ENOSTAVNI LINIJSKI KONČNI ELEMENT ZA ANALIZO UPOGIBA IN UKLONA RAZPOKANIH NOSILCEV Z LINEARNO SPREMINJAJOČO SE ŠIRINO

SIMPLE 1D FINITE ELEMENT FOR BENDING AND BUCKLING ANALYSIS OF CRACKED BEAMS WITH LINEAR VARIATION OF WIDTH

izr. prof. dr. Matjaž Skrinar, univ. dipl. inž. grad.
matjaz.skrinar@um.si
Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo,
prometno inženirstvo in arhitekturo,
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor

Znanstveni članek
UDK 519.61/.64:624.072.2

Povzetek | Razpoke so tipični predstavniki lokalnih redukcij togosti, ki lahko znatno spremenijo duktilnost, togost in nosilnost nosilcev med obremenitvijo. Članek obravnava računsko modeliranje razpokanih nosilcev z linearno spremenljivimi širinami z že znanim poenostavljenim modelom, kjer so razpoke predstavljene z rotacijskimi vzmetmi, ki upoštevajo preostalo upogibno togost preseka. Za ta model »diskretne vzmeti« se je že izkazalo, da omogoča enostavno in učinkovito analizo upogiba prečno razpokanih vitkih nosilcev, ki so izpostavljeni majhnim prečnim premikom, pri čemer se za vzmeti privzame osnovna linearna zveza med upogibnim momentom in razliko zasukov. Članek razširja uporabo že uveljavljenega modela na nosilce pravokotnih prerezov z linearno spremenljivimi širinami, saj predstavlja izpeljavo ustrezne izvirne togostne matrike že znanega numeričnega modela. Izpeljana togostna matrika tako definira preprost, a vseeno funkcionalen linijski končni element za uporabljeni računski model. Področje njegove uporabe se razširi s predstavitvijo ustreznega obtežnega vektorja zaradi linearno porazdeljene prečne obtežbe. Vsi predstavljeni izrazi za analizo čistega statičnega upogiba nosilcev s prečno razpoko z upoštevanjem upogibnih deformacij v skladu z Euler-Bernoullijevo teorijo so podani v zaključenih oblikah, kar olajša njihovo uporabo. Čeprav obravnavane rešitve temeljijo na približnih rešitvah poenostavljenega modela, predstavljene numerične študije jasno kažejo njihovo uporabnost za enostavne in hkrati računsko učinkovite analize upogiba in uklona. Predstavljene rešitve je mogoče brez težav uporabiti tudi za ocenjevanje odziva elementov nosilcev z več razpokami z uporabo dokaj majhnega modela linijskih končnih elementov.

Ključne besede: prečno razpokani nosilci z linearnim spreminjanjem širine, poenostavljeni računski model prečne razpoke, metoda končnih elementov, togostna matrika in obtežni vektor

Summary | Cracks are typical representatives of local stiffness reductions that can significantly decrease the performance of slender beams under load. The paper considers modelling of cracked beams with linearly varying widths by a simplified computational model, where the cracks are represented by means of internal hinges endowed with rotational springs that take into account the residual stiffness. For these springs, the fundamental linear moment-rotation relation is assumed. This “discrete spring” model has already been shown to enable effortless and efficient implementation in bending of transversely cracked slender beams subjected to small deflections. This paper expands the utilisation of the already established model to beams of rectangular cross-sections with linearly varying widths. It presents the derivation of the corresponding original stiffness matrix, which defines an easy to implement functional 1D finite element for the already known simplified numerical model. The implementation of the presented element is expanded by presenting the coefficients of the corresponding load vector due to a linearly distributed transverse load. The newly presented expressions for the static flexure of Euler–Bernoulli beam with a transverse crack are given in closed-forms. Although the discussed solutions are based on approximate solutions of the simplified model, the presented numerical studies clearly show their applicability for straightforward as well as computationally efficient analyses. These presented solutions can be effortlessly utilised even for evaluating the response of beam elements with multiple cracks by implementing a rather small number of 1D finite elements.

Key words: transversely cracked beams with a linear variation of width, simplified computational model of a transverse crack, finite element method, stiffness matrix and load vector

1 • UVOD

Pojav degenerativnih učinkov v konstrukcijah med uporabo lahko spremeni njihov mehanski odziv tako, da pomembno reducira togost in potencialno povzroči njihovo odpoved. Zato so bile opravljene številne študije, ki obravnavajo pravočasno odkrivanje in identifikacijo zmanjšanja togosti v konstrukcijah. Pristopi za odkrivanje in karakterizacijo poškodb na konstrukcijah pogosto temeljijo na metodah merjenega odziva, saj pojav poškodbe spremeni odziv konstrukcije. Vendar pa učinkovitost teh pristopov ni odvisna samo od kakovosti izmerjenih informacij, ampak tudi od zanesljivosti računskih modelov, ki se uporabljajo pri modeliranju mehanskega obnašanja.

Čeprav detajlni modeli 2D ali 3D končnih elementov zagotovo ponujajo najboljše možnosti za opis odziva splošne konstrukcije kot tudi natančno analizo napetostnega stanja v bližini razpoke ter posledično morebitne spremembe njene globine, se v tehnikah nadzora varnosti konstrukcij običajno uporabljajo poenostavljeni modeli, ki zahtevajo manj podatkov.

Model »diskretne vzmeti«, ki so ga za nosilce predstavili Okamura in sodelavci (Okamura, 1969), je uporabljen v številnih raziskavah. Ta model privzema osnovne predpostavke inženirske teorije upogiba nosilcev: material je linearno elastičen po Hookovem zakonu, ravnine presekov pa ostanejo ravnine in pravokotne na nevtralno os tudi po deformaciji. Ker razpoka v konstrukcijskem elementu spremeni lokalno enakost zasukov, je razpoka v tem matematičnem prikazu modelirana kot brezmasna rotacijska linearna vzmet ustrezne togosti, odvisne od globine razpoke. Sosednja nerazpokana dela nosilca na levi in desni od razpoke sta modelirana kot elastična elementa, ki ju povezuje rotacijska vzmet, za katero se privzame osnovni linearni konstitutivni zakon med upogibnim momentom in zasukoma delov ob razpoki. Prvo definicijo rotacijske vzmeti za pravokotni prerez so podali Okamura et al. in ta definicija upošteva tudi Poissonov količnik. Dodatne definicije so nato predstavili še drugi raziskovalci ((Dimarogonas, 1983), (Rajab, 1991), (Ostachowicz, 1990), (Krawczuk, 1993), (Sundermayer, 1993), (Hasan, 1995), (Skrinar, 2004)).

Zaradi svoje enostavnosti (potrebni sta samo informaciji o lokaciji in globini razpoke) je bil ta poenostavljeni računski model intenzivno uporabljan pri analizi vibracij razpokanih nosilcev ((Labib, 2014), (Bakhtiari-Nejad, 2014)), različnih pristopih za inverzno identifikacijo razpok ((Labib, 2015), (Khiem, 2014a), (Khiem, 2014b), (Sung, 2014)) kot tudi pri eksperimentalnih inverznih identifikacijah razpoke ((Cao, 2014), (Gawande, 2016)).

Po pionirskih delih Tharpa (Tharp, 1987) ter Gounarisa in Dimarogonasa (Gounaris, 1988) za element nosilca z eno samo prečno razpoko so se raziskave osredotočile na rešitve z uporabo končnih elementov.

Več prispevkov je bilo namenjenih končnemu elementu Euler-Bernoullievega nosilca s poljubnim številom prečnih razpok. Razlikujejo se po pristopih, uporabljenih za pridobivanje zaključenih oblik rešitev pripadajoče diferencialne enačbe prečnih pomikov. Tako so bili statični prečni premiki in različne oblike togostne matrike izpeljani z uporabo Diracove funkcije delta za upogibno togost (Biondi, 2007) ali fleksibilnost (Palmeri, 2011) z zaporednimi rešitvami vezanih diferencialnih enačb (Skrinar, 2009) pa tudi z načelom virtualnega dela (Skrinar, 2012).

Večina raziskav je omejenih na elemente s konstantnimi prečnimi prerezi. Kadar se obravnavajo ravni nerazpokani nosilci s spremenljivim prečnim prerezom, se njihove geometrije navadno diskretizirajo s pomočjo večjega števila linijskih končnih elementov, ki imajo v vsakem elementu konstanten prečni prerez. Taka idealizacija geometrije z odsekovno konstantnimi preseki v pripadajočem matematičnem modelu zahteva ustrezno gosto diskretizacijo, da se doseže konvergenca rezultatov. Ko se obravnavajo razpokani nosilci, pa lahko takšno modeliranje neposredno vpliva tudi na geometrijske lastnosti razpok, kar posledično učinkuje na hitrost in vrsto (enostransko monotona ali oscilirajoča) konvergence. Skrinar (Skrinar, 2013) je predstavil končni element nosilca za statično analizo upogiba nosilcev s poljubnim številom razpok, kjer so bili izpeljani ločeni izrazi za nosilce z odsekovnim konstantnim prečnim prerezom, ter nosilce z linearno variacijo višine. Čeprav je uporaba načela virtualnega dela omogočala elegantno izpeljavo togostne matrike elementa s poljubnim številom razpokanih odsekovno konstantnih presekov, pristop ni bil uporaben za izpeljavo geometrijske togostne matrike. Pri tem je bilo opaženo še, da koeficienti za nosilce z linearno variacijo višine niso neposredno uporabni za nosilce enakomerne višine.

V tem članku je področje uporabe poenostavljenega modela razpoke razširjeno na nosilce z linearno spremenljivimi širinami, in sicer z izpeljavo nove togostne matrike v zaključeni obliki ter koeficientov obtežnega vektorja. To matriko je mogoče nadalje uporabiti v kombinaciji z geometrijsko togostno matriko razpokanega nosilca, s čimer se razširi uporaba predstavljenih rešitev tudi v probleme analize uklona.

Čeprav so interpolacijske funkcije za prečne premike, uporabljene v izpeljavah, le približki rešitev pripadajočih diferencialnih enačb, predstavljene numerične študije potrjujejo, da vodijo do rezultatov, primerljivih s podrobnejšimi modeli končnih elementov.

2 • FORMULACIJA RAČUNSKEGA MODELA KONČNEGA ELEMENTA RAZPOKANE GREDE

Predstavljeni dvovozliščni končni element obravnava razpokane homogene elastične Bernoulli-Eulerjeve nosilce. Za element skupne dolžine L se tako predpostavi, da ima prečno razpoko, ki se nahaja na razdalji L_1 od začetnega vozlišča. Upošteva se spremenljiv pravokotni prerez, pri čemer je višina prereza h konstantna, medtem ko se širina $b(x)$ linearno spreminja vzdolž nosilca.

Pri izpeljavi je bil uporabljen model »diskretne vzmeti«, kjer se zaradi lokaliziranega učinka razpoke celoten nosilec obravnava kot razdeljen na dva elastična odseka, ki se stikujeta ob razpoki. Ta sosednja nerazpokana odseka sta povezana z rotacijsko vzmetjo, za katero je privzeta osnovna linearna konstitutivna zveza med razliko rotacij in upogibnim momentom. Predpostavljeno je, da je globina d_i enakomerna po širini prereza. Pripadajoča vzmetna konstanta Kr je funkcija širine preseka $b(L_1)$, relativne globine razpoke $\delta_1=d_1/h$, modula elastičnosti E, Poissonovega količnika ν in upogibne togosti $EI(L_1)$ nerazpokanega prereza na mestu razpoke.

Obravnavani končni element ima štiri standardne prostostne stopnje: prečni premik Y_1 in zasuk Φ_1 na levem koncu (vozlišče 1) kot tudi prečni pomik Y_2 in zasuk Φ_2 na desnem koncu (vozlišče 2). Kot pozitivna sta upoštevana pomika navzgor in protiurna zasuka.

Pri tem je smiselno opozoriti, da čeprav model vodi do informacij o prečnih pomikih, zaradi svojega kinematičnega opisa razpoke ni samostojno uporaben za določitev korektne razporeditve normalnih napetosti v bližini, predvsem pa v vrhu razpoke, ki je ključna za analizo zgodovine razvoja razpoke po njenem nastanku. V tem primeru bi bilo v analizi treba upoštevati natančnejše konstitucijske zakone materiala (za beton v nategu lahko uporabimo npr. modificirani konstitucijski diagram po Berganu (Bergan, 1979), za obnašanje v tlaku pa nelinearni konstitucijski zakon iz standarda Evrokod 2 (SIST, 2005).

3 • IZPELJAVE

3.1 Izpeljava togostne matrike

V izpeljavi je uporabljena Euler-Bernoullijeva teorija upogiba nosilcev kot poenostavitev linearne teorije elastičnosti, ki omogoča izračun upogibnice nosilcev za znano prečno obtežbo. Ta teorija temelji na dveh glavnih predpostavkah: ravni preseki ostajajo ravni tudi po deformaciji; in presek nosilca, ki je bil pravokoten na nevtralno os pred deformacijo nosilca, ostane pravokoten na nevtralno os tudi po deformaciji nosilca. Diferencialna enačba (DE) upogiba ravnih simetričnih nosilcev ($I_{yz}=0$), ki je podana v številnih referencah (Reddy,1994), je za nerazpokane nosilce podana v obliki:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\cdot\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right)=q(x) \qquad 0<x<L\,, \tag{1}$$

kjer $v(x)$ predstavlja prečni premik težiščne osi nosilca zaradi zvezne prečne obtežbe $q(x)$ kot funkcijo koordinate x. Ker je diferencialna enačba (1) četrtega reda, so za določitev integracijskih konstant potrebni štirje robni pogoji, ki pa so odvisni od načina podpiranja. Pogoji se lahko nanašajo na informacije o pomikih, njihovih odvodih (t. i. zasukih), prečnih silah in upogibnih momentih.

Pri iskanju rešitve s končnimi elementi se diferencialna enačba pretvori v ustrezno šibko obliko:

$$\int_{x=0}^{L}\left(EI(x)\cdot\frac{d^2w(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2v(x)}{dx^2}-w(x)\cdot q(x)\right)\cdot dx+\left(w(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(EI(x)\cdot\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right)-\frac{dw(x)}{dx}\cdot EI(x)\cdot\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right)\Bigg|_0^L=0\,, \tag{2}$$

kjer je $w(x)$ utežna funkcija.

Kadar obravnavamo standardni nerazpokani končni element dolžine L s štirimi prostostnimi stopnjami, lahko iščemo numerično rešitev diferencialne enačbe v naslednji splošni obliki popolnega polinoma:

$$v_N(x)=a_1+a_2\cdot x+a_3\cdot x^2+a_4\cdot x^3 \quad 0\le x\le L\,, \tag{3}$$

kjer so neznane konstante a_1, a_2, a_3 in a_4 pridobljene iz kinematičnih robnih pogojev. Za nekonstanten prečni prerez ta polinomska oblika ni enaka matematični obliki točne rešitve diferencialne enačbe, kar pomeni, da bo numerična rešitev, dobljena z enačbo (3), le približek točnih rešitev diferencialne enačbe.

Splošna rešitev se po navadi zapiše v obliki, v kateri je jasno razviden vpliv vsake od štirih prostostnih stopenj (prečnih pomikov Y_1 in Y_2 kot tudi vozliščnih zasukov ϕ_1 in ϕ_2), enačba (4):

$$v_N(x)=Y_1\cdot N_1(x)+\Phi_1\cdot N_2(x)+Y_2\cdot N_3(x)+\Phi_2\cdot N_4(x)\,, \tag{4}$$

kjer funkcije $N_i(x)$ $(i = 1, .., 4)$ predstavljajo interpolacijske funkcije, ki so kubični polinomi, in morajo izpolnjevati ustrezne kinematične robne pogoje pomikov (pri čemer mora veljati $v_N(0)=Y_1$ in $v_N(L)=Y_2$) in njihovih odvodov (pri čemer mora veljati $\frac{dv_N(0)}{dx}=\Phi_1$ in $\frac{dv_N(L)}{dx}=\Phi_2$). Vendar prečni pomiki celotnega narazpokanega elementa ne morejo biti opisati z enovito funkcijo, saj razpoka razdeli nosilec v dva elastična odseka. Zato so za dela levo in desno od razpoke potrebne različne interpolacijske funkcije:

$$v_{1,N}(x)=Y_1\cdot N_{1,1}(x)+\Phi_1\cdot N_{1,2}(x)+Y_2\cdot N_{1,3}(x)+\Phi_2\cdot N_{1,4}(x) \qquad 0\le x\le L_1 \tag{5}$$

$$v_{2,N}(x)=Y_1\cdot N_{2,1}(x)+\Phi_1\cdot N_{2,2}(x)+Y_2\cdot N_{2,3}(x)+\Phi_2\cdot N_{2,4}(x) \qquad L_1\le x\le L \tag{6}$$

Interpolacijske funkcije morajo izpolnjevati ne samo standardnih kinematičnih robnih pogojev, temveč tudi kinematične pogoje zveznosti pomikov in njihovih odvodov kot tudi pogoje zveznosti prečnih sil in upogibnih momentov na mestu razpoke. V skladu s predpostavkami, ki so jih predstavili Okamura in sodelavci in so privzete v prikazanih izpeljavah, na mestu razpoke nastopi enakost pomikov ($v_{1,N}(L_1)=v_{1,N}(L_1)$), enakost momentov (kar vodi do $v_{1,N}''(L_1)=v_{1,N}''(L_1)$) ter prečnih sil (kar vodi do $v_{1,N}'''(L_1)=v_{1,N}'''(L_1)$). Pojav odprtja razpoke pa povzroči nezveznost zasukov na mestu razpoke, in odprtje razpoke oz. razlika obeh zasukov na mestu razpoke je povezano z upogibnim momentom v tej točki, kar vodi do pogoja $EI(L_1)\cdot v_{1,N}''(L_1)=K_r\cdot(v_{2,N}'(L_1)-v_{1,N}'(L_1))$.

Ustrezne interpolacijske funkcije so tako:

$$N_{1,1}=\frac{\overline{L}-3\cdot a_1\cdot x^2+a_2\cdot x^3}{\overline{L}} \qquad (7)$$

$$N_{1,2}=\frac{\overline{L}\cdot x+a_3\cdot x^2+a_1\cdot x^3}{\overline{L}} \qquad (8)$$

$$N_{1,3}=\frac{3\cdot a_1\cdot x^2-a_2\cdot x^3}{\overline{L}} \qquad (9)$$

$$N_{1,4}=\frac{a_4\cdot x^2+a_5\cdot x^3}{\overline{L}} \qquad (10)$$

$$N_{2,1}=\frac{a_6+a_7\cdot x-3\cdot a_1\cdot x^2+a_2\cdot x^3}{\overline{L}} \qquad (11)$$

$$N_{2,2}=\frac{a_8+a_9\cdot x+a_3\cdot x^2+a_1\cdot x^3}{\overline{L}} \qquad (12)$$

$$N_{2,3}=\frac{a_7\cdot L_1-a_7\cdot x+3\cdot a_1\cdot x^2-a_2\cdot x^3}{\overline{L}} \qquad (13)$$

$$N_{2,4}=\frac{-a_{10}\cdot L_1+a_{10}\cdot x+a_4\cdot x^2+a_5\cdot x^3}{\overline{L}} \qquad (14)$$

z naslednjimi okrajšavami:

$a_1=L^2+2\cdot L_1\cdot\Psi$

$a_2=2\cdot L+2\cdot\Psi$

$a_3=-2\cdot L^3-6\cdot L_1^2\cdot\Psi$

$a_4=-L^3+6\cdot(L_1-L)\cdot L_1\cdot\Psi$

$a_5=L^2+2\cdot(L-L_1)\cdot\Psi$

$a_6=L^4+L^2\cdot(4\cdot L-6\cdot L_1)\cdot\Psi$

$a_7=6\cdot L\cdot(-L+2\cdot L_1)\cdot\Psi$

$a_8=L^2\cdot L_1\cdot(4\cdot L-6\cdot L_1)\cdot\Psi$

$a_9=L^4+6\cdot L\cdot L_1\cdot(-L+2\cdot L_1)\cdot\Psi$

$a_{10}=2\cdot L^2\cdot(-L+3\cdot L_1)\cdot\Psi$

$\overline{L}=L\cdot(L^3+4\cdot L^2\cdot\Psi+12\cdot(L_1-L)\cdot L_1\cdot\Psi)$

z $\Psi=\frac{EI(L_1)}{K_r}$.

Funkcije zapišemo v vektorski obliki kot:

$$\{N_1(x)\}=\begin{Bmatrix}N_{1,1}\\N_{1,2}\\N_{1,3}\\N_{1,4}\end{Bmatrix} \text{ in } \{N_2(x)\}=\begin{Bmatrix}N_{2,1}\\N_{2,2}\\N_{2,3}\\N_{2,4}\end{Bmatrix} \qquad (15)$$

Togostno matriko končnega elementa SLWCB izpeljemo iz celotne deformacijske energije normalnih specifičnih deformacij ε_x, shranjene v nosilcu, kot:

$$[K_e]=\int_{x=0}^{L_1}EI(x)\cdot\frac{d^2\{N_1(x)\}}{dx^2}\cdot\frac{d^2\{N_1(x)\}^T}{dx^2}\cdot dx+\int_{x=L_1}^{L}EI(x)\cdot\frac{d^2\{N_2(x)\}}{dx^2}\cdot\frac{d^2\{N_2(x)\}^T}{dx^2}\cdot dx+K_r\cdot\left(\left.\frac{d\{N_1(x)\}}{dx}\right|_{x=L_1}-\left.\frac{d\{N_2(x)\}}{dx}\right|_{x=L_1}\right)\cdot\left(\left.\frac{d\{N_1(x)\}}{dx}\right|_{x=L_1}-\left.\frac{d\{N_2(x)\}}{dx}\right|_{x=L_1}\right)^T \qquad (16)$$

Iz enačbe (16) sta jasno vidna ločena prispevka obeh elastičnih delov nosilca kot tudi rotacijske vzmeti. Integracija tako vodi do:

$$[k]=\frac{E\cdot h^3\cdot L}{12\cdot\overline{L}^2}\cdot\begin{bmatrix}9\cdot a_1^2 & -3\cdot a_1\cdot a_3 & -9\cdot a_1^2 & -3\cdot a_1\cdot a_4\\ -3\cdot a_1\cdot a_3 & a_3^2 & 3\cdot a_1\cdot a_3 & a_3\cdot a_4\\ -9\cdot a_1^2 & 3\cdot a_1\cdot a_3 & 9\cdot a_1^2 & 3\cdot a_1\cdot a_4\\ -3\cdot a_1\cdot a_4 & a_3\cdot a_4 & 3\cdot a_1\cdot a_4 & a_4^2\end{bmatrix}\cdot 2\cdot(b_0+b_L)$$

$$+\frac{E\cdot h^3\cdot L}{12\cdot\overline{L}^2}\cdot\begin{bmatrix}-6\cdot a_1\cdot a_2 & -3\cdot a_1^2+a_2\cdot a_3 & 6\cdot a_1\cdot a_2 & a_2\cdot a_4-3\cdot a_1\cdot a_5\\ -3\cdot a_1^2+a_2\cdot a_3 & 2\cdot a_1\cdot a_3 & 3\cdot a_1^2-a_2\cdot a_3 & a_1\cdot a_4+a_3\cdot a_5\\ 6\cdot a_1\cdot a_2 & 3\cdot a_1^2-a_2\cdot a_3 & -6\cdot a_1\cdot a_2 & 3\cdot a_1\cdot a_5-a_2\cdot a_4\\ a_2\cdot a_4-3\cdot a_1\cdot a_5 & a_1\cdot a_4+a_3\cdot a_5 & 3\cdot a_1\cdot a_5-a_2\cdot a_4 & 2\cdot a_4\cdot a_5\end{bmatrix}\cdot 2\cdot L\cdot(b_0+2\cdot b_L)$$

$$+\frac{E\cdot h^3\cdot L}{12\cdot\overline{L}^2}\cdot\begin{bmatrix}a_2^2 & a_1\cdot a_2 & -a_2^2 & a_2\cdot a_5\\ a_1\cdot a_2 & a_1^2 & -a_1\cdot a_2 & a_2\cdot a_4\\ -a_2^2 & -a_1\cdot a_2 & a_2^2 & -a_2\cdot a_5\\ a_2\cdot a_5 & a_2\cdot a_4 & -a_2\cdot a_5 & a_5^2\end{bmatrix}\cdot 3\cdot L^2\cdot(b_0+3\cdot b_L)$$

$$+\frac{K_r}{\overline{L}^2}\cdot\begin{bmatrix}a_7^2 & a_7\cdot(a_9-\overline{L}) & -a_7^2 & a_{10}\cdot a_7\\ a_7\cdot(a_9-\overline{L}) & (a_9-\overline{L})^2 & -a_7\cdot(a_9-\overline{L}) & a_{10}\cdot(a_9-\overline{L})\\ -a_7^2 & -a_7\cdot(a_9-\overline{L}) & a_7^2 & -a_{10}\cdot a_7\\ a_{10}\cdot a_7 & a_{10}\cdot(a_9-\overline{L}) & -a_{10}\cdot a_7 & a_{10}^2\end{bmatrix} \qquad (17)$$

Prepričati se je mogoče, da za enotno širino (b_o = b_L) predstavljena togostna matrika preide v že znano obliko za prečno razpokane nosilce z enotno širino (Skrinar, 1996).

3.2 Izpeljava obtežnega vektorja zaradi linearno porazdeljene prečne zvezne obtežbe

Izpeljan je bil še obtežni vektor zaradi linearno razporejene prečne obtežbe po celotnem končnem elementu. Najprej je bila določena linearna funkcija $q(x)$ porazdelitve zvezne obtežbe (q_2 in q_1 sta vrednosti obtežbe v končnem in začetnem vozlišču), nato pa je bil obtežni vektor izračunan kot:

$$\{F_e\}=\int_{x=0}^{L_1}q(x)\cdot\{N_1(x)\}\cdot dx+\int_{x=L_1}^{L}q(x)\cdot\{N_2(x)\}\cdot dx \qquad (18)$$

Če sta nadomestna vozliščna sila F_{n2} in upogibni moment M_{n2} v vozlišču 2 definirana kot:

$$F_{n2}=\frac{10\cdot a_7\cdot(L-L_1)^2\cdot(L_1\cdot(q_1-q_2)-L\cdot q_{1,2})+3\cdot L^4\cdot(5\cdot a_1\cdot q_{1,3}-a_2\cdot L\cdot q_{1,4})}{60\cdot L\cdot\overline{L}} \qquad (19)$$

$$M_{n2}=\frac{10\cdot a_{10}\cdot(L-L_1)^2\cdot(L_1\cdot(q_2-q_1)+L\cdot q_{1,2})+L^4\cdot(5\cdot a_4\cdot q_{1,3}+3\cdot a_5\cdot L\cdot q_{1,4})}{60\cdot L\cdot\overline{L}} \qquad (20)$$

z:

$q_{i,j}=i\cdot q_1+j\cdot q_2$,

potem lahko celotni obtežni vektor zaradi linearno porazdeljene obtežbe zapišemo kot:

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}q_{1,1}\cdot L/2-F_{n2}\\ q_{1,2}\cdot L^2/6-F_{n2}\cdot L-M_{n2}\\ F_{n2}\\ M_{n2}\end{Bmatrix} \qquad (21)$$

Ta vektor je uporaben tudi, kadar je nosilec obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo ($q_1=q_2$).

3.3 Uporaba modela v problemih uklona/stabilnosti

Prikazane interpolacijske funkcije lahko uporabimo tudi za pridobitev pripadajoče geometrijske togostne matrike elementa, kot:

$$[k_g]=\int_{x=0}^{L_1}\frac{d\{N_1(x)\}}{dx}\cdot\frac{d\{N_1(x)\}^T}{dx}\cdot dx+\int_{x=L_1}^{L}\frac{d\{N_2(x)\}}{dx}\cdot\frac{d\{N_2(x)\}^T}{dx}\cdot dx \qquad (22)$$

Ker interpolacijske funkcije (enačbe (7)–(14)) kot tudi izračun geometrijske togostne matrike ne upoštevajo upogibne togosti, enačba (22) vodi do že znane geometrijske togostne matrike za nosilec z eno prečno razpoko in konstantno širino (Skrinar, 2007).

4 • NUMERIČNE ŠTUDIJE

Z namenom prikaza uporabe izpeljanih koeficientov togostne matrike, obtežnega vektorja in interpolacijskih funkcij za izračun prečnih premikov kot tudi za demonstracijo kvalitete dobljenih numeričnih rešitev z uporabo poenostavljenega računskega modela so predstavljene tri numerične analize nosilcev z linearno spreminjajočo širino. Razlikujejo se po geometrijskih lastnostih, robnih pogojih, uporabljenih obtežbah ter številu in lokacijah razpok.

Za vsak primer sta bili pripravljeni dve različni rešitvi z uporabo dveh modelov linijskih končnih elementov. Prvi računski model je sestavljen iz izpeljanih končnih elementov SLWCB. Najmanjše število uporabljenih končnih elementov pri analizi upogiba je bilo pogojeno s številom razpok vsakega problema. V nekaterih primerih (predvsem pri analizah uklona) pa so bile potrebne dodatne diskretizacije, da bi se izboljšala konvergenca rezultatov. Za ta model, ki je sestavljen izključno iz linijskih končnih elementov, je bila za izračun togosti rotacijske vzmeti med vsemi znanimi definicijami izbrana definicija Okamure. Pri vseh primerih je bila za vse razpoke upoštevana relativna globina razpoke 0,5, da bi se čim bolj zmanjšal njen vpliv na rezultate. Na osnovi vrednosti, ki sta jih predstavila Vestroni in Pau (Vestroni, 2011), je bilo namreč ugotovljeno, da kombinacija izbrane definicije in izbrane relativne globine daje rezultate, ki so izkazali dobro ujemanje z eksperimentalno pridobljenimi vrednostmi. Vzporedno z uporabo končnih elementov SLWCB je bil za vsak primer uporabljen dodaten računski model, kjer so bili uporabljeni linijski končni elementi razpokanih konstantnih prečnih presekov.

Kakovost rezultatov, pridobljenih iz linijskih modelov nosilcev, je bila dodatno preverjena z rezultati iz podrobnih modelov, pridobljenih z uporabo modela 3D končnih elementov, v katerih so bile razpokanosti obravnavanih elementov modelirane z diskretnimi razpokami, torej kot diskontinuitete v geometriji nosilcev.

4.1 Prvi primer – upogib konzole

V prvem primeru je obravnavana konzola z linearno spremenljivo širino dolžine L = 4 m. Upoštevana sta bila modul elastičnosti E= 30 GPa in Poissonov količnik ν= 0.3. Prečni prerez je bil pravokotnik z višino h = 0,4 m, kjer se je širina b linearno povečevala od 0,2 m na levem koncu do 0,4 m na desnem koncu. Konzola je bila vpeta na desni strani in edina prečna razpoka je bila na razdalji 2 m od levega, prostega konca. Analizirana sta bila dva obtežna primera.

4.1.1 Prvi obtežni primer – enakomerna zvezna obtežba

V prvem obtežnem primeru je bila konzola obtežena prečno navzdol z enakomerno obtežbo q = 30000 N/m vzdolž celotne konstrukcije.

Najprej sta bili rešeni vezani diferencialni enačbi upogiba poenostavljenega modela. Da bi izračunali funkciji prečnih pomikov vzdolž konstrukcije, je bilo treba analizirati dve elastični regiji (levo in desno od razpoke). Dobljeni natančni rešitvi modela sta:

$$
\begin{aligned}
v_1(x) &= 0.1464 + 7.897\cdot 10^{-2}\cdot x + 3.75\cdot 10^{-3}\cdot x^2 - 3.125\cdot 10^{-4}\cdot x^3 - 0.12\cdot \mathrm{Ln}(4+x) \\
&\quad - 0.03\cdot x\cdot \mathrm{Ln}(4+x) \qquad 0\ \mathrm{m} \le x \le 2\ \mathrm{m} \\
v_2(x) &= 0.1495 + 7.738\cdot 10^{-2}\cdot x + 3.75\cdot 10^{-3}\cdot x^2 - 3.125\cdot 10^{-4}\cdot x^3 - 0.12\cdot \mathrm{Ln}(4+x) \\
&\quad - 0.03\cdot x\cdot \mathrm{Ln}(4+x) \qquad 2\ \mathrm{m} \le x \le 4\ \mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Prečni premik na prostem koncu je znašal -2.0005 cm navzdol, vrednost protiurnega zasuka pa $7.3858\cdot 10^{-3}$ rad. Obe vrednosti sta bili potrjeni z virtualnim delom.

Nato so bile opravljene analize s končnimi elementi. V prvem modelu končnih elementov je bila konzola modelirana z enim standardnim razpokanim končnim elementom povprečne enakomerne širine b = 0,3 m.

Nato sta bili proučeni dve diskretizaciji s končnimi elementi SLWCB. V prvi diskretizaciji je bil za analizo uporabljen en sam končni element SLWCB. Po upoštevanju robnih pogojev v desnem vozlišču sta bili diskretni vrednosti pomika in zasuka v levem vozlišču izračunani z rešitvijo sistema dveh linearnih enačb:

$$
\begin{bmatrix} 9\cdot 10^{6} & 16.48286\cdot 10^{6} \\ 16.48286\cdot 10^{6} & 39.03428\cdot 10^{6} \end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{Bmatrix} v_1 \\ \Phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -60000 \\ -44828.614 \end{Bmatrix}
$$

Dobljeni diskretni vrednosti vertikalnega pomika in zasuka prostega konca sta omogočili tudi formalni izračun navpične reakcije in upogibnega momenta v vpetem koncu. Ti vrednosti reakcij sta popolnoma ustrezali točnima vrednostma, ki ju je mogoče preprosto preveriti z elementarnimi ravnotežnimi pogoji.

Sledil je izračun porazdelitve prečnih pomikov vzdolž osi konstrukcije z uporabo polinomskih interpolacijskih funkcij, enačbi (5)–(6). Dobljeni sta bili naslednji funkciji prečnih pomikov:

$$
v_1(x) = -2.0134\cdot 10^{-3} + 7.3535\cdot 10^{-3}\cdot x + 3.2031\cdot 10^{-4}\cdot x^2 - 1.6960\cdot 10^{-4}\cdot x^3 \qquad 0\ \mathrm{m} \leqq x \leqq 2\ \mathrm{m}
$$

$$
v_2(x) = -1.6583\cdot 10^{-2} + 5.5781\cdot 10^{-3}\cdot x + 3.2031\cdot 10^{-4}\cdot x^2 - 1.6960\cdot 10^{-4}\cdot x^3 \qquad 2\ \mathrm{m} \leqq x \leqq 2\ \mathrm{m}
$$

Njuni obliki se jasno in bistveno razlikujeta od rešitev diferencialnih enačb, enačbi (23). Kljub temu je primerjava numeričnih vrednosti pokazala, da so razlike precej majhne. Odstopanja so se spreminjala od -0.129 mm na prostem koncu (napaka 0,645 %) do 0.215 mm (-3.754 % napake) na mestu razpoke.

Da bi se proučila konvergenca modela in hkrati dodatno prikazala uporabnost predstavljenega elementa pri analizi nerazpokanih nosilcev, je bil problem ponovno analiziran z uporabo dveh končnih elementov SLWCB enakih dolžin. Razpoka je bila modelirana na desnem koncu prvega, levega končnega elementa. Čeprav je bil drugi končni element nerazpokan, je bila ustrezna togostna matrika dobljena s končnim elementom razpokanega nosilca z uporabo ustrezno majhne vrednosti za globino razpoke. Diskretne neznane vrednosti dveh vertikalnih premikov in dveh zasukov so bile izračunane s pomočjo rešitve sistema štirih linearnih enačb.

Na koncu je bila konstrukcija analizirana tudi z uporabo komercialnega programa COSMOS-/M. Računalniški model je sestavljalo 48.000 3D »solid« končnih elementov z 74.538 vozlišči. V vsakem vozlišču so bile upoštevane tri prostostne stopnje – vertikalni in dva horizontalna pomika. Vertikalni in horizontalni premiki diskretnih točk modela so bili dobljeni z rešitvijo sistema 223.335 linearnih enačb.

Vrednosti prečnega pomika prostega konca vseh obravnavanih pristopov so podane v preglednici 1, kjer so podani tudi rezultati za prečni pomik na mestu razpoke.

Iz preglednice je očitno odlično ujemanje rezultatov med rešitvami DE in modela 3D

Model/pristop	Prosti konec	Mesto razpoke
1 KE z enotno širino	-1,54551 cm	-0,43103 cm
1 SLWCB KE	-2,01341 cm	-0,55026 cm
2 SLWCB KE	-2,00184 cm	-0,57192 cm
DE	-2,00050 cm	-0,57172 cm
COSMOS/M	-2,01951 cm	-0,57833 cm

Preglednica 1 • **Primerjava prečnih pomikov iz različnih računskih modelov.**

končnih elementov in zato so bile te vrednosti upoštevane kot referenčne vrednosti za modele iz linijskih končnih elementov.

Kot je bilo pričakovano, je model s končnim elementom z enotno povprečno širino vodil do najslabše ocene prečnega premika prostega konca (z napako -23,471 % glede na model 3D KE). Kakovost rezultata je še nekoliko slabša na mestu razpoke, kjer je ta model podcenil vrednost iz 3D-modela za -25,469 %.

Diskretizacija z uporabo enega samega končnega elementa SLWCB je že vodila do opazno boljših rezultatov. Napaki glede na model 3D KE sta za prosti konec in mesto razpoke znašali 0,302 % oziroma -4,853 %, za zasuk prostega konca pa je nastopila napaka v vrednosti -0,437 % glede na rešitev DE (vrednost zasuka v modelu 3D končnih elementov ni bila izračunana).

Iz preglednice pa je očitno, da so najboljši rezultati med modeli z uporabo linijskih končnih elementov dobljeni z modelom, ki ga sestavljata dva končna elementa SLWCB. Ta model je prinesel skoraj idealno ujemanje rezultatov tako z rešitvami DE kot tudi z rezultati modela 3D končnih elementov. Za premik in zasuk prostega konca sta namreč sledili napaki 0.067 % in -0.045 %. Prav tako je bila bistveno boljša vrednost ocenjenega premika na mestu razpoke, saj se je odstopanje zmanjšalo na -1.108 %.

Uporaba izračunanih diskretnih vozliščnih vrednosti v polinomskih interpolacijskih funkcijah je omogočila še dodaten izračun funkcij prečnih pomikov. Zelo dobro ujemanje premikov je razvidno za vse točke vzdolž konzole, slika 1, kjer zvezne funkcije pomikov iz modela nosilca vizualno popolnoma sovpadajo z diskretnimi vozliščnimi vrednostmi iz 3D-modela. Ujemanje rezultatov je odlično tudi pri primerjavi teh prečnih pomikov s točnimi rešitvami diferencialnih enačb.

L_1	1 SLWCB KE	2 SLBCW KE	DE	COSMOS/M
0*	-1,69231 cm	-1,68308 cm	-1,68223 cm	-1,69106 cm
0.5	-1,70026 cm	-1,68973 cm	-1,68886 cm	-1,69788 cm
1.0	-1,74023 cm	-1,73116 cm	-1,72997 cm	-1,74065 cm
1.5	-1,84071 cm	-1,82957 cm	-1,82871 cm	-1,84271 cm
2	-2,01341 cm	-2,00184 cm	-2,00050 cm	-2,01951 cm
2.5	-2,26779 cm	-2,25689 cm	-2,25604 cm	-2,28127 cm
3.0	-2,61315 cm	-2,60386 cm	-2,60295 cm	-2,63502 cm
3.5	-3,05764 cm	-3,04767 cm	-3,04682 cm	-3,08557 cm

* nerazpokano stanje

Preglednica 2 • **Primerjava prečnih pomikov za različne lokacije razpoke.**

Razpoka je bila nato modelirana na več mestih vzdolž konstrukcije in prečni pomiki prostega konca so bili primerjani z rezultati modela 3D končnih elementov, preglednica 2. Namen te primerjave je bilo preučevanje vpliva položaja razpoke na deformacijo prostega konca.

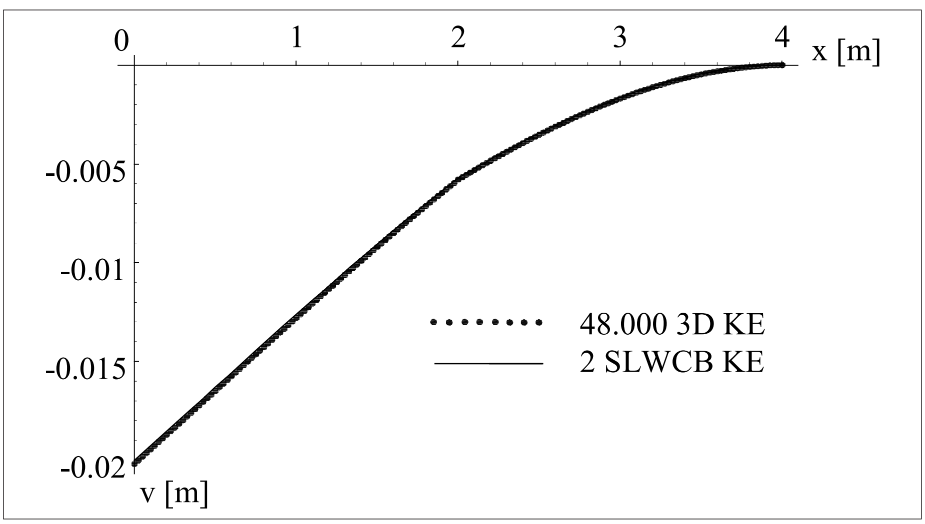
Tudi iz preglednice 2 je razvidno odlično ujemanje med rezultati modela 2 SLWCB končnih elementov proti vrednostim iz diferencialnih enačb ter modela 3D končnih elementov (zadnji trije stolpci).

4.1.2 Drugi obtežni primer – linearno porazdeljena obtežba

Nato je bila narejena analiza konzole, obremenjene z linearno porazdeljeno obtežbo $q(x)$, delujočo navpično navzdol, ki se je povečevala od vrednosti 15000 N/m na prostem robu konstrukcije do 30000 N/m ob vpetju. Za ta primer obtežbe sta bili najprej ponovno rešeni ustrezni diferencialni enačbi; za obstoječa modela linijskih končnih elementov pa so bili ponovno izračunani samo obtežni vektorji. Nadalje je bil tvorjen dodatni model z dvema linijskima končnima elementoma z odsekovno konstantnima širinama. Rezultati za prečna premika prostega konca ter mesta razpoke iz vseh uporabljenih modelov so zbrani v preglednici 3.

Model/pristop	Prosti konec	Mesto razpoke
1 KE z enotno širino	-1,45232 cm	-0,40991 cm
2 KE z enotnima širinama	-1,29587 cm	-0,39107 cm
1 SLWCB KE	-1,25732 cm	-0,34939 cm
2 SLWCB KE	-1,24736 cm	-0,36789 m
DE	-1,24640 cm	-0,36766 cm
COSMOS/M	-1,25891 cm	-0,37277 cm

Preglednica 3 • **Primerjava prečnih premikov za različne računske modele.**



Slika 1 • **Primerjava prečnih premikov iz obeh uporabljenih modelov končnih elementov.**

Tudi za ta primer obtežbe je iz preglednice 3 razvidno odlično ujemanje rezultatov diferencialnih enačb z modelom 3D končnih elementov.

Model z enim končnim elementom z enakomerno povprečno širino je ponovno vodil do najslabših rezultatov. Napaka proti modelu 3D končnih elementov je na prostem koncu znašala 15.364 % (manjša vrednost kot pri enakomerni zvezni obtežbi), medtem ko je bila razlika nekoliko manjša na mestu razpoke, kjer je bilo odstopanje 9.965 %. Vrednosti napak sta se opazno zmanjšali na

2,936 % (za prosti konec) in 4,911 % (za mesto razpoke), ko je bil model izboljšan z uporabo dveh končnih elementov odsekovno konstantnih širin. Čeprav so se rezultati približali pravilnim vrednostim, je njihova konvergenca očitno počasna. Boljše rezultate na prostem koncu je dosegel celo model z enim končnim elementom SLWCB, saj sta napaki proti modelu 3D končnih elementov znašali -0.126 % in -6.270 %. Najboljše ujemanje rezultatov glede na rešitve diferencialnih enačb ter rezultate iz modela 3D končnih elementov z majhnima napakama -0.917 % in -1.307 % za pomik na prostem koncu oz. na mestu razpoke je prinesel model z dvema končnima elementoma SLWCB. Čeprav sta ti dve vrednosti odstopanj nekoliko višji od primerljivih napak pri obteženem primeru z enakomerno zvezno obtežbo, predstavljata odlično ujemanje. Funkcije prečnih pomikov so bile nadalje pridobljene z uporabo polinomskih interpolacijskih funkcij in ponovno je bilo opaženo dobro ujemanje premikov za vse točke vzdolž konzole.

4.2 Drugi primer – upogib nosilca

V drugem primeru je bil opazovan nosilec dolžine L = 6 m, ki je bil na levem koncu polno vpet, na desnem pa členkasto priključen. Lastnosti materiala sta ponovno bili E = 30 GPa in ν = 0,3. Prečni prerez je bil pravokotnik z višino h = 0,30 m, kjer se je širina b linearno zmanjševala z b = 0,4 m na levem, polnovpetem koncu do b = 0,2 m na desnem, členkasto podprtem koncu. Uvedeni sta bili dve razpoki, ki sta bili na razdaljah 1,5 m in 4,5 m od leve strani. Zaradi prisotnosti dveh razpok je bil potreben računski model z najmanj dvema linijskima končnima elementoma.

Obravnavala sta se dva obtežna primera. V prvem primeru je bila konstrukcija obtežena s točkovno prečno silo F = 100000 N v sredini razpona, medtem ko je bila v drugem primeru konstrukcija obtežena z navpično navzdol delujočo enakomerno obtežbo q = 30000 N/m vzdolž celotne konstrukcije

4.2.1 Prvi obtežni primer – točkovna prečna sila

Najprej je bil analiziran model z dvema končnima elementoma SLWCB enakih dolžin. Naknadno je bil pripravljen še dodaten model z dvema linijskima končnima elementoma konstantnih širin (uporabljeni širini 0,35 m in 0,25 m sta bili dobljeni kot povprečni vrednosti dejanskih širin).

Za vsak linijski model so bile iz pripadajočih sistemov treh linearnih enačb pridobljene diskretne vozliščne vrednosti premika pod točkovno silo kot tudi dveh zasukov (pod silo in nad podporo).

Za obravnavano konstrukcijo so bile rešene tudi štiri pripadajoče vezane diferencialne enačbe, s čimer so bile dobljene natančne rešitve poenostavljenega modela.

Četrti sklop rezultatov je bil pridobljen iz detajlnega modela 3D končnih elementov, ki je bil generiran v programu COSMOS/M.

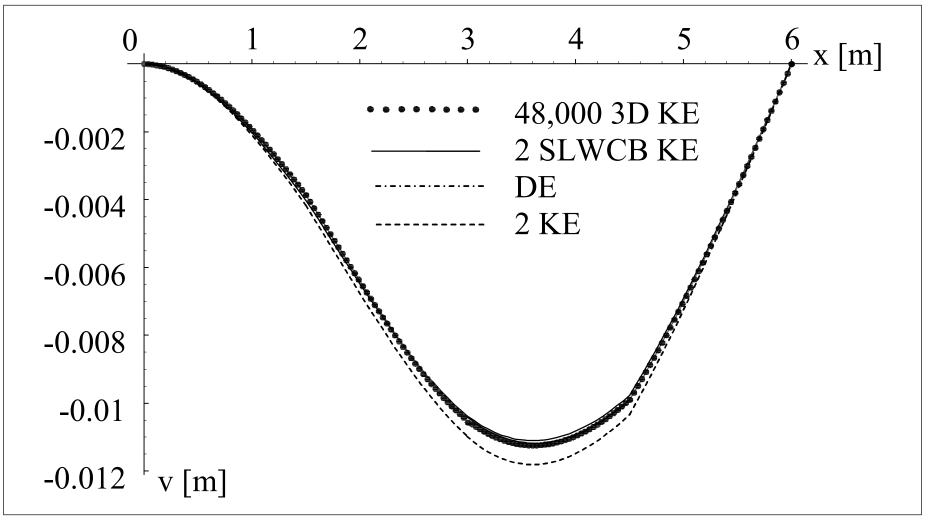
Dobljene vrednosti za prečni premik v pod točkovno silo, vertikalni reakciji ter upogibni moment za levi, vpeti konec so povzete v preglednici 4.

Iz preglednice je razvidno, da model 2 SLWCB končnih elementov očitno daje boljše ujemanje rezultatov kot model, v katerem sta bila uporabljena dva končna elementa konstantnih širin. Učinkovitost novega končnega elementa proti standardnemu razpokanemu končnemu elementu je še bolj očitna pri primerjavi prečnih pomikov vzdolž celotnega nosilca, slika 2.

model	2 SLWCB KE	2 razpokana KE	DE	COSMOS/M
v(3)	-1,0372 cm	-1,0981 cm	-1,0415 cm	-1,0566 cm
V_A	70831,507 N	70446,996 N	70833,703 N	70647,860 N
M_A	-124989,04 Nm	-122681,98 Nm	-125002,22 Nm	-123930,20 Nm
V_B	29168,493 N	29553,004 N	29166,297 N	29344,012 N

Preglednica 4 • **Nekatere reprezentativne vrednosti prvega obtežnega primera.**

S slike navidezno izhaja, kakor da rezultati iz modela SLWCB (pomiki v obliki zveznih polinomskih funkcij), diferencialnih enačb (pomiki kot kombinacija zveznih polinomov in logaritemskih funkcij) kot tudi model 3D KE (diskretne vozliščne vrednosti) predstavljajo identično rešitev. Čeprav se bistveno razlikujejo v matematični obliki funkcij, med polinomskimi funkcijami in rešitvami DE ni vidnejših razlik.



Slika 2 • **Primerjava prečnih premikov iz različnih računskih modelov.**

Hkrati pa je s slike 2 tudi razvidno, da rešitve iz modela, kjer sta bila uporabljena dva razpokana končna elementa s konstantnima prečnima prerezoma, očitno odstopajo od preostalih rešitev.

4.2.2 Drugi obtežni primer – enakomerna zvezna obtežba

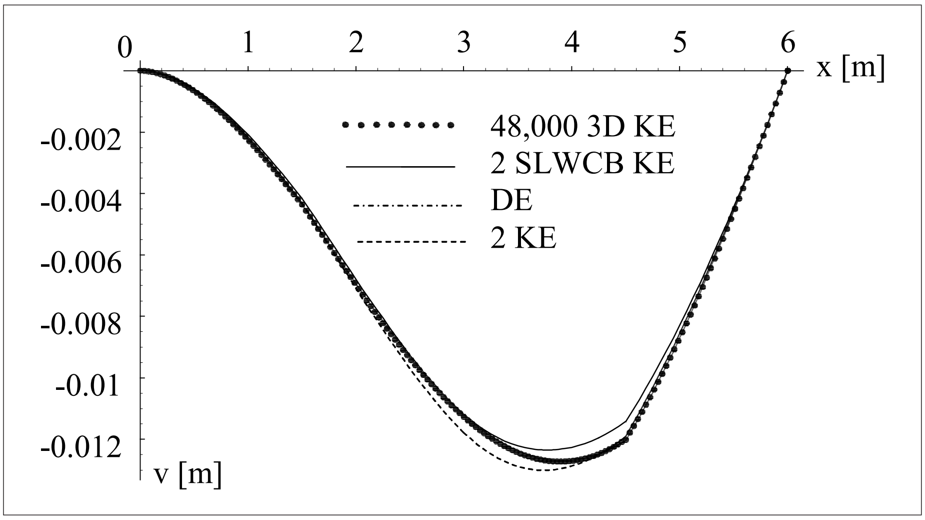
Pri drugem obtežnem primeru, kjer je bila aplicirana vertikalna enakomerna obtežba q = 1000 N/m, sta bili pri analizi z modeloma linijskih končnih elementov najprej uporabljeni že znani togostni matriki elementov konstrukcije iz prvega obtežnega primera, ponovno pa sta bila izračunana zgolj pripadajoča obtežna vektorja. Nato so bili pridobljeni štirje nizi vrednosti rešitev. Nekatere reprezentativne vrednosti so podane v preglednici 5.

Čeprav so vozliščne vrednosti modela 2 SLWCB KE izkazale dobro ujemanje z rešitvami diferencialnih enačb (preglednica 5), ujemanje vertikalnih pomikov med vozlišči ni bilo več tako dobro, slika 3.

Medtem ko je ujemanje rezultatov za levi končni element SLWCB skoraj popolno (in očitno boljše kot pri modelu, kjer sta bila uporabljena dva KE s konstantnima prečnima prerezoma), rezultati za desni končni element SLWCB kažejo vidno odstopanje.

model	2 SLWCB KE	2 KE	DE	COSMOS/M
V(3)	-1,1182 cm	-1,1784 cm	-1,1196 mm	-1,1239 cm
V_A	115531,16 N	115122.40 N	115587,10 N	115238,66 N
M_A	-153186,98 Nm	-150734,40 Nm	-153522,61 Nm	-151476,94 Nm
V_B	64468,84 N	64877,60 N	64412,90 N	64750,00 N

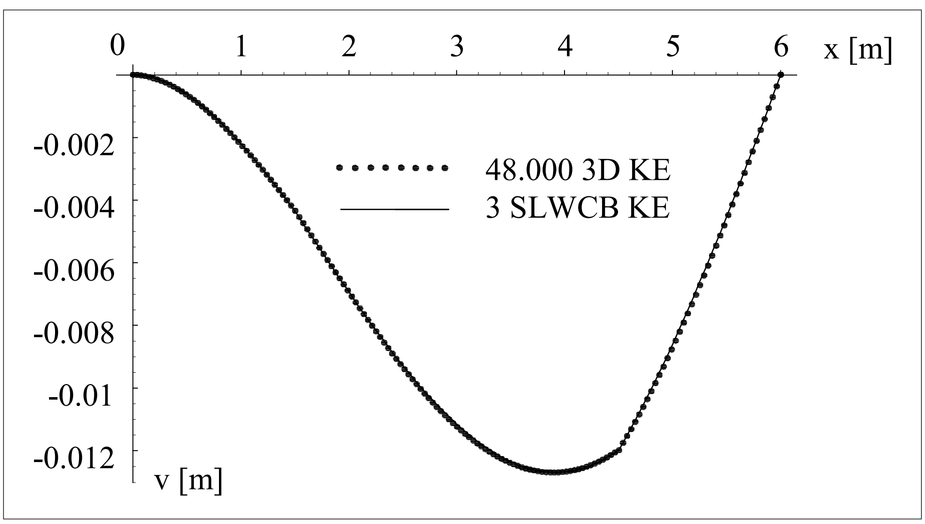
Preglednica 5 • **Nekatere reprezentativne vrednosti drugega obtežnega primera.**



Slika 3 • **Primerjava prečnih premikov iz različnih računskih modelov.**

model	3 SLWCB KE (2.2+1.6+2.2)	3 SLWCB KE (2+2+2)	DE	COSMOS/M
V_A	115574.04 N	115577,77 N	115587,10 N	115238,66 N
M_A	-153444.22 Nm	-153466,64 Nm	-153522,61 Nm	-151476,94 Nm
V_B	64425.963 N	64422,226 N	64412,90 N	64750,00 N
v_{max}	-1,2678 cm	-1,2689 cm	-1,2694 cm	-1,2694 cm

Preglednica 6 • **Nekatere reprezentativne vrednosti drugega obtežnega primera.**



Slika 4 • **Primerjava prečnih premikov iz različnih računskih modelov.**

Zato so bili proučeni dodatni računski modeli, ponovno sestavljeni zgolj iz dveh končnih elementov SLWCB, a s spremenjeno lokacijo notranjega vozlišča. Ko se je njegov položaj premaknil proti mestu največjega prečnega premika, je to rezultiralo v očitno boljše ujemanje rezultatov, saj je diskretizacija z elementoma dolžin 3,5 m in 2,5 m prinesla opazno boljše ujemanje.

V splošnem primeru pa je eden izmed načinov za izboljšanje rezultatov zgostitev mreže z uvajanjem dodatnih končnih elementov z novimi vozlišči. Zato so bile proučene različne diskretizacije, ki so se izvedle s tremi končnimi elementi SLWCB. Med vsemi analiziranimi diskretizacijami ni bilo opaziti bistvenih razlik, prav tako pa so se vse tudi zelo dobro ujemale z modelom 3D končnih elementov. Nekatere diskretne vrednosti so podane v preglednici 6, kjer so podani rezultati dveh različnih diskretizacij s 3 končnimi elementi SLWCB. V drugem stolpcu so podani rezultati za končne elemente dolžin 2.2 m, 1.6 m in 2.2 m, v tretjem pa za tri končne elemente enakih dolžin. Nadalje so v četrtem in petem stolpcu prikazane vrednosti, dobljene iz analitičnih rešitev diferencialnih enačb ter iz modela 3D končnih elementov (v programu COSMOS/M).

Odlično ujemanje rezultatov sedaj ni bilo opaženo samo v vozliščih, temveč tudi zunaj njih, kot je razvidno s slike 4, ki prikazuje rezultate modela, kjer so bili vsi trije končni elementi enakih dolžin (2,00 m).

4.3 Tretji primer – uklon konzolnega stebra

Za demonstracijo zmožnosti izpeljane togostne matrike končnega elementa SLWCB za analizo uklona je bil analiziran razpokani konzolni steber, ki je bil na prostem koncu obremenjen s tlačno točkovno silo. Dolžina stebra je bila 5,5 m. Njegov prečni prerez je bil pravokotnik s konstantno višino 0,4 m, medtem ko se je širina linearno zmanjševala od 0,4 m na vpetem koncu do 0,3 m na prostem koncu. Modul elastičnosti je bil 30 GPa, Poissonov količnik pa 0,3. Posamezna razpoka je bila ločeno vpeljana na več lokacijah.

Vsak primer je bil najprej analiziran z uporabo dveh različnih modelov linijskih končnih elementov. Prvi model je bil preprost stopničasti nosilec, sestavljen iz končnih elementov enakih dolžin z odsekovno enakomernimi širinami. Ta model je predstavljal osnovni približni model, saj sta bili obe matriki konstrukcije (togostna in geometrijska togostna matrika) pridobljeni z uporabo končnih elementov s konstantnimi preseki.

V drugem modelu je bila togostna matrika konstrukcije sestavljena iz togostih matrik končnih elementov SLWCB, geometrijska togostna matrika konstrukcije pa z uporabo končnih elementov s konstantnimi preseki.

Zaradi odsotnosti eksperimentalnih rezultatov je bila ta konstrukcija analizirana tudi z uporabo programa COSMOS/M s končnimi 3D-elementi, da je bil dobljen neodvisen primerljiv niz referenčnih vrednosti. Računski model je bil za vsak analizirani primer sestavljen iz 48.000 končnih 3D-elementov s skoraj 75.000 vozlišči. V vsakem vozlišču smo upoštevali tri prostostne stopnje – navpični in dva horizontalna pomika, rezultati pa so bili pridobljeni v 14 avtomatsko izvedenih iteracijah.

Kot prvi je bil upoštevan primer, ko je bila na razdalji 1 m od vpetega konca vpeljana razpoka globine 0,1 m in širine 0,38 m.

Pri obravnavah razpokanih konstrukcij na uklonsko silo vplivajo ne samo model razpoke, temveč tudi nosilca. V modelu z odsekovno konstantnimi preseki je širina modela nosilca na mestu razpoke tudi neposredno določala pripadajočo širino razpoke, ki je bila tako enaka širini končnega elementa, znotraj katerega je bila razpoka. Zato je sprememba diskretizacije vplivala tudi na spremembo širine razpoke, ki se je zato v večini primerov razlikovala od dejanske širine. Modelirana širina razpoke je tako s povečanjem števila končnih elementov oscilirajoče konvergirala k dejanski širini razpoke. To je posledično vplivalo na konvergenco rezultatov, ki je tako postala odsekovno nemonotono oscilirajoča s končnimi skoki. Rezultati za prvih 10 (od 30 skupno izvedenih za vsak model) diskretizacij z uporabo linijskih končnih elementov so zbrani v drugem stolpcu preglednice 7. Konvergenca rezultatov je postala monotona, ko je pri izračunu togosti razpoke bila upoštevana dejanska širina nosilca na mestu razpoke (tretji stolpec preglednice 7).

Model, ki je uporabljal končne elemente SLWCB, je avtomatično upošteval pravilno geometrijo in zato ni bilo nobenih težav pri modeliranju širine razpoke. Pripadajoči rezultati so predstavljeni v zadnjem stolpcu preglednice 7.

Analiza primera je bila zaključena z ovrednotenjem uklonske sile s pomočjo modela 3D končnih elementov, ki je izračunal vrednost 3,361604 MN.

Št. KE	KE nosilca a)	KE nosilca b)	SLWCB KE
1	3,185973	3,271341	3,415439
2	3,343203	3,361482	3,391464
3	3,380163	3,376129	3,388234
4	3,395982	3,380918	3,387521
5	3,404816	3,383191	3,387513
6	3,365899	3,384445	3,387472
7	3,376483	3,385259	3,387510
8	3,384274	3,385803	3,387503
9	3,390214	3,386152	3,387467
10	3,394897	3,386394	3,387461

Preglednica 7 • **Konvergenčna študija kritične uklonske sile P_{cr} (MN) za razpokani primer z L_1=1.0 m.**

Iz vseh izračunanih diskretizacij je mogoče zaključiti, da vsi modeli nosilca izkazujejo konvergenco proti mejni vrednosti modela 3.387453 MN. Ta vrednost izkazuje odstopanje 0.769 % glede na vrednost iz modela 3D KE in predstavlja napako poenostavljenega modela.

Očitno je, da je konvergenca modela, kjer se uporablja togostna matrika SLWCB, boljša. Končna vrednost se praktično pridobi z diskretizacijo s 6 končnimi elementi, medtem ko je pri uporabi enostavnejših končnih elementov potrebna diskretizacija s 100 KE, da bi se dobila enaka raven odstopanja.

L_1	5 SLWCB KE	COSMOS/M
–	4,814841	4,806246
5,0 m	4,756343	4,747441
4,5 m	4,594346	4,585473
4,0 m	4,372261	4.350744
3,5 m	4,137520	4,130735
3,0 m	3,921001	3,893775
2,5 m	3,736418	3,733602
2,0 m	3,586664	3,559050
1,5 m	3,502499	3,472600
1,0 m	3,387513	3,361604
0,5 m	3,333812	3,339315

Preglednica 8 • **Kritične uklonske sile P_{cr} (MN) za razpokani konzolni steber za različne položaje razpoke (L_1 predstavlja razdaljo od vpetega konca).**

Študija uklona je bila zaključena z analizami, v katerih je bila razpoka v razdaljah po 0,5 m ločeno uvedena na nadaljnjih 9 lokacijah znotraj konzole. Za vsak položaj razpoke je bilo proučenih več diskretizacij z uporabo končnih elementov SLWCB. V preglednici 8 so zbrani rezultati za vse situacije (v 2. vrstici so rezultati za nerazpokano konzolo). V drugem stolpcu so predstavljeni rezultati, dobljeni s 5 končnimi elementi SLWCB, medtem ko tretji stolpec prikazuje rezultate iz pripadajočega modela 3D končnih elementov.

Iz preglednice je razvidno, da ni opaznih bistvenih razlik med rezultati. Zato lahko ujemanje rezultatov iz dveh modelov končnih elementov, ki se opazno razlikujeta v predstavitvi mehanskega obašanja in tudi v računskih naporih, opisujemo za zelo dobro. Čeprav se največja razlika med modeloma pojavlja na mestu, kjer ima razpoka največji vpliv na rezultat, je ujemanje rezultatov še vedno izjemno dobro. Ko se lokacija razpoke približuje prostemu koncu, pa konvergenca rezultatov postane hitrejša, saj se odstopanje rezultatov zmanjšuje.

5 • ZAKLJUČKI

V tem članku smo proučevali analizo statičnih upogibov in uklonskih sil vitkih prečno razpokanih nosilcev z linearnim spreminjanjem širine z uporabo končnega elementa na osnovi modela, v katerem so bile prečne razpoke predstavljene s pomočjo rotacijske vzmeti. Ta poenostavljeni model je bil že večkrat uspešno uporabljen pri številnih izpeljavah končnih elementov razpokanih nosilcev. Njegova uporabnost je sedaj razširjena z izpeljavo togostne matrike in obtežnega vektorja zaradi linearne zvezne obtežbe linijskega končnega elementa z razpoko za analizo nosilcev z linearno spremenljivimi širinami. Ti koeficienti so predstavljeni v preprostih in zaključenih analitičnih oblikah.

V izpeljavah so bile uporabljene polinomske interpolacijske funkcije. Te funkcije ne predstavljajo točne matematične oblike rešitve diferencialne enačbe upogiba za nekonstanten prečni prerez, kar pomeni, da so numerične vrednosti, dobljene s predstavljenimi rešitvami, zgolj približki točnih rešitev.

Kljub temu so trije numerični primeri, ki sledijo izpeljavam, pokazali, da lahko predstavljene rešitve učinkovito uporabljamo za analizo upogiba in uklona, saj so vodile do rezultatov, ki so jih neodvisno potrdili bolj detajlni modeli 3D končnih elementov. Tako dobljeni izrazi, čeprav relativno kratki in kompaktni, zagotavljajo zanesljiv in učinkovit inženirski računski model.

Predstavljene rešitve omogočajo učinkovito modeliranje razpokanih linijskih elementov, ki jih na primer za betonske elemente zahteva standard Evrokod EC8 pri potresni analizi konstrukcij. Predstavljeni model KE daje odlično alternativo enostavnim numeričnim rešitvam, ki so predstavljene s predpisom. V primerjavi s precej elementarnim zmanjšanjem upogibne togosti elementa nosilca tako ponuja veliko bolj realistično obnašanje in boljšo natančnost ob hkratnem ohranjanju relativno majhnega računskega modela, medtem ko v nasprotju s podrobnimi 3D-modeli ponuja boljšo računsko učinkovitost brez bistvenega zmanjšanja zanesljivosti rezultatov.

6 • ZAHVALA

Avtor se zahvaljuje za delno finančno podporo Javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije (šifra programa P2-0129 (A), Razvoj, modeliranje in optimiranje objektov in procesov v gradbeništvu in prometu).

7 • LITERATURA

Bakhtiari-Nejad, F., Khorram, A., Rezaeian, M., Analytical estimation of natural frequencies and mode shapes of a beam having two cracks, International Journal of Mechanical Sciences 78, 193–202, 2014.

Bergan, P. G., Holand, I., Nonlinear finite element analaysis of concrete structures, Composer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 443–467, 1979.

Biondi, B., Caddemi, S., Euler-Bernoulli beams with multiple singularities in the flexural stiffness, European Journal of Mechanics - A/Solids 26(5), 789–809, 2007.

Cao, M., Radzieński, M., Xu, W., Ostachowicz, W., Identification of multiple damage in beams based on robust curvature mode shapes, Mechanical Systems and Signal Processing 46, 468–480, 2014.

Dimarogonas, A.D., Papadopulus, C.A., Vibration of cracked shafts in bending, Journal of Sound and Vibration 91(4), 583–593, 1983.

Gawande, S. H., More, R. R., Effect of Notch Depth & Location on Modal Natural Frequency of Cantilever Beams, Structures 8, 121–129, 2016.

Gounaris, G., Dimarogonas, A.D., A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis, Computers & Structures 28(3), 301–313, 1988.

Hasan, W.M., Crack detection from the variation of the eigenfrequencies of a beam on elastic foundation, Engineering Fracture Mechanics 52(3), 409–421, 1995.

Khiem, N. T., Toan, L. K., A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies, Journal of Sound and Vibration 333, 4084–4103, 2014a.

Khiem, N. T., Tran, H. T., A procedure for multiple crack identification in beam-like structures from natural vibration mode, Journal of Vibration and Control 20(9), 1417–1427, 2014b.

Krawczuk, M., Ostachowicz, W.M., Influence of a crack on the dynamic stability of a column, Journal of Sound and Vibration 167(3), 541–555, 1993.

Labib, A., Kennedy, D., Featherston, C., Free vibration analysis of beams and frames with multiple cracks for damage detection, Journal of Sound and Vibration 333, 4991–5003, 2014.

Labib, A., Kennedy, D., Featherston, C. A., Crack localisation in frames using natural frequency degradations, Computers & Structures 157, 51–59, 2015.

Rajab, M.D., Al-Sabeeh, A., Vibrational characteristics of cracked shafts, Journal of Sound and Vibration 147(3), 465–473, 1991.

Okamura, H., Liu, H.W., Chorng-Shin, C., A cracked column under compression, Engineering Fracture Mechanics 1, 547–564, 1969.

Ostachowicz, W.M., Krawczuk, M., Vibrational analysis of cracked beam, Computers & Structures 36-22, 245–250, 1990.

Palmeri, A., Cicirello, A., Physically-based Dirac's delta functions in the static analysis of multi-cracked Euler-Bernoulli and Timoshenko beams, International Journal of Solids and Structures 48(14-15), 2184–2195, 2011.

Reddy, J. N., An Introduction to the Finite Element Method, 2. izd., McGraw-Hill,1994.

SIST, SIST EN 1992–1–1:2005, Evrokod 2, Projektiranje betonskih konstrukcij–Del 1–1, Splošna pravila in pravila za stavbe, Slovenski inštitut za standardizacijo, Ljubljana, str. 227, 2005.

Skrinar, M., Umek, A., Ravninski linijski končni element nosilca z razpoko, Gradbeni vestnik, 45(1/2), 2–7, 1996.

Skrinar, M., Pliberšek, T., New linear spring stiffness definition for displacement analysis of cracked beam elements, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 4, 654–655, 2004.

Skrinar, M., On the application of a simple computational model for slender transversely cracked beams in buckling problems. Computational Materials Science 39(1), 242–249, 2007.

Skrinar, M., Elastic beam finite element with an arbitrary number of transverse cracks, Finite Elements in Analysis and Design 45(3), 181–189, 2009.

Skrinar, M., Pliberšek, T., On the derivation of symbolic form of stiffness matrix and load vector of a beam with an arbitrary number of transverse cracks, Computational Materials Science 52(1), 253–260, 2012.

Skrinar, M., Computational analysis of multi-stepped beams and beams with linearly-varying heights implementing closed-form finite element formulation for multi-cracked beam elements, International Journal of Solids and Structures 50, 2527–2541, 2013.

Sundermayer, J.N., Weaver, R.L., On crack identification and characterization in a beam by nonlinear vibration analysis, Theoretical and applied mechanics, TAM Report No. 743, 1993.

Sung, S. H., Koo, K. Y., Jung, H. J., Modal flexibility-based damage detection of cantilever beam-type structures using base line modification, Journal of Sound and Vibration 333, 4123–4138, 2014.

Tharp, T.M., A Finite element for edge-cracked beam columns, International Journal for Numerical Methods in Engineering 24, 1941–1950, 1987.

Vestroni, F., Pau, A., Dynamic Characterization and Damage Identification. V: Gladwell, G.M.L., Morassi, A., (ur.), Dynamical Inverse Problems: Theory and Application. Springer-Verlag, 151–178, 2011.

NOVI DIPLOMANTI

UNIVERZA V LJUBLJANI, FAKULTETA ZA GRADBENIŠTVO IN GEODEZIJO

II. STOPNJA – MAGISTRSKI ŠTUDIJSKI PROGRAM STAVBARSTVO

Mateja Uršič, Vpliv strešnih oken na energijsko bilanco in dnevno osvetljevanje mansardnega stanovanja na treh različnih lokacijah, mentor doc. dr. Mitja Košir; https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=106104

Tadeja Intihar, Ocena arhitekturnih rešitev stavb Savina Severja z gledišča dnevnega osvetljevanja, mentor doc. dr. Mitja Košir; https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=106105

II. STOPNJA – MAGISTRSKI ŠTUDIJSKI PROGRAM VODARSTVO IN OKOLJSKO INŽENIRSTVO

Jan Cunja, Časovna in prostorska analiza največjih hidroloških suš v Sloveniji, mentorica izr. prof. dr. Mojca Šraj, somentorica asist. dr. Mira Kobold; https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=106132&lang=slv

Rubriko ureja • Eva Okorn, gradb.zveza@siol.net