PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 4
Strani 202–205

Gregor Pavlič:

GEOMETRIJSKO SEŠTEVANJE NEKATERIH ŠTEVILSKIH VRST

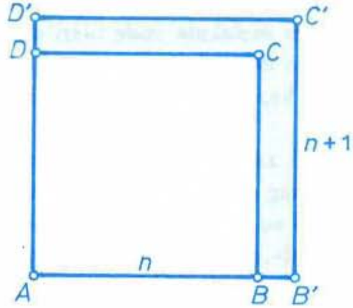
Ključne besede: matematika, geometrija, teorija števil.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/18/1050-Pavlic.pdf

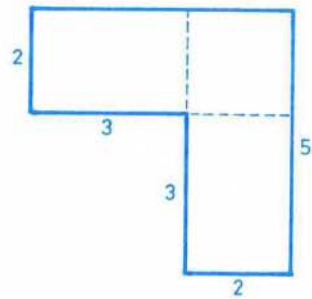
GEOMETRIJSKO SEŠTEVANJE NEKATERIH ŠTEVILSKIH VRST

(A) Aristotel v enem od svojih del piše, kako so Pitagorejci znali poiskati vsoto prvih n lihih števil z uporabo geometrije.

Vzemimo kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine $|AB| = n$ in ga dopolnimo do večjega kvadrata $AB'C'D'$ s stranico dolžine $|AB'| = n+1$ (slika 1).



Slika 1. Ploščina lika $BB'C'D'DC$ je enaka razliki ploščin obeh kvadratov.

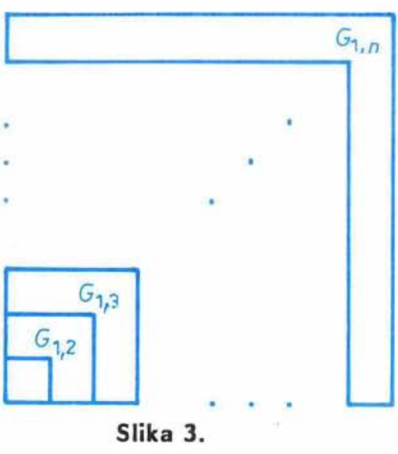


Slika 2. Gnomon $G_{2,5}$.

Osenčeni lik $BB'C'D'DC$ na sliki 1 so Pitagorejci imenovali **gnomon**. Bolj splošno je gnomon "širine" k in dolžine m sestavljen iz dveh pravokotnikov z osnovnico k in višino $m-k$ ter kvadrata s stranico k. Označili ga bomo s simbolom $G_{k,m}$.

Njegova ploščina meri

$$P(G_{k,m}) = 2mk - k^2 \quad (1)$$



Slika 3.

In sedaj k nalogi. Vzemimo kvadrat s stranico dolžine 1 (lahko ga imenujemo tudi gnomon $G_{1,1}$) in mu dodajmo gnomon $G_{1,2}$, temu dodajmo gnomon $G_{1,3}$ in tako naprej do gnomona $G_{1,n}$. Na ta način smo sestavili kvadrat z osnovnico dolžine n.

Ker velja zapored: $p(G_{1,1}) = 1$, $p(G_{1,2}) = 3, \ldots, p(G_{1,n}) = 2n-1$, je naloga že rešena: $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$

(B) Z uporabo formule

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (2)$$

ki je geometrično utemeljena na 28. strani P1, lahko izračunamo tudi vsoto bolj neobičajne številske vrste:

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)$$

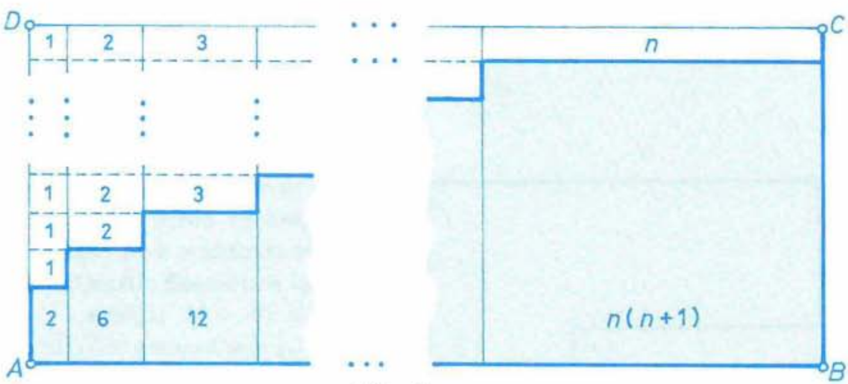
Delimo zgornjo enakost z 2

$$\frac{S_n}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \ldots + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

in za vsak sumand na desni uporabimo formulo (2). Dobimo

$$\frac{S_n}{2} = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+\ldots+n)$$

Narišimo zdaj pravokotnik $ABCD$ z osnovnico dolžine $|AB| = (1+2+\ldots+n)$ in višino $(n+2)$ in ga razdelimo na pravokotnike, kot kaže slika 4.



Slika 4.

Ploščina pravokotnika $ABCD$

$$p = (1+2+\ldots+n)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

je vsota ploščine osenčenega lika pod stopničasto krivuljo

$$p_1 = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)$$

in ploščine lika nad njo

$$p_2 = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+\ldots+n)$$

Zato velja $p(ABCD) = S_n + \frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2}S_n$. Od tod pa že dobimo iskano formulo:

$$S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Z njeno pomočjo lahko najdemo vsoto kvadratov prvih n naravnih števil.

Zapišemo

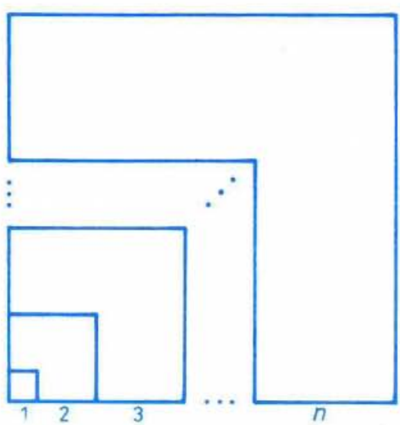
$$\begin{aligned} &1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1) = \\ &= 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \ldots + n(n+1) = \\ &= (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) + (1+2+3+\ldots+n) \end{aligned}$$

in že dobimo

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

(C) Za konec izpeljimo še formulo za vsoto kubov prvih n naravnih števil na način, ki ga je v svojem pomembnem delu Fakhri opisal arabski matematik Alkarkhi na prehodu iz 10. v 11. stoletje.

Naj ima kvadrat $ABCD$ osnovnico $|AB| = (1+2+\ldots+n)$. Razdelimo ga na n gnomonov



Slika 5.

$$G_{1,1}, G_{2,1+2}, G_{3,1+2+3}, \ldots, G_{n,1+2+\ldots+n}$$

Ploščina k-tega gnomona tega zaporedja je po (1) in (2) enaka

$$2k\frac{k(k+1)}{2} - k^2 = k^3$$

Torej je vsota ploščin vseh gnomonov ravno vsota kubov prvih n naravnih števil.

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$$

Gregor Pavlič

Literatura

[1] M. Sevdić, *Matematička čitanka*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb 1947

[2] D.E. Smith, *history of mathematics*, Dover publ., New York 1923