PLEMLJEV TRIKOTNIK IN NEGIBNE TOČKE TRANSFORMACIJ

IVAN PUCELJ

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 51M04, 51M15

»Konstruiraj trikotnik z dano dolžino osnovnice in višine nanjo ter znano razliko notranjih kotov ob tej osnovnici« – to je vaja iz učbenika, po katerem je učil geometrijo v srednji šoli Plemljev profesor Borštner. K tej vaji se je profesor Plemelj zelo rad vračal, posebno na božičnih počitnicah, in je sestavil kar zajetno zbirko različnih rešitev [1].

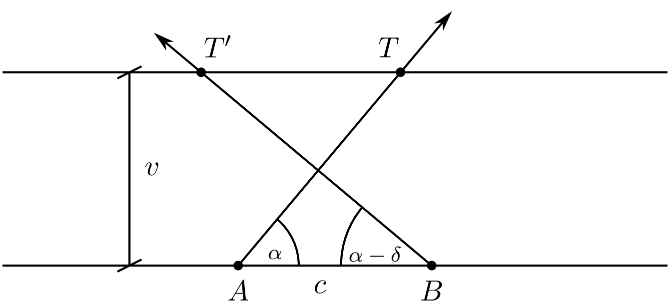
PLEMELJ'S TRIANGLE AND FIXED POINTS OF TRANSFORMATIONS

»Construct a triangle if one side, its altitude and a difference of two angles along it are given« – this is an exercise in the geometry textbook that was used by professor Borštner who taught Josip Plemelj in the high school. This problem attracted professor Plemelj later in his life (especially during Christmas holidays), and so he found several different solutions [1].

V tem zapisu predstavimo način, kako rešiti nalogo, ki ga je nam, študentom matematike, v letih 1952/53 (v svojem predavanju »Osnove geometrije, projektivna geometrija«) omenil profesor Ivan Vidav.

Označimo osnovnico trikotnika ABC in višino nanjo (točneje njuni dolžini) $c = \overline{AB}$ in v ter razliko kotov ob osnovnici $\alpha - \beta = \delta$.

Narišimo vzporednici v medsebojni razdalji v in daljico AB na spodnji vzporednici. Iz oglišča A potegnimo pod poljubnim kotom $\alpha \neq 0$ poltrak in iz oglišča B poltrak pod kotom $\alpha - \delta$. Označimo presečišči poltrakov (ali njunih nosilk) z drugo vzporednico: T in T'.



Kakšna je zveza med T in T'? Koti v tej »igri« so usmerjeni.

Postavimo izhodišče koordinatnega sistema xy v točko A, abscisno polos $x > 0$ skozi točko B in vzemimo, da je $c = v = 1$! Potem je enačba druge vzporednice kar $y = 1$, medtem ko sta (enačbi premic) AT in BT' dani z enačbama:

$$y = (\tan\alpha)\,x \quad \text{in} \quad y = -\tan(\alpha - \delta)\cdot(x - 1).$$

Naj bosta x in x' zaporedoma abscisi točk T in T'. Če na kratko označimo $a = \tan\alpha$ in $d = \tan\delta$ ter uporabimo adicijski izrek za tangens (ki velja za poljubna kota!), izpeljemo zvezi:

$$x = \frac{1}{a} \quad \text{in} \quad x' = 1 - \frac{1 + ad}{a - d}, \tag{1}$$

če je le $a = 0$ in $a = d$. Torej imamo zvezo:

$$x' = \frac{(d+1)x + (d-1)}{dx - 1}, \tag{2}$$

če je $x = \frac{1}{d}$.

Konstruirati želeni trikotnik pomeni rešiti enačbo $x' = x$, torej kvadratno enačbo:

$$dx^2 - (d+2)x - (d-1) = 0.$$

Diskriminanta $(d+2)^2 + 4d(d-1) = 5d^2 + 4$ je vedno pozitivna in korena enačbe sta:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2d}((d+2) \pm \sqrt{5d^2 + 4}), \text{ če je } d = 0. \tag{3}$$

Če pa je $d = 0$, torej $\delta = 0$, dobimo iz (1) $x' = 1 - x$ in enačba $x' = x$ ima rešitev $x = \frac{1}{2}$. Trikotnik ABC je enakokrak.

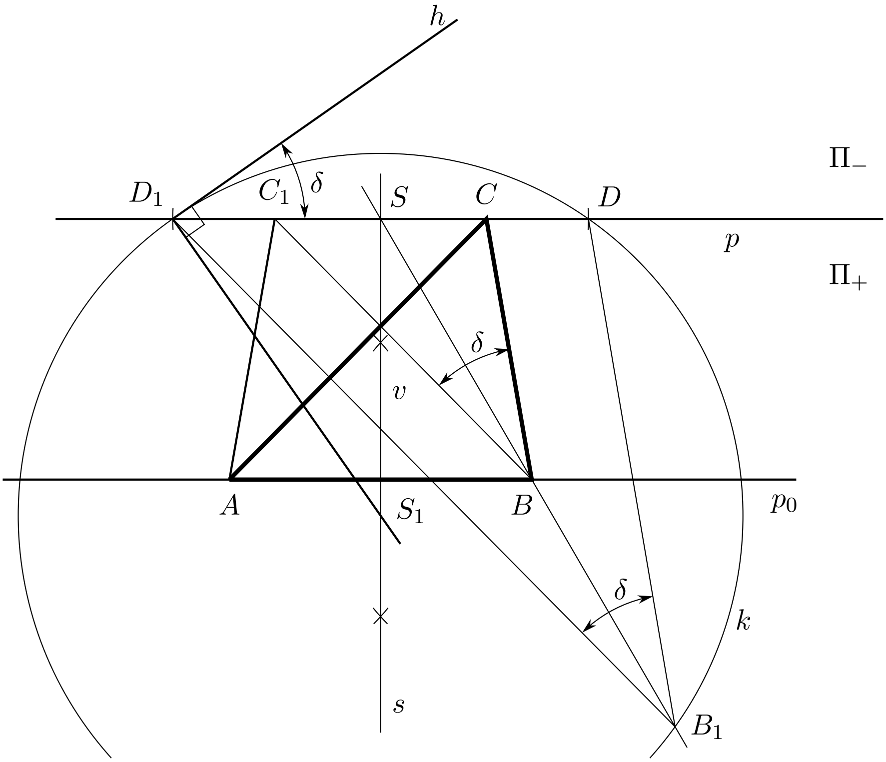
Konstrukcijo negibnih točk transformacije (2), torej konstrukcijo »Plemljevega trikotnika«, opremo na tale znani izrek elementarne geometrije (ki je sicer zelo uporaben):

Množica vseh takih točk v ravnini, iz katerih se »vidi« dana daljica pod predpisanim kotom ψ $(0 < \psi < +\pi)$, sestoji iz dveh krožnih lokov brez krajišč (dane daljice).

Iz zveze (3) v prvem delu sklepamo, da je mogoča za konstrukcijo negibne točke klasična konstrukcija s šestilom (in ravnilom). Oglejmo si jo (eno izmed številnih):

Podatki: osnovnica AB z dolžino c, višina v in kot z velikostjo $\delta \in (0, \pi)$, ki je razlika kotov ob osnovnici, recimo $\beta - \alpha = \delta$.

Potek konstrukcije: omejimo se na primer $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$; dani premici p_0, nosilki osnovnice AB, postavimo v razdalji v vzporednico p; bodi s simetrala daljice AB; označimo polravnini Π_- in Π_+ premice p, tako da sta A in B na Π_+; simetrala s seče premico p v točki S; na premici p izberimo poljubni različni točki D in D_1 simetrično glede na S; točki D_1 in A naj bosta na skupni polravnini premice s; dani kot δ prenesemo na polravnino Π_- tako, da je D_1 vrh kota in je poltrak D_1S en krak, drugi krak pa zaznamujmo s h; v D_1 postavimo pravokotnico na h; pravokotnica seka simetralo s v točki S_1; označimo s k krožnico s središčem S_1 in s polmerom S_1D_1; naj bo točka



B_1 presek premice SB s krožnico k na polravnini Π_+; skozi B postavimo vzporednici premicama B_1D in B_1D_1; ti dve vzporednici sečeta premico p npr. v točkah C in C_1. Obodni kot $\widehat{DB_1D_1}$ je enak δ.

Trdimo: trikotnik ABC ustreza podatkom, ima osnovnico c, višino v in razliko kotov ob osnovnici enako δ.

Dokaz. Zaradi podobnosti trikotnikov D_1B_1D in C_1BC je kot $\widehat{C_1BC}$ enak δ. Ker sta trikotnika ABC in BAC_1 simetrična glede na premico s, je kot $\widehat{ABC_1}$ enak kotu α, torej imamo $\beta = \alpha + \delta$. ∎

Dodatek: Na podlagi podobnosti pokažemo, da je konsturirani (Plemljev) trikotnik neodvisen od izbire temeljnih točk D in D_1 (eliptičnega krožnega šopa). Bralcu predlagamo pregled članka [3].

LITERATURA

[1] J. Plemelj, *Iz mojega življenja in dela*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 188–192.

[2] D. Modic, *Plemljev trikotnik in njegovi bratje*, [predavanje], *Strokovno srečanje in 65. občni zbor DMFA Slovenije, Bled, 15. in 16. november 2013*, str. 52–53, 2013.

[3] O. Sajovic, *Krožni šopi in enakoosna hiperbola*, Obzornik mat. fiz. **1** (1951), 2–8.