Directe
Deduction der Begriffe
der algebraischen
und arithmetischen Grundoperationen
aus dem Grössen- und Zahlenbegriffe.

Von

Josef Finger,

Professor an der Staats-Oberrealschule in Laibach.

Laibach 1873.

Druck und Verlag von Ign. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

Directe Deduction der Begriffe der algebraischen und arithmetischen Grundoperationen

aus dem Grössen- und Zahlenbegriffe.

Von

Josef Finger,

Professor an der Staats-Oberrealschule in Laibach.

Laibach 1873.

Druck und Verlag von Ign. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

Vorwort.

Die Begriffsbestimmungen der Grundrechnungsoperationen, die in allen unseren mathematischen Lehrbüchern Eingang gefunden haben, leiden an manchen nicht unerheblichen Mängeln. Ich will dies beispielshalber an der Definition des Multiplicirens zeigen. Bekanntlich gibt es im allgemeinen 2 Wege, von denen bald der eine, bald der andere eingeschlagen wird. Entweder man sagt: „Multipliciren heisst aus dem Multiplicand eine Zahl so entstehen lassen, wie der Multiplicator aus der Einheit entstanden ist“; oder man definirt zuerst das Multipliciren mit einer ganzen Zahl als wiederholtes Addiren, stellt dann eine neue Definition für das Multipliciren mit einem Bruche auf, und sieht sich dann, wenn man überhaupt wissenschaftliche Vollständigkeit erstrebt, genöthigt, noch eine dritte Definition für das Multipliciren mit einer irrationalen Zahl aufzustellen. Im ersteren Falle leidet die Definition zunächst, wie mir wohl jeder zugeben wird, an dem Fehler der Unbestimmtheit, denn gar manche Zahlen können aus der Einheit auf mannigfache Art entstehend gedacht werden, und wendet man diese verschiedenen Entstehungsarten auf den Multiplicand an, so gelangt man auch zu verschiedenen Resultaten. Zweitens trägt diese Definition entschieden das Gepräge des Gekünstelten, Unnatürlichen, Zufälligen an sich; wie ein Zauber erscheint sie plötzlich vor dem staunenden Blicke des wissbegierigen Jüngers der mathematischen Wissenschaft, der den mystischen Grund ihrer Existenz und ihren nach Art des delphischen Orakelspruches vieldeutigen Sinn nicht zu begreifen vermag und mit gläubig frommer Scheu diese geheimnissvolle Zauberformel nachsagen lernt. Meiner Ansicht nach muss sich jeder Satz der Mathematik, umsomehr ein solcher, der eines der Fundamente ist, auf die sich das ganze Lehrgebäude stützt, auf eine natürliche, ungezwungene Weise mit Nothwendigkeit aus dem inneren Wesen der beiden mathematischen Grundbegriffe, nämlich des Grössen- und Zahlenbegriffes ergeben, sonst hat er keinen Grund der Berechtigung für sich.

Der zweite obangedeutete Weg dagegen hat, da er von drei Definitionen ausgeht und man genöthigt ist, die ganze Reihe der Lehrsätze über das Product zunächst für ganze Multiplicatoren auf Grund der ersten, dann dieselbe Reihe für gebrochene auf Grund der zweiten, schliesslich für irrationale Multiplicatoren auf Grund der dritten Definition nachzuweisen, abgesehen von den anderen Fehlern, zum mindesten den Fehler an sich, dass er entschieden zu umständlich, zu weit ist.

Ein weiterer zu rügender Mangel ist der, dass man in den meisten Lehrbüchern die Rechnungsoperationen mit Grössen von den Zahlenoperationen entweder gar nicht oder nicht hinreichend unterscheidet, zumeist nur die letzteren behandelt und infolge dessen in dem Schüler bei dem Studium der angewandten mathematischen Disciplinen, wo er mit Grössen zu rechnen genöthigt ist, eine heillose Begriffsverwirrung erzeugt, wie ich dies in besonderem Masse als Lehrer der Physik zu bemerken leider nur zu oft Gelegenheit hatte.

Zum Schlusse will ich noch der allen Fachmännern wohl bekannten, eigenthümlichen, unsicheren Rolle Erwähnung thun, die „das Verhältniss“ in den meisten unserer Lehrbücher spielen muss, indem man die Lehre von demselben in keinen Zusammenhang mit dem ganzen System zu bringen vermag. Dieser Uebelstand hat seinen Grund gleichfalls in einer mangelhaften Erklärung der Grundoperationen.

Ich will nun in dieser Abhandlung bestrebt sein, zu zeigen, wie man diesen Uebelständen unserer Lehrbücher etwa möglichst begegnen könnte. Zugleich soll aber diese Abhandlung einen zweiten mit dem letzteren eng verknüpften Zweck verfolgen. Die Einleitung in die Algebra ist in unseren Lehrbüchern, wie mir wohl die meisten Fachcollegen zugeben dürften, derart, dass sie weder den Schüler, noch den Lehrer befriedigt. Der Grund hievon liegt lediglich in der Menge schwülstiger, vieldeutiger Erklärungen, die dem Schüler ganz unverständlich sind, und ich möchte fast sagen, oft auch dem Verfasser selbst nicht deutlich sind. Das Odiose, das für viele Lehrer die Einleitung in die Algebra nach ihrem eigenen Geständnisse hat, und die Hast, mit welcher sie über diese Achillesferse der meisten Lehrbücher hinwegzukommen suchen, dürfte darin eine natürliche Erklärung finden.

Gerade die Einleitung darf sich zwar der wissenschaftlichen Gründlichkeit nicht entäussern, soll aber auch nicht dem Schüler, um ihm gleich anfangs nicht die Lust für den Gegenstand zu benehmen, unverständlich bleiben und soll ihm durch Anleitung zum selbständigen Denken Vergnügen gewähren. Diese Abhandlung mag nun neben ihrem ersten Zwecke als Versuch einer solchen Einleitung gelten und als solcher auch beurtheilt werden.

A. Grösse. Zahl.

§ 1. Es gibt erfahrungsmässig Gegenstände der äusseren, wie auch der inneren Wahrnehmung, die sich in Gruppen zusammenfassen lassen, deren jede durch folgende Eigenschaften charakterisirt ist:

1. Sind a und a' irgend beliebige, doch bestimmte Gegenstände derselben Gruppe, so findet zwischen denselben sicher eines, aber auch nur Eines von folgenden Verhältnissen statt: Entweder α) es kann a in einer gewissen für alle Gegenstände dieser Gruppe massgebenden Beziehung — in der Beziehung A — durch a' vollkommen ersetzt werden, und umgekehrt, ohne dass dann durch diese Substituirung eine Verschiedenheit in der Beziehung A sich ergibt — in diesem Falle heissen a und a' in der Beziehung A, *gleich* und das Stattfinden dieses Umstandes wird durch das Schriftzeichen $a = b$ ausgedrückt, welcher letztere Ausdruck der Gleichheit den Namen „Gleichung" führt — oder β) einer, aber auch nur Einer der Gegenstände a und a', etwa a, ist in der besagten Beziehung A ersetzbar durch eine in bestimmter, gleichfalls für alle Gegenstände derselben Gruppe massgebender Art und Weise — in der Art B — vorgenommene Verbindung des anderen Gegenstandes a' mit einem oder mehreren anderen Gegenständen a'', a''' u. s. w. derselben Gruppe — in diesem Falle heisst a das Ganze, und die in die Verbindung eingehenden Gegenstände a', a'', a''' etc. heissen „Theile des ersteren" oder „Theile, aus denen a besteht". Statt zu sagen: „a sei das Ganze, b aber ein Theil desselben", bedient man sich auch eines der Ausdrücke „a ist grösser als b", „b ist kleiner als a" und deutet dies in der Schrift durch eines der äquivalenten Zeichen: $a > b$, $b < a$ an.

2. Die Ordnung, in welcher im letztbesprochenen Falle die Theile a', a'', a''' etc. verbunden werden, nimmt auf die Ersetzbarkeit des Gegenstandes a durch die so erhaltene Verbindung keinen Einfluss, so dass man diese Ordnung, ohne der Ersetzbarkeit „in der Beziehung A" den mindesten Eintrag zu thun, beliebig ändern kann.

3. Ist ein Gegenstand a grösser, als ein anderer Gegenstand a' derselben Gruppe, so kann man durch die „in der Art B" vorgenommene Verbindung mehrerer dem a' gleichen Gegenstände endlich einen Gegenstand erhalten, der grösser als a ist.

§ 2. Gegenstände, denen die im § 1 unter 1, 2, 3 angeführten Eigenschaften zukommen, heissen überhaupt **Grössen**.

Alle Grössen derselben Gruppe bilden eine „Grössenart" und heissen unter einander „gleichartig" (nämlich gleichartig in der für alle Grössen dieser Gruppe massgebenden Beziehung A).

Theil und Ganzes sind daher stets gleichartige Grössen.

§ 3. Bei der Einführung einer Grössenart muss vor allem sowohl die früher durch A angedeutete Beziehung, in welcher die Ersetzbarkeit stattfinden soll, als auch die durch B angedeutete Art der Verbindung genau bestimmt werden, da diese beiden Umstände für die Deutung der beiden Grundbegriffe der Grössenlehre, des Begriffes der Gleichheit und des Theils, von wesentlicher Bedeutuug sind. Der Begriff der Gleichheit schliesst wohl die Ersetzbarkeit in der Beziehung A in sich, keineswegs aber involvirt derselbe die Ersetzbarkeit in einer anderen Beziehung.

Ein Beispiel, etwa aus der Physik, soll das Gesagte klar machen.

„Kräfte" als Ursachen der Aenderung des Bewegungszustandes eines Körpers können als Grössen behandelt werden, und zwar bilden sie eine Grössenart, denn es kommen ihnen die im § 1 bedungenen Eigenschaften zu. Es können nämlich entweder α) zwei Kräfte, z. B. eine Schwerkraft Q und eine elektrische Kraft E, wenn sie einzeln auf denselben, in demselben Zustande befindlichen Körper einwirken, in gleichen Zeiten dieselben Bewegungszustände (Beschleunigung, Geschwindigkeit etc.) hervorbringen, in welchem Falle sie also **bezüglich ihrer dynamischen Wirkung** — dies ist die in früherem mit A bezeichnete Beziehung — wechselseitig ersetzbar und daher gleich sind ($Q = E$), oder β) es kann die dynamische Wirkung einer Kraft, etwa der Schwerkraft Q, hervorgebracht werden durch mehrere andere etwa elektrische Kräfte, E, E', E'', welche alle **auf denselben Angriffspunkt desselben Körpers nach derselben Richtung gleichzeitig** — dies ist die im früheren durch B angedeutete Art der Verbindung — einwirken, in welch letzterem Falle die elektrischen Kräfte E, E', E'' nach § 1 Theile der Schwerkraft Q sind. Dass auch die im § 1 unter 2 und 3 angeführten Eigenschaften bei Kräften stattfinden, ist klar. Die in diesem Beispiele unter α vom Standpunkte der Grössenlehre als gleich bezeichneten Kräfte, nämlich die Schwerkraft Q und die elektrische Kraft E, sind wohl ersetzbar bezüglich ihrer dynamischen Wirkung, aber bekanntlich nicht bezüglich ihrer anderen Wirkungen.

So bilden auch Linien, Flächen, Räume, Zeiten, Winkel, elektrische Leitungswiderstände, Stromintensitäten, Lichtstärken u. s. w. je eine Grössenart.

§ 4. Sind a und a' beliebige Grössen derselben Art, so besteht nach § 1 zwischen denselben nothwendigerweise eine, aber auch nur Eine von folgenden 3 Beziehungen: $a = a'$, $a \rhd a'$, $a \lhd a'$.

Die beiden letzteren Beziehungen, denen blos der Theilbegriff zur Grundlage dient, sind jedoch noch zu unbestimmt, so dass ihre Kenntniss allein nicht gestattet, aus der einen der Grössen a und a' die andere derselben erschliessen zu lassen. Doch muss es, da die beiden Grössen a und a' bestimmt sind, auch in diesen beiden Fällen eine vollkommen bestimmte Beziehung zwischen denselben geben. Zu derselben gelangt man, wenn man in diesen beiden Fällen bei der Vergleichung der Grössen a und a' neben dem Theilbegriffe auch noch den zweiten Grundbegriff der Grössenlehre, den der Gleichheit zur Anwendung bringt.

§ 5. Diese blos aus den beiden Grundbegriffen der Grössenlehre abgeleitete Beziehung zwischen 2 gleichartigen Grössen, die derart bestimmt ist, dass durch dieselbe und die eine der Grössen die andere Grösse oder eine der letzteren gleiche mitbestimmt ist, heisst „Zahl" überhaupt. Zahl ist daher ein als Resultat einer geistigen Thätigkeit, nämlich der vom denkenden Subjecte vorgenommenen Vergleichung einer Grösse a mit einer gleichartigen Grösse a', im Geiste sich bildender blosser Begriff. Dieser Vergleichung muss immer eine der beiden Grössen etwa a' zu Grunde gelegt werden, und zwar werden meist alle Grössen derselben Art mit einer sich stets gleichbleibenden Grösse a' derselben Art verglichen. Diese Grösse führt den Namen „Einheit" oder „Masseinheit" der besagten Grössenart. Den bestimmten Begriff der Beziehung der Grösse a zur Masseinheit a' auf Grund des blossen Gleichheits- und Theilbegriffes bestimmen (s. § 6), heisst „die Grösse a durch die Einheit a' messen". Die durch das Messen sich ergebende Zahl heisst auch im besonderen „Masszahl der Grösse a bezogen auf die Einheit a'".

§ 6. Bei der besagten auf Grund des Gleichheits- und Theilbegriffes durchgeführten Vergleichung der zu messenden Grösse a mit der Einheit a' muss sich offenbar einer von folgenden Fällen ergeben:

a) Es ist die Grösse a der Einheit a' gleich. In diesem Falle wird die Masszahl der Grösse a mit 1 bezeichnet.

b) Es kann a aus Theilen, die durchwegs der Einheit a' gleich sind, bestehend gedacht werden. Die Masszahl wird dann durch eines der bekannten Zeichen 2, 3, 4, 5 u. s. w. bezeichnet, wo der Uebergang von einem dieser Zeichen auf das in der Reihe folgende das Eingehen eines weiteren dem a' gleichen Theiles in die dem a gleiche Verbindung andeutet. Im Falle *a)* und *b)* heisst die Masszahl eine „ganze" Zahl.

Erklärung α). Kann man sich eine Grösse a aus lauter einer zweiten Grösse a' gleichen Theilen bestehend denken, so nennt man die Grösse a' ein „Mass“ oder einen „aliquoten Theil“ der Grösse a, letztere dagegen ein „Vielfaches“ der ersteren.

Erklärung β). Besteht eine Grösse a aus mehreren Theilen, so führt jene ganze Zahl, welche die Masszahl der ersteren Grösse wäre, wenn die letzteren Theile durchwegs unter einander gleich wären und man einen dieser Theile zur Einheit nehmen würde, den Namen: Anzahl der Theile der Grösse a.

c) Es besteht umgekehrt die Einheit a' aus lauter der Grösse a gleichen Theilen, so dass nach der Erklärung α) a ein aliquoter Theil der Einheit a' ist. Ist in diesem Falle die Anzahl dieser Theile, die nach Erklärung β) eine ganze Zahl ist, die Zahl n, so wird die Masszahl der Grösse a im Falle c) durch $\frac{1}{n}$ bezeichnet. Die Grösse a heisst dann auch „der $n$te Theil“ der Grösse a'.

d) Sowohl die Grösse a, als die Einheit a' kann man sich aus lauter unter sich gleichen Theilen bestehend denken, so zwar, dass auch die Theile der Grösse a den Theilen der Einheit a' gleich sind. Ist die Anzahl der so bestimmten Theile der Grösse a die ganze Zahl m, die Anzahl der Theile der Einheit die ganze Zahl n, so wird die Masszahl der Grösse a — bezogen auf die Einheit a' — durch das Zeichen $\frac{m}{n}$ bezeichnet. Im Falle d) und c) heisst die Masszahl $\frac{m}{n}$ resp. $\frac{1}{n}$ eine „gebrochene Zahl“ oder ein „Bruch“; die Zahl m resp. 1, also im allgemeinen die Anzahl der Theile der zu messenden Grösse heisst „Zähler“, die Anzahl n der Theile der Einheit heisst „Nenner“ des Bruches. Es bedarf wohl keines weiteren Nachweises, dass, wenn in den Fällen c) und d) a die Einheit wäre, die Masszahl der Grösse a' die Zahl n resp. $\frac{n}{m}$ sein müsste.

Findet zwischen 2 Grössen a und a' eine von den in a) — d) erörterten Beziehungen statt, so heissen die Grössen a und a' commensurabel und die zwischen denselben stattfindende Beziehung, die durch eine ganze oder eine gebrochene Zahl ausgedrückt ist, heisst „rational“. Ganze und gebrochene Zahlen heissen daher „rationale“ Zahlen.

e) Findet keiner der bisher erörterten Fälle statt, so heisst die Masszahl eine „irrationale“ Zahl und die Grössen a und a' heissen incommensurabel.

§ 7. Sind durch r und r' die Masszahlen der beliebigen gleichartigen Grössen a resp. a' — bezogen auf dieselbe Masseinheit — bezeichnet, so heissen die Zahlen r und r' „gleich“, wenn die Grössen a und a' gleich sind, was auch hier durch das Schriftzeichen $r = r'$ angedeutet wird; ist dagegen die Grösse a grösser, resp. kleiner als die Grösse a', so heisst auch die Zahl r „grösser“, resp. „kleiner“ als die Zahl r', und das Stattfinden dieser Bedingung findet auch hier seinen Ausdruck durch das Zeichen $r \rhd r'$, resp. $r \lhd r'$. Die Zahlen r und r' heissen commensurabel, wenn die Grössen a und a' selbst commensurabel sind, im entgegengesetzten Falle heissen die Zahlen r und r' incommensurabel.

Es ist nach dem Gesagten einleuchtend, dass zwei als gleich bezeichnete Zahlen strenggenommen eine und dieselbe Zahl, nur vielleicht mit verschiedener Bezeichnung sind.

Als unmittelbare Folgerung des in diesem Paragraph Gesagten und des § 4 ergibt sich auch, dass zwischen 2 beliebigen Zahlen r und r' nothwendig eine, aber auch nur Eine von folgenden 3 Beziehungen stattfinden müsse: $r = r'$, $r \rhd r'$, $r \lhd r'$.

§ 8. Das Verfahren, mittelst dessen man aus gewissen gegebenen Grössen oder Zahlen andere auf eine gewisse Art mit denselben innig zusammenhängende Grössen oder Zahlen bestimmt, heisst eine „Rechnungsoperation“, und eine Rechnungsoperation zur Anwendung bringen, heisst „rechnen“. Die Rechnungsoperation heisst eine „algebraische“, wenn die gegebenen Elemente durchwegs oder zum Theil Grössen sind, eine „arithmetische“, wenn dieselben durchwegs Zahlen sind. Die unmittelbar aus dem Grössen- und Zahlenbegriffe sich mit Nothwendigkeit ergebenden Rechnungsoperationen heissen „Grundoperationen“.

B. Algebraische Grundoperationen.

§ 9. Die Grundlage des Grössenbegriffes ist nach § 1 der Begriff des Theiles. Es ergeben sich daher unmittelbar **aus dem Grössenbegriffe** folgende Grundoperationen:

§ 10. I. Bestimmung einer Grösse a aus den gegebenen Theilen derselben a', a''. Diese Rechnungsoperation heisst „Addition“ der gegebenen Grössen a' a'', die gegebenen Theile führen den Namen „Summanden oder Addenden“, das gesuchte Ganze a heisst „Summe“. Die Summe wird auch durch die mittelst des Zeichens $+$ verbundenen Summanden ausgedrückt, so dass das Zeichen $a' + a''$ gleichfalls die Grösse a darstellt, somit die Gleichung $a = a' + a''$ stattfindet.

§ 11. II. Bestimmung eines Theiles a' einer Grösse a, wenn die letztere und der andere Theil derselben a'' gegeben ist. Diese Operation heisst die „Subtraction“ der Grösse a'' von der Grösse a; das gegebene Ganze a heisst „Minuend“, der gegebene Theil a'' „Subtrahend“, der gesuchte zweite Theil a' „Differenz, Unterschied oder Rest“. Zur Bezeichnung der Differenz dient auch das Zeichen $a - a''$, so dass die Gleichung $a' = a - a''$ statt hat.

§ 12. Als unmittelbare Folgerung der beiden letzten Paragraphe ergeben sich die beiden Lehrsätze: Jeder Summand einer zweitheiligen Summe ist der Differenz aus der Summe und dem zweiten Summanden gleich; der Minuend ist die Summe aus der Differenz und dem Subtrahend.

§ 13. Da es nach § 1 völlig gleichgiltig ist, in welcher Ordnung 2 Theile zu einem Ganzen vereinigt werden, so kann sich die Rechnungsoperation, durch welche der zweite Theil a'' bestimmt wird, wenn ausser der Grösse a der erste Theil a' gegeben ist, von der des § 11 in ihrer Wesenheit nicht im mindesten unterscheiden, so dass auch $a'' = a - a'$ ist.

§ 14. Der Begriff der Zahl r setzt nach § 5 eine Grösse a, deren Masszahl die erstere Zahl ist, und eine der Grösse a gleichartige Masseinheit a' voraus. **Aus dem Zahlenbegriffe** ergeben sich daher unmittelbar folgende weitere algebraische Grundoperationen:

§ 15. III. Bestimmung der gemessenen Grösse a, wenn die Masseinheit a' und die Masszahl r der zu suchenden Grösse a — bezogen auf die letztere Einheit — bekannt sind. Diese Rechnungsoperation führt den Namen „Multiplication der Grösse a' mit der Zahl r“, die gegebene Einheit heisst „Multiplicand“, die gegebene Masszahl r „Multiplicator“, die gesuchte Grösse a heisst „Product“. Zur Bezeichnung des Productes mittelst der gegebenen Elemente dient eines der Zeichen: $a' . r$, $a' \times r$, $a'r$, weshalb $a = a' . r = a' \times r = a'r$ ist. Multiplicand und Multiplicator führen den gemeinschaftlichen Namen „Factoren“.

§ 16. IV. Bestimmung der Masseinheit a', wenn die gemessene Grösse a und die Masszahl r der letzteren — bezogen auf die erstere als Einheit — bekannt sind. Diese Rechnungsoperation heisst die „Division der Grösse a durch die Zahl r“; die gegebene Grösse a heisst „Dividend“, die gegebene Masszahl r „Divisor“, die gesuchte Einheit a' „Quotient“. Will man den Quotienten a' mittelst des gegebenen Dividends a und Divisors r bezeichnen, so gebraucht man das Zeichen $a:r$, so dass die Gleichung besteht: $a' = a:r$.

§ 17. Aus den beiden letzteren Paragraphen lassen sich unmittelbar folgende Lehrsätze folgern: Der Dividend ist das Product aus dem Quotienten und dem Divisor; der Multiplicand ist dem Quotienten aus dem Producte und dem Multiplicator gleich.

§ 18. V. Bestimmung der Masszahl r, wenn die Grösse a und die Masseinheit a' gegeben sind. Diese Operation, die in früherem „Messen der Grösse a durch die Einheit a'“ genannt wurde, führt auch den Namen „Bestimmung des Verhältnisses der Grösse a zur Grösse a'“; die zu messende Grösse a heisst dann „Vorderglied“, die Masseinheit a' das „Hinterglied“ oder „Nachglied“, die gesuchte Masszahl r heisst das „Verhältniss“ oder der

„Verhältnissexponent". Zur Bezeichnung des letzteren durch die gegebenen Grössen bedient man sich gewöhnlich des Zeichens $a:a'$. Um jedoch das Verhältniss vom Quotienten auch in der Schrift zu unterscheiden, was bei Grössenoperationen unumgänglich nothwendig ist, soll im Folgenden für das Verhältniss das Zeichen $\widehat{a:a'}$ zur Anwendung kommen, so dass $\widehat{a:a'} = r$ ist.

§ 19. Als Corrolaria der §§ 15, 16, 18 ergeben sich unmittelbar die Sätze: Der Multiplicator ist das Verhältniss des Productes zum Multiplicand, der Divisor ist das Verhältniss des Dividends zum Quotienten, das Vorderglied eines Verhältnisses ist das Product aus dem Nachgliede und dem Exponenten, das Nachglied eines Verhältnisses ist der Quotient aus dem Vordergliede und dem Exponenten.

§ 20. Aus dieser Durchführung ist zu ersehen, dass sich aus dem Grössen- und Zahlenbegriffe unmittelbar nicht mehr und nicht weniger als 5 von einander durchwegs verschiedene algebraische Grundoperationen ergeben. Dem Grössenverhältnisse ist auch sein ebenbürtiger Platz unter den Grundoperationen völlig gesichert.

C. Arithmetische Grundoperationen.

§ 21. Die arithmetischen Grundoperationen ergeben sich einzeln unmittelbar auf natürlichem Wege aus den den gleichen Namen führenden algebraischen, wenn man die bei der Begriffsbestimmung der letzteren in Betrachtung gezogenen Grössen a, a', a'' durch ihre bezüglichen Masszahlen p, p', p'' ersetzt denkt, den einfachsten Fall vorausgesetzt, dass alle diese Grössen a, a', a'' durch dieselbe Einheit α ausgemessen worden sind.

Die Art der schriftlichen Bezeichnung des Resultates einer jeden Operation mittelst der gegebenen Elemente ist der bei der entsprechenden algebraischen Grundoperation angewendeten gleich, wie auch die gegebenen Elemente und das Resultat einer jeden einzelnen arithmetischen Grundoperation p, p', p'' denselben Namen führen wie das entsprechende Element resp. Resultat der gleichnamigen algebraischen, nämlich wie jene Grösse a, resp. a', resp. a'', der die zu benennende Zahl p, resp. p', resp. p'' als Masszahl entspricht. Aus dem eben Gesagten und den früheren Begriffen der algebraischen Grundoperationen ergeben sich daher folgende Begriffsbestimmungen für die 5 arithmetischen Grundoperationen:

§ 22. I. Gegebene Zahlen p', p'' addiren, heisst aus den gegebenen Masszahlen p', p'' der Theile a', a'' einer Grösse a die Masszahl p der letzteren bestimmen, vorausgesetzt, dass sich alle Masszahlen auf dieselbe Einheit α beziehen. Nach früher Gesagtem ist auch hier $p = p' + p''$.

§ 23. Die Masszahl einer beliebigen Grössensumme $a' + a''$ ist daher die Zahlensumme $p' + p''$, wenn p' und p'' die resp. Masszahlen der Grössensummanden sind und alle Masszahlen sich auf dieselbe Einheit beziehen.

§ 24. II. Aus der gegebenen Masszahl p einer Grösse a und der Masszahl p' ihres einen Theiles a' die Masszahl p'' ihres zweiten Theiles a'' bestimmen, — vorausgesetzt, dass sich alle Masszahlen) auf dieselbe Einheit α beziehen — heisst die Zahl p' (Subtrahend) von der Zahl p (Minuend) subtrahiren. Da der Rest p'' nach Früherem auch durch $p - p'$ bezeichnet wird, so ist $p'' = p - p'$.

§ 25. Die Masszahl einer beliebigen Grössendifferenz $a - a'$ ist daher die Zahlendifferenz $p - p'$, wenn der Zahlenminuend p die Masszahl des Grössenminuenden a und der Zahlensubtrahend p' die Masszahl des Grössensubtrahenden a' ist und alle Masszahlen sich auf dieselbe Einheit beziehen.

§ 26. Dass auch aus den im § 13 angeführten Gründen $p' = p - p''$ ist und dass die im § 12 ausgesprochenen Folgesätze auch für die arithmetischen Grundoperationen Giltigkeit haben, dürfte eines weiteren Nachweises nicht bedürfen.

§ 27. III. Aus § 15 und § 21 ergibt sich folgender Begriff der Zahlenmultiplication: Aus der Masszahl r einer Grösse a bezogen auf die Einheit a' und der Masszahl p' dieser letzteren Einheit a' — bezogen auf eine zweite Einheit α — die Masszahl p der ersteren Grösse a — bezogen auf die letztere Einheit α — bestimmen, heisst die Zahl p' (Multiplicand) mit der Zahl r (Multiplicator) multipliciren. Es gilt hier nach obigem die Gleichung: $p = p' \times r = p' . r = p'r$.

§ 28. Die Masszahl eines beliebigen Grössenproductes $a' . r$ ist daher das Zahlenproduct $p' . r$, wenn p' die Masszahl von a' ist und das Grössenproduct $a' . r$ durch dieselbe Einheit α ausgemessen wird, wie der Grössenmultiplicand a'.

§ 29. Aus dem Begriffe der arithmetischen Multiplication ergibt sich, dass diese nichts anderes als ein mittelbares Messen ist. Man hat eine Grösse a durch eine zweite α zu messen (die Masszahl p zu bestimmen). Dieses Ziel sucht man auf einem indirecten Wege mittelst einer dritten Grösse a' zu erreichen. Man misst nämlich die zu messende Grösse a zuerst durch diese dritte Grösse a' als Einheit (Multiplicator r) und dann diese Hilfsgrösse a' durch die gegebene zweite Grösse α (Multiplicand p'). Aus den beiden letzteren Resultaten der Messung das Resultat der directen Messung zu finden, heisst die ersteren Masszahlen multipliciren. Die arithmetische Multiplication ist also durch folgendes Schema ersichtlich.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, dashed] & & \alpha \\ & a' \arrow[ul, "r"] \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

Durch die Pfeile soll das Messen einer Grösse durch jene als Einheit, gegen welche die Spitze des Pfeiles gerichtet ist, angedeutet sein; die gefiederten Pfeile bedeuten, dass das Messen ausgeführt, also die Masszahl, welche beim Pfeile angesetzt ist, bekannt sei; der punktirte Pfeil deutet das durch die arithmetische Grundoperation erstrebte Messungsresultat an.

§ 30. IV. Nach § 16 und § 21 heisst eine Zahl p durch eine Zahl r dividiren: aus der Masszahl r einer Grösse a — bezogen auf eine Einheit a' — (dem Divisor) und der Masszahl p derselben Grösse a — bezogen auf eine zweite Einheit α — (Dividend) die Masszahl p' der ersteren Einheit a' bezogen auf die zweite Einheit α bestimmen, so dass $p' = p : r$ ist.

§ 31. Auch die Zahlendivision stellt ein indirectes Messen einer Grösse a' durch eine zweite α dar, nur wird hier die als Mittel angewendete dritte Hilfsgrösse a durch diese beiden Grössen ausgemessen, so dass das Schema der arithmetischen Division folgendes ist:

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[rr, dashed] & & \alpha \\
& a \arrow[ul, "r"] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

§ 32. Aus dem Begriffe der arithmetischen Division ergibt sich unmittelbar, dass die Masszahl eines beliebigen algebraischen Quotienten $a : r$ der Zahlenquotient $p : r$ sei, wenn p die Masszahl von a ist und Dividend und Quotient durch dieselbe Einheit ausgemessen sind.

§ 33. Dass die Folgerungen des § 17 auch hier giltig sind, ist einleuchtend.

§ 34. V. Aus den Entwicklungen des § 18 und § 21 folgt: Eine Zahl p zu einer zweiten Zahl p' ins Verhältniss setzen, heisst aus der Masszahl p einer Grösse a — bezogen auf die Einheit α — (Vorderglied) und aus der Masszahl p' einer zweiten Grösse a' — bezogen auf dieselbe Einheit α — (Nachglied) die Masszahl r der ersteren Grösse a bezogen auf die zweite Grösse a' als Einheit bestimmen, so dass $r = \overparen{p : p'}$ ist.

§ 35. Auch die Bestimmung des Zahlenverhältnisses bedeutet ein indirectes Messen einer Grösse a durch eine zweite a'; es wird auch hier eine dritte Hilfsgrösse α gewählt, nur werden beide gegebenen Grössen durch diese dritte als Einheit ausgemessen. Das Schema eines Zahlenverhältnisses ist daher:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "p"'] & & a' \arrow[dl, "p'"] \\
& \alpha &
\end{tikzcd}$$

§ 36. Eine Vergleichung der drei Schemata lässt die Verschiedenheit der Zahlenoperation deutlich hervortreten: Bei dem Schema der arithmetischen Multiplication ist der eine Pfeil gegen die Hilfsgrösse hin, der zweite von derselben weggerichtet, bei dem Schema der Zahlendivision sind beide Pfeile von der Hilfsgrösse weg-, bei dem des Zahlenverhältnisses beide zu der Hilfsgrösse hingerichtet.

§ 37. Eine unmittelbare Folgerung aus § 37 ist der wichtige Lehrsatz, dass das Verhältniss zweier beliebigen Grössen gleich ist dem Verhältnisse ihrer Masszahlen, wenn beide Grössen durch dieselbe Einheit ausgemessen werden.

§ 38. Dass die im § 19 ausgesprochenen Folgesätze auch für Zahlenoperationen volle Giltigkeit haben, liegt nach Früherem auf der Hand.

§ 39. Obwohl nach dieser Erklärung sich 5 arithmetische Grundoperationen ergeben, so folgt aus einem später in § 67 nachzuweisenden Lehrsatze, nämlich aus dem Lehrsatze: „2 Zahlen in jeder Ordnung multiplicirt, geben dasselbe Product", dass ein Zahlenverhältniss und ein Zahlenquotient identisch sind (sieh § 72), so dass sich die arithmetischen Grundoperationen auf die bekannten vier reduciren.

Aus den bisher erörterten Begriffen der Grundrechnungsoperationen lassen sich nun alle die bekannten Fundamentallehrsätze der Grössenlehre, auf die sich das ganze Lehrgebäude der Mathematik stützt, mit Leichtigkeit, ohne jedoch, wie es in unseren Lehrbüchern leider oft geschieht, der logischen Strenge Eintrag zu thun, für alle Arten von Grössen und sowohl für rationale, als irrationale Zahlen nachweisen, was im Folgenden geschehen soll.

D. Fundamentallehrsätze der Algebra und Arithmetik.

§ 40. Alle jene Lehrsätze, die sich unmittelbar, d. h. ohne Zuhilfenahme neuer Begriffe aus den bisher erörterten Grundbegriffen der Grösse, Zahl und deren Arten, sowie aus den Begriffen der algebraischen und arithmetischen Grundoperationen folgern lassen, sollen als „Fundamentallehrsätze" bezeichnet sein. Dieselben drücken im allgemeinen den Zusammenhang der Grundrechnungsoperationen aus, da sie meist lehren, wie sich gleiche Grössen oder Zahlen aus gewissen gegebenen, im allgemeinen beliebigen Grössen oder Zahlen auf verschiedenen Wegen, indem man nämlich die letzteren verschiedenen Grundoperationen oder denselben in verschiedener Ordnung unterzieht, ergeben.

Da viele der Fundamentallehrsätze sowol für Grössen als für Zahlen giltig sind, so seien künftighin der Kürze des Ausdruckes wegen Grössen sowol als Zahlen in der allgemeinen Bezeichnung „Werth“ subsumirt und ein beliebiger „Werth“ durch eines der Schriftzeichen w, w', w'', w_1, w_2, w_3 ausgedrückt, wofern nicht ausdrücklich im Texte hervorgehoben ist, dass eines oder mehrere der letzteren Zeichen blos Grössen oder blos Zahlen bezeichnen. Auch soll, wenn bei der Behandlung eines Lehrsatzes im allgemeinen von Werthen die Rede ist, stets angenommen sein, dass alle diese Werthe gleichartige Werthe, also durchwegs entweder gleichartige Grössen oder durchwegs Zahlen seien; ebenso ist, wo immer innerhalb der Grenzen eines Paragraphs von Masszahlen der einzelnen Grössen überhaupt die Rede ist, vorauszusetzen, dass der Messung der Grössen durchwegs dieselbe Einheit zu Grunde gelegt sei.

Als Zeichen beliebiger, unter einander gleichartiger Grössen sollen stets blos a, a', a'', als Zeichen beliebiger Zahlen blos p, p', p'', p_1, p_2, p_3 zur Anwendung kommen; irgend eine rationale Zahl soll stets durch r, eine irrationale durch i, ganze Zahlen durch m und n ausgedrückt sein.

Anmerk. Bedient man sich zur Bezeichnung der Resultate der Rechnungsoperationen der in den früheren Paragraphen erörterten Zeichen, nemlich der durch die Operationszeichen auf früher besagte Art verbundenen Elemente, und sind mit diesen Rechnungsresultaten abermals Rechnungsoperationen vorzunehmen, so wendet man überall, wo Missverständnisse leicht entstehen könnten, um denselben vorzubeugen — oft auch blos der grösseren Deutlichkeit halber —, Klammern an, innerhalb welcher man die Zeichen für die oben erwähnten Operationsresultate setzt.

§ 41. *Lehrsatz.* Eine jede der Beziehungen $p = p'$, $p \gtrdot p'$, $p \lessdot p'$ hat die analoge Beziehung zwischen jenen beiden Grössen zur Folge, deren Masszahlen — bezogen auf eine beliebige Einheit a — die ersteren Zahlen sind.

Beweis. Da zwischen den Zahlen p und p' (nach § 7, Absatz 3) nothwendiger Weise eine, aber auch nur Eine der drei Beziehungen $p = p'$, $p \gtrdot p'$, $p \lessdot p'$ stattfinden muss und ein Gleiches auch nach § 4 von den gleichartigen Grössen $a.p$ und $a.p'$ gilt, deren Masszahlen — bezogen auf die Einheit a — zufolge des in § 15 erörterten Begriffes des Grössenproductes die Zahlen p und p' sind, so lässt sich durch einen einfachen indirecten Schluss auf Grundlage der in § 7 ausgesprochenen Begriffsbestimmungen der Zahlengleichheit und -Ungleichheit, von welcher der in Rede stehende Lehrsatz die Umkehrung ist, sofort folgern, dass eine der Relationen $p = p'$, $p \gtrdot p'$, $p \lessdot p'$ die analoge der Beziehungen $a.p = a.p'$, $a.p \gtrdot a.p'$, $a.p \lessdot a.p'$ mit Nothwendigkeit nach sich ziehe.

§ 42. *Lehrsatz.* Sind die Zahlen p und p' commensurabel resp. incommensurabel, so ist $p = p'.r$ resp. $p = p'.i$ und umgekehrt.

Beweis. Eine einfache indirecte Schlussfolgerung aus den in § 7 aufgestellten contradictorischen Begriffen der Commensurabilität und Incommensurabilität der Zahlen lehrt, dass, wenn die Zahlen p und p' commensurabel resp. incommensurabel sind, auch die Grössen $a.p$ und $a.p'$, deren Masszahlen — bezogen auf die beliebig zu wählende Grösseneinheit a — die ersteren Zahlen sind, im ersten Falle commensurabel, im zweiten incommensurabel seien. Demnach muss $a.p$ — durch $a.p'$ als Einheit ausgemessen — zufolge der Entwickelungen des § 6 im ersteren Falle eine rationale Zahl r, im zweiten eine irrationale Zahl i zur Masszahl haben, somit nach § 15 $a.p = (a.p').r$ resp. $a.p = (a.p').i$ sein. Da nun gleiche Grössen — dieselbe Einheit a vorausgesetzt — auch gleiche Masszahlen haben, so ergibt sich mit Beachtung des Begriffes des Zahlenproductes aus § 28 aus den beiden letzten Gleichungen der Schluss, dass $p = p'.r$ resp. $p = p'.i$ sei.

Dass umgekehrt, wenn $p = p'.r$ resp. $p = p'.i$ ist, p und p' im ersteren Falle commensurabel, im zweiten incommensurabel seien, lässt sich, da Rationalität und Irrationalität von Zahlen nach § 6 und 7 gleichfalls contradictorische Begriffe sind, aus dem eben bewiesenen Lehrsatze ebenfalls durch einen indirecten Schluss mit Leichtigkeit folgern.

§ 43. *Lehrsatz.* Besteht eine der drei überhaupt möglichen Beziehungen der Gleichheit oder Ungleichheit zwischen den Resultaten von algebraischen Rechnungsoperationen, die mit beliebigen Grössen a', a'' ... ausgeführt werden, so besteht dieselbe Beziehung zwischen den Resultaten der völlig analogen arithmetischen mit den beliebigen Zahlen p', p'' ... vorgenommenen Operationen.

Beweis. Da die Grössen a', a'' ... beliebig sind, so können sie jedenfalls, was auch immer für eine gleichartige Grösse a bedeutet, die Werthe der Grössenproducte $a.p'$, $a.p''$ ..., deren Masszahlen (bezüglich a als Einheit) die beliebigen Zahlen p', p'' ... sind, annehmen. Es besteht demnach zufolge der obigen Annahme die besagte Beziehung der Gleichheit oder Ungleichheit zwischen den Resultaten der mit $a.p'$, $a.p''$ ... ausgeführten algebraischen Operationen. Da dann aber zufolge § 7 zwischen den Masszahlen dieser resultirenden Grössen — dieselbe Masseinheit a vorausgesetzt — dieselbe Beziehung der Gleichheit resp. Ungleichheit besteht und diese Masszahlen nach § 21 die Resultate der den obgesagten algebr. Operationen völlig analogen arithmetischen Operationen sind, wofern man überall die Grössen $a.p'$, $a.p''$ ... durch ihre Masszahlen p', p'' ... substituirt, so ist die Richtigkeit des Lehrsatzes evident.

§ 44. *Lehrsatz.* Werden gleiche Werthe denselben Rechnungsoperationen unterworfen, so sind die erhaltenen Operationsresultate einander gleich.

Beweis. Da zufolge der in § 1 gegebenen Erklärung des Begriffes der Gleichheit gleiche Grössen in jener allein in Rechnung gebrachten Beziehung A, in welcher überhaupt Grössen derselben Art mit einander verglichen werden, durch einander stets ersetzbar sind, da ferner gleiche Zahlen, weil sie zufolge ihres in § 7 erörterten Begriffes die Beziehungen gleicher, somit ersetzbarer Grössen zu derselben Einheit ausdrücken, auch durch einander ersetzbar sind, somit stets Gleichheit und Ersetzbarkeit denselben Begriff ausdrücken, so folgt daraus unmittelbar die Richtigkeit des Lehrsatzes. Ist daher z. B. $w' = w''$, $w_1 = w_2$ und $p' = p''$, so ist $w' + w_1 = w'' + w_2$, $w' - w_1 = w'' - w_2$, $w'.p' = w''.p''$, $w' : p' = w'' : p''$, $\widehat{w' : p'} = \widehat{w'' : p''}$ u. s. w.

§ 45. *Lehrsatz.* Die Summe ist stets grösser als ein beliebiger Summand derselben.

Beweis. Für die Grössensumme ist der Lehrsatz eine unmittelbare Folgerung aus den im § 10 und § 1 enthaltenen Begriffsbestimmungen und für die Zahlensumme folgt derselbe aus § 43.

§ 46. *Lehrsatz.* Ist ein Werth grösser als ein anderer, so lässt sich der erstere durch die Summe aus dem letzteren und irgend einem mit beiden gleichartigen Werthe ausdrücken.

Beweis. *a*) Für Grössen lässt sich der Lehrsatz wie früher direct aus § 1 und § 10 deduciren.

b) Für Zahlen: Ist etwa $p \vartriangleright p'$, so ist nach § 41, was auch immer für eine Grösse a bedeutet, $a.p \vartriangleright a.p'$, daher lässt sich (nach *a*) die Grösse $a.p$ als Summe von $a.p'$ und einem zweiten Theile darstellen, dessen Masszahl — bezogen auf a als Einheit — mit p'' bezeichnet sei; somit ist nach § 23 $p = p' + p''$.

§ 47. *Lehrsatz.* Summanden in beliebiger Ordnung addirt, geben dieselbe Summe.

Beweis. Der Lehrsatz ist für die Grössensumme eine directe Folgerung aus dem in § 1 unter 2 angeführten Merkmale des Grössenbegriffs und für die Zahlensumme aus § 43.

Anmerkung. Da sich die Verbindung von mehr als 2 Theilen zu einem Ganzen derart vornehmen lässt, dass man immer nach Hinzufügung irgend eines Theiles mit dem so erhaltenen Ganzen den neuen Theil verbindet, so ist $a + \ldots + a' + a'' = (a + \ldots + a') + a''$ und zufolge § 43 ist $p + \ldots + p' + p'' = (p + \ldots + p') + p''$.

§ 48. *Lehrsatz.** $w + (w' + w'' + \ldots) = w + w' + w'' \ldots$

Beweis. $w + (w' + w'' + \ldots) = (w' + w'' + \ldots) + w$ (§ 47) $= w' + w'' + \ldots + w$ (Anm. zu § 47) $= w + w' + w'' + \ldots$ (§ 47).

§ 49. *Lehrsatz.* Ist $w \vartriangleright w'$, so ist auch $w + w'' \vartriangleright w' + w''$ und umgekehrt.

Beweis. Es ist $w = w' + w_1$ (§ 46), somit ist $w + w'' = w' + w_1 + w''$ (§ 44) $= w' + w'' + w_1$ (§ 47) $= (w' + w'') + w_1$ (Anm. zu § 47) und daher ist zufolge § 45 $w + w'' \vartriangleright w' + w''$. Die Umkehrung ist durch einen indirecten Schluss auf Grundlage des eben Bewiesenen derart leicht nachzuweisen, dass der Nachweis hier füglich übergangen werden kann.

* Der Kürze halber sollen die Lehrsätze von nun an meist nur kurz mit Beachtung der in § 40 erörterten Bedeutung der Zeichen angedeutet und bei einer einfachen Folgerung aus einem früheren Lehrsatze dem gefolgerten Schlusssatze blos die innerhalb einer Klammer stehende Nummer jenes Paragraphes, in welchem der frühere Lehrsatz ausgesprochen ist, beigefügt werden.

§ 50. *Lehrsatz.* Ist $w \triangleright w'$ und $w' \triangleright w''$, so ist $w \triangleright w''$.

Beweis. Es ist $w = w' + w_1$ (§ 46) und $w' = w'' + w_2$ (§ 46), somit $w = (w'' + w_2) + w_1$ (§ 44) $= w'' + w_2 + w_1$ (Anm. zu § 47) und daher nach § 45 $w \triangleright w''$.

§ 51. *Lehrsatz.* Ist $w_1 \triangleright w'$ und $w_2 \triangleright w''$, so ist

$$w_1 + w_2 \triangleright w' + w''.$$

Beweis. $w_1 + w_2 \triangleright w' + w_2$ (§ 49) und $w' + w_2 \triangleright w' + w'$ (§ 49), somit nach § 50 $w_1 + w_2 \triangleright w' + w''$.

§ 52. *Lehrsatz.* $w(p + p' + p'' + \ldots) = w.p + w.p' + w.p'' + \ldots$

Beweis. *a*) Ist w eine Grösse, so stellt das algebr. Product $w.(p + p' + p'' + \ldots)$ nach § 15 jene Grösse vor, die durch w ausgemessen zur Masszahl $p + p' + p'' + \ldots$ hat, die somit zufolge des Begriffes einer Zahlensumme (s. § 22) aus Theilen besteht, deren Masszahlen — bezogen auf dieselbe Einheit w — einzeln die Zahlen p, p', p'', ... sind, welche Theile somit nach § 15 durch die Producte $w.p$, $w.p'$, $w.p''$, ... ausgedrückt sind. Es ist somit laut § 10

$$w.(p + p' + p'' + \ldots) = w.p + w.p' + w.p'' + \ldots$$

b) Für einen Zahlenmultiplicand folgt der Lehrsatz aus § 43.

§ 53. *Lehrsatz.* $w.1 = w$.

Beweis. Dieser Lehrsatz ergibt sich für w als Grösse unmittelbar aus dem in § 6 sub *a* erörterten Begriffe der Zahl 1, dann für w als Zahl aus § 43.

§ 54. *Lehrsatz.* $w.n = w + w + w + \ldots + w$, wofern die Anzahl der Summanden n ist.

Beweis für w als Grösse auf Grund des Begriffes einer ganzen Zahl (§ 6 sub *b*) und des Summenbegriffes, für w als Zahl auf Grund des § 43.

§ 55. *Lehrsatz.* $(w.\frac{1}{n}).n = w = (w.n).\frac{1}{n}$.

Beweis. Ist w eine Grösse, so vertritt offenbar $w.\frac{1}{n}$ die in § 6 sub *c* mit *a* bezeichnete Grösse, deren Masszahl $\frac{1}{n}$ ist, dann besteht aber zufolge des daselbst Gesagten die Einheit (hier w) aus n der Grösse a (hier $w.\frac{1}{n}$) gleichen Theilen und es ist daher $w = w.\frac{1}{n} + w.\frac{1}{n} + \ldots + w.\frac{1}{n} = (w.\frac{1}{n}).n$ (§ 54). Anderseits besteht die Grösse $w.n$ (nach § 6 sub *b*) aus n der Grösse w gleichen Theilen und es ist daher (nach § 6 sub *c*) w ein aliquoter und zwar der $n$te Theil von $w.n$, daher $w = (w.n).\frac{1}{n}$.

Ist w eine Zahl, so folgt der Lehrsatz aus § 43.

Anmerk. Da somit der beliebige Werth w das Product aus dem Multiplicanden $w.\frac{1}{n}$ und dem Multiplicator n ist, so ist nach § 17 resp. § 33

$$w.\frac{1}{n} = w : n.$$

§ 56. *Lehrsatz.* $w.\frac{m}{n} = (w.\frac{1}{n}).m$.

Beweis. Ist w eine Grösse, so besteht (nach § 6 sub *d*) die Grösse $w.\frac{m}{n}$ aus m Theilen, deren jeder der $n$te Theil der Einheit w, also (nach § 6 sub *c*) $w.\frac{1}{n}$ ist, es ist daher

$$w.\frac{m}{n} = w.\frac{1}{n} + w.\frac{1}{n} + \ldots + w.\frac{1}{n} = (w.\frac{1}{n}).m \text{ (§ 54).}$$

Für w als Zahl folgt der Lehrsatz aus § 43.

§ 57. Lehrsatz. Ist $p \rhd p'$, so ist, was auch immer w für einen Werth bedeutet, $w.p \rhd w.p'$ und umgekehrt.

Beweis. Da $p \rhd p'$ ist, so ist $p = p' + p''$ (§ 46), daher $w.p = w.(p' + p'')$ (§ 41) $= w.p' + w.p''$ (§ 52), somit nach § 45 $w.p \rhd w.p'$.

Die Umkehrung des Lehrsatzes lässt sich auf Grund des eben Bewiesenen durch einen einfachen indirecten Schluss darthun.

§ 58 *Lehrsatz.* $(w + w').r = w.r + w'r$.

Beweis. Die rationale Zahl r kann nach § 6 nur eine von den vier Zahlformen 1, n, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ annehmen, es ist also der Lehrsatz für jeden dieser vier Fälle einzeln nachzuweisen.

1) $r = 1$; dann ist

$$(w + w').1 = w + w' \text{ (§ 53)} = w.1 + w'.1 \text{ (§ 53).}$$

2) $r = n$; dann ist, wenn stets n die Anzahl der eingeklammerten Summanden bezeichnet

$$(w + w').n = (w + w') + (w + w') + \ldots + (w + w') \text{ (§ 54)} =$$
$$(w + w + w + \ldots + w) + (w' + w' + \ldots + w') \text{ (§ 47 und § 48)} =$$
$$w.n + w'.n \text{ (§ 54).}$$

3) $r = \frac{1}{n}$; dann ist

$(w.\frac{1}{n} + w'.\frac{1}{n}).n = (w.\frac{1}{n}).n + (w'.\frac{1}{n}).n$ (§ 58 sub 2) $= w + w'$ (§ 55).

Es ist daher nach § 44

$$(w + w').\frac{1}{n} = [(w.\frac{1}{n} + w'.\frac{1}{n}).n].\frac{1}{n} = w.\frac{1}{n} + w'.\frac{1}{n} \text{ (§ 55).}$$

4) $r = \frac{m}{n}$. In diesem Falle ist

$(w + w').\frac{m}{n} = [(w + w').\frac{1}{n}].m$ (§ 56) $= (w.\frac{1}{n} + w'.\frac{1}{n}).m$ (§ 58 sub 3) $= (w.\frac{1}{n}).m + (w'.\frac{1}{n}).m$ (§ 58 sub 2) $= w.\frac{m}{n}. + w'.\frac{m}{n}$ (§ 56).

§ 59. Lehrsatz. Sind w und w' beliebige Werthe, so gibt es stets ganze Zahlen von der Art, dass $w.n \rhd w'$ ist.

Beweis. *a*) Sind w und w' Grössen, und es ist

α) $w \rhd w'$ oder $w = w'$, so ist $w.n$ für jeden Werth des n, da es nach § 54 als Summe mehrerer, dem w gleichen Theilen dargestellt werden kann, zufolge § 45 grösser als ein Summand w, daher zufolge § 50 resp. § 44 auch grösser als w';

β) ist dagegen $w \lhd w'$, so lässt sich dem in § 1 sub 3 erörterten wesentlichen Merkmale des Grössenbegriffes zufolge durch Summirung mehrerer dem w gleichen Summanden, deren Anzahl mit n bezeichnet sei, stets eine Summe erhalten, die grösser als w' ist, somit ist zufolge § 54 dann $w.n > w'$.

Ein Gleiches gilt für jede ganze Zahl n', die grösser als n ist, denn dann ist zufolge § 57 $w.n' > w.n$, daher nach § 50 $w.n' > w$.

b) Sind w und w' Zahlen, so ergibt sich unmittelbar mit Beachtung des § 43 aus dem eben Nachgewiesenen die Beziehung $w.n > w$ resp. $w.n' > w$.

§ 60. *Lehrsatz.* Sind w und w' beliebige Werthe, so gibt es stets ganze Zahlen n von der Beschaffenheit, dass $w > w'.\frac{1}{n}$.

Beweis. Nach § 59 ist $w.n > w'$ daher nach § 46 $w.n = w' + w''$, somit

$$w = (w.n).\tfrac{1}{n} \text{ (§ 55)} = (w' + w'').\tfrac{1}{n} \text{ (§ 44)} = w'.\tfrac{1}{n} + w''.\tfrac{1}{n} \text{ (§ 58)}.$$

Zufolge § 45 ist dann $w > w'.\frac{1}{n}$.

Ein Gleiches gilt wie die gleiche Deduction aus der, der ersten analogen Beziehung des § 59, nämlich aus $w.n' > w$, wo $n' > n$ ist, zeigen würde, für jeden ganzen Werth, der grösser als n ist.

§ 61. *Lehrsatz.* Ist das Verhältniss der beiden beliebigen Werthe w' und w'', wo $w'' > w'$ ist, nämlich das Verhältniss $\widehat{w'' : w'}$ eine nicht ganze Zahl, so gibt es stets eine ganze Zahl n von der Beschaffenheit, dass $w'' = w'.n + w_1$ und $w'.(n+1) = w'' + w_2$, wo w_1 sowol als w_2 kleiner als w' ist.

Beweis. Zufolge § 59 und § 54 lässt sich durch Summirung mehrerer dem w' gleichen Werthe endlich ein Werth w finden, der grösser als w'' ist. Durch diese successive Summirung erhält man Glieder von der Form

$w' + w' + w' + \ldots + w' = w'.n$ (§ 54) wo n nach der Reihe die Werthe 1, 2, 3, . . . erhalten muss, je nachdem man das 1., 2., 3. . . . Glied bildet. Das dem Gliede $w'.n$ folgende, durch Hinzufügung eines weiteren Summanden gebildete Glied ist offenbar dann $w'.n + w' = w'.n + w'.1$ (§ 53) $= w'(n+1)$ (§ 52).

Man denke sich nun die auf diese Weise nach und nach entstehenden Glieder in eine Reihe zusammengestellt. Kein Glied dieser Reihe kann dem Werthe w'' gleich sein, da sonst $w'' = w'.n$ sein müsste, wo n eine ganze Zahl bedeutet, was nach § 19 resp. § 38 mit der ursprünglichen Annahme unverträglich ist. Wie früher gezeigt wurde, ist das erste Glied der Reihe w', vielleicht auch einige der folgenden kleiner, das letzte Glied w der Reihe dagegen, vielleicht auch einige der vorhergehenden grösser als w''; daher muss jedenfalls die Reihe der anfänglich kleineren Glieder mit irgend einem Gliede, vielleicht schon mit dem ersten w' abschliessen und es muss das diesem unmittelbar folgende, da es früher Gesagtem zufolge nicht dem Werthe w'' gleich sein kann, nothwendig grösser sein als w''. Ist demnach mit n die Zahl der ersteren, nämlich kleineren Glieder bezeichnet, so ist $w'.n \lessdot w'' \lessdot w'.(n+1)$.

Es ist folglich nach § 46 $w''=w'.n+w_1$

$$w'(n+1)=w''+w_2$$

wenn mit w_1 und w_2 die nach § 46 jedenfalls möglichen Differenzen aus w'' und $w'.n$, resp. aus $w'.(n+1)$ und w'' bezeichnet. Addirt man die beiden letzten Gleichungen, was nach § 44 gestattet ist, und setzt statt $w'.(n+1)$ den früher gefundenen gleichen Werth $w'.n+w'$ ein, so ist

$$w''+(w'.n+w')=(w'.n+w_1)+(w''+w_2)$$

somit zufolge § 47 und § 48

$$(w''+w'.n)+w'=(w''+w'.n)+(w_1+w_2)$$

und wenn man beiderseits mit Beachtung des § 44 die Summe $w''+w'.n$ subtrahirt, so ist nach § 12 resp. § 26 $w'=w_1+w_2$, daher nach § 45 $w_1 \lessdot w'$ und $w_2 \lessdot w'$, was zu beweisen war.

§ 62. *Lehrsatz.* Sind zwei beliebige Werthe w' und w'' incommensurabel, so gibt sich stets ganze Zahlen m und n von der Beschaffenheit, dass

1) $w'.\frac{m}{n} \lessdot w'' \lessdot w'.\frac{m+1}{n}$ ist und

2) dass die Differenzen $w_1=w''-w'.\frac{m}{n}$ und $w_2=w'.\frac{m+1}{n}-w''$ (die dann nach § 46 möglich sind) kleiner sind als irgend ein beliebiger gleichartiger Werth w.

Beweis. Man wähle nach § 60 die ganze Zahl n derart, dass $w'.\frac{1}{n}$ kleiner sei als der kleinere der beiden Werthe w und w'', in welchem Falle dann $w'.\frac{1}{n}$ nach § 50 auch kleiner als der zweite dieser Werthe ist, so dass dann $w'.\frac{1}{n} \lessdot w$ und $w'.\frac{1}{n} \lessdot w''$ ist.

Da nun das Verhältniss von w'' zu $w'.\frac{1}{n}$ keine ganze Zahl z. B. m sein kann, da sonst nach § 19 resp. § 38 $w''=(w'.\frac{1}{n}).m=w'.\frac{m}{n}$ (§ 56) sein müsste, was nach § 6 resp. § 42 mit der Annahme der Incommensurabilität der Werthe w' und w'' im Widerspruche steht, so kann unmittelbar der Lehrsatz § 61 zur Anwendung kommen, wofern man daselbst nur überall statt w' den gegenwärtigen Werth $w'.\frac{1}{n}$ und m statt n einsetzt. Es ist demnach $w''=(w'.\frac{1}{n})\,m+w_1=w'.\frac{m}{n}+w_1$ (§ 56)

$w''+w_2=(w'.\frac{1}{n})(m+1)=w'.\frac{m+1}{n}$ (§ 56), somit nach § 45 $w'.\frac{m}{n} \lessdot w'' \lessdot w'.\frac{m+1}{n}$ u. nach § 12 resp. § 26 $w_1=w''-w'.\frac{m}{n}$

$$w_2=w'.\frac{m+1}{n}-w''$$

wo nach § 61 $w_1 \lessdot w'.\frac{1}{n}$ und $w_2 \lessdot w'.\frac{1}{n}$ ist. Da nun Früherem zufolge

$w' . \frac{1}{n} \lhd w$ ist, so ist zufolge § 50 auch $w_1 \lhd w$
$w_2 \lhd w$.

§ 63. *Lehrsatz.* Sind zwei bestimmte Werthe w' und w'' so beschaffen, dass $w' + w_1 \rhd w'' \rhd w' - w_2$, wo sowol w_1 als w_2 kleiner als jeder beliebige Werth w werden kann, so ist $w' = w''$.

Beweis. Zwischen w' und w'' muss bekanntlich eine der drei Beziehungen $w' = w''$, $w' \rhd w''$, $w' \lhd w''$ stattfinden. Die beiden letzteren Beziehungen sind mit der ursprünglichen Annahme, wie sofort gezeigt werden wird, unverträglich und es ist somit $w' = w''$. Wäre nämlich $w' \rhd w''$, so müsste nach § 46 $w' = w'' + w_3$ sein. Da nun zufolge der Annahme $w'' \rhd w' - w_2$, somit nach § 49 $w'' + w_2 \rhd (w' - w_2) + w_2$ und daher nach § 12 resp. § 26 $w'' + w_2 \rhd w'$ ist, so wäre, da $w' = w'' + w_3$ ist, $w'' + w_2 \rhd w'' + w_3$, daher nach § 49 $w_2 \rhd w_3$; es könnte somit w_2 nicht kleiner als der besondere Werth w_3 werden, was der Annahme widerspricht.

Wäre dagegen $w' \lhd w''$, so wäre $w'' = w' + w_4$, und da $w' + w_1 \rhd w''$ ist, so müsste auch $w' + w_1 \rhd w' + w_4$, somit nach § 49 $w_1 \rhd w_4$ sein, was ebenfalls, da der beliebige Werth w auch den besonderen Werth w_4 annehmen kann, nach der obigen Voraussetzung unmöglich ist.

§ 64. *Lehrsatz.* $(w + w').i = w.i + w'.i$.

Beweis. Die Werthe $(w + w')$ und $(w + w').i$ sind, da i eine irrationale Zahl ist, nach § 6 resp. § 42 incommensurable Werthe und es ist daher nach § 62

$$(w + w') . \frac{m}{n} \lhd (w + w').i \lhd (w + w') . \frac{m+1}{n}$$

und die Differenzen

$$w_1 = (w + w').i - (w + w') . \frac{m}{n}$$
$$w_2 = (w + w') . \frac{m+1}{n} - (w + w').i$$

kleiner als irgend ein beliebiger, gleichartiger Werth w, also $w_1 \lhd w$, $w_2 \lhd w$.

Aus der drittletzten Gleichung ergibt sich nach § 57

$\frac{m}{n} \lhd i \lhd \frac{m+1}{n}$, somit ist zufolge § 57 auch

$$w . \frac{m}{n} \lhd w.i \lhd w . \frac{m+1}{n}$$

$w' . \frac{m}{n} \lhd w' . i \lhd w' . \frac{m+1}{n}$, daher nach § 51

$w . \frac{m}{n} + w' . \frac{m}{n} \lhd w.i + w'.i \lhd w . \frac{m+1}{n} + w' . \frac{m+1}{n}$ und nach § 58

$$(w + w') . \frac{m}{n} \lhd w.i + w'.i \lhd (w + w') . \frac{m+1}{n}.$$

Bestimmt man aus den obangeführten Werthen der Differenzen w_1 und w_2 mit Beachtung des § 12 und 13 resp. § 26 den Subtrahend $(w + w') . \frac{m}{n}$ und den Minuend $(w + w') . \frac{m+1}{n}$ und führt diese in die letzte Relation ein, so ist

$$(w + w').i - w_1 \lhd w.i + w'.i \lhd (w + w').i + w_2,$$

somit ist nach § 63 $(w + w').i = w.i + w'.i$.

§ 65. *Lehrsatz.* $(w - w').p = w.p - w'.p$.

Beweis. Zufolge § 58, wenn p rational, zufolge § 64, wenn p irrational ist, ist

$(w - w').p + w'.p = (w - w' + w').p = w.p$ (§ 12 resp. § 26). Es ist daher nach § 12 resp. § 26 auch

$$(w - w').p = w.p - w'.p.$$

§ 66. *Lehrsatz.* Ist $w \triangleright w'$, so ist $w.p \triangleright w'.p$.

Beweis. Nach § 46 ist $w = w' + w_1$, daher

$w.p = (w' + w_1).p = w'.p + w_1.p$ (§ 58 resp. § 64). Es ist daher nach § 45 $w.p \triangleright w'.p$.

§ 67. *Lehrsatz.* $p.p' = p'.p$.

Beweis. Die beiden beliebigen Zahlen p und p' sind nur entweder commensurabel oder incommensurabel. Im ersteren Falle ist nach § 42 $p = p'.r$, im letzteren $p = p'.i$. Da nun aber im ersteren Falle die rationale Zahl r nach § 6 eine der vier Formen: 1, n, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ annehmen muss, so ist der Lehrsatz allgemein dargethan, wenn er für die fünf Fälle: $p = p'.1$, $p = p'.n$, $p = p'.\frac{1}{n}$, $p = p'.\frac{m}{n}$ und $p = p'.i$ nachgewiesen wird, was in Folgendem geschieht.

a) Es sei $p = p'.1$. In diesem Falle ist nach § 53 $p' = p$, daher $p'.p = p.p'$ (§ 44).

b) Es sei $p' = p.n$; dann ist nach § 54 $p' = p + p + \ldots + p$, daher $p'.p = (p + p + \ldots + p).p$ (§ 44) $= p.p + p.p \ldots + p.p$ (§ 58 resp. § 64) $= p.(p + p + \ldots + p)$ (§ 52) $= p.p'$.

c) Es sei $p' = p.\frac{1}{n}$, somit $p'.n = (p.\frac{1}{n}).n = p$ (§ 55); da hier zwischen p und p' eine analoge Beziehung besteht, wie unter *b*), so lässt sich der Lehrsatz völlig analog nachweisen, es ist nur bei der Beweisführung unter *b*) p und p' durchwegs zu vertauschen.

d) Es sei $p' = p.\frac{m}{n} = (p.\frac{1}{n}).m$ (§ 56). Bezeichnet man $p.\frac{1}{n}$ mit p'', in welchem Fall dann nach *c*) $p.p'' = p''.p$ ist, so übergeht die frühere Gleichung in

$$p' = p''.m = p'' + p'' + \ldots + p'' \text{ (§ 54)},$$

daher $p.p' = p.(p'' + p'' + \ldots + p'') = p.p'' + p.p'' + \ldots + p.p''$ (§ 52) $= p''.p + p''.p + \ldots + p''.p$ (s. ob.) $= (p'' + p'' + \ldots + p'').p$

$$\text{(§ 58 resp. § 64)} = p'.p.$$

e) Es sei $p' = p.i$. In diesem Falle können die beiden nach § 42 incommensurablen Zahlen p' und p die Werthe w' und w'' aus § 62 repräsentiren und zufolge dieses Paragraphs ist demnach $p.\frac{m}{n} \triangleleft p' \triangleleft p.\frac{m+1}{n}$, wo n und m zugleich derart gewählt werden können, dass, wenn man mit p_1 und p_2 die Differenzen:

$$p_1 = p' - p.\frac{m}{n}$$

$$p_2 = p.\frac{m+1}{n} - p'$$

und mit p_3 eine beliebige Zahl bezeichnet, p_1 und p_2 kleiner als jede beliebige Zahl, daher auch kleiner als der Quocient $p_3 : p$ werden können. Es ist daher $p_1 \lessdot (p_3 : p)$, $p_2 \lessdot (p_3 : p)$, somit nach § 66 $p_1 . p \lessdot (p_3 : p) . p$, $p_2 . p \lessdot (p_3 : p) . p$ und nach § 33 $p_1 . p \lessdot p_3$, $p_2 . p \lessdot p_3$.

Aus der obigen Beziehung: $p . \frac{m}{n} \lessdot p' \lessdot p . \frac{m+1}{n}$ lässt sich nach § 57 folgern: $p . (p . \frac{m}{n}) \lessdot p . p' \lessdot p . (p . \frac{m+1}{n})$, somit zufolge § 67 sub d auch $(p . \frac{m}{n}) . p \lessdot p . p' \lessdot (p . \frac{m+1}{n}) . p$.

Aus obigen Werthen für die Differenzen p_1 und p_2 ergeben sich nach § 26 die Gleichungen $p . \frac{m}{n} = p' - p_1$

$p . \frac{m+1}{n} = p' + p_2$, somit nach Einführung dieser Werthe in die frühere Relation:

$$(p' - p_1) . p \lessdot p . p' \lessdot (p' + p_2) . p,$$

daher ist nach § 65 und § 58 resp. § 64

$p' . p - p_1 . p \lessdot p . p' \lessdot p' . p + p_2 . p$, wo $p_1 . p$ und $p_2 . p$, wie oben nachgewiesen wurde, kleiner als die beliebige Zahl p_3 werden können, daher ist nach § 63 $p' . p = p . p'$.

§ 68. *Lehrsatz.* Mag i was immer für eine irrationale Zahl sein, so ist für entsprechende Werthe von m und n

$\frac{m}{n} \lessdot i \lessdot \frac{m+1}{n}$, wo jede der Differenzen $p_1 = i - \frac{m}{n}$

$p_2 = \frac{m+1}{n} - i$

kleiner ist als $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n}$ kleiner als jede beliebige Zahl p werden kann.

Beweis. Was auch immer p' für eine Zahl ist, so ist $p' = p' . 1$ (§ 53) $= 1 . p'$ (§ 67).

Es ist daher auch $i = 1 . i$, somit nach § 42 die Zahlen i und 1 incommensurabel. Bringt man demnach § 62 zur Anwendung, indem man überall statt w'' die Zahl i, statt w' die Zahl 1 einsetzt und überall statt des Produktes aus 1 und einer zweiten Zahl diese letztere setzt, so ist sofort der Lehrsatz dargethan.

§ 69. *Lehrsatz.* $(w . p) . p' = w . (p . p')$.

Beweis. Ist w eine Grösse, so ist die Masszahl des Grössenproductes $(w . p) . p'$, in welchem $w . p$ der Grössenmultiplicand und p' der Multiplicator ist, wofern man die Grösse w, bezüglich welcher als Einheit die Masszahl des Multiplicands $w . p$ die Zahl p ist, zur Einheit wählt, zufolge § 28 das Zahlenproduct $p . p'$, es lässt sich demnach das besagte Grössenproduct nach § 15 auch durch $w . (p . p')$ ausdrücken und es ist demnach

$$(w . p) . p' = w . (p . p').$$

Ist w eine Zahl, so lässt sich der Lehrsatz aus § 43 folgern.

§ 70. *Lehrsatz.* $(w . p) . p' = (w . p') . p$.

Beweis. $(w . p) . p' = w . (p . p')$ (§ 69) $= w . (p' . p)$ (§ 67) $= (w . p') . p$ (§ 69).

§ 71. *Lehrsatz.* Jeder Bruch kömmt dem Quotienten aus Zähler und Nenner gleich, also $\frac{m}{n} = m : n$.

Beweis. $\frac{m}{n} = 1 . \frac{m}{n}$ (§ 53 und § 67) $= (1 . \frac{1}{n}) . m$ (§ 56) $=$ $= (1 . m) . \frac{1}{n}$ (§ 70) $= m . \frac{1}{n} = m : n$ (§ 55 Anm.).

§ 72. *Lehrsatz.* Das Verhältniss zweier beliebiger Zahlen kömmt ihrem Quotienten gleich, also $\widehat{p : p'} = p : p'$.

Beweis. Es sei der Exponent des ersteren Zahlenverhältnisses mit p'' bezeichnet, demnach $\widehat{p : p'} = p''$, so ist nach § 38 $p = p' . p''$, da aber nach § 67 $p' . p'' = p'' . p'$ ist, so ist auch $p = p'' . p'$, daher nach § 33 $p : p' = p''$, somit ist $\widehat{p : p'} = p : p'$.

Anmerkung. Da demnach ein Zahlenverhältniss und Zahlenquotient identisch sind, so lassen sich die ursprünglichen 5 arithmetischen Grundoperationen, wie dies schon in § 39 mit Hinweisung auf den später folgenden Beweis hervorgehoben wurde, auf 4 reduciren, was jedoch bei den 5 algebraischen Grundoperationen keineswegs der Fall ist.

Alle weiteren Lehrsätze der Algebra lassen sich auf Grund der bisher behandelten fundamentalen Lehrsätze ohne besondere Schwierigkeit nachweisen. Da nun diese weiteren Deductionen in jedem besseren Lehrbuche der Algebra anzutreffen sind, so darf ich es mir wol erlauben, dieselben hier zu übergehen.