov

Točkam grafa dodelimo barve, tako da sosednje točke dobijo različne barve. Določimo lahko najmanjše število barv, s katerimi lahko to storimo (kromatično število).

Z najmanj koliko barvami lahko obarvamo grafe po točkah?



[Slika 12] *Barvanje grafov*

Problem štirih barv

Pred približno sto leti je neki ravnatelj dal svojim učencem naslednjo nalogo.

Dokaži, da lahko vsak zemljevid pobarvamo s štirimi barvami tako, da so sosednje države pobarvane različno.

Z najmanj koliko barvami lahko pobarvamo zemljevide?

[Slika 13] *Barvanje zemljevidov*

Nariši risbo, za barvanje katere potrebujemo:

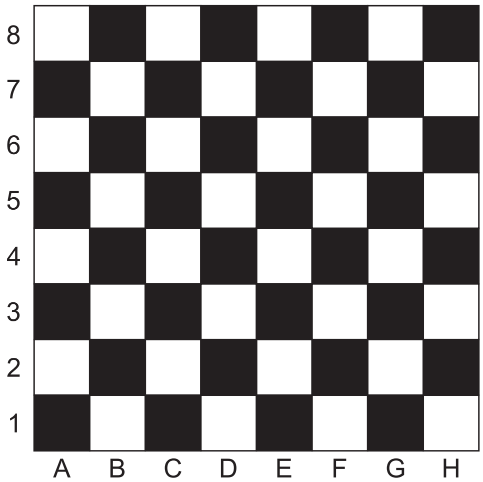
a) samo dve barvi,
b) vsaj tri barve,
c) vsaj štiri barve.

Problem osmih dam

To je problem šahovskega tipa.

Postavimo osem dam na šahovnici 8X8 tako, da druga druge ne napadajo. Pri tem seveda veljajo običajna pravila gibanja dame. Barva je pri tej igri nepomembna. Problem osmih dam lahko torej posplošimo: dve dami ne moreta biti hkrati v isti vrstici, istem stolpcu ali diagonali.

Poišči čim več rešitev:



[Slika 14] *Šahovnica, problem osmih dam*

S tem problemom so se ukvarjali številni matematiki, med drugimi tudi Gauss, Polya in Lucas. Problem je prvi predstavil nemški šahist Max Bezzel leta 1848 v časopisu Berliner Schachzeitung. Vseh 92 rešitev je prvi našel Franz Nauck.

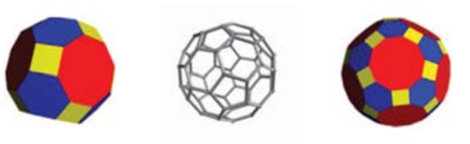
7 Eulerjeva poliedrska formula

Povezava med številom oglišč, robov in ploskev poliedrov je zagotovo ena izmed pomembnejših lastnosti teles. Matematiki so jo odkrili šele v 17. oz. 18. stoletju. Presenetljivo, če vemo, da je bila že v starogrški matematiki študiju poliedrov namenjena ena izmed osrednjih vlog in da je bilo že takrat s tega področja na voljo precej znanja.

Za poljuben enostaven polieder razišči lastnost, ki povezuje:
- p – število oglišč,
- r – število ploskev in
- q – število robov poliedra.

Enostaven polieder je vsak tisti, ki bi ga bilo mogoče, če bi bil primerno prožen, z raztegovanjem preoblikovati oz. napihniti v kroglo, ne da bi se pri tem na kateremkoli mestu pretrgal. Torej zagotovo niso enostavni poliedri tisti, ki imajo, denimo kakšno »luknjo«, ali pa so sestavljeni iz dveh ali več manjših poliedrov, ki se stikajo zgolj vzdolž enega samega robu.

Preveri Eulerjevo formulo za dana telesa.



[Slika 15] Različna geometrijska telesa

ime in slika	mnogokotnik ploskve	število ploskev	število robov	število oglišč	št. ploskev v vsakem oglišču
tetraeder 	trikotnik				
kocka 	kvadrat				
oktaeder 	trikotnik				
dodekaeder 	petkotnik				
ikozaeder 	trikotnik				

[Preglednica 12] Raziščimo Eulerjevo poliedrsko formulo

Število ploskev r	Število robov q	Število oglišč p

[Preglednica 13] Preverimo Eulerjevo poliedrsko formulo za dana telesa

γ Mnenja udeležencev

»Raziskovanje mi je bilo všeč, ker je poteklo v sproščenem vzdušju. Zahtevnost nalog je bila kar velika, veliko mi je pomenilo, da sem rešitev naloge lahko predstavil ostalim. Učiteljica nam je pri majhnih »hakeljčkih« namignila. Tak način dela bi bil dober tudi v šoli, saj smo se veliko več naučili kot bi se sicer. Zelo mi je bil všeč Pickov izrek in njegova uporabnost. Res sem se lepo počutil.«

»Na taboru sem se prvič dobro počutil med vrstniki, čeprav nismo bili vsi enako stari. Bila je dobra kombinacija matematike in športa. Prav škoda, da je tabor potekal samo en teden. Naj novi minister v naše šole uvede tak način dela. En mesec matematike, en mesec slovenščine, en mesec zgodovine in zemljepisa ... en mesec izbirnih vsebin in še kak mesec počitnic.«

»Čez teden sem se pri raziskovalcih veliko naučila. Najbolj mi je bil všeč Pickov izrek in poliedrska števila, pa tudi druga zanimiva števila. Način dela mi je bil všeč. Učiteljica je bila prijazna in nas je znala spodbuditi k delu. Sploh ne vem, kako je lahko pet ali šest ur matematike na dan tako hitro minilo. Všeč mi je bilo poročanje, čeprav sem imela prvič malo treme. Če bo naslednje leto spet tak tabor, bi se ga rada udeležila, čeprav bom že v 1. letniku srednje šole.«

»Če primerjam to z rednim poukom, ni primerjave. Imeli smo se krasno, veliko novega smo spoznali. Naloge so bile nekatere prav res težke, pa smo jih vseeno rešili. Pomagali smo drug drugemu. Najbolj mi je bil všeč Pickov izrek in dokazovanje Eulerjeve formule. Še bi šel na tak tabor.«

δ Viri in literatura:

1. Kmetič, S., L. Frobisher (1996), *Izzivi za mlade matematike*, Založba Obzorja.
2. Kmetič, S… (1996), *Prispevki k poučevanju matematike*, Založba Rotis.
3. Strnad, M., … (2004), *Presečišče 7, 8, 9*, Ljubljana, Državna založba Slovenije
4. Strnad, M., … (2004), *Vodnik po Presečišču 7 in 8*, Ljubljana, Državna založba Slovenije.
5. Cofman, J. (2001), Kaj naj rešujemo 1. del, DMFA.
6. Cofman, J. (2001), Kaj naj rešujemo 2. del, DMFA.
7. Pečovnik, M. A. Slikovne in geometrijske ponazoritve matematičnih trditev, v: *Matematika v šoli*, letnik 11, str. 100-106.
8. Štembergar, M. Diplomska naloga, Pedagoška fakulteta Ljubljana, 2004.
9. Hodnik, T., Felda, D., Vasle, H., Jeromen, V. (2006), *Matematični izzivi za prvo triletje*, Ljubljana: Državna založba Slovenije.
10. Felda, D., Arnuš, O., Jakob, M., Domajnko, V. (2005), *Matematična delavnica 7*, Ljubljana: Državna založba Slovenije.