MOČNIK-
HALBGEBAUER

GEOMETRIE
UND
GEOM. ZEICHNEN
FÜR
KNABEN-BÜRGERSCH.

Močniks

Geometrie

und

geometrisches Zeichnen

für

Knaben-Bürgerschulen.

Bearbeitet

von

Heinrich Halbgebauer.

Mit 317 in den Text gedruckten Figuren (darunter 4 Figuren-Tafeln).

Ausgabe in einem Bande.

Mit k. k. Ministerialerlaß vom 24. Oktober 1906, Z. 39790 allgemein zulässig erklärt.

Preis, gebunden, 2 K 50 h.

WIEN.

Verlag von F. Tempsky.

1907.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

Einleitung.

Körper, Flächen, Linien und Punkte.

§ 1. **Körper.** Anschauungsmittel: ein Ziegel.

Der Ziegel nimmt einen Raum ein. Dieser Raum ist nach allen Seiten hin begrenzt. Ein allseitig begrenzter Raum heißt ein **Körper.** Jeden Körper kann man sich aus Teilen, die wieder Körper sein müssen, bestehend denken; er ist also eine Größe u. zw. eine **Raumgröße,** weil er sich im Raume ausdehnt.

Ein Körper, wie er in der Wirklichkeit vorkommt, z. B. dieser Ziegel, dieser Tisch, dieser Hut ... besitzt außer der Eigenschaft, einen Raum einzunehmen, noch verschiedene andere Merkmale, als: Stoff, Farbe, Härte, Gewicht u. dergl. Ein solcher Körper heißt ein physischer Körper. Denkt man sich von einem physischen Körper alle anderen Eigenschaften hinweg und betrachtet an ihm nur den Raum, den er einnimmt, so hat man die Vorstellung eines geometrischen Körpers. Der Ziegel ist nach drei Richtungen ausgedehnt: von links nach rechts (Länge), von vorn nach hinten (Breite), von unten nach oben (Höhe).

Im allgemeinen pflegt man an Körpern die größte Ausdehnung als Länge zu bezeichnen.

Ein Körper hat **drei** Ausdehnungen oder Dimensionen: Länge, Breite und Höhe (Dicke oder Tiefe).

Zeiget an verschiedenen Körpern des Schulzimmers die drei Ausdehnungen! Welcher Ausdehnung entspricht die Bezeichnung tief, kurz, schmal? Wann nennt man einen Körper dick, dünn?

§ 2. **Flächen.** Die Gestalt eines Körpers hängt von seiner Begrenzung ab. Die Grenzen des Körpers heißen **Flächen.**

Der Ziegel hat eine obere und untere, eine rechte und linke, eine vordere und hintere Fläche.

Die untere Fläche heißt Grund-, die obere Deckfläche, die anderen vier Flächen heißen Seitenflächen.

Jede Fläche des Ziegels ist nach zwei Richtungen ausgedehnt, z. B. die vordere von links nach rechts und von unten nach oben usw.

Eine Fläche hat nur **zwei** Ausdehnungen: Länge und Breite. Sie ist je nach ihrer Lage lang und breit, oder lang und hoch, oder breit und hoch.

Zeiget und benennet diese zwei Ausdehnungen an Gegenständen im Schulzimmer!

§ 3. **Linien.** Jede Fläche des Ziegels wird von Linien (Kanten) eingeschlossen. Die Linien sind also die Grenzen der Flächen.

Wieviel Linien gibt es an dem Ziegel? Gebet die Länge der Ziegelkanten in *dm* an!

Die Linien dehnen sich nur nach einer Richtung aus, z. B. die vordere obere von links nach rechts, die linke hintere von oben nach unten usw.

Eine Linie hat nur **eine** Ausdehnung, die Länge.

§ **4. Punkte.** Jede Kante des Ziegels wird von zwei Eckpunkten begrenzt. Die Grenzen der Linien heißen **Punkte.**

Zählet die Eckpunkte am Ziegel! Beurteilet, ob der Punkt eine Größe hat? Ist ein Punkt ohne Linie, eine Linie ohne Fläche, eine Fläche ohne Körper denkbar?

Da Körper, Flächen und Linien eine Ausdehnung besitzen, werden sie auch Raumgrößen genannt. Der Punkt hat keine Ausdehnung und ist daher auch keine Raumgröße.

Punkte, Linien, Flächen und Körper nennt man Raumgebilde.

Entstehung und Einteilung der Linien, Flächen und Körper.

§ **5.** Die geometrischen Gebilde kann man sich durch Bewegung erzeugt denken. Wenn sich ein Punkt fortbewegt, so beschreibt er eine **Linie.**

Die Linien teilt man in **gerade** und **krumme** ein. Je nachdem der Punkt eine gerade oder krumme Linie beschreibt, sagt man, er behalte während der Bewegung seine Richtung bei oder er ändere sie fortwährend. Jede Gerade gibt zwei entgegengesetzte Richtungen an.

Eine aus Geraden zusammengesetzte Linie wird eine gebrochene Linie oder ein Linienzug genannt; eine gemischte Linie ist aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt.

Veranschaulichung an Gegenständen und durch Zeichnen an der Schultafel!

§ **6.** Wenn sich eine Linie im Raume in einer anderen Richtung als in der ihrer Verlängerung fortbewegt, so beschreibt sie eine **Fläche.**

Versinnlichung dieser Bewegung mittelst eines Stäbchens oder Drahtes!

Die Flächen teilt man in **ebene** und **krumme** ein. In einer **Ebene** lassen sich nach allen beliebigen Richtungen gerade Linien ziehen. (Fläche des Würfels, der Tafel, des Tisches.)

Eine Fläche, von der kein Teil eben ist, wird eine **krumme Fläche** genannt (z. B. Fläche einer Walze, eines Kegels, einer Kugel, eines Eies). In krummen Flächen kann man gerade Linien nicht nach allen Richtungen hin ziehen.

Die Untersuchung, ob eine Fläche eben ist oder nicht, kann auf mechanischem Wege durch das Anlegen der Kante eines Lineals erfolgen.

§ **7.** Wenn sich eine Fläche in einer anderen Richtung als in der ihrer Erweiterung fortbewegt, so entsteht ein **Körper.**

Versinnlichung dieser Bewegung mittelst eines Papierblattes!

Die Körper teilt man in **eckige** und **runde** ein. Ein Körper, der von lauter ebenen Flächen begrenzt wird, heißt ein **eckiger** oder ebenflächiger **Körper** (z. B. das Prisma, der Würfel, die Pyramide). Ein Körper, der bloß von krummen oder teils von ebenen, teils von krummen Flächen begrenzt wird, heißt ein **runder** oder krummflächiger **Körper** (z. B. der Zylinder, der Kegel, die Kugel).

Ein bewegter Körper erzeugt in jedem Falle wieder einen Körper.

Betrachte die Modelle der geometrischen Grundkörper und gib bei jedem derselben an, wieviele Punkte, wieviele und was für Linien, wieviele und was für Flächen daran vorkommen; bestimme, ob der Körper ein eckiger oder ein runder ist!

Größe und Gestalt der Raumgrößen.

§ 8. Bei jeder Raumgröße nimmt man insbesondere auf zwei Eigenschaften Rücksicht, auf die **Größe** und auf die **Gestalt** oder Form.

Zwei Raumgrößen können verschiedene Gestalt, aber gleiche Größe haben. So kann eine krumme Linie dieselbe Länge haben wie eine gerade; eine rund begrenzte Wiese kann ebensoviel Flächeninhalt besitzen wie eine viereckige; in diesem Falle ist also die Gestalt verschieden, die Größe gleich. Raumgrößen, welche dieselbe Größe haben, heißen **gleich**. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$.

Umgekehrt können zwei Raumgrößen dieselbe Gestalt haben, während sie sich in der Größe unterscheiden; z. B. zwei Kreise oder zwei Würfel, die verschiedene Größen haben. Raumgrößen, welche dieselbe Gestalt haben, heißen **ähnlich**. Das Zeichen der Ähnlichkeit ist $\sim$.

Dieses Zeichen stellt eigentlich ein liegendes *S* vor, den Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes: *similitudo*, d. h. Ähnlichkeit.

Raumgrößen, welche dieselbe Größe und dieselbe Gestalt haben, heißen **kongruent**. Zwischen zwei kongruenten Größen wird, da sie gleich und ähnlich sind, das Zeichen $\cong$ gesetzt. Zwei kongruente Raumgrößen unterscheiden sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden; sie müssen daher, wenn die eine durch Verschieben oder Umwenden an die Stelle der andern gelegt wird, einander vollständig decken.

Geometrie und ihre Einteilung.

§ 9. Die Lehre von den Raumgrößen wird **Geometrie** genannt. Das Wort Geometrie stammt aus dem Griechischen und heißt wörtlich Erd- oder Landmessung. Die ersten Anfänge der Landmessung finden wir im alten Ägypten, wo nach den alljährlich wiederkehrenden Überschwemmungen des Nils die durch das Wasser und den Schlamm verwischten Grenzen der einzelnen Grundstücke durch Messung seitens der Priester wieder sichergestellt wurden. Aus diesen Messungen hat sich nach und nach die Geometrie als Wissenschaft entwickelt, die namentlich bei den alten Griechen in hohen Ehren stand.

Sie zerfällt in zwei Hauptteile: in die Planimetrie und in die Stereometrie. Die **Planimetrie** handelt von jenen Raumgebilden, die in einer und derselben Ebene liegen; die **Stereometrie** aber beschäftigt sich mit jenen Raumgebilden, die sich nicht in einer und derselben Ebene, sondern im dreifach ausgedehnten Raume befinden.

Planimetrie.

A.

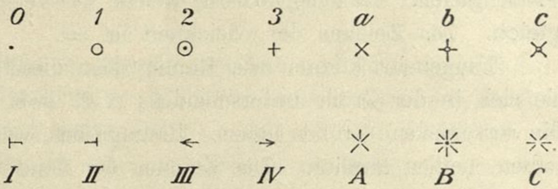
I. Punkt, gerade Linie, Winkel und Kreislinie.

1. Punkte.

Darstellung der Punkte und ihre gegenseitige Lage.

§ 10. Ein Punkt kann, da er weder Länge, noch Breite, noch Dicke besitzt, nicht gesehen, sondern nur gedacht werden. Um die Stelle, wo man sich einen Punkt denkt, dem Auge sichtbar zu machen, bringt man dort mit dem Bleistifte, mit der Feder oder Kreide einen Tupfen, ein Ringelchen, ein Sternchen u. ä. an. Diese sind jedoch nicht wirkliche Punkte, sie sind nur Zeichen der Punkte.

Fig. 1.



Ein Punkt wird dadurch benannt, daß man zu dem ihn versinnlichenden Zeichen einen Buchstaben oder eine Ziffer setzt; man sagt: der Punkt a, der Punkt 1, der Punkt A usw.

Die den Punkt benennenden Ziffern oder Buchstaben sollen nicht in, sondern neben das Zeichen (Ringelchen) gesetzt werden (Fig. 1).

Zwei Punkte können entweder nebeneinander, oder gerade übereinander, oder schräg oberhalb- oder unterhalbeinander liegen.

Übung im Zeichnen von Punkten in diesen Lagen!

2. Gerade Linien.

Bestimmung und Darstellung der Geraden.

§ 11. Durch einen Punkt lassen sich unzählig viele gerade Linien in allen möglichen Richtungen ziehen. Wie viele Gerade lassen sich durch zwei Punkte ziehen? Welche ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte?

Grundsätze von der Geraden: 1. Durch zwei Punkte ist nur eine Gerade möglich, oder die Lage einer Geraden im Raume ist durch zwei Punkte bestimmt. 2. Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.

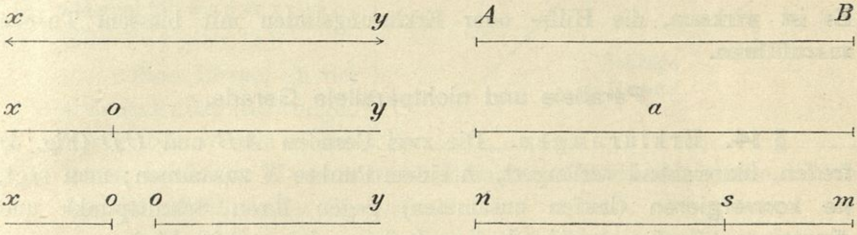
Zwei Gerade, die zwei Punkte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen und bilden eine einzige Gerade.

Wie prüft man die Richtigkeit eines Lineals?

Zwei voneinander verschiedene Gerade können nur einen Punkt gemeinsam haben. Man sagt: sie schneiden (treffen) einander in diesem Punkte; der gemeinsame Punkt heißt ihr Schnittpunkt (Durchschnittspunkt).

§ 12. Die unbegrenzte Gerade xy (in Fig. 2) wird durch jeden in ihr liegenden Punkt (o) in zwei halbbegrenzte Gerade oder Strahlen zerlegt (ox und oy in Fig. 2), die von diesem Punkte aus

Fig. 2.



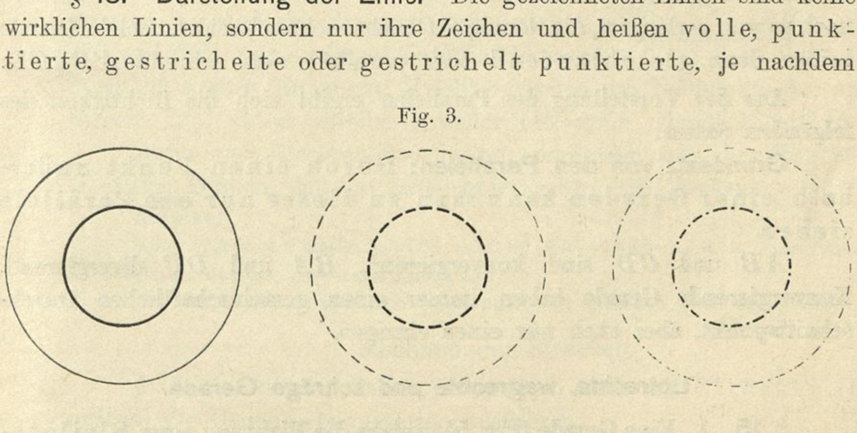
nach entgegengesetzten Richtungen ausgedehnt sind (Sonnenstrahlen). Eine durch zwei Punkte ganz begrenzte Gerade heißt Strecke (AB in Fig. 2); die beiden Grenzpunkte nennt man ihre Endpunkte.

Die Strecke zwischen zwei Punkten ist die kürzeste Linie, die zwischen den zwei Punkten gezogen werden kann; sie bestimmt daher die Entfernung oder den Abstand derselben.

Ein Strahl wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt, eine Strecke durch ihre Endpunkte bezeichnet.

§ 13. **Darstellung der Linie.** Die gezeichneten Linien sind keine wirklichen Linien, sondern nur ihre Zeichen und heißen volle, punktierte, gestrichelte oder gestrichelt punktierte, je nachdem

Fig. 3.



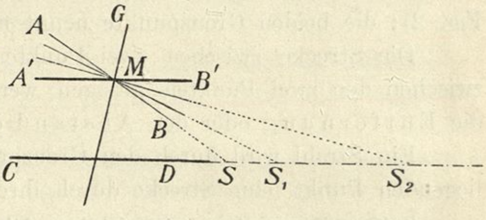
sie ohne Unterbrechung, oder durch Punkte, oder durch Striche und Punkte dergestellt sind. (Fig. 3.)

Zum geometrischen Zeichnen der Linien bedient man sich des Lineals, der Reißschiene, des Dreieckes und des Zirkels. Auf dem Papiere werden üblich (konventionell) bezeichnet: *a)* Gegebene Linien durch feine volle Linien; *b)* Hilfs- oder Erklärungslinien durch sehr feine volle, oder gestrichelte, oder punktierte Linien; *c)* gefundene Linien (Resultatslinien) durch starke volle oder strich-punktierte Linien; *d)* Maß- oder Kotenlinien mit roter Tinte durch feine volle Linien. Es ist wirksam, die Hilfs- oder Erklärungslinien mit blassem Tusche auszuführen.

Parallele und nichtparallele Gerade.

§ 14. Erklärungen. Die zwei Geraden AB und CD (Fig. 4) treffen, hinreichend verlängert, in einem Punkte S zusammen; man sagt, sie **konvergieren** (laufen zusammen) gegen ihren Schnittpunkt und **divergieren** (laufen auseinander) nach der anderen Seite hin.

Fig. 4.



Um ihre gegenseitige Lage zu beurteilen, schneiden wir beide Gerade durch die Gerade G. Drehen wir die Gerade AB um M (Modell!), so wandert der Schnittpunkt S über S_1 und S_2 nach rechts, und die Gerade AB muß endlich in eine Lage $A'B'$ kommen, in der sie, wenn auch noch so weit verlängert, die Gerade CD nicht mehr schneidet. Solche Gerade heißen dann gleichlaufend oder **parallel**; man schreibt $A'B' \parallel CD$.

Aus der Vorstellung der Parallelen ergibt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Grundsatz von den Parallelen: Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man zu dieser nur **eine** Parallele ziehen.

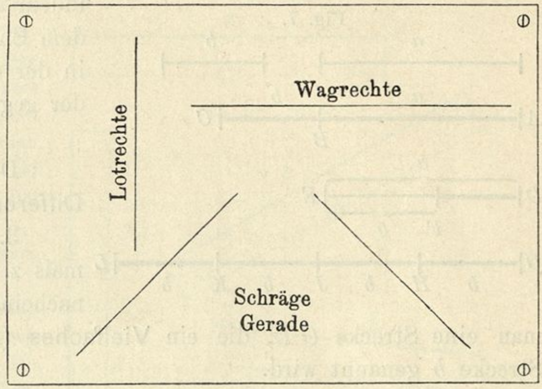
AB und CD sind konvergierend, BA und DC divergierend. Konvergierende Gerade haben immer einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, aber auch nur einen einzigen.

Lotrechte, wagrechte und schräge Gerade.

§ 15. 1. Eine Gerade (Fig. 5), welche die Richtung eines Bleilotes oder Senkbleies, d. i. eines freihängenden, durch eine Bleikugel gespannten Fadens hat, heißt **lotrecht** oder vertikal. Ein freifallender Körper fällt in lotrechter Richtung.

Wird durch eine vertikale Gerade eine Ebene gelegt, so heißt diese eine Vertikal-Ebene.

Fig. 5.



2. Eine Gerade, welche die Richtung eines auf beiden Seiten gleichbelasteten Wagebalkens oder eines auf dem ruhigen Wasserspiegel schwimmenden Stäbchens hat, heißt **wagrecht**, wasserrecht oder horizontal.

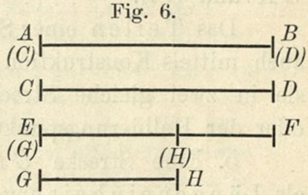
Eine Ebene, in der sich nach allen Richtungen horizontale Gerade ziehen lassen, heißt eine Horizontal-Ebene; z. B. die Oberfläche des Wassers, die Bodenfläche eines Zimmers.

3. Eine gerade Linie, die weder lotrecht noch wagrecht ist, heißt **schräg**.

Vergleichung der Strecken.

§ **16.** Um zwei Strecken AB und CD (Fig. 6) nach ihrer Länge zu vergleichen, lege man die eine, CD, so auf die andere, AB, daß ihr Anfangspunkt C auf A zu liegen kommt. Fallen dann die Endpunkte D und B ebenfalls zusammen, so sind die beiden Strecken **gleich**; $AB = CD$. Fallen aber die anderen Endpunkte der beiden Strecken nicht zusammen, so sind die Strecken **ungleich**, wie EF und GH; von diesen ist GH die kleinere, denn ihr zweiter Endpunkt H fällt zwischen die Endpunkte der anderen Strecke EF. Man schreibt entweder $GH < EF$ oder $EF > GH$.

Fig. 6.



Wenn zwei Strecken gleich sind, muß man sich dieselben auch so vorstellen können, daß sie, aufeinander gelegt, sich decken.

Aufgabe:

Eine gegebene Strecke $a = 65$ *mm* zu übertragen, d. h. eine Strecke zu konstruieren, die der gegebenen gleich ist.

Zur Vergleichung und zum Übertragen von Strecken dient der Zirkel.

Rechnen mit Strecken.

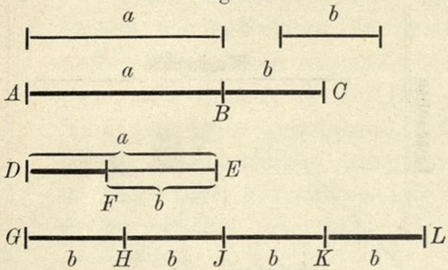
§ **17.** So wie mit Zahlen lassen sich auch mit Strecken (Raumgrößen) die Grundrechnungsarten ausführen.

1. Die Strecken a und b werden mittelst Zeichnung (graphisch) addiert, indem man dieselben auf einer Geraden AC nebeneinander (wie in Fig. 7) aufträgt; $\boldsymbol{a + b = AC}$.

Die Strecke AC heißt die **Summe** der beiden Strecken a und b.

2. Von einer Strecke a (Fig. 7) wird eine zweite b subtrahiert, indem man die zweite Strecke von dem Endpunkte E der ersteren aus in der entgegengesetzten Richtung der gegebenen Strecke aufträgt;

Fig. 7.



$$\boldsymbol{a - b = DF.}$$

Die Strecke DF heißt die **Differenz** der Strecken a und b.

3. Wird eine Strecke b mehrmals z. B. 4-mal auf einer Geraden nacheinander aufgetragen, so erhält man eine Strecke GL, die ein **Vielfaches** (in Fig. 7 das 4-fache) der Strecke b genannt wird.

$$\boldsymbol{4 \,.\, b = GL} \text{ oder } \boldsymbol{b \,.\, 4 = GL.}$$

GJ ist das Zweifache von b; $GJ = 2 \,.\, b$.

GK ist das Dreifache von b; $GK = 3 \,.\, b$.

4. Umgekehrt ist b die Hälfte von GJ, ein Drittel von GK, und ein Viertel von GL; in Zeichen:

$$\boldsymbol{b = GH = \tfrac{1}{2} \,.\, GJ = \tfrac{1}{3} \,.\, GK = \tfrac{1}{4} \,.\, GL.}$$

Die Strecke b ist ein aliquoter **Teil** einer der Strecken GJ, GK und GL.

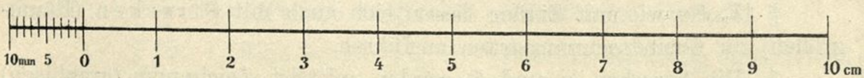
Das Teilen einer Strecke kann versuchsweise mit dem Zirkel oder auch mittels Konstruktion geschehen. — Eine Strecke halbieren heißt, sie in zwei gleiche Strecken teilen; der Teilungspunkt wird die Mitte oder der Halbierungspunkt der Strecke genannt.

5. Eine Strecke GL **messen** heißt untersuchen, wievielmal eine als Längeneinheit angenommene Strecke b in der gegebenen enthalten ist. Die Zahl 4, die dies angibt, ist die Maßzahl der gemessenen Strecke: die Strecke b ist in der Strecke GL 4-mal **enthalten.**

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter (m), das in 10 Dezimeter (dm) à 10 Zentimeter (cm) à 10 Millimeter (mm) eingeteilt wird. 1000 Meter = 1 Kilometer (km), 10 Kilometer = 1 Myriameter (μm). 1 m ist der 10 millionste Teil eines Erdmeridianquadranten.

Zum Messen der Längen dienen Stäbe von Holz oder Metall, worauf eine oder mehrere Längeneinheiten nebst den Unterteilungen

Fig. 8.

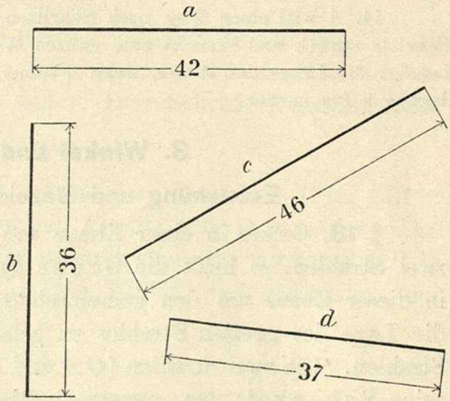


aufgetragen sind; sie heißen **Maßstäbe.** Fig. 8 stellt die Länge eines Dezimeters mit dessen Einteilung in Zentimeter und Millimeter vor.

Die durch Messen gefundene Länge der Strecke wird als Maßzahl (Kote) beigesetzt (Fig. 9).

Anfängern ist anzuraten, daß sie zur Übung des Augenmaßes verschiedene Längen zuerst annäherungsweise mit dem Auge abschätzen und dann mit dem Maßstabe genau messen. Wegstrecken mißt man annähernd auch durch Schritte, wobei 13 Schritte = 10 *m*, also 1 *km* = 1300 Schritte angenommen werden.

Fig. 9.



Übung im Kotieren gegebener Strecken.

Ist keine andere Maßbenennung beigesetzt, so bedeutet die Kote stets *mm*.

Zeichnen von Strecken von bestimmter Länge und Kotieren derselben.

Aufgaben:

Die folgenden Aufgaben sind sowohl mittels des Zirkels, als auch mittels des Maßstabes auszuführen.

1. Auf der Geraden Ox ist von dem Punkte O aus die gegebene Strecke $a = 65$ *mm* aufzutragen!

2. Zeichne eine Strecke von *a)* 3 *cm*, *b)* 5·6 *cm*, *c)* 59 *mm*, *d)* 0·106 *m* Länge!

3. Konstruiere die Summe der Strecken *a)* 3 *cm* und 7·5 *cm*, *b)* 22 *mm*, 4·4 *cm* und 0·54 *dm*!

4. Subtrahiere von der Strecke $a = 9$ *cm* 6 *mm* die Strecke $b = 58$ *mm*!

5. Konstruiere das 2-, 3-, 4- und 5-fache der gegebenen Strecke $a = 21$ *mm*!

6. Eine gegebene Strecke aus freier Hand in 2 gleiche Teile zu teilen oder zu halbieren. — Man bestimme in der Strecke einen Punkt so, daß er von den beiden Endpunkten derselben gleich weit entfernt ist.

7. Zeichne eine Strecke, teile sie in 2 gleiche Teile und dann jede Hälfte wieder in 2 gleiche Teile! Wieviel gleiche Teile erhältst du? — Wie wird also eine Strecke in 4 gleiche Teile geteilt?

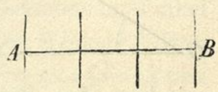
8. Wie wird eine Strecke in 8, 16 gleiche Teile geteilt?

9. Eine Strecke AB (Fig. 10) in 3 gleiche Teile zu teilen.

Man teile die gegebene Strecke in 2 ungleiche Teile, halbiere den größeren Teil und prüfe, ob alle drei Teile untereinander gleich sind. Sind diese Teile ungleich, so muß der erste Teilungspunkt weiter vom Anfangspunkte gerückt werden, wenn die durch Halbierung gewonnenen Teile zu groß, jedoch näher zum Anfangspunkte verschoben werden, wenn die durch Halbierung gewonnenen Teile zu klein ausgefallen sind. Die in der Strecke gesetzten Teilungspunkte (Teilungsstriche) müssen voneinander und von den Endpunkten derselben gleichen Abstand haben.

10. Teile die gezeichnete Strecke $c = 96$ *mm* in zwei gleiche Teile und dann jeden Teil wieder in 3 gleiche Teile! — Wie wird als eine Strecke in 6 gleiche Teile geteilt?

Fig. 10.



11. Wie wird eine Strecke in 12, 24, — in 9, 18 gleiche Teile geteilt?

12. Teile die Strecke $n = 70$ *mm* in 5, 7 gleiche Teile! (Der Vorgang ist ähnlich wie bei der Teilung einer Strecke in 3 gleiche Teile.)

13. Wie wird eine Strecke in 10, 15, 20, — in 14 gleiche Teile geteilt? Über das konstruktive Teilen gegebener Strecken siehe § 69, bezw. § 109. Mit Hilfe des Maßstabes ist eine gegebene Strecke zu messen!

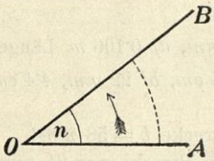
14. A will einen Weg nach Schritten ausmessen. Er legt in 4 Minuten 360 Schritte zurück und braucht zum ganzen Weg 10 Min. 30 Sekunden. Wieviel Meter beträgt die Länge des Weges, wenn 3 seiner Schritte 2 *m* betragen? In welcher Zeit legt er 1 *km* zurück?

3. Winkel und Kreislinie.

Entstehung und Bezeichnung der Winkel.

§ 18. Gehen in einer Ebene von einem Punkte aus (O in Fig. 11) zwei Strahlen, so heißt die Größe der Drehung, die der eine Strahl in dieser Ebene um den gemeinschaftlichen Punkt machen muß, um in die Lage des zweiten Strahles zu gelangen, der **Winkel** (∢) der beiden Strahlen. Die zwei Strahlen (OA und OB), die den Winkel bilden, heißen seine Schenkel; den gemeinschaftlichen Punkt (O), von dem sie ausgehen, nennt man den Scheitel des Winkels. Die zwischen den Schenkeln liegende ebene Fläche, in der die Drehung als vollbracht betrachtet wird, heißt die Winkelfläche.

Fig. 11.



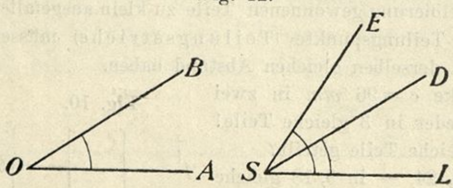
Einen Winkel (Fig. 11) bezeichnet man entweder 1.) mit einem einzigen Buchstaben (n), den man zwischen die Schenkel setzt, oder 2.) mit dem Buchstaben am Scheitel (O), oder 3.) mit drei Buchstaben (∢ AOB oder ∢ BOA), von denen der am Scheitel stehende immer in die Mitte gesetzt wird; der Winkel heißt daher: Winkel n oder Winkel O oder Winkel AOB oder Winkel BOA.

Ein Winkel ist desto größer, je größer die Drehung ist, die der eine Schenkel machen muß, bis er in die Lage des zweiten kommt; die Länge der Schenkel hat daher keinen Einfluß auf seine Größe.

Vergleichung zweier Winkel nach ihrer Größe.

§ 19. Zwei Winkel sind **gleich**, wenn sie sich so aufeinander legen lassen, daß ihre Scheitel und ihre Schenkel sich paarweise decken. Decken sich jedoch beim Aufeinanderfallen der Scheitel und des einen Schenkelpaares die beiden anderen Schenkel nicht, so sind die zwei Winkel **ungleich**. Derjenige Winkel ist der kleinere ($<$), dessen zweiter Schenkel zwischen den Schenkeln des anderen Winkels liegt; dieser ist der größere ($>$).

Fig. 12.



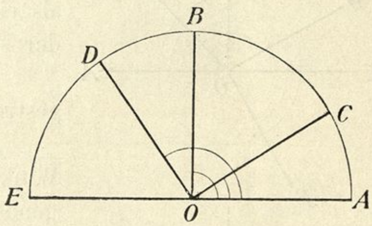
In Figur 12 ist $\sphericalangle AOB = \sphericalangle CSD$; dagegen
$\sphericalangle AOB < \sphericalangle CSE$,
$\sphericalangle CSE > \sphericalangle AOB$.

Umgekehrt: Sind zwei Winkel gleich, so können sie mit den Winkelflächen so aufeinander gelegt werden, daß, wenn der Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen, auch das andere Paar Schenkel zusammenfällt.

Arten der Winkel.

§ 20. 1. Dreht sich in einer Ebene der Strahl OA (Fig. 13) so lange um seinen Grenzpunkt O, bis er den vierten Teil einer vollen Umdrehung gemacht, so heißt der dadurch erzeugte Winkel AOB in Fig. 13 ein **rechter Winkel**. Der rechte Winkel wird gewöhnlich mit dem Buchstaben R bezeichnet. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Fig. 13.

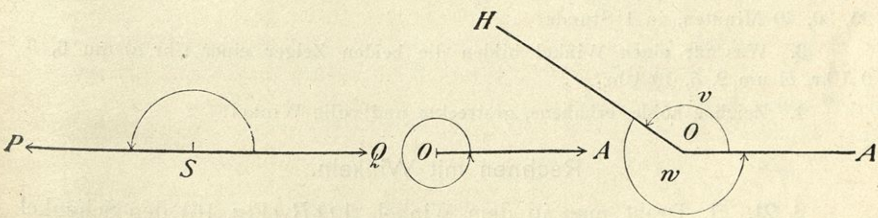


Ein Winkel ($\sphericalangle AOC$ in Fig. 13), zu dessen Entstehung weniger als eine Vierteldrehung erforderlich ist, heißt ein **spitzer Winkel**; ein solcher Winkel ($\sphericalangle AOD$), zu dessen Entstehung mehr als eine Vierteldrehung, aber weniger als eine halbe Drehung erforderlich ist, heißt ein **stumpfer Winkel**. Im Gegensatze zu den rechten Winkeln nennt man die stumpfen und die spitzen Winkel auch schiefe Winkel.

Um einen rechten Winkel zu erhalten, braucht man nur ein Stück Papier zweimal so zuzammenzulegen, daß die Buglinien genau aufeinander fallen.

2. Dreht sich ein Strahl (SQ in Fig. 14) um seinen Grenzpunkt so lange bis er in eine Richtung (SP) kommt, die seiner ursprünglichen Richtung gerade entgegengesetzt ist, so sagt man, der Strahl habe eine

Fig. 14.

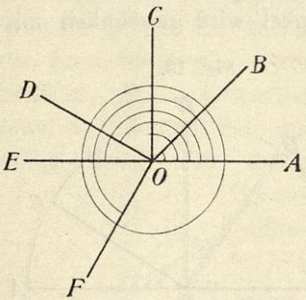


halbe Umdrehung gemacht, und nennt den dadurch entstandenen Winkel einen **gestreckten**. Die beiden Schenkel eines gestreckten Winkels bilden eine Gerade und haben eine entgegengesetzte Richtung. Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei Rechten. Alle gestreckten Winkel sind untereinander gleich.

3. Dreht sich der Strahl OA (Fig. 14) um O solange, bis er in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so sagt man, der Strahl hat eine ganze Umdrehung gemacht. Den entstandenen Winkel ($\sphericalangle AOA$) nennt man einen **vollen Winkel.** Dessen zwei Schenkel fallen zusammen und bilden eine gerade Linie. Ein voller Winkel ist gleich zwei gestreckten Winkeln oder vier Rechten. Alle vollen Winkel sind einander gleich.

4. Beträgt die Drehung des Strahles OA (Fig. 14) weniger als eine halbe Umdrehung, so heißt der entstandene Winkel ($\sphericalangle AOH = v$) ein hohler; beträgt dieselbe mehr als eine halbe und weniger als eine ganze Umdrehung, so heißt der entstandene Winkel ($\sphericalangle HOA = w$) ein **erhabener.** Jeder hohle Winkel ist kleiner als ein gestreckter; der rechte, der spitze und der stumpfe Winkel sind hohle Winkel.

Fig. 15.



Jeder erhabene Winkel ist größer als ein gestreckter und kleiner als ein voller Winkel.

Eine Vergleichung der besprochenen Winkel mit dem rechten Winkel ergibt folgende Beziehungen (Fig. 15):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Spitzer Winkel} < R\\ \text{Rechter Winkel} = R\\ \text{Stumpfer Winkel} > R\end{array}\right\} < 2R \text{ (hohle Winkel).}$$

$$\begin{array}{ll}\text{Gestreckter Winkel} & = 2R\\ \text{Erhabener Winkel} & > 2R\\ \text{Voller Winkel} & = 4R.\end{array}$$

Aufgaben.

1. Nenne Gegenstände im Zimmer, an denen rechte, spitze, stumpfe Winkel vorkommen!

2. Was für einen Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 10, 15, 25, 30, 40 Minuten, in 1 Stunde?

3. Was für einen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr *a)* um 6, 3, 9 Uhr, *b)* um 2, 5, 10 Uhr?

4. Zeichne hohle, erhabene, gestreckte und volle Winkel!

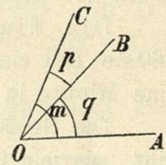
Rechnen mit Winkeln.

§ 21. 1. Dreht man in dem Winkel AOB (Fig. 16) den Schenkel OB von OA weg, bis er in die Lage OC kommt, so entsteht der Winkel AOC, der so groß ist als die beiden Winkel AOB und BOC zusammengenommen; der Winkel AOC ist also die **Summe** der Winkel AOB und BOC, oder $\sphericalangle m = \sphericalangle q + \sphericalangle p$.

Veranschauliche durch eine Zeichnung folgende zwei Sätze:

a) Die Summe aller Winkel, die auf einer Seite einer geraden Linie liegen und einen gemeinschaftlichen in ihr liegenden Scheitel haben, ist gleich einem gestreckten Winkel oder zwei Rechten.

Fig. 16.

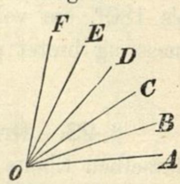


b) Die Summe aller Winkel, die um einen Punkt herum nebeneinander liegen, ist gleich einem vollen Winkel oder vier Rechten.

2. Wird in dem Winkel AOC (Fig. 16) der Schenkel OC um den Winkel COB gegen OA zurückgedreht, so daß er in die Lage OB kommt, so entsteht der Winkel AOB, der die Differenz zwischen den Winkeln AOC und BOC ist, also $\sphericalangle q =$ $= \sphericalangle m - \sphericalangle p$.

3. Sind (Fig. 17) die Winkel AOB, BOC, COD, DOE, . . . einander gleich, so ist der Winkel AOC das Doppelte des Winkels AOB, AOD das Dreifache, AOE das Vierfache von AOB usw. Die Winkel AOC, AOD, AOE, . . . sind also Vielfache des Winkels AOB.

Fig. 17.



4. Umgekehrt ist der Winkel AOB die Hälfte von AOC, der dritte Teil von AOD, der vierte Teil von AOE usw.

Aufgaben.

1. Wie muß man zwei Winkel aneinander legen, um den Winkel zu erhalten, der ihre Summe ist?

2. Wie muß man zwei Winkel aufeinander legen, um den Winkel zu erhalten, der ihre Differenz ist?

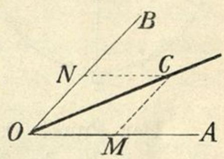
3. Was für ein Winkel ist die Summe *a*) eines rechten und eines spitzen, *b*) eines rechten und eines stumpfen, *c*) eines gestreckten und eines hohlen Winkels, *d*) zweier rechten Winkel!

4. Wieviele rechte Winkel kommen an einem Ziegel, an einem Quadersteine vor?

5. Zeichne nach dem Augenmaße drei Winkel, von denen der zweite 2mal, der dritte 3mal so groß ist als der erste!

6. Was für ein Winkel ist das Doppelte *a*) eines rechten, *b*) eines stumpfen, *c*) eines gestreckten Winkels?

Fig. 18.



7. Was für ein Winkel ist die Hälfte *a*) eines rechten, *b*) eines stumpfen, *c*) eines gestreckten, *d*) eines erhabenen, *e*) eines vollen Winkels?

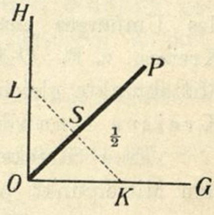
8. Einen Winkel AOB (Fig. 18) in zwei gleiche Teile zu teilen oder zu halbieren. — Man mache $OM = ON$ und bestimme einen Punkt C so, daß er von M und N gleich weit entfernt ist; zieht man dann OC, so ist Winkel $AOC =$ $BOC = \frac{1}{2}\, AOB$.

9. Wie wird ein Winkel in 4, 8 gleiche Teile geteilt?

10. Zeichne einen rechten Winkel und halbiere ihn! (Fig. 19.)

11. Versuche einen Winkel nach dem Augenmaße in 3, 5, 6 gleiche Teile zu teilen!

Fig. 19.



Das Winkelmaß.

§ 22. **Messung eines Winkels.** Um einen Winkel zu messen, nimmt man irgend einen bekannten Winkel als Einheit an und untersucht, wievielmal derselbe in dem gegebenen Winkel enthalten ist.

Die Einheit des Winkelmaßes ist der Grad (^{0}), d. i. der 360ste Teil eines vollen Winkels. Ein Grad wird in 60 Minuten ($'$), eine Minute in 60 Sekunden ($''$) eingeteilt.

Die Größe eines Winkels ist vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wieviele Grade und Gradteile er enthält. Die Grade, Minuten und Sekunden eines Winkels bezeichnet man durch ^{0}, $'$, $''$; z. B. 57 Grade 48 Minuten 15 Sekunden $= 57^0\ 48'\ 15''$.

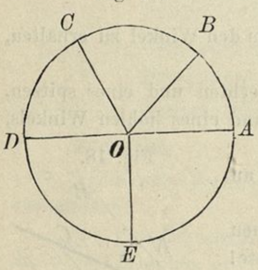
Aus den Erklärungen in § 20 folgt:

Ein hohler Winkel enthält weniger als 180^0 und zwar insbesondere ein spitzer weniger als 90^0, ein stumpfer mehr als 90^0. Ein rechter Winkel hat 90^0, ein gestreckter Winkel 180^0, ein erhabener Winkel mehr als 180^0, ein voller Winkel hat 360^0. Das einfachste Mittel der Winkelmessung bietet die Kreislinie.

Die Kreislinie.

§ 23. Dreht sich eine Strecke OA (Fig. 20) um den Punkt O in derselben Ebene so lange herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt während dieser Drehung der Punkt A eine krumme Linie $ABCDEA$, die **Kreislinie** heißt, und die Strecke selbst beschreibt die von der Kreislinie begrenzte Fläche, die **Kreisfläche** oder **Kreis** genannt wird. Die **Kreislinie** ist eine krumme geschlossene, in einer Ebene liegende Linie, deren Punkte von einem festen (innerhalb liegenden) Punkte gleich weit entfernt sind.

Fig. 20.



Der Punkt O, von dem alle Punkte der Kreislinie gleich weit abstehen, heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum; die Länge der ganzen Kreislinie selbst wird der Umfang oder die Peripherie des Kreises genannt.

Eine Strecke, die vom Mittelpunkte zu irgend einem Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Halbmesser *(Radius)* des Kreises, z. B. OA, OB, OC. Da alle Punkte der Peripherie vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, so sind alle Halbmesser eines Kreises einander gleich.

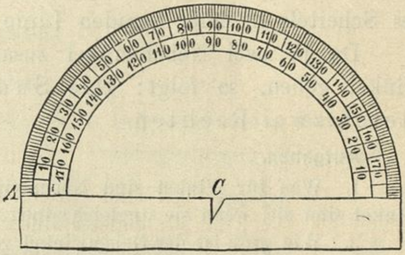
Eine Strecke AD, die von einem Punkte des Umfanges durch den Mittelpunkt bis an die entgegengesetzte Seite des Umfanges gezogen wird, heißt ein Durchmesser *(Diameter)*. Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so lang als ein Halbmesser desselben, daher sind auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleich.

Jeder Teil des Umfanges, wie AB, wird ein Kreisbogen genannt; die Hälfte des Umfanges heißt ein Halbkreis, der vierte Teil ein Quadrant. (Erdmeridian — Quadrant.)

Zum geometrischen Zeichnen des Kreises bedient man sich des Zirkels.

§ 24. Der Umfang eines jeden Kreises wird in 360 gleiche Bogen, die man Bogengrade oder bloß Grade nennt, eingeteilt. Es kommen daher auf den Halbkreis 180, auf den Quadranten 90 Grade. Die Einteilung des Halbkreises in Grade sieht man an dem Transporteur oder Winkelmesser (Fig. 21), bei dem die Kante AB den Durchmesser, der Punkt C des Einschnittes den Mittelpunkt vorstellt. Jeder Grad wird in 60 gleiche Teile, Bogenminuten, und jede Minute in 60 Bogensekunden eingeteilt.

Fig. 21.



Man bezeichnet die Grade, Minuten und Sekunden bei den Bogen auf gleiche Weise wie bei den Winkeln.

Messen der Winkel durch Kreisbogen.

§ 25. Teilt man die Peripherie eines Kreises in 360 Bogengrade und zieht von dem Mittelpunkte zu jedem Teilungspunkte einen Halbmesser, so entstehen um den Mittelpunkt 360 Winkel, die alle untereinander gleich sind, weil bei je zweien, wenn sie gehörig aufeinander gelegt werden, die Schenkel zusammenfallen. Die Summe aller dieser Winkel ist gleich 360 Winkelgraden; folglich ist einer derselben gleich einem Winkelgrade. Da hiernach ein Winkel am Mittelpunkte soviele Winkelgrade enthält, als der zugehörige Bogen Bogengrade hat, so kann jeder Winkel durch den Kreisbogen, den man aus dem Scheitel zwischen den Schenkeln beschreibt, gemessen werden.

Darauf beruht der Gebrauch des **Transporteurs** zum Messen gezeichneter Winkel und zum Zeichnen in Graden angegebener Winkel.

Aufgaben.

1. Zeichne beliebige Winkel, schätze zuerst ihre Größe nach dem Augenmaße ab und miß sie dann mit dem Transporteur!

2. Zeichne mit Hilfe des Transporteurs einen Winkel von 90^0, 45^0, 60^0, 30^0, 58^0, 87^0, 3^0, 100^0, 118^0, 176^0!

3. Wieviel Grade haben $1\frac{1}{2}$ R, $\frac{4}{5}$ R, $\frac{6}{5}$ R, $\frac{2}{3}$ R, $\frac{5}{9}$ R, $1\frac{5}{6}$ R?

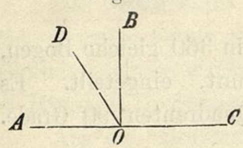
4. Wieviel Grade umspannt ein Quadrant?

5. Wieviel Meter hat der Erdmeridian-Quadrant und wieviel Grade umspannt dieser? (Die Länge des Erdmeridians $l = 40.007{\cdot}76$ *km.*)

Winkel mit einem gemeinsamen Scheitel.

§ 26. **Nebenwinkel.** Verlängert man einen Schenkel OC (Fig. 22) eines gegebenen Winkels COD über den Scheitel hinaus, so entsteht ein neuer Winkel AOD, der ein Nebenwinkel des gegebenen Winkels COD genannt wird. Es ist umgekehrt COD ein Nebenwinkel zu AOD; ebenso sind COB und BOA Nebenwinkel. **Nebenwinkel** sind zwei Winkel, die denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide anderen Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels in einer geraden Linie liegen.

Fig. 22.



Da je zwei Nebenwinkel zusammen genommen einen gestreckten Winkel geben, so folgt: Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Aufgaben.

1. Was für Winkel sind Nebenwinkel, wenn sie gleich sind, und was für Winkel sind sie, wenn sie ungleich sind?

2. Wie groß ist der Nebenwinkel von 20^0, $35\frac{1}{2}^0$, $100\frac{3}{5}^0$, $55^0\ 40''$, $115^0\ 16'\ 45''$?

3. Was für Nebenwinkel gehören zu gleichen Winkeln?

Senkrechte (normale) und schiefe Gerade.

§ 27. Bildet eine Gerade mit einer anderen rechte Winkel, so stehen die beiden Geraden **senkrecht** oder normal, sonst **schief** aufeinander. So ist (in Fig. 22) BO senkrecht auf AC, ($BO \perp AC$), wenn der Winkel $AOB = BOC = R$ ist; DO ist schief auf AC, weil die Winkel COD und DOA keine rechten, sondern schiefe Winkel sind. Zwei aufeinander normale Gerade bilden gleiche, zwei aufeinander schiefe Gerade bilden ungleiche Nebenwinkel.

Zur Übung.

1. Ziehe eine Gerade, nimm darin fünf Punkte an und errichte in jedem derselben auf die Gerade eine Normale! Welche Lage gegeneinander haben diese Normalen?

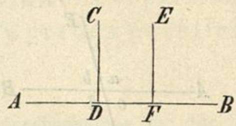
2. Zeichne zwei parallele Gerade, nimm in der einen fünf Punkte an und fälle aus jedem auf die andere Gerade eine Normale! Wie verhalten sich diese Normalen bezüglich ihrer Länge?

3. Nennet Gerade im Zimmer, die normal, und solche, die schief aufeinander stehen!

3. Welcher Unterschied ist zwischen senkrecht und lotrecht, zwischen senkrecht und normal, zwischen schräg und schief?

§ 28. Es sei (Fig. 23) $CD \perp AB$. Wenn die CD längs der AB mit sich selbst parallel fortschreitet, bis sie in die Lage EF kommt, so wird während dieser Bewegung die Lage der CD gegen die AB nicht geändert; es wird daher CD auch in der Lage EF auf AB normal stehen. Daraus folgt:

Fig. 23.



1. Steht eine Gerade auf einer anderen Geraden normal, so ist auch jede mit der ersteren Parallele auf der zweiten Geraden normal.

2. Stehen zwei Gerade auf derselben dritten normal, so sind sie zueinander parallel.

Konstruktionsaufgaben.

1. Es sind Parallele zu zeichnen, *a*) mit der Reißschiene, *b*) mit Schiene und Dreieck, *c*) mit Hilfe der Dreiecke ohne Schiene.

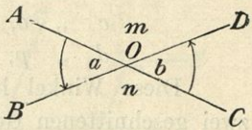
2. Zeichne zu einer gegebenen Lotrechten (Wagrechten, Schrägen) drei Parallele im Abstande von je 30 *mm*!

3. Miß den Abstand gezeichneter Parallelen!

Scheitelwinkel.

§ 29. Verlängert man (in Fig. 24) beide Schenkel eines Winkels (a) über den Scheitel hinaus, so bilden die Verlängerungen (OC und OD) den Scheitelwinkel. Winkel a und b sind Scheitelwinkel; aber auch $\sphericalangle m$ ist ein Scheitelwinkel zu $\sphericalangle n$ und umgekehrt. **Scheitelwinkel** sind zwei Winkel, bei denen die Schenkel des einen Winkels die Verlängerungen der Schenkel des anderen über den Scheitel hinaus bilden. Dreht man die Gerade AC um den Punkt O nach links, so entstehen durch ein und dieselbe Drehung die Scheitelwinkel a und b. Daher: Scheitelwinkel sind einander gleich.

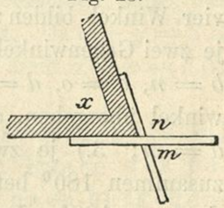
Fig. 24.



Die Gleichheit der Scheitelwinkel a und b kann auch nach § 26 erschlossen werden, denn sie haben denselben Nebenwinkel m.

Dieser Satz findet praktische Anwendung, wenn (Fig. 25) ein Innenwinkel x eines Gebäudes, eines Gartens oder eines eckigen Gefäßes gemessen werden soll und man nicht in das Innere gelangen kann; man darf nur den äußeren Scheitelwinkel m messen und $x = m$ setzen.

Fig. 25.

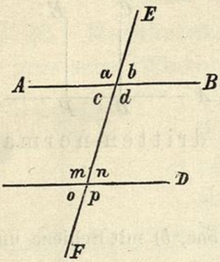


Man kann in diesem Falle auch den äußeren Nebenwinkel n messen; dann ist $x = 180^0 - n$.

Winkel mit verschiedenen Scheiteln.

§ 30. Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so entstehen um die beiden Durchschnittspunkte acht Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere, die anderen vier äußere Winkel. In Fig. 26 sind AB und CD die beiden geschnittenen Geraden, EF ist die schneidende Gerade (Transversale); c, d, m und n sind innere, a, b, o und p sind äußere Winkel. Es liegen die Winkel a, c, m, o auf derselben Seite der Transversalen.

Fig. 26.



Ein äußerer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der Schneidenden und an verschiedenen Scheiteln heißen **Gegenwinkel**: a und m, b und n, c und o, d und p.

Zwei äußere oder auch zwei innere Winkel auf den entgegengesetzten Seiten der Schneidenden und an verschiedenen Scheiteln werden **Wechselwinkel** genannt: a und p, b und o, c und n, d und m.

Zwei äußere oder zwei innere Winkel auf derselben Seite der Schneidenden und an verschiedenen Scheiteln heißen **Anwinkel**: a und o, b und p, c und m, d und n. In Übersicht:

Gegenwinkel	Wechselwinkel	Anwinkel
a und m,	a und p,	a und o,
b „ n,	b „ o,	b „ p,
c „ o,	c „ n,	c „ m,
d „ p,	d „ m,	d „ n.

Diese Winkel haben namentlich praktische Bedeutung, wenn die zwei geschnittenen Geraden gleichlaufend sind.

§ **31.** Schreitet (Fig. 26) die Gerade AB längs der EF mit sich selbst parallel fort, bis sie in die Lage CD kommt, so wird sie, da sich dabei ihre Lage gegen die EF nicht ändert, mit dieser stets dieselben vier Winkel bilden; es werden also, wenn AB nach CD gelangt, 1.) je zwei Gegenwinkel aufeinander fallen, also einander gleich sein: $a = m$, $b = n$, $c = o$, $d = p$; 2.) je zwei Wechselwinkel werden in zwei Scheitelwinkel übergehen, also auch einander gleich sein: $a = p$, $b = o$, $c = n$, $d = m$; 3.) je zwei Anwinkel endlich werden zu Nebenwinkeln, also zusammen 180^0 betragen: $a + o = 180^0$, $b + p = 180^0$, $c + m = 180^0$, $d + n = 180^0$. In Übersicht:

1) $a = m$,	2) $a = p$,	3) $a + o = 180^0$,
$b = n$,	$b = o$,	$b + p = 180^0$,
$c = o$,	$c = n$,	$c + m = 180^0$,
$d = p$,	$d = m$,	$d + n = 180^0$; d. h.

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden geschnitten, so sind

1. je zwei Gegenwinkel einander gleich,
2. je zwei Wechselwinkel einander gleich,

3. je zwei Anwinkel zusammen gleich 180°.

Umgekehrt folgt: Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich sind oder zwei Anwinkel zusammen 180° betragen, so müssen die geschnittenen Geraden parallel sein.

Aufgaben.

1. Zeichne zwei parallele Gerade AB und CD und durchschneide sie durch eine dritte Gerade EF, welche die anderen in G und H trifft! Gib alle Paare von Neben-, Scheitel-, Gegen-, Wechsel- und Anwinkeln an!

2. Es sei (Fig. 26) der Winkel $a = 112°$; wie groß ist b, c, d, m, n, o, p?

3. Welche Richtungen haben die Schenkel *a)* zweier gleicher Gegenwinkel, *b)* zweier gleicher Wechselwinkel?

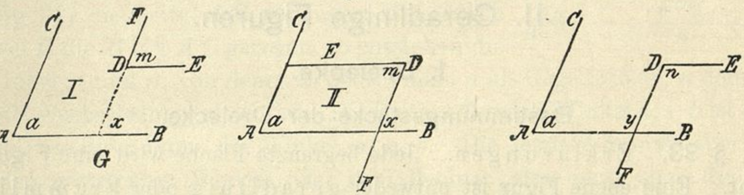
4. Zeiget an Türen und Fenstern Gegen-, Wechsel- und Anwinkel!

§ 32. 1. Es sei (Fig. 27) $AB \parallel DE$ und $AC \parallel DF$.

In I sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m gleichgerichtet und es ist, da Winkel $a = x$ und $m = x$ als Gegenwinkel, auch $a = m$.

In II sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m entgegengesetzt gerichtet; da a dem Winkel x als Gegenwinkel und m dem Winkel x als Wechselwinkel gleich ist, so ist auch in diesem Falle $a = m$.

Fig. 27.



In III haben die Winkel a und n auch paarweise parallele Schenkel, es ist jedoch nur ein Paar paralleler Schenkel nach derselben Seite, das andere Paar aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet. Da $a + y = 2R$ als Anwinkel und $n = y$ als Wechselwinkel ist, so ist auch $a + n = 2R$.

Daraus folgt:

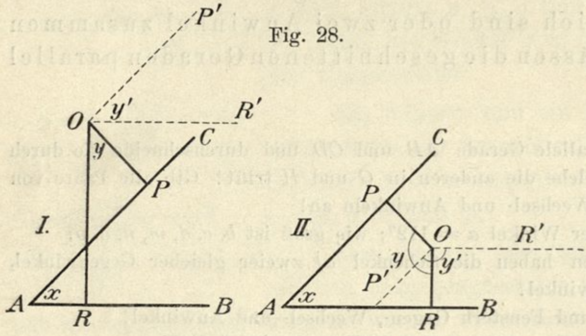
a) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel laufen, sind einander gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite oder nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

b) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel laufen, betragen zusammen 180°, wenn nur ein Paar der parallelen Schenkel nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.

2. Es sei (Fig. 28) $OR \perp AB$ und $OP \perp AC$. Man drehe die Schenkel OR und OP des Winkels y als eine feste Verbindung um den Scheitel O um 90°, so daß sie in die Lage OR' und OP' kommen.

In I haben nun die Winkel y' und x paarweise parallele und nach denselben Seiten gerichtete Schenkel; also ist Winkel $y' = x$, folglich auch Winkel $y = x$. In II sind auch die Schenkel der Winkel y' und x paarweise parallel, jedoch ein Paar nach derselben, das andere Paar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; also ist $\sphericalangle\, y' + x = 180^0$, folglich auch Winkel $y + x = 180^0$.

Fig. 28.



Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander normal stehen, sind entweder einander gleich, oder ihre Summe ist gleich 180^0.

Wann findet die erste und wann die zweite Beziehung statt?

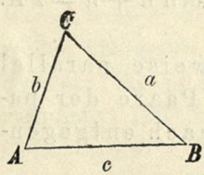
II. Geradlinige Figuren.

1. Dreiecke.

Bestimmungsstücke der Dreiecke.

§ 33. Erklärungen. Jede begrenzte Fläche wird eine **Figur** genannt. Eine ebene Figur ist entweder geradlinig oder krummlinig, je nachdem sie von geraden oder krummen Linien begrenzt wird. Die Grenzlinien heißen Seiten der Figur; ihre Gesamtheit bildet den Umfang.

Fig. 29.



Eine von drei Strecken begrenzte ebene Figur (Fig. 29) heißt ein **Dreieck** ($\triangle$). Die drei Strecken heißen Seiten des Dreieckes; die Summe der drei Seiten heißt der Umfang des Dreieckes.

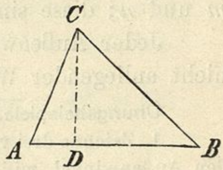
Jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel. Jede Seite hat zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel. Jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen und die dritte liegt ihm gegenüber.

Seiten des Dreieckes.

§ 34. In jedem Dreiecke ist die Summe je zweier Seiten größer als die dritte; denn der Umweg, den man über AC und CB macht, um von A nach B zu gelangen, ist länger als der gerade Weg über AB.

Diejenige Seite, über der man sich das Dreieck errichtet denkt, heißt die **Grundlinie**. Da man sich über jeder Seite das Dreieck errichtet denken kann, so kann im allgemeinen auch jede Seite Grundlinie sein. Der Scheitel des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, wird die **Spitze** oder der **Scheitel**, und die Normale, die von der Spitze auf die Richtung der Grundlinie gefällt wird, die **Höhe** des Dreieckes genannt.

Fig. 30.

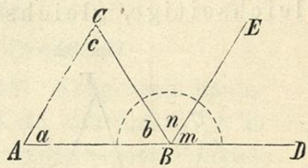


Nimmt man im Dreiecke ABC (Fig. 30) AB als Grundlinie an, so ist C der Scheitel und CD die Höhe.

Winkel des Dreieckes.

§ 35. Verlängert man eine Seite eines Dreieckes, so bildet die Verlängerung mit der anstoßenden Seite einen Winkel, der ein **Außenwinkel** des Dreieckes heißt, während die drei Winkel im Dreiecke **innere** Winkel sind.

Fig. 31.



CBD (Fig. 31) ist ein Außenwinkel des Dreieckes ABC.

§ 36. Wird in dem Dreiecke ABC (Fig 31) die Seite AB verlängert und durch zwei B die $BE \parallel AC$ gezogen, so entstehen die Winkel m und n, von denen m dem Winkel a als Gegenwinkel, n dem Winkel c als Wechselwinkel gleich ist. Die Summe der drei Winkel a, c, b ist daher so groß wie die Summe der Winkel m, n, b. Die letztere Summe aber beträgt einen gestreckten Winkel oder zwei Rechte; also muß auch die Summe von a, c und b zwei Rechte betragen: $\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = 2R = 180^0$.

Schneide aus Papier ein Dreieck, schneide zwei Winkelflächen ab und setze sie an den dritten Winkel an!

Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten oder 180^0.

Aus diesem Satze folgt:

1. Zwei Dreieckswinkel betragen zusammen weniger als 180^0.

Können in einem Dreiecke zwei rechte Winkel oder zwei stumpfe Winkel oder ein rechter **und** ein stumpfer Winkel vorkommen? Jedes Dreieck hat daher wenigstens zwei spitze Winkel.

2. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt sind, so findet man den dritten, indem man die beiden gegebenen Winkel addiert und ihre Summe von 180^0 subtrahiert.

Zwei Winkel eines Dreieckes sind *a)* 65^0 und 87^0; *b)* 43^0 $10'$ und 102^0 $27'$; *c)* 25^0 $46'$ $21''$ und 74^0 $48'$ $49''$; *d)* 57^0 $38'$ $34''$ und 61^0 $10'$ $16''$; wie groß ist der dritte Winkel?

3. Sind zwei Winkel eines Dreieckes gleich zwei Winkeln eines anderen Dreieckes, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

4. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.

Denn der Außenwinkel CBD (Fig. 31) ist die Summe der Winkel m und n; diese sind aber den Winkeln a und c gleich.

Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist größer als ein innerer ihm nicht anliegender Winkel.

Übungsbeispiele.

1. Zeichne drei verschiedene Dreiecke, zeichne zu jedem Winkel jedes Dreieckes den Außenwinkel, miß mit dem Winkelmesser die drei Außenwinkel jedes Dreieckes und bilde deren Summe! Wie groß ist die Summe aller drei Außenwinkel eines Dreieckes?

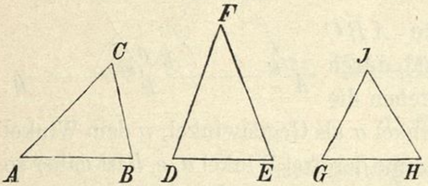
2. Zwei innere Winkel eines Dreieckes sind *a)* 53° und 67°; *b)* $51^\circ\ 24'\ 46''$ und $112^\circ\ 48''$; wie groß ist der gegenüberliegende Außenwinkel?

3. Zwei Außenwinkel eines Dreieckes betragen: $57^\circ\ 24'$ und $145^\circ\ 15''$; bestimme die Dreieckswinkel!

Einteilung der Dreiecke nach den Seiten.

§ 37. Nach der Länge der Seiten unterscheidet man ungleichseitige, gleichschenkelige und gleichseitige Dreiecke.

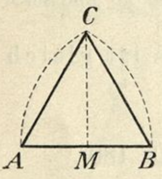
Fig. 32.



Ein Dreieck ABC (Fig. 32), in dem alle drei Seiten einander ungleich sind, heißt ungleichseitig; ein Dreieck DEF, in dem zwei Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenkelig; ein Dreieck GHJ, in dem alle drei Seiten gleich sind, wird gleichseitig genannt.

Im gleichschenkeligen Dreiecke heißen die gleichen Seiten Schenkel, die dritte Seite heißt die Grundlinie und der ihr gegenüberliegende Eckpunkt der Scheitel.

Fig. 33.



Konstruktionsaufgaben.

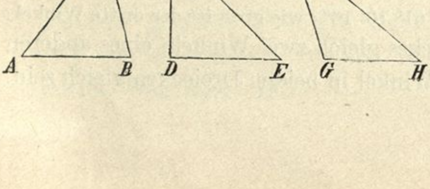
1. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen. (Fig. 33.)

2. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen. Errichte in der Mitte der Grundlinie eine Normale und nimm einen beliebigen Punkt derselben als dritten Dreieckspunkt an!

Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln.

§ 38. Mit Rücksicht auf die Winkel gibt es spitzwinkelige Dreiecke, in denen alle drei Winkel spitz sind; rechtwinkelige, in denen ein rechter Winkel, und stumpfwinkelige, in denen ein stumpfer Winkel vorkommt.

Fig. 34.



In Fig. 34 ist ABC ein spitzwinkeliges, DEF ein rechtwinkeliges und JGH ein stumpfwinkeliges Dreieck.

Im rechtwinkeligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite EF die Hypotenuse; die beiden Seiten DE und DF, die den rechten Winkel einschließen, werden Katheten genannt.

Aufgabe.

In einem rechtwinkligen Dreiecke mißt der eine spitze Winkel *a)* 45^0, *b)* 60^0, *c)* 30^0, *d)* $68^0\ 14'\ 29''$; wie groß ist der andere spitze Winkel?

Konstruktionsaufgaben.

1. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen.

Zeichne einen rechten Winkel und verbinde zwei Punkte der Schenkel durch eine Strecke!

2. Zeichne *a)* einen spitzen, *b)* einen rechten, *c)* einen stumpfen Winkel, schneide von den Schenkeln gleiche Strecken ab und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke! Was für ein Dreiek erhältst du?

3. Zeichnet ein gleichseitiges Dreiek, dessen Umfang 18·3 *cm* beträgt!

4. Zeichnet ein gleichschenkeliges Dreieck, das eine 3 *cm* lange Grundlinie und einen 12 *cm* großen Umfang hat!

2. Kongruenz der Dreiecke.

Konstruktion und Kongruenz der Dreiecke.

§ 39. Wann heißen Raumgebilde **kongruent**? Kongruente Raumgebilde können so aufeinander gelegt werden, daß sie sich decken, d. h. daß alle Punkte des einen Raumgebildes mit den entsprechenden Punkten des anderen zusammenfallen. Umgekehrt: Können zwei Raumgebilde zur Deckung gebracht werden, so sind sie kongruent ($\cong$).

Damit sich zwei Dreiecke, wenn sie aufeinander gelegt werden, decken können, müssen in denselben alle sechs Bestimmungsstücke, nämlich alle drei Seiten und alle drei Winkel paarweise gleich sein. Daraus folgt: In kongruenten Dreiecken sind die Seiten, die den gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander gleich und ebenso sind die Winkel, die den gleichen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Zwei Dreiecke sind **kongruent** (ebenbildlich), d. h. sie haben dieselbe Größe und dieselbe Gestalt, wenn in ihnen alle sechs Bestimmungsstücke, die drei Seiten und die drei Winkel, paarweise gleich sind.

Da durch die Größe gewisser Seiten und Winkel eines Dreieckes auch die Größe der anderen, z. B. durch die Größe zweier Winkel die Größe des dritten Winkels, bestimmt ist, so kann man aus der Gleichheit von weniger als sechs Bestimmungsstücken in zwei Dreiecken auf ihre Kongruenz schließen. Die Fälle, in denen dies stattfindet, sind in den folgenden vier Lehrsätzen über die Kongruenz der Dreiecke enthalten.

Um zu sehen, wieviele und welche Bestimmungsstücke in zwei Dreiecken paarweise gleich sein müssen, damit die Dreiecke kongruent seien, braucht man nur zu untersuchen, wieviele und welche Stücke erforderlich sind, um mit ihnen ein Dreieck von bestimmter Größe und Gestalt zu konstruieren, weil dann alle Dreiecke, die in diesen Stücken übereinstimmen, kongruent sein müssen.

Ist nur ein Bestimmungsstück oder sind zwei Bestimmungsstücke gegeben, so lassen sich mit ihnen unzählig viele verschiedene Dreiecke konstruieren.

Damit ein Dreieck der Größe und der Gestalt nach vollkommen bestimmt werde, sind drei Bestimmungsstücke erforderlich, unter denen wenigstens eine Seite sein muß; es können gegeben sein:

1. eine Seite und zwei Winkel (*W S W*, Winkel—Seiten—Winkelsatz),

2. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel (*S W S*, Seiten—Winkel—Seitensatz),

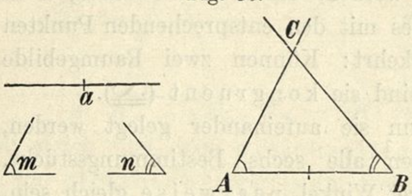
3. zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel (*S S W*, Seiten—Seiten—Winkelsatz) und

4. alle drei Seiten (*S S S*, Seiten—Seiten—Seitensatz).

§ 40. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Die zwei Winkel sind entweder die der gegebenen Seite anliegenden, oder es ist der eine ein anliegender, der andere der gegenüberliegende Winkel.

Fig. 35.



a) Es seien (Fig. 35) a die gegebene Seite, m und n die ihr anliegenden Winkel.

Man ziehe $AB = a$; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Trägt man in A den Winkel m und in B den Winkel n auf, so muß der dritte Eckpunkt C in dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden AC und BC, die mit der Seite AB die gegebenen Winkel bilden, liegen. Man erhält also das Dreieck ABC, das eine völlig bestimmte Größe und Gestalt hat. Durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Geschieht die Auflösung einer Aufgabe, wie hier, mittelst des Lineals und des Zirkels, und gründet sie sich auf die Lehren der Geometrie, so heißt die Zeichnung eine geometrische Konstruktion.

Werden mit denselben drei Stücken a, m und n noch weitere Dreiecke gezeichnet, so müssen alle mit ABC gleiche Größe und gleiche Gestalt haben, also mit ihm kongruent sein. Daraus folgt als

I. Kongruenzsatz:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn in denselben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel paarweise gleich sind.

b) Sind von einem Dreiecke eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist dadurch auch der dritte Winkel bestimmt; dann sind aber eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt, und man kann allgemein sagen: Durch eine Seite und zwei Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

Zwei **rechtwinkelige Dreiecke** sind **kongruent**, wenn in ihnen eine Kathete und ein spitzer Winkel, oder die Hypotenuse und ein spitzer Winkel paarweise gleich sind.

Konstruktionsaufgaben.

1. Zeichne folgende Dreiecke:

a) eine Seite 7 *cm*, anliegende Winkel 60° und 45°;
b) „ „ 92 *mm*, „ „ 30° „ 72°;
c) „ „ 4·9 *cm*, „ „ 120° „ 36°!

2. Versuche mit der Seite 4 *dm* und den Winkeln 120° und 72° ein Dreieck zu zeichnen! Wie müssen die anliegenden Winkel beschaffen sein, damit die Konstruktion des Dreieckes möglich sei?

3. Konstruiere mit Hilfe des Transporteurs ein Dreieck, in dem eine Seite 81 *mm*, ein anliegender Winkel 59° und der gegenüberliegende Winkel 72° beträgt!

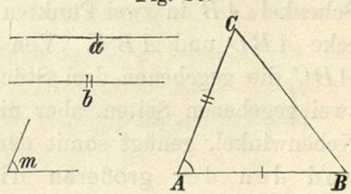
4. Zeichne ein rechtwinkeliges Dreieck, wenn gegeben sind:

a) eine Kathete = 2 *cm* 8 *mm* und der anliegende spitze Winkel = 72°;
b) eine Kathete = 78 *mm* und der gegenüberliegende Winkel = 60°;
c) die Hypotenuse = 6 *cm* und ein anliegender Winkel = 45°!

§ 41. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Es seien (Fig. 36) *a* und *b* die zwei gegebenen Seiten und *m* der von ihnen eingeschlossene Winkel. Konstruiert man in *A* den gegebenen Winkel *m* und trägt auf dessen Schenkeln $AB = a$ und $AC = b$ auf, so ist dadurch die Lage der Eckpunkte *B* und *C*, daher auch die dritte Seite *BC* bestimmt. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Fig. 36.



Konstruiert man mit denselben drei Stücken noch weitere Dreiecke, so müssen sie mit dem früheren in der Größe und Gestalt übereinstimmen, d. h. mit ihm kongruent sein. Daraus folgt der

II. Kongruenzsatz:

Zwei **Dreiecke** sind **kongruent**, wenn in denselben zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel **paarweise** gleich sind.

Konstruktionsaufgaben.

1. Konstruiere folgende Dreiecke:

a) zwei Seiten 7·2 *cm* und 8·6 *cm*, eingeschlossener W. 60°;
b) „ „ 89 *mm* „ 90 *mm*, „ „ 45°;
c) „ „ 7 *cm* 4 *mm* „ 6 *cm* 6 *mm*, „ „ 120°!

2. Zeichne ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten 41 *mm* und 69 *mm*!

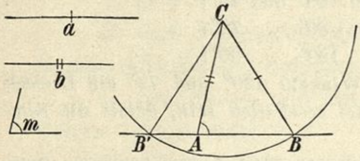
3. Zeichne mit Hilfe des Transporteurs ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Schenkel 7 *cm* 8 *mm* und dessen Winkel am Scheitel 76° ist!

4. Wann sind zwei gleichschenkelige Dreiecke nach dem zweiten Satze kongruent? Wann zwei rechtwinklige Dreiecke?

§ 42. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Der gegebene Winkel kann der größeren oder der kleineren der beiden Seiten gegenüberliegen.

Fig. 37.



a) Es seien (Fig. 37) a und b die beiden gegebenen Seiten und zwar a größer als b; der der größeren Seite a gegenüberliegende Winkel sei m.

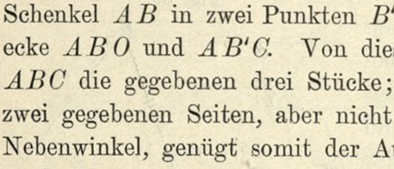
Man trage den Winkel m auf und mache den einen Schenkel AC gleich der Seite b, welcher er anliegen muß, wenn er der Seite a gegenüber liegen soll; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und C, bestimmt. Der dritte Eckpunkt B muß in dem zweiten Schenkel AB des Winkels liegen und zugleich von dem Eckpunkte C um die Strecke a entfernt sein. Beschreibt man daher aus C mit dem Halbmesser a eine Kreislinie, so muß B in dem Durchschnitte dieser Kreislinie mit dem Schenkel AB liegen. Die Kreislinie schneidet den Schenkel AB in zwei Punkten B' und B und man erhält daher zwei Dreiecke ABO und $AB'C$. Von diesen enthält jedoch nur das erste Dreieck ABC die gegebenen drei Stücke; das zweite $AB'C$ hat zwar auch die zwei gegebenen Seiten, aber nicht den gegebenen Winkel, sondern dessen Nebenwinkel, genügt somit der Aufgabe nicht. Durch zwei Seiten und den der **größeren** dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Zeichnet man mit denselben drei Stücken noch weitere Dreiecke, so müssen diese mit dem früheren gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben. Daraus folgt der

III. Kongruenzsatz:

Zwei **Dreiecke** sind **kongruent,** wenn in denselben zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel **paarweise** gleich sind.

Fig. 38.



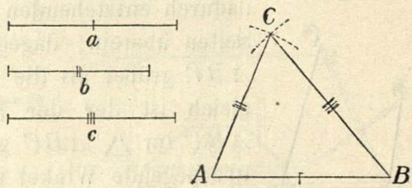
b) Es seien (Fig. 38) a und b die zwei gegebenen Seiten und zwar a kleiner als b, und der Winkel, welcher der kleineren Seite a gegenüberliegt, sei m. Durch das gleiche Verfahren, wie oben, erhält man zwei Dreiecke ABC und $AB'C$, welche beide die gegebenen drei Stücke enthalten, aber in der Größe und Gestalt verschieden sind. Durch zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

Zeichne ein Dreieck, in dem zwei Seiten *a)* 8 *cm* und 5 *cm*, *b)* 7 *cm* 2 *mm* und 5 *cm* 4 *mm*, *c)* 58 *mm* und 49 *mm* sind und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel *a)* 60°, *b)* 72°, *c)* 150° beträgt!

§ 43. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn die drei Seiten gegeben sind.

Es seien (Fig. 39), a, b, c die Längen der drei Seiten. Trägt man die Strecke $AB = a$ auf, so sind dadurch zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Beschreibt man dann aus A mit dem Halbmesser b und aus B mit dem Halbmesser c Kreisbogen, die einander im Punkte C schneiden, so ist C der dritte Eckpunkt des Dreieckes. Man ziehe daher die Strecken AC und BC; dann ist ABC das verlangte Dreieck. Durch drei Seiten ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Fig. 39.



Zeichnet man mit denselben drei Seiten a, b, c Dreiecke in beliebiger Zahl, so müssen alle mit ABC gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben, also mit ihm kongruent sein. Daraus folgt der

IV. Kongruenzsatz:

Zwei **Dreiecke** sind **kongruent**, wenn in ihnen alle drei Seiten **paarweise** gleich sind.

Aufgaben.

1. Zeichne Dreiecke mit den Seiten *a)* 6 *cm*, 5 *cm*, 7 *cm*; *b)* $5\frac{1}{2}$ *cm*, $4\frac{4}{5}$ *cm*, 6·3 *cm*; *c)* 47 *mm*, 74 *mm*, 48 *mm*; *d)* 5 *cm* 6 *mm*, 5 *cm* 2 *mm*, 6 *cm* 1 *mm*!

2. Versuche mit den Strecken 2 *cm*, 3 *cm*, 5 *cm* ein Dreieck zu konstruieren! Wie müssen die drei gegebenen Strecken beschaffen sein, damit man mit ihnen ein Dreieck zeichnen könne?

3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie 55 *mm* und dessen Schenkel 71 *mm* ist!

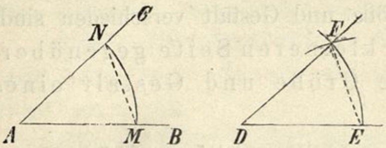
4. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite *a)* 6 *cm*, *b)* 7 *cm* 2 *mm* beträgt!

5. Wann sind zwei gleichseitige, wann 2 gleichschenkelige Dreiecke kongruent?

6. Ein Dreieck AMN (Fig. 40) zu übertragen, d. i. ein Dreieck DEF zu zeichnen, das mit dem Dreiecke AMN kongruent ist.

Mache $DE = AM$, beschreibe aus D mit dem Halbmesser AN und aus E mit dem Halbmesser MN Kreisbogen, die einander in F schneiden! Ziehe dann DF und EF, so entsteht das Dreieck DEP, welches mit AMN kongruent ist!

Fig. 40.

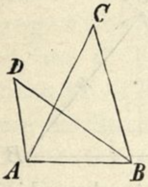


7. Einen Winkel BAC (Fig. 40) zu übertragen, d. i. einen Winkel zu zeichnen, der dem Winkel BAC gleich ist.

Ziehe DE; dann beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, der die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe auch aus D einen Bogen, der DE in E durchschneidet; endlich fasse mit dem Zirkel den Abstand MN und durchschneide damit aus E den von D aus beschriebenen Bogen in F! Wird nun DF gezogen, so ist der Winkel $EDF = BAC$, da $\triangle DEF \cong AMN$ ist.

§ 44. Nimmt man in den Winkeln ABC und ABD (Fig. 41) $BC = BD$ an und zieht AC und AD, so stimmen die dadurch entstehenden Dreiecke ABC und ABD in zwei Seiten überein; dagegen ist die dritte Seite AC im $\triangle ABC$ größer als die dritte Seite AD im $\triangle ABD$; zugleich ist der der Seite AC gegenüberliegende Winkel ABC im $\triangle ABC$ größer als der der Seite AD gegenüberliegende Winkel in ABD im $\triangle ABD$.

Fig. 41.



Daraus folgt:

1. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größeren dieser Seiten auch ein größerer Winkel gegenüber.

2. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größeren dieser Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

3. Symmetrische Gebilde.

Anwendung der Kongruenzsätze.

§ 45. **Symmetrische Lage der Gebilde.** Erklärungen. **Zwei Punkte** (A und B in Fig. 42) liegen symmetrisch in Beziehung auf eine Gerade (XY), wenn die Strecke (AB), die sie verbindet, zu dieser Geraden normal ist und durch sie halbiert wird, wenn also $AB \perp XY$ und $AC = CB = \frac{AB}{2}$ ist. Die Gerade (XY) heißt die Symmetrieachse oder Symmetrale. So liegen in Fig. 42 die Punkte D und D', E und E' . . . symmetrisch in Bezug auf die Symmetrale XY.

Zwei ebene Gebilde liegen symmetrisch in Beziehung auf eine Gerade, wenn jedem Punkte des einen Gebildes ein symmetrisch liegender Punkt des andern Gebildes entspricht.

Die schraffierten Figuren in Fig. 42 liegen symmetrisch in Beziehung auf XY.

Zwei symmetrisch liegende ebene Gebilde können durch Umklappen um die Symmetrale zur Deckung gebracht werden.

Symmetrie ebener Gebilde.

§ **46.** Erklärung. **Ein** ebenes Gebilde ($DEE'D'$ in Fig. 42) heißt symmetrisch, wenn es sich durch eine Gerade (die Symmetrale) in zwei symmetrisch liegende Teile teilen läßt.

Fig. 43.

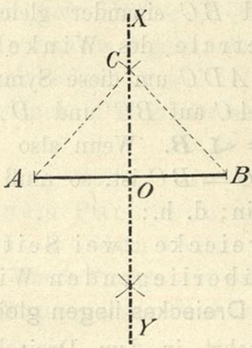
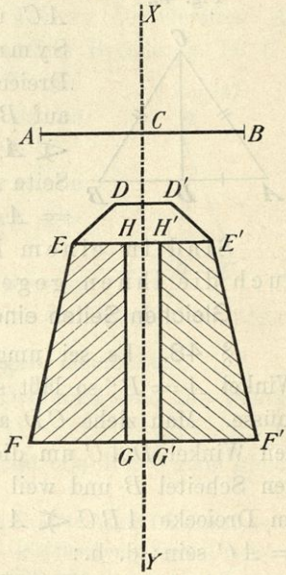


Fig. 42.

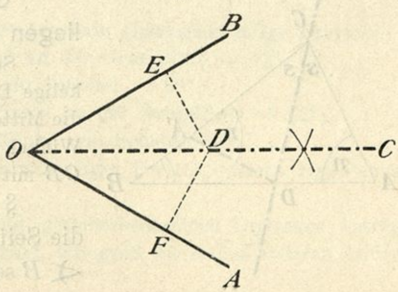


Die beiden Hälften einer symmetrischen Figur können durch Umklappen um die Symmetrieachse zur Deckung gebracht werden.

1. Streckensymmetrale. Jede Strecke ist ein symmetrisches Gebilde; ihre Symmetrale ist die in ihrem Halbierungspunkte errichtete Normale.

Ist in Fig. 43 $AO = OB = \frac{AB}{2}$ und $OX \perp AB$ vorausgesetzt, so ist OX die Symmetrale der Strecke AB. Verbindet man die Endpunkte A und B mit irgend einem Punkte (z. B. C) der Symmetrale, so entstehen zwei kongruente Dreiecke $ACO \cong BCO$; daher ist $\boldsymbol{AC = BC}$; d. h.:

Fig. 44.



Jeder Punkt der Streckensymmetrale hat von den beiden Endpunkten der Strecke gleiche Abstände.

Es liegen alle Punkte, die von den Endpunkten einer Strecke den gleichen Abstand haben, auf der Symmetrale der Strecke.

2. Winkelsymmetrale. Jeder Winkel ist ein symmetrisches Gebilde; seine Symmetrale ist die Halbierungslinie desselben.

Es sei vorausgesetzt (Fig. 44): $\sphericalangle COA = \sphericalangle COB$, $DE \perp OB$, $DF \perp OA$; dann ist $\triangle ODE \cong \triangle ODF$, woraus folgt, $\boldsymbol{DE} = \boldsymbol{DF}$; d. h.:

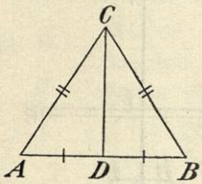
Jeder Punkt der Winkelsymmetrale hat von den beiden Schenkeln des Winkels gleiche Abstände.

Umkehrung: Alle Punkte, die von den Schenkeln eines Winkels gleichweit entfernt sind, liegen auf der Symmetrale des Winkels.

4. Lehrsätze von den Dreiecken überhaupt.

§ 47. Beziehungen zwischen den Gegenstücken eines Dreieckes.

Fig. 45.



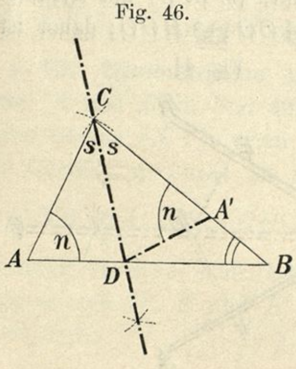
Es seien in dem Dreiecke ABC (Fig. 45) die Seiten AC und BC einander gleich. Man ziehe CD als Symmetrale des Winkels C und klappe das Dreieck ADC um diese Symmetrale um; es fällt A auf B, AC auf BC und DA auf DB; daher ist $\sphericalangle \boldsymbol{A} = \sphericalangle \boldsymbol{B}$. Wenn also im Dreiecke ABC die Seite $AC = BC$ ist, so muß auch der Winkel $B = A$ sein; d. h.:

Sind in einem Dreiecke zwei Seiten gleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich; oder: Gleichen Seiten eines Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber.

§ 48. Es sei umgekehrt in dem Dreiecke ABC (Fig. 45) der Winkel $A = B$; so läßt sich zeigen, daß auch die Seite $BC = AC$ sein müsse. Man ziehe CD als Symmetrale der Seite AB und klappe den Winkel DAC um diese Symmetrale um; es fällt der Scheitel A auf den Scheitel B und weil C in C verbleibt, ist $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC}$. Wenn also im Dreiecke ABC $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ ist, so muß auch die Seite $BC = AC$ sein; d. h.:

Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten gleich; oder: Gleichen Winkeln eines Dreieckes liegen gleiche Seiten gegenüber.

Fig. 46.



Schneidet aus Zeichenpapier das gleichschenkelige Dreieck ABC (Fig. 45) aus und biegt es um die Mittellinie CD um, so werdet ihr sehen, daß der Winkel B genau auf A fällt, und daß sich die Seite CB mit CA genau deckt.

§ 49. Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 46) die Seite $BC > AC$; so muß auch $\sphericalangle A > \sphericalangle B$ sein. Man ziehe CD als Symmetrale des Winkels C und klappe dann das Dreieck ADC um diese Symmetrale CD um; so fällt A auf CB zwischen C und B nach A'; dann ist der Winkel A in seiner neuen Lage bei A' als Außenwinkel n des Dreieckes DBA' größer als der Winkel B.

In jedem Dreiecke liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Umkehrung: Dem größeren Winkel eines Dreieckes liegt die größere Seite gegenüber.

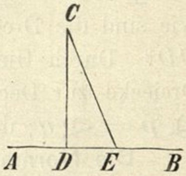
In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse, in einem stumpfwinkeligen die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite.

Aus dem III. Kongruenzsatze (§ 42) folgt dann auch:

Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind kongruent, wenn in ihnen die Hypotenuse und eine Kathete paarweise gleich sind.

§ 50. Zieht man vom Punkte C (Fig. 47) zu der Geraden AB die Normale CD und überdies irgend eine andere Gerade, z. B. CE, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck CDE und es muß darin die Hypotenuse CE größer sein als die Kathete CD.

Fig. 47.



Die Normale ist daher die kürzeste Gerade, die von einem Punkte zu einer geraden Linie gezogen werden kann.

Die Normale von einem Punkte auf eine Gerade dient dazu, die Entfernung jenes Punktes von der Geraden zu messen.

Lehrsätze von den gleichschenkeligen Dreiecken.

§ 51. 1. In einem gleichschenkeligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich. (Folgt aus § 47.)

In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich.

Rechen- und Konstruktionsaufgaben.

1. Wie groß ist jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes?

2. Wie groß ist der Winkel am Scheitel eines gleichschenkeligen Dreieckes, wenn ein Winkel an der Grundlinie *a)* 52^0, *b)* $37^0\ 12'\ 50''$ ist?

3. Wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel *a)* 71^0, *b)* $25^0\ 46'$, *c)* $59^0\ 19'\ 42''$ beträgt?

4. Wie groß ist jeder spitze Winkel in einem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecke?

5. Zeichne mit Hilfe des Transporteurs folgende gleichschenkelige Dreiecke:

a) Grundlinie = 4 *cm*, ein Winkel an der Grundlinie = 73^0;

b) Grundlinie = 54 *mm*, Winkel am Scheitel = 68^0;

c) ein Schenkel = 78 *mm*, ein Winkel an der Grundlinie = 62^0;

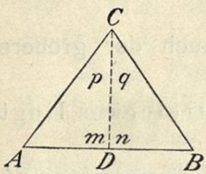
d) ein Schenkel = 5 *cm* 6 *mm*, Winkel am Scheitel 84^0!

6. Zeichne ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse 82 *mm* ist!

7. Der Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkeligen Dreieckes beträgt $145^0\ 45'\ 45''$; wie groß sind die inneren Winkel, wie groß die beiden anderen Außenwinkel des Dreieckes?

§ **52.** 2. Es sei das Dreieck ABC (Fig. 48) gleichschenkelig, nämlich $AC = BC$. Halbiert man die Grundlinie AB im Punkte D und verbindet die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel durch eine Gerade (CD), so liegen die beiden Dreiecke ADC und DBC symmetrisch in Beziehung auf die Gerade CD. Warum ist CD die Symmetrale der Grundlinie AB? Man klappe $\triangle ADC$ um CD. Wohin fällt es? Daher ist $\sphericalangle m = \sphericalangle n = 90^{0}$, also $CD \perp AB$ und $\sphericalangle p = \sphericalangle q$; daraus folgt:

Fig. 48.



In einem gleichschenkeligen Dreiecke steht die **Verbindungsstrecke** des Scheitels mit der Mitte der Grundlinie **auf dieser normal** und **halbiert den Winkel am Scheitel.**

Der Beweis für diesen Lehrsatz kann auch mit Anwendung der Kongruenzsätze geführt werden.

§ **53.** 3. Es sei in dem gleichschenkeligen Dreiecke ABC (Fig. 48) $CD \perp AB$. Was ist daher CD in Beziehung auf die Grundlinie AB? Wie sind die Dreiecke ADC und DBC in Beziehung auf die Strecke CD? Durch Umklappen um CD können die beiden rechtwinkeligen Dreiecke zur Deckung gebracht werden und es ist $\boldsymbol{AD = BD}$ und $\sphericalangle \boldsymbol{p} = \sphericalangle \boldsymbol{q}$; daraus folgt:

Die Normale von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreieckes auf die Grundlinie **halbiert diese Grundlinie und den Winkel am Scheitel.**

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Lehrsatzes kann auch mit Anwendung der Kongruenz der Dreiecke geführt werden.

Der Beweis für diesen Lehrsatz ist auch noch giltig, wenn $AB = AC = BC$, d. i. wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Im gleichschenkeligen und auch im gleichseitigen Dreiecke wird die Grundlinie von der Höhe halbiert.

Da nach dem obigen Satze die Strecke zwischen dem Scheitel und der Mitte der Grundlinie auf dieser normal steht, durch die Mitte der Grundlinie aber auf dieselbe nur eine einzige Normale gezogen werden kann, so ist auch der folgende Satz richtig:

4. **Die Normale** aus der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes **geht durch den Scheitel.**

5. **Die Gerade,** die den Winkel am Scheitel eines gleichschenkeligen Dreieckes halbiert, **halbiert auch die Grundlinie und steht auf dieser normal.** (Begründung mittelst der Symmetralen des Winkels am Scheitel.)

In jedem gleichschenkeligen Dreiecke gibt es eine durch die Spitze gehende Gerade, die drei voneinander untrennbare Eigenschaften besitzt:

1. sie halbiert den Winkel an der Spitze (sie ist die Symmetrale des Winkels am Scheitel),

2. sie halbiert die Grundlinie,

3. sie steht auf der Grundlinie senkrecht (sie ist die Symmetrale der Grundlinie). Diese Gerade ist auch die Symmetrale des gleichschenkeligen Dreieckes.

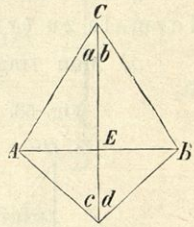
Ein gleichschenkeliges Dreieck ist symmetrisch in Beziehung auf seine Höhe als Symmetrale.

Ein gleichseitiges Dreieck ist symmetrisch in Beziehung auf jede seiner drei Höhen als Symmetrieachse.

In einem gleichseitigen Dreiecke ist jede Höhe zugleich eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale.

§ 54. Zeichnet man über der Grundlinie AB (Fig. 49) zwei gleichschenkelige Dreiecke ABC und ABD und zieht durch die Scheitel C und D die Strecke CD, so sind die Dreiecke ADC und DBC in symmetrischer Lage in Beziehung auf die CD. Warum ist CD die Symmetrale von AB? Durch Umklappen um CD können die Dreiecke ADC und DBC zur Deckung gebracht werden und es ist daher $\sphericalangle a = \sphericalangle b$ und $\sphericalangle c = \sphericalangle d$.

Fig. 49.



Da durch Umklappen um CD sowohl die Dreiecke AEC und EBC als auch die Dreiecke ADE und DBE zur Deckung gebracht werden können, so ist auch $AE = BE$ und $CD \perp AB$; daher:

Zeichnet man über derselben Grundlinie zwei gleichschenkelige Dreiecke und zieht durch die Scheitel eine Gerade, so halbiert diese 1. die Winkel an den Scheiteln, sie halbiert 2. die gemeinschaftliche Grundlinie und steht 3. auf der Grundlinie normal.

Konstruktionsaufgaben.

§ 55. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 50) zu halbieren.

Die Symmetrale CD der Strecke AB trifft die letztere im Halbierungspunkte E; dann ist $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EB}$. Es genügt, zwei Punkte der Symmetrale zu finden; warum? (Fig. 51.)

Fig. 50.

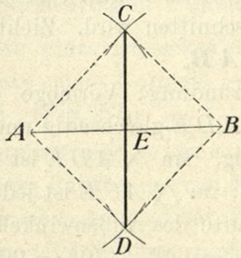
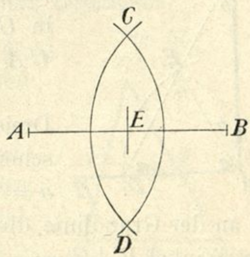


Fig. 51.



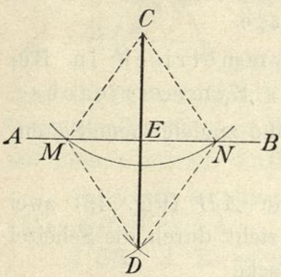
Die Konstruktion ist also: Um eine Strecke zu halbieren, beschreibe man aus

ihren Endpunkten mit demselben Halbmesser nach oben und unten Kreisbogen, die einander in zwei Punkten schneiden, und ziehe durch die beiden Punkte eine Gerade; diese Gerade halbiert die gegebene Strecke.

Aufgaben.

1. Zeichne verschiedene Strecken und halbiere jede derselben!
2. Zeichne eine Strecke und teile sie in 4, 8 gleiche Teile!

Fig. 52.



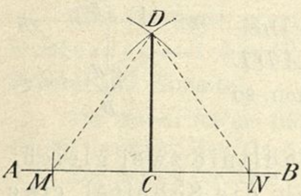
§ **56.** Auf eine gegebene Gerade AB (Fig. 52) von einem außer ihr befindlichen Punkte C eine Normale zu fällen.

Ist C der gegebene Punkt, so suche man zunächst in der gegebenen Geraden zwei Punkte M und N, die von C gleich weit entfernt sind, und konstruiere nun mittels des Punktes D die Symmetrale CD der Strecke MN; dann ist $\boldsymbol{CD \perp AB}$.

§ **57.** In einem Punkte einer Geraden auf diese eine Normale zu errichten.

a) Man trage von dem gegebenen Punkte C (Fig. 53) aus nach beiden Seiten zwei gleiche Strecken CM und CN auf und konstruiere die Symmetrale DC der Strecke MN; dann ist $\boldsymbol{DC \perp AB}$.

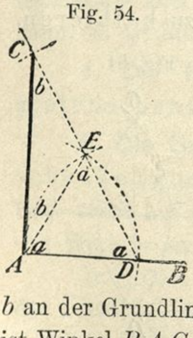
Fig. 53.



b) Ist der gegebene Punkt A ein Endpunkt der gegebenen Strecke AB, so verlängere man die Gerade über diesen Endpunkt hinaus und verfahre sodann wie vorhin. Läßt sich aber die Linie nicht über den Endpunkt hinaus verlängern, so kann man die verlangte Normale auf eine der folgenden Arten erhalten:

1. Auflösung. Man beschreibe (Fig. 54) aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die AB in D schneidet; mit demselben Halbmesser durchschneide man aus D den früheren Kreisbogen in E und beschreibe aus E einen neuen Bogen, welcher von der durch D und E gezogenen Geraden in C geschnitten wird. Zieht man nun die AC, so ist $\boldsymbol{CA \perp AB}$.

Fig. 54.

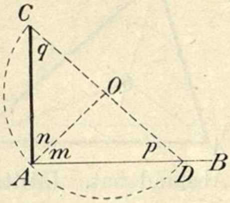


Begründung: Vermöge der Konstruktion ist das Dreieck ADE gleichseitig und das Dreieck ACE gleichschenkelig. Im $\triangle ADE$ ist daher jeder der drei Winkel $a = 60^0$; im $\triangle ACE$ ist jeder der zwei gleichen Winkel b an der Grundlinie die Hälfte des Außenwinkels a, also $b = 30^0$. Mithin ist Winkel $BAC = a + b = 60^0 + 30^0 = 90^0$ und daher $\boldsymbol{AC \perp AB}$.

2. Auflösung. Man nehme (Fig. 55) über der Geraden AB einen Punkt O an, beschreibe aus demselben mit dem Halbmesser OA einen Kreisbogen CAD und ziehe durch D und O eine Gerade, welche jenen Bogen in C durchschneidet; verbindet man diesen Punkt C mit dem gegebenen Punkte A durch eine Gerade AC, so ist diese die verlangte Normale; denn

im gleichschenkeligen $\triangle ADO$ ist Winkel $m = p$,
„ „ $\triangle ACO$ ist Winkel $n = q$,
daher $m + n = p + q$.

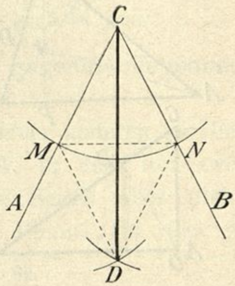
Fig. 55.



Die Winkel m, n, p, q bilden nun die Winkel eines Dreieckes, also ist $m + n + p + q = 2\ R$; folglich ist die halbe Summe $m + n = R$, mithin $\boldsymbol{AC \perp AB}$.

§ 58. Einen gegebenen Winkel ACB (Fig. 56) zu halbieren.

Fig. 56.



Die Halbierungsgerade oder Symmetrale des Winkels ACB geht durch C. Um einen zweiten Punkt derselben zu erhalten, mache man $CM = CN$; dann sind M und N symmetrisch gelegen zur gesuchten Symmetrale. Nun bestimmt man noch einen Punkt D der Streckensymmetrale von MN. Warum ist CD die Symmetiale des Winkels ACB?

Aufgaben.

1. Zeichne verschiedene Winkel und halbiere sie!
2. Zeichne einen Winkel und teile ihn in 4 gleiche Teile!

Geometrische Konstruktion einzelner Winkel.

§ 59. 1. Einen Winkel von *a)* 60°, *b)* 30°, *c)* 120°, *d)* 150° geometrisch zu konstruieren:

a) Durch Konstruktion eines gleichseitigen Dreieckes;

b) durch Halbierung des Winkels von 60°;

c) und *d)* durch Konstruktion des Nebenwinkels von 60°, bezüglich von 30°.

2. Einen Winkel von *a)* 90°, *b)* 45°, *c)* 135° geometrisch zu konstruieren:

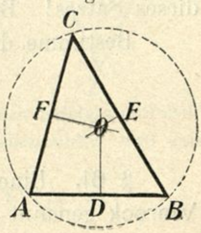
a) Nach § 56 oder § 57;

b) durch Halbierung des Winkels von 90° und *c)* durch Konstruktion des Nebenwinkels von 45°.

§ 60. Die vier merkwürdigen Punkte eines Dreieckes.

1. Halbiere jede Seite eines Dreieckes und errichte auf sie in der Mitte eine Normale — eine Streckensymmetrale! (Fig. 57.)

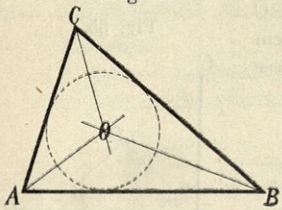
Fig. 57.



Die drei **Seitensymmetralen** eines Dreieckes schneiden sich in **einem** Punkte, der von den drei **Eckpunkten** des Dreieckes gleichen Abstand hat. (Mittelpunkt des dem Dreiecke umgeschriebenen Kreises.)

Lage dieses merkwürdigen Punktes im stumpf- und rechtwinkeligen Dreiecke.

Fig. 58.

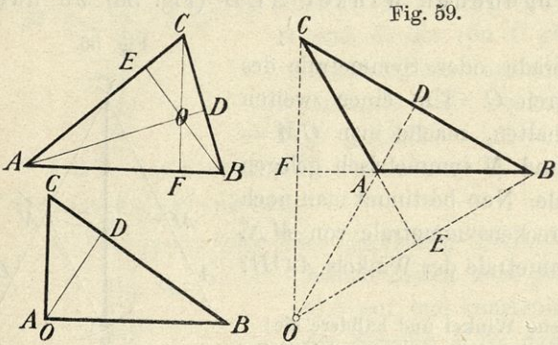


2. Ziehe von jedem Eckpunkte eines Dreieckes eine Gerade, welche den betreffenden Winkel halbiert — eine Winkelhalbierungslinie oder eine Winkelsymmetrale! (Fig. 58.)

Die drei **Winkelsymmetralen** eines Dreieckes schneiden sich in **einem** Punkte, der von den drei **Seiten** des Dreieckes gleichen Abstand hat. (Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.)

3. Fälle von jedem Eckpunkte eines Dreieckes eine Normale auf die gegenüberliegende Seite — eine Höhe! (Fig. 59.)

Fig. 59.

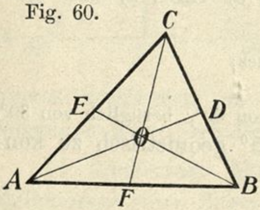


Die drei **Höhen** eines Dreieckes schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Lage dieses merkwürdigen Punktes im stumpf- und rechtwinkeligen Dreiecke!

4. Halbiere jede Seite eines Dreieckes und ziehe von jeder Mitte eine Strecke zu dem gegenüberliegenden Eckpunkte — eine Mittellinie! (Fig. 60.)

Fig. 60.



Die drei **Mittellinien** eines Dreieckes schneiden sich in einem und demselben Punkte, welcher jede Mittellinie so teilt, daß der an einer Ecke liegende Abschnitt doppelt so groß ist als der andere. Der Schnittpunkt der Mittellinien eines Dreieckes heißt Schwerpunkt des Dreieckes.

Miß die Strecken OC und OF, OB und OE, OA und OD und vergleiche sie nach der Länge! $OC = 2\,OF = \frac{2}{3}\,CF$, $OB = 2\,OE = \frac{2}{3}\,BE$, $OA = 2\,OD = \frac{2}{3}\,AD$; $OF = ?$, $OD = ?$, $OE = ?$

Machet ein Dreieck aus Pappendeckel und erprobet die Richtigkeit dieses Satzes! Bestimmet den Schwerpunkt dieses Dreieckes!

Bestimme die vier merkwürdigen Punkte im gleichseitigen Dreiecke!

5. Vierecke.

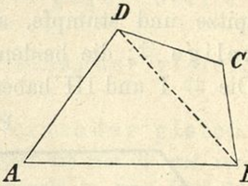
Bestimmungsstücke der Vierecke.

§ 61. Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur wird ein Viereck genannt (Fig. 61).

Ein Viereck hat vier Seiten und vier Winkel. Die Summe der vier Seiten heißt der Umfang des Viereckes.

Die Strecke, die zwei gegenüberstehende Eckpunkte verbindet, heißt Diagonale (BD in Fig. 61).

Fig. 61.



Wieviele Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?

§ 62. Zieht man in einem Viereck (Fig. 61) eine Diagonale, so betragen alle Winkel des Viereckes ebensoviel als die Winkel der beiden Dreiecke, in welche das Viereck zerlegt wird; die Winkel in jedem der zwei Dreiecke betragen nun zwei Rechte, daher die Winkel des Viereckes vier Rechte.

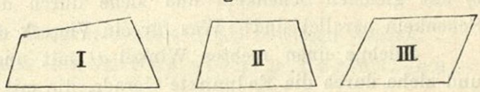
Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten oder 360°.

Wenn in einem Vierecke alle Winkel gleich sind, wie groß ist jeder?

Einteilung der Vierecke nach den Richtungen der gegenüberliegenden Seiten.

§ 63. Ein Viereck, in dem keine Seite mit einer anderen parallel ist, heißt ein **Trapezoid** (Fig. 62, I). Ein Viereck, in dem nur zwei gegenüberliegende Seiten parallel, die andern zwei Seiten aber nicht parallel sind, heißt ein **Trapez** (Fig. 62, II). Ein Viereck, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein **Parallelogramm** (Fig. 62, III). Das Zeichen für ein Parallelogramm ist ♯. Ein Trapezoid, in dem zwei Paare gleicher anstoßender Seiten vorkommen, heißt ein Deltoid (Fig. 63).

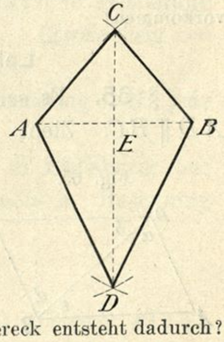
Fig. 62.



Ein Trapez, in dem die nichtparallelen Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenkelig. (Fig. 62, II.)

In einem Parallelogramme kann man was immer für eine Seite als Grundlinie annehmen; die Normale, die darauf von der gegenüberliegenden Seite gefällt wird, ist dann die Höhe. In einem Trapeze versteht man unter der Höhe eine Normale, die von einem Punkte der einen parallelen Seite auf die andere parallele Seite gefällt wird.

Fig. 63.



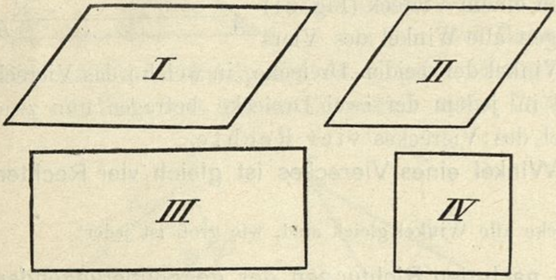
Aufgaben.

1. Zeichne ein gleichschenkeliges Trapez!
2. Zeichne zwei Parallele, dann ebenso zwei andere Parallele, welche die früheren durchschneiden! Was für ein Viereck entsteht dadurch?
3. Zeichne mehrere beliebige Vierecke, ziehe die vier Außenwinkel und miß diese mit dem Winkelmesser!
4. Wie groß ist die Summe der Außenwinkel eines Viereckes? —

Einteilung der Parallelogramme nach der Größe der Seiten und Winkel.

§ 64. Die beiden Parallelogramme I und II in der Fig. 64 haben spitze und stumpfe, also schiefe Winkel; es sind also schiefwinkelige #; die beiden # III und IV dagegen sind rechtwinkelige #. Die # I und III haben als gemeinsames Kennzeichen die ungleich langen Seiten; es sind also ungleichseitige #. Die # II und IV dagegen sind gleichseitige #.

Fig. 64.



Die Figur I ist also ein ungleichseitig-schiefwinkeliges # und heißt Rhomboid. Die Figur II ist ein gleichseitig-schiefwinkeliges # und heißt Rhombus oder Raute. Die Figur III ist ein ungleichseitig-rechtwinkeliges # und führt den Namen Rechteck. Die Figur IV, das gleichseitig-rechtwinkelige #, nennt man Quadrat oder Geviert.

Die Arten der Parallelogramme sind also: 1. das Rhomboid, 2. der Rhombus, 3. das Rechteck und 4. das Quadrat.

Zeichne einen spitzen oder stumpfen Winkel *a)* mit ungleichen Schenkeln, *b)* mit gleichen Schenkeln und ziehe durch die Endpunkte Gerade, die mit den Schenkeln parallel sind! Was für ein Viereck entsteht in jedem Falle!

Zeichne einen rechten Winkel *a)* mit ungleichen, *b)* mit gleichen Schenkeln und ziehe durch die Endpunkte Gerade, die mit den Schenkeln parallel sind! Was für ein Viereck entsteht in jedem Falle?

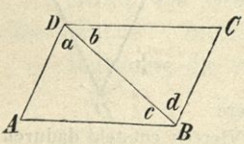
Rauten, Deltoide und gleichschenkelige Trapeze finden Anwendung bei Einlegearbeiten in Tischplatten u. dgl., Quadrate in Schachbrettern, Rechtecke als Füllungen in Türen und Toren.

Nenne Gegenstände im Schulzimmer, an denen Rechtecke, Quadrate, Trapeze vorkommen!

Lehrsätze von den Parallelogrammen.

§ 65. Es sei (Fig. 65) Viereck $ABCD$ ein #, also $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Zieht man die Diagonale BD, so sind die Wechselwinkel a und d, und ebenso die Wechselwinkel c und b einander gleich; daher ist $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. Dann ist Winkel $A = C$ und Seite $AB = CD$, $AD = BC$. Weil $\sphericalangle c = \sphericalangle b$ und $\sphericalangle d = \sphericalangle a$ ist, so ist auch $\sphericalangle c + \sphericalangle d = \sphericalangle b + \sphericalangle a$ oder $\sphericalangle B = \sphericalangle D$. Daraus folgt:

Fig. 65.



1. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

2. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden **Winkel** gleich.

3. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden **Seiten** gleich; oder:

Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Aus dem letzten Satze folgt auch:

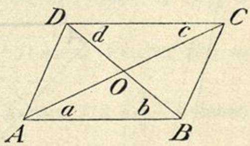
Normale zwischen Parallelen sind einander gleich.

Schneidet aus einem gleichbreiten Streifen Zeichenpapier die vier $\#$ aus, zerschneidet ferner jedes derselben in der Richtung einer Diagonale in zwei Dreiecke und bringt diese durch Übereinanderlegen zur Deckung!

Aus der Fig. 65 läßt sich auch beweisen, daß ein Viereck ein $\#$ sein muß, wenn in ihm je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind. (Liefert den Beweis!)

§ **66.** Es sei $ABCD$ (Fig. 66) ein Parallelogramm, also $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Zieht man die beiden Diagonalen AC und BD, so ist wegen $AB = CD$, $\sphericalangle\, a = c$ und $b = d$ das Dreieck $ABO \cong CDO$, folglich $AO = CO$, $BO = DO$; d. i. **die Diagonalen** eines jeden Parallelogrammes **halbieren einander.**

Fig. 66.



Von den Diagonalen der Parallelogramme gelten noch folgende Sätze:

1. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Kann unter Anwendung des II. Kongruenzsatzes (§ 41) bewiesen werden.

2. Die Diagonalen eines Rhombus stehen normal aufeinander.

Die Wahrheit dieses Satzes beruht auf § 54.

3. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und stehen normal aufeinander.

Zusätze: *a)* Ein Rechteck ist symmetrisch in Beziehung auf jede Gerade, welche zwei Gegenseiten halbiert. (Zweiachsig = symmetrisch.)

b) Ein Rhombus ist symmetrisch in Beziehung auf jede Diagonale. (Zweiachsig = symmetrisch.)

c) Ein Quadrat ist symmetrisch sowohl in Beziehung auf jede Gerade, welche zwei Gegenseiten halbiert, als auch in Beziehung auf jede Diagonale; es hat vier Symmetrieachsen.

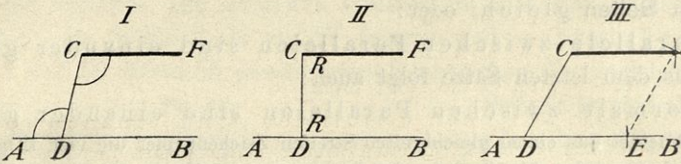
Konstruktionsaufgaben.

§ **67.** 1. Zu einer Geraden AB (Fig. 67) durch einen Punkt C außerhalb derselben eine Parallele zu ziehen.

1. Lösung. Ziehe (Fig. 67, *I*) durch C eine Gerade, welche die AB in D schneidet, und trage in C den Winkel $DCF = ADC$ so auf, daß er zu ADC

Wechselwinkel wird; der zweite Schenkel CF des konstruierten Winkels ist die gesuchte Parallele (§ 31).

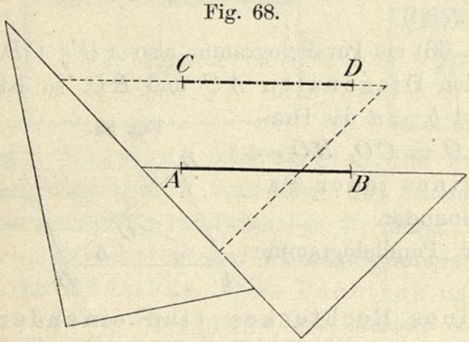
Fig. 67.



2. und 3. Lösung siehe in Fig. 67, *II* und *III*.

2. Lösung. In praktischer Weise im geometrischen Zeichnen mit Hilfe von zwei Dreiecken durch entsprechende Parallelverschiebung des einen Dreieckes längs des zweiten fixen (Fig. 68). Begründung!

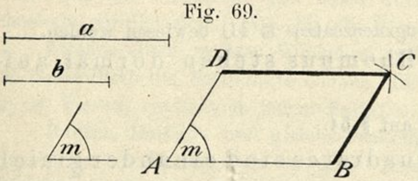
Fig. 68.



2. Ein Parallelogramm zu konstruieren, wenn zwei Seiten $a = 23$ *mm* (7 *cm*), $b = 14$ *mm* (4 *cm*) und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\sphericalangle m = \frac{R}{2}$ gegeben sind.

Man zeichne in A (Fig. 69) einen Winkel $A = m$, schneide von den Schenkeln $AB = a$ und $AD = b$ ab; hierauf beschreibe man aus B mit dem Halbmesser AD einen Bogen und durchschneide ihn aus D mit dem Halbmesser AB; dann ist $ABCD$ das verlangte Parallelogramm.

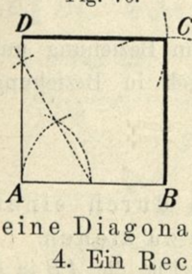
Fig. 69.



3. *a)* Ein Quadrat zu konstruieren, wenn seine Seite $AB = 19$ *mm* (6 *cm*) gegeben ist.

Man errichte im Endpunkte A (Fig. 70) der gegebenen Seite AB auf diese eine Normale, mache $AD = AB$ und beschreibe aus B und D mit dem Halbmesser AB zwei Kreisbogen, die einander in C schneiden; $ABCD$ ist das verlangte Quadrat.

Fig. 70.



Oder: Man errichte in beiden Endpunkten A und B der AB Normale, trage auf diesen AB bis D und C auf und ziehe DC.

b) Ein Quadrat zu konstruieren, wenn seine Diagonale $AC = 23$ *mm* (74 *mm*) gegeben ist. (Fig. 71.)

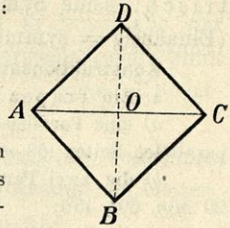
4. Ein Rechteck zu konstruieren, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten (78 *mm* und 39 *mm*);

b) eine Seite und die Diagonale (85 *mm*, 95 *mm*).

5. Einen Rhombus zu konstruieren, wenn gegeben sind:
a) eine Seite und ein Winkel (48 *mm*, 45^0);
b) die Grundlinie und die Höhe (52 *mm*, 44 *mm*);
c) eine Seite und eine Diagonale (44 *mm*, 54 *mm*);
d) die beiden Diagonalen (94 *mm*, 50 *mm*).

Fig. 71.



6. Konstruiere ein Parallelogramm *a)* aus den beiden Diagonalen und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, *b)* aus der Grundlinie und den beiden Diagonalen, *c)* aus der Grundlinie und den Winkeln, welche diese mit den beiden Diagonalen einschließt; *d)* aus zwei Seiten und der zu einer derselben zugehörigen Höhe!

7. Zeichnet ein Quadrat von 12·8 *cm* Umfang!

8. Zeichnet ein $8^1/_2$ *cm* langes Rechteck, dessen Umfang eine Länge von 23 *cm* hat!

Rechenaufgaben.

1. Wie groß ist der Umfang eines Quadrates von *a)* 5 *dm*, *b)* 7·5 *dm*, *c)* 123·4 *m* Seitenlänge?

2. Welchen Umfang hat eine Raute, deren Seite *a)* 13 *cm*, *b)* 7·8 *dm*, *c)* $37^1/_4$ *m* lang ist?

3. Wieviel *m* mißt der Umfang eines rechteckigen Tisches, welcher $2^3/_4$ *m* lang und $1^1/_2$ *m* breit ist?

4. In einem Deltoide beträgt eine Seite $5^3/_4$ *dm*, die andere 7·8 *dm*; welchen Umfang hat es?

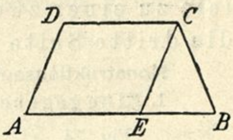
5. Ein Feld hat 4 Seiten von 18·5 *m*, 20·4 *m*, 28·8 *m* und 34·3 *m*; wieviel Schritte muß man beim Umgehen dieses Feldes machen, wenn auf je 3 *m* 4 Schritte zu rechnen sind?

6. Ein Tapezierer soll die trapezförmigeu Sitzflächen von $1^1/_2$ Dutzend Sesseln mit Borten umziehen; wieviel *m* braucht er, wenn die parallelen Seiten der Sitze 55 *cm* und 43 *cm*, die andern Seiten je 47 *cm* lang sind?

Lehrsätze von den Trapezen und den Parallelen im Dreiecke.

§ 68. Zieht man in dem Trapeze $ABCD$ (Fig. 72) die $CE \parallel DA$, so zerfällt es in ein Parallelogramm $AECD$ und in ein Dreieck EBC, welches letztere die zwei nichtparallelen Seiten und die Differenz der Parallelseiten des Trapezes zu Seiten hat.

Fig. 72.



Ist das Trapez $ABCD$ gleichschenkelig, so ist es auch das Dreieck EBC, daher ist Winkel $B = CEB = A$. Warum ist auch $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC$? Daraus folgt:

1. In einem gleichschenkeligen Trapeze sind die Winkel an jeder der Parallelseiten einander gleich.

2. Umgekehrt: Sind in einem Trapeze die Winkel an einer der beiden Parallelseiten einander gleich, so ist das Trapez gleichschenkelig.

Zusatz: Ein gleichschenkeliges Trapez ist symmetrisch; seine Symmetrale geht durch die Mitten der parallelen Seiten. (Einachsig = symmetrisch.)

Konstruktionsaufgaben.

1. Ein Trapez zu konstruieren, wenn gegeben sind:

a) eine Parallelseite mit den ihr anliegenden Winkeln und eine der nichtparallelen Seiten (68 *mm*, 60^0, 45^0 und 34 *mm*);

b) die zwei Parallelseiten und die der ersten anliegenden Winkel (66 *mm*, 20 *mm*, 60^0, 45^0);

c) die Parallelseiten, eine der nichtparallelen Seiten und die Höhe (62 *mm*, 32 *mm*, 50 *mm*, 48 *mm*).

2. Ein gleichschenkeliges Trapez zu zeichnen, wenn gegeben sind:

a) die Parallelseiten (66 *mm*, 36 *mm*) und die Höhe (60 *mm*);

b) die Parallelseiten und der Winkel an der ersten Seite (70 *mm*, 29 *mm*, 60^0);

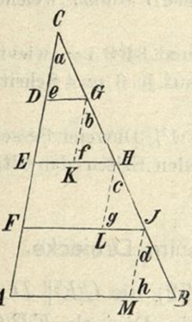
c) die nichtparallele Seite, die Diagonale und die Höhe (48 *mm*, 68 *mm*, 45 *mm*).

3. Zeichnet ein Deltoid, in welchem ein Seitenpaar 37 *mm*, das andere 78 *mm* lang ist und in welchem zwei rechte Winkel vorkommen!

Von den Parallelen im Dreiecke.

§ 69. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 73) die Seite AC in mehrere, z. B. 4 gleiche Teile geteilt, also $CD = DE = EF = FA$, und man ziehe DG, EH und FJ sämtlich parallel mit der Seite AB; dann läßt sich beweisen, daß dadurch auch CB in 4 gleiche Teile geteilt wird. — Man ziehe die Linien GK, HL und JM parallel mit AC. Dadurch sind lauter kleine Dreiecke entstanden, die mit dem oberen $\triangle\ CDG \cong$ sind. Warum?

Fig. 73.



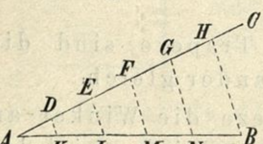
In diesen kongruenten Dreiecken sind die Seiten $CG = GH = HJ = JB$, weil sie den gleichen Winkeln $e = f = g = h$ gegenüberliegen. Die dritte Seite CB ist somit wirklich in 4 gleiche Teile geteilt worden.

Wird in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilungspunkt eine Parallele zu einer zweiten Seite gezogen, so wird dadurch auch die dritte Seite in ebensoviele gleiche Teile geteilt.

Konstruktionsaufgaben.

1. Eine gegebene Strecke in beliebig viele gleiche Teile zu teilen.

Fig. 74.



Es sei die Strecke AB (Fig. 74) z. B. in 5 gleiche Teile zu teilen. Man ziehe durch A eine andere Gerade AC von beliebiger Richtung und Länge und trage darauf von A aus 5 beliebige gleiche Teile auf. Verbindet man den Endpunkt H des fünften Teiles mit B durch die HB und zieht durch D, E, F, G Parallele mit HB, so teilen diese auch die AB in 5 gleiche Teile AK, KL, LM, MN, NB (§ 69).

2. Eine Strecke $s = 75$ *mm* ist in *a)* 3, *b)* 5, *c)* 7, *d)* 9 gleiche Teile zu teilen.

Kongruenz der Vierecke.

§ 70. Zwei Vierecke sind kongruent, wenn in ihnen alle vier Seiten und alle vier Winkel nach der Ordnung paarweise gleich sind.

Wann sind also *a)* zwei Parallelogramme, *b)* zwei Rechtecke und *c)* zwei Quadrate kongruent?

Ein Parallelogramm ist durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winhel, ein Rechteck durch zwei anstoßende Seiten, ein Quadrat durch eine Seite unzweideutig bestimmt.

6. Vielecke.

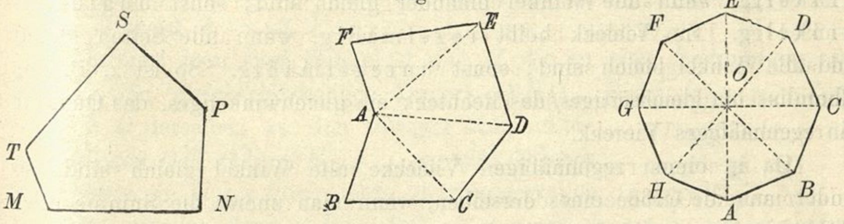
Bestimmungsstücke der Vielecke.

§ 71. Eine von mehreren Strecken begrenzte ebene Figur heißt ein **Vieleck** oder Polygon (Fig. 75).

Jedes Vieleck hat soviele Seiten als Winkel; zwischen je zwei Seiten liegt ein Winkel, zwischen je zwei Winkeln eine Seite; ferner liegen an jeder Seite zwei Winkel und zwei Seiten.

Die Winkel eines Vieleckes können spitze, rechte, stumpfe und selbst auch erhabene sein; die letzten nennt man auch einspringende Vieleckswinkel.

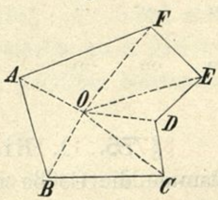
Fig. 75.



Eine Strecke AC (Fig. 75), die zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Eckpunkte des Vieleckes verbindet, heißt Diagonale.

Die Summe aller Seiten eines Vieleckes heißt der Umfang und die Größe der von den Seiten eingeschlossenen Fläche der Flächeninhalt desselben.

Fig. 76.



§ 72. Die Summe aller Winkel eines Vieleckes beträgt sovielmal zwei Rechte, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechte. (Im n-Ecke : $2nR - 4R$.)

Nimmt man innerhalb des Vieleckes $ABCDEF$ (Fig. 76) einen beliebigen Punkt O an und zieht von diesem zu allen Eckpunkten gerade Linien, so erhält man soviele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat; die Winkel eines solchen Dreieckes betragen zwei Rechte, daher die Winkel aller Dreiecke sovielmal 2 Rechte, als das Vieleck Seiten hat. Unter den Winkeln der Dreiecke kommen nun alle Vieleckswinkel vor, aber überdies auch noch die Winkel um den Punkt O herum, die nicht Vieleckswinkel sind und zusammen 4 Rechte betragen. Um daher bloß die Summe der Vieleckswinkel zu erhalten, muß man von der Winkelsumme aller Dreiecke noch 4 Rechte subtrahieren.

Einteilung der Vielecke nach der Anzahl der Seiten.

§ 73. Die Vielecke werden nach der Anzahl ihrer Seiten in dreiseitige oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke usw. eingeteilt.

Im engeren Sinne versteht man unter Vieleck eine Figur, welche mehr als vier Seiten hat.

Aufgaben.

1. Wie groß ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes? — eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehneckes?

2. Wieviele Diagonalen können von einem Eckpunkte in einem Vier-, Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehnecke gezogen werden? In wieviele Dreiecke wird dadurch jedes der genannten Vielecke zerlegt?

Einteilung der Vielecke nach der Größe der Seiten und Winkel.

§ 74. Ein Vieleck heißt gleichseitig, wenn alle Seiten einander gleich sind; sonst ungleichseitig. Ein Vieleck heißt gleichwinkelig, wenn alle Winkel einander gleich sind; sonst ungleichwinkelig. Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich und alle Winkel gleich sind; sonst unregelmäßig. So ist z. B. der Rhombus ein gleichseitiges, das Rechteck ein gleichwinkeliges, das Quadrat ein regelmäßiges Viereck.

Da in einem regelmäßigen Vielecke alle Winkel gleich sind, so findet man die Größe eines derselben, wenn man zuerst die Summe aller Winkel bestimmt und dann dieselbe durch die Anzahl der Winkel dividiert. So beträgt

ein Winkel des regelmäßigen Dreieckes . . $\frac{180^0}{3} = 60^0$,

„ „ „ „ Viereckes . . $\frac{360^0}{4} = 90^0$,

„ „ „ „ Fünfeckes . . $\frac{540^0}{5} = 108^0$,

„ „ „ „ Sechseckes . . $\frac{720^0}{6} = 120^0$, usw.

Konstruktionsaufgaben.

§ 75. 1. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen. Bestimme die Größe eines Vieleckswinkels, zeichne eine Strecke, die der Seite des Vieleckes gleich ist, und trage in den Endpunkten derselben den Vieleckswinkel auf; von den neuen Schenkeln schneide Stücke ab, welche der angenommenen Vielecksseite gleich sind, trage in den Endpunkten wieder den Vieleckswinkel auf und setze dieses Verfahren fort, bis das Vieleck geschlossen ist!

2. Zeichne ein regelmäßiges Fünfeck! (Die Prüfung geschieht, indem man alle Diagonalen zieht und nachsieht, ob je eine mit einer Seite parallel ist.)

3. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck! (Es müssen je zwei gegenüberliegende Seiten und eine Diagonale parallel sein.)

4. Zeichne ein regelmäßiges *a)* Achteck, *b)* Zehneck!

Vom Mittelpunkte aus läßt sich ein regelmäßiges Vieleck konstruieren, wenn man den bezüglichen Mittelpunktswinkel berechnet und um den gegebenen Punkt aufträgt.

Soll man z. B. ein regelmäßiges Neuneck zeichnen, so trägt man den Mittelpunktswinkel von $360^0 : 9 = 40^0$ neunmal um den gegebenen Punkt auf und schneidet auf diesen Schenkeln gleiche Strecken ab. Die Verbindung dieser erhaltenen Punkte ergibt das regelmäßige Neuneck.

Zeichne nach dieser Art ein regelmäßiges Fünfeck und ein regelmäßiges Zwölfeck.

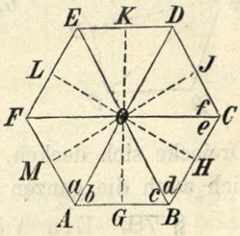
Einfacher geschieht die Konstruktion regelmäßiger Vielecke mit Hilfe des Kreises, wovon später bei der Kreislehre die Rede sein wird.

Lehrsätze von den regelmäßigen Vielecken.

§ 76. Es sei das Vieleck $ABCDEF$ (Fig. 77) regelmäßig, also $AB = BC = CD = DE = EF = FA$, und $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = \sphericalangle F$.

Halbiert man zwei Winkel A und B, die an einer Seite liegen, so entsteht ein gleichschenkeliges Dreieck ABO. Zieht man von dem Scheitel O desselben zu den übrigen Eckpunkten die Strecken OC, OD, OE, ..., so wird dadurch das Vieleck in lauter kongruente gleichschenkelige Dreiecke geteilt; denn $AB = BC$, $\sphericalangle c = \sphericalangle d$ und $OB = OB$, daher ist nach dem II. Kongruenzsatze $\triangle ABO \cong \triangle BCO$ und $AO = CO$. Legt man also das erste Dreieck ABO um die Seite OB, so deckt es das Dreieck BCO; dieses kann ebenso mit dem nächsten zur Deckung gebracht werden u. s. f. Die Strecken OA, OB, OC, ... sind also einander gleich. Da kongruente gleichschenkelige Dreiecke auch gleiche Höhen haben, so sind auch die von O auf die Seiten gefällten Normalen OG, OH, OJ, ... einander gleich.

Fig. 77.



Daraus folgt:

1. Halbiert man in einem regelmäßigen Vielecke zwei aufeinander folgende Umfangswinkel und verbindet den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien mit den übrigen Eckpunkten des Vieleckes durch Strecken, so

wird dadurch das Vieleck in lauter kongruente gleichschenkelige Dreiecke geteilt.

2. In jedem regelmäßigen Vielecke gibt es einen Punkt, der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit entfernt ist.

Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes. Man findet ihn, indem man zwei aufeinander folgende Vieleckswinkel halbiert.

Zusatz: Ein regelmäßiges Vieleck ist symmetrisch in Beziehung auf jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt und entweder durch die Mitte einer Seite oder durch einen Eckpunkt geht: Sowohl jede Seitensymmetrale als jede Winkelsymmetrale eines regelmäßigen Vieleckes ist eine Symmetrieachse desselben.

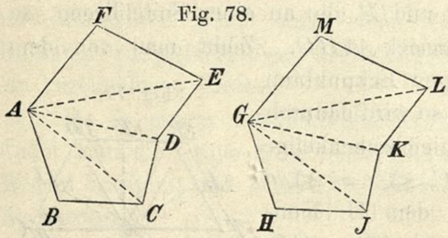
Ein regelmäßiges Vieleck hat ebensoviele Symmetralen, als es Seiten hat.

Kongruenz der Vielecke.

§ **77.** Zwei Vielecke sind **kongruent**, wenn sie alle Seiten und alle Winkel in derselben Ordnung paarweise gleich haben.

Zwei Vielecke $ABCDEF$ und $GHJKLM$ (Fig. 78) sind **kongruent**, wenn sie auf übereinstimmende Weise aus gleich vielen kongruenten Dreiecken zusammengesetzt sind.

Fig. 78.



Denn legt man beide Vielecke so aufeinander, daß zwei gleichliegende Dreiecke auf einander fallen, z. B. ABC auf GHJ, so muß auch das zweite Paar Dreiecke sich decken, folglich auch das dritte Paar, ...; daher decken sich auch die ganzen Vielecke.

§ **78.** Ein Vieleck $ABCDEF$ (Fig. 78) zu übertragen, d. i. ein Vieleck zu zeichnen, das mit dem Vielecke $ABCDEF$ kongruent ist.

Man zerlege das gegebene Vieleck von A aus durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe mittels der Durchschnitte von Kreisbogen ebensoviele in derselben Ordnung liegende Dreiecke, welche mit denen des gegebenen Vieleckes kongruent sind. Die dadurch entstehende Figur $GHJKLM$ ist mit der gegebenen kongruent. Es ist hier nicht nötig, die Diagonalen wirklich zu ziehen; sie können in dem gegebenen wie in dem neu entstehenden Vielecke bloß gedacht werden.

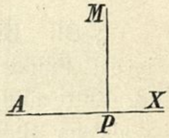
§ **79.** Auf dem Zeichnen kongruenter Vielecke beruht das geometrische Kopieren der Gebilde in gleicher Größe.

Dabei können die Hauptpunkte des Gebildes, wie bei der Lösung der Aufgabe in § 78, mittels der Durchschnitte von Kreisbogen bestimmt werden.

Ein anderes geometrisches Verfahren beim Kopieren besteht in der Bestimmung des Hauptpunktes durch Koordinaten.

Zieht man in einer Ebene von einem bestimmten Punkt A (Fig. 79) einen Strahl AX und fällt von irgend einem Punkte M auf diesen Strahl eine Normale MP, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück AP des Strahles die Abszisse, die Normale MP selbst aber die Ordinate, und beide zusammen die Koordinaten jenes Punktes M. Der Strahl AX heißt die Abszissenlinie, der Punkt A der Anfangspunkt.

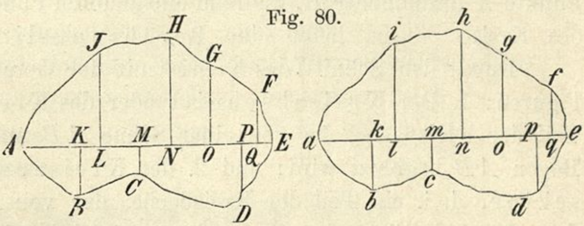
Fig. 79.



Wenn der Anfangspunkt A und die Richtung der Abszissenlinie AX gegeben sind, so ist die Lage eines jeden Punktes M vollkommen bestimmt, wenn dessen Koordinaten AP und MP bekannt sind; denn man braucht nur von A aus an der Abszissenlinie ein Stück abzuschneiden, welches der Abszisse AP gleich ist, dann im Punkte P eine Normale zu errichten und darauf die Ordinate PM aufzutragen; der Endpunkt ist der gesuchte Punkt M.

Um mittelst der Koordinaten ein Gebilde $ABCDE$ .... (Fig. 80) zu kopieren, nehme man im Originale irgend eine Gerade AE als Abszissenlinie und A als Anfangspunkt derselben an und fälle von allen Hauptpunkten Normale auf die Abszissenlinie. Sodann ziehe man auf dem Kopierblatte die Abszissenlinie ae in schicklicher Lage, trage darauf in der Ordnung alle Abszissen von a bis k, l, m, n, ... auf, errichte in diesen Punkten Normale und trage auf ihnen die entsprechenden Ordinaten von k bis b, von l bis i, von m bis c, ... auf so ist dadurch die Lage aller Punkte in der Kopie bestimmt; man braucht sie dann nur gehörig durch Linien zu verbinden.

Fig. 80.



Mechanische Methoden des Kopierens: das Kopieren mittels der Quadratnetze, das Pikieren (Durchstechen des Originals), das Durchzeichnen, besonders auf durchscheinendem Papier.

Aufgaben.

Zeichne ein beliebiges Sechseck, Achteck, Zehneck und kopiere es in gleicher Größe *a)* mittelst des Durchschnittes von Kreisbogen, *b)* mit Hilfe von Abszissen und Ordinaten.

III. Der Kreis.

1. Der Punkt und der Kreis.

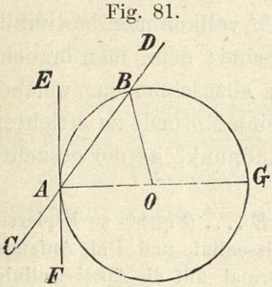
§ 80. Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises oder in dem Umfange desselben oder außerhalb des Kreises, je nachdem die Entfernung des Punktes vom Kreismittelpunkte kleiner, ebenso groß oder größer ist als der Halbmesser des Kreises. (§ 23.)

2. Die Gerade und der Kreis.

§ 81. Eine Gerade hat mit der Kreislinie zwei Punkte oder nur einen Punkt oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich, je nachdem ihre Entfernung vom Kreismittelpunkte kleiner, ebenso groß oder größer ist als der Halbmesser des Kreises.

Eine Strecke AB (Fig. 81), die zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt eine Sehne. Eine Sehne ist umso größer, je näher sie dem Mittelpunkte liegt; die längste Sehne ist daher diejenige, welche durch den Mittelpunkt selbst geht, nämlich der Durchmesser, wie AG.

Fig. 81.



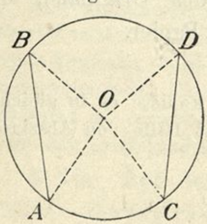
Eine Gerade CD, die durch die Verlängerung einer Sehne AB über ihre Endpunkte hinausgeht, heißt eine Sekante. Eine Gerade EF, die mit der Kreislinie nur in einem Punkte A zusammentrifft, während alle anderen Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen, heißt eine Berührungslinie oder Tangente.

Durch den Schnitt des Kreises mit der Geraden entstehen folgende Figuren: 1. Der Kreisabschnitt oder das Kreissegment, d. i. ein Teil der Kreisfläche, der von einer Sehne AB und dem dazu gehörigen Bogen AB begrenzt wird; und 2. der Kreisausschnitt oder Kreissektor, d. i. ein Teil der Kreisfläche, der von zwei Halbmessern und dem dazwischenliegenden Bogen begrenzt wird, wie $BOGB$.

Lehrsätze von den Geraden im Kreise.

§ 82. Zu gleichen Sehnen gehören in demselben Kreise auch gleiche Bogen; und umgekehrt: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Sehnen. (Fig. 82.)

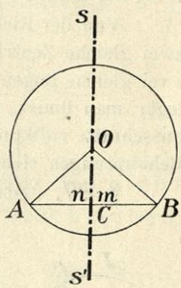
Fig. 82.



Von der Richtigkeit dieser zwei Sätze kann man sich überzeugen, indem man die betreffenden Kreisabschnitte übereinander legt; man findet, daß unter jeder der obigen zwei Voraussetzungen die beiden Kreisabschnitte vollkommen übereinander fallen, folglich im ersten Falle auch die Bogen, im zweiten auch die Sehnen einander decken.

§ 83. Jede Sehne AB (Fig. 83) eines Kreises kann als die Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, angesehen werden. Welches ist die Symmetrale des Dreieckes ABO? Die in den §§ 53 und 54 von den gleichschenkeligen Dreiecken abgeleiteten Sätze lassen sich daher für den Kreis so ausdrücken:

Fig. 83.



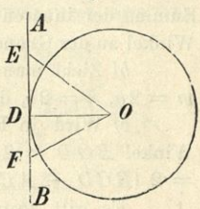
1. Zieht man in einem Kreise vom Mittelpunkte eine Normale auf eine Sehne, so wird diese dadurch halbiert.

2. Die Symmetrale jeder Sehne eines Kreises geht durch den Mittelpunkt desselben und halbiert den zugehörigen Bogen und Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte dieses Kreises liegt.

3. Die Strecke, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit der Mitte einer Sehne verbindet, steht auf der Sehne normal.

§ 84. Errichtet man in dem Endpunkte eines Halbmessers auf denselben eine Normale, so ist diese eine Tangente des Kreises.

Fig. 84.



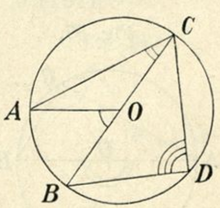
Es sei (Fig. 84) $AB \perp OD$. Jede schiefe Strecke wie $OE, OF, \ldots$ ist länger als die Normale OD; also liegen die Punkte $E, F, \ldots$ außerhalb der Kreislinie. Die Gerade AB hat daher mit der Kreislinie nur den Punkt D gemeinschaftlich, alle anderen Punkte liegen außerhalb des Kreises: AB ist also eine Tangente des Kreises.

3. Der Winkel und der Kreis.

§ 85. Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte eines Kreises liegt, dessen Schenkel daher Halbmesser des Kreises sind, heißt ein Zentriwinkel.

Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind, heißt ein Peripheriewinkel.

Fig. 85.



AOB (Fig. 85) ist ein Zentriwinkel, der auf dem Bogen AB aufsteht; ACB ist ein Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB aufsteht.

Gehen die Schenkel eines Peripheriewinkels durch die Endpunkte eines Durchmessers wie bei dem Winkel BDC, so heißt derselbe ein Winkel im Halbkreise.

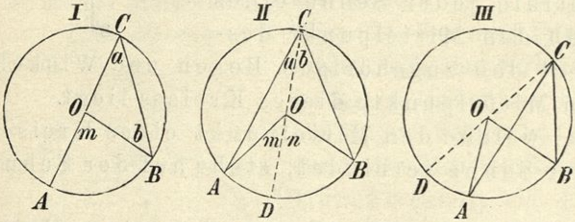
Lehrsätze von den Winkeln im Kreise.

§ 86. Zu gleichen Zentriwinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Sehnen und Bogen; umgekehrt: zu gleichen Sehnen gehören gleiche Zentriwinkel, und: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Zentriwinkel. (Fig. 82.)

Von der Richtigkeit dieser drei Sätze überzeugt man sich, wenn man entweder zwei gleiche Zentriwinkel oder zwei gleiche Sehnen oder nach dem dritten Satze zwei gleiche Bogen annimmt und dann die betreffenden Kreisausschnitte übereinander legt; man findet, daß sich unter jeder dieser Voraussetzungen die beiden Kreisausschnitte vollkommen decken, daß also für jede Voraussetzung auch die angeführten Behauptungen richtig sind.

§ 87. Stehen ein Zentri- und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen eines Kreises, so sind bezüglich der Lage der Schenkel des Peripheriewinkels drei Fälle möglich: entweder liegt der Mittelpunkt des Kreises in einem Schenkel des Winkels (Fig. 86, I) oder zwischen den Schenkeln des Winkels (Fig. 86, II) oder außerhalb der Winkelfläche (Fig. 86, III).

Fig. 86.



a) In Fig. 86, I ist m als ein Außenwinkel des Dreieckes BOC gleich der Summe der inneren entgegengesetzten Winkel, also $m = a + b$; nun ist $b = a$ als Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes, daher $m = a + a = 2a$.

b) Zieht man in Fig. 86, II den Durchmesser CD, so ist nach *a)* der Winkel $m = 2a$, $n = 2b$, daher auch $m + n = 2\,(a + b)$, d. i. der Winkel $AOB = 2ACB$.

c) Wird in Fig. 86, III der Durchmesser CD gezogen, so ist nach *a)* der Winkel $BOD = 2BCD$, ferner $AOD = 2ACD$; daher auch $BOD - AOD = 2\,(BCD - ACD)$, d. i. der Winkel $AOB = 2ACB$.

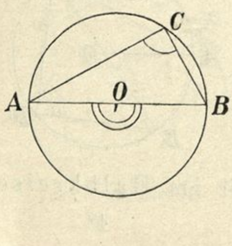
Es gilt somit allgemein der Satz:

Wenn ein Zentri- und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen aufstehen, so ist der Zentriwinkel doppelt so groß als der Peripheriewinkel.

Daraus folgt:

Peripheriewinkel, welche in demselben Kreise auf gleichen Bogen aufstehen, sind einander gleich.

Fig. 87.



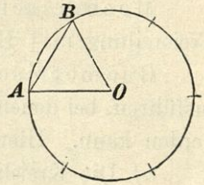
§ 88. Ein Peripheriewinkel ACB (Fig. 87) als ein Winkel im Halbkreise muß 90^0 betragen, weil der ihm zugehörige Zentriwinkel als gestreckter 180^0 enthält.

Der Winkel im Halbkreise ist also ein Rechter.

§ **89.** Es sei (Fig. 88) O der Mittelpunkt eines Kreises und $AB = AO$. Das Dreieck ABO ist gleichseitig, daher jeder Winkel desselben gleich 60^0.

Schneidet man also in einem Kreise mit dem Halbmesser als Sehne einen Bogen ab, so beträgt der dazu gehörige Zentriwinkel 60^0 und der Bogen selbst ist der 6. Teil der Peripherie.

Fig. 88.

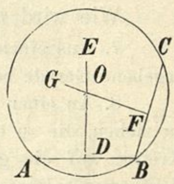


Konstruktionsaufgaben.

§ **90.** 1. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 89), die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Man ziehe die Strecken AB und BC und errichte in den Mitten derselben die Normalen DE und FG; dann ist nach § 83, 2 der Durchschnitt O dieser Normalen der Mittelpunkt und OA der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Fig. 89.



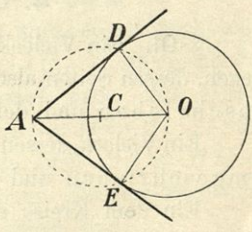
2. Den Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens zu finden.

Man ziehe zwei Sehnen und errichte auf diese in ihren Halbierungspunkten Normale; der Durchschnittspunkt der beiden Normalen ist der gesuchte Mittelpunkt.

3. Durch einen Punkt in dem Umfange des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Man ziehe zu dem gegebenen Punkte einen Halbmesser und errichte darauf eine Normale: diese ist die verlangte Tangente (§ 84).

Fig. 90.



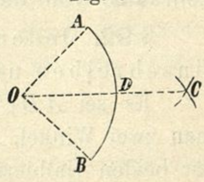
4. Durch einen Punkt A (Fig. 90) außerhalb des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Man verbinde den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises durch die Strecke AO, halbiere diese in C und beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, der den gegebenen in den Punkten D und E durchschneidet. Zieht man nun AD und AE, so sind diese beiden Geraden Tangenten des Kreises (§ 88).

5. Einen Kreisbogen AB (Fig. 91) zu halbieren.

Man beschreibe aus den Endpunkten A und B mit demselben Halbmesser Bogen, die einander in C durchschneiden, und ziehe die Gerade CO; diese halbiert den gegebenen Kreisbogen in D.

Fig. 91.



6. Die Kreislinie in mehrere gleiche Teile zu teilen.

Man bestimme die Größe eines Zentriwinkels, indem man 360^0 durch die Zahl der verlangten gleichen Teile dividiert, konstruiere den gefundenen Winkel am Mittelpunkte und trage die durch seine Schenkel abgeschnittene Sehne in der Peripherie auf.

Mechanisch wird die Konstruktion der Winkel und daher die Kreisteilung mit Hilfe des Transporteurs ausgeführt.

Geometrisch lassen sich nur diejenigen Teilungen der Kreislinie ausführen, bei denen der entsprechende Zentriwinkel geometrisch konstruiert werden kann. Hierher gehören zunächst folgende Aufgaben:

a) Die Kreislinie in 2 gleiche Teile zu teilen.

Man ziehe einen Durchmesser. Durch Halbierung der Bogen erhält man dann 4, 8, 16,....... gleiche Teile.

b) Die Kreislinie in 6 gleiche Teile zu teilen.

Man trage den Halbmesser als Sehne im Kreise auf (§ 89).

Nimmt man zwei solche Teile für einen einzigen, so ist die Kreislinie in 3 gleiche Teile geteilt.

Wie wird man die Peripherie in 12, 24 gleiche Teile teilen?

7. Aus einem gegebenen Mittelpunkte einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade berührt.

8. An einen gegebenen Kreis mit dem Halbmesser $r = 25\,mm$ eine Tangente zu ziehen, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist. (Die vom Mittelpunkte des Kreises auf die gegebene Gerade errichtete Normale bestimmt die Richtung des Berührungshalbmessers.)

9. Einen Kreis mit gegebenem Halbmesser ($r = 22\,mm$) zu zeichnen, welcher zwei gegebene Gerade (Neigungswinkel $n = 60^0$) berührt.

10. Konstruiere einen Kreis, wenn gegeben sind zwei Tangenten AB und CD (Neigungswinkel $n = 45^0$) und ein Berührungspunkt a!

4. Das Vieleck und der Kreis.

§ 91. Ein Vieleck, dessen Eckpunkte in dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben und der Kreis heißt dem Vielecke umgeschrieben.

Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umgeschrieben und der Kreis heißt dem Vielecke eingeschrieben.

Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck heißt auch ein Sehnenvieleck, ein dem Kreise umgeschriebenes Vieleck ein Tangentenvieleck.

Jedem Dreiecke läßt sich *a)* ein Kreis einschreiben, *b)* ein Kreis umschreiben.

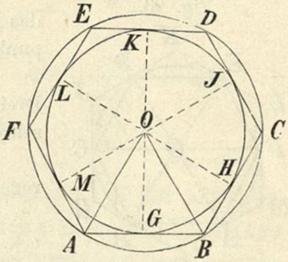
Lehrsätze von den regelmäßigen Sehnen- und Tangentenvielecken.

§ 92. Jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis einschreiben und umschreiben.

Es sei $ABCDEF$ (Fig. 92) ein regelmäßiges Vieleck. Halbiert man zwei Winkel, z. B. A und B, so besitzt der Durchschnittspunkt O der beiden Halbierungslinien die Eigenschaft, daß er der Mittelpunkt des dem Vielecke eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises ist. (S. § 76!)

§ 93. 1. Teilt man den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Teile und zieht durch je zwei aufeinander folgende Teilungspunkte eine Sehne, so ist das von diesen Sehnen gebildete Vieleck regelmäßig.

Fig. 92.



Ist (Fig. 92) die aus O mit dem Halbmesser OA beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Teile geteilt und zieht man die Sehnen AB, BC, CD, DE, EF, FA, so sind in dem Vielecke $ABCDEF$ die Seiten als Sehnen des Kreises, die zu gleichen Bogen gehören, und die Vieleckswinkel als Peripheriewinkel, die auf gleichen Bogen aufstehen, einander gleich. Das Vieleck ist daher gleichseitig und gleichwinkelig, also regelmäßig.

Zusatz. Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises (§ 89).

2. Teilt man einen Kreis in mehrere gleiche Teile und zieht durch jeden Teilungspunkt eine Tangente, so wird von diesen Tangenten ein regelmäßiges Vieleck eingeschlossen.

Ist (Fig. 92) die aus O mit dem Halbmesser OG beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Teile geteilt und errichtet man in den Punkten G, H, J, K, L, M auf die zu ihnen gezogenen Halbmesser Normale, so erhält man das dem Kreise umgeschriebene Vieleck $ABCDEF$, und es läßt sich zeigen, daß dieses gleichseitig und gleichwinkelig ist. Da die Zentriwinkel des Kreises nach der Annahme gleich sind, so ist leicht einzusehen, daß die Vierecke $GOMA$, $GOHB$, $HOJC$, ... übereinander gelegt einander vollkommen decken, also kongruent sind. Aus dieser Kongruenz folgt aber erstlich, daß der Winkel $A = B = C$ ..... ist, ferner, daß sowohl $GB = HC = JD =$ ..... als auch $AG = BH = JC =$ ..... ist, somit auch die Summen dieser gleichen Strecken, nämlich die Vielecksseiten AB, BC, CD ......, gleich sind.

§ 94. Werden einem Kreise verschiedene regelmäßige Vielecke eingeschrieben und umgeschrieben, so ist jedes eingeschriebene Vieleck kleiner und jedes umgeschriebene Vieleck größer als der Kreis; der Unterschied zwischen dem Kreise und dem Vielecke wird jedoch umso kleiner, je mehr Seiten das Vieleck hat, und kann durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenanzahl kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine gegebene Größe.

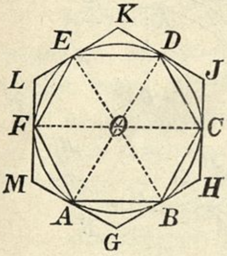
In diesem Sinne sagt man:

Der Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten.

Konstruktionsaufgaben.

§ **95.** 1. Einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck *a)* einzuschreiben, *b)* umzuschreiben. (Fig. 93.)

Fig. 93.



Man teile die Kreislinie in soviele gleiche Teile, als das Vieleck Seiten haben soll, und ziehe durch die Teilungspunkte *a)* Sehnen, *b)* Tangenten des Kreises.

2. Einem gegebenen Kreise *a)* ein gleichseitiges Dreieck, *b)* ein regelmäßiges Sechseck ein- und umzuschreiben, (§ 90, 6*b*.)

3. Einem gegebenen Kreise *a)* ein Quadrat, *b)* ein regelmäßiges Achteck ein- und umzuschreiben. (§ 90, 6*a*.)

4. Einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges *a)* Fünfeck, *b)* Zehneck ein- und umzuschreiben. (§ 90, 6.)

5. In einem Kreise ist ein regelmäßiges Viereck eingeschrieben; man schreibe in denselben ein solches von doppelt soviel Seiten ein.

6. Zeichne ein Dreieck, in dem die Seiten 28 *mm* und 20 *mm* den Winkel von 60^0 einschließen, und konstruiere den diesem Dreiecke umgeschriebenen Kreis! (§ 60, 1.)

7. Zeichne ein Dreieck, in welchem der Seite 25 *mm* die Winkel 60^0 und 45^0 anliegen und konstruiere dann den diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreis! (§ 60, 2.)

8. Um ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Man halbiere (Fig. 92) zwei Vieleckswinkel A und B, die einen Schenkel gemein haben; aus dem Durchschnittspunkte O der beiden Halbierungslinien beschreibe man dann mit dem Halbmesser OA einen Kreis, der durch alle Eckpunkte des Vieleckes geht und somit dem Vielecke umgeschrieben ist.

9. In ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis einzuschreiben.

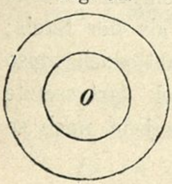
Man halbiere (Fig. 92) zwei aufeinander folgende Seiten AB und BC und errichte in den Halbierungspunkten G und H Normale, die einander in O durchschneiden. Der aus O mit dem Halbmesser OG beschriebene Kreis wird alle Seiten des gegebenen Vieleckes berühren und daher dem Vielecke eingeschrieben sein.

10. Konstruiere *a)* ein gleichseitiges Dreieck, *b)* ein Quadrat, *c)* ein regelmäßiges Sechseck und beschreibe um jede dieser Figuren und in jede derselben einen Kreis!

5. Lage der Kreise gegeneinander.

§ **96.** Zwei Kreise, die einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen konzentrische Kreise, wie Fig. 94.

Fig. 94.



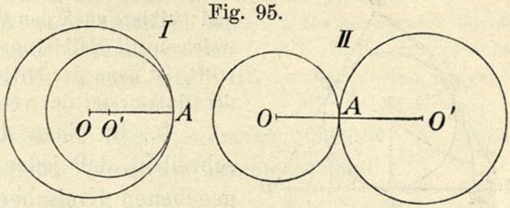
Die zwischen ihren Peripherien liegende Fläche heißt ein Kreisring.

Zwei Kreise, die keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen exzentrische Kreise (Fig. 95). Die Strecke, welche die Mittelpunkte zweier exzentrischer Kreise verbindet, heißt die Zentrale der beiden Kreise (Fig 95 und 96).

Zwei exzentrische Kreise können einander entweder berühren oder schneiden, oder es ist keines von beiden der Fall.

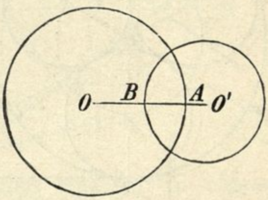
Zwei Kreise berühren einander, wenn ihre Umfänge nur einen Punkt gemeinschaftlich haben. Die Berührung geschieht von innen (Fig. 95, I) oder von außen (Fig. 95, II), je nachdem der eine Kreis innerhalb oder außerhalb des andern liegt. Bei der innern Berührung zweier Kreise ist die Zentrale OO' gleich der Differenz der Halbmesser $AO - AO'$; bei der äußern Berührung ist die Zentrale OO' gleich der Summe der Halbmesser $AO + AO'$. In beiden Fällen liegt der Berührungspunkt auf der Zentrale.

Fig. 95.



Zwei Kreise schneiden einander, wenn ihre Peripherien (Fig. 96) zwei Punkte gemeinschaftlich haben. Das gemeinschaftliche Stück der beiden Kreisflächen heißt eine Linse, jedes der nicht gemeinschaftlichen Stücke ein Mond.

Fig. 96.



Beim Durchschnitte zweier Kreise ist die Zentrale OO' größer als die Differenz der Halbmesser $AO - BO'$, aber kleiner als deren Summe $AO + BO'$.

Können zwei exzentrische Kreise auch noch andere Lagen einnehmen? Zeichnet sie!

Welche Fälle sind in Beziehung auf die gegenseitige Lage bei drei Kreisen möglich? Wieviele Punkte haben drei einander schneidende Kreise miteinander gemeinschaftlich?

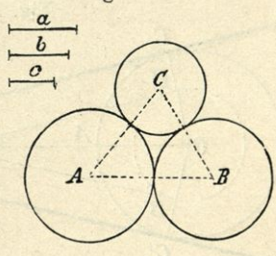
Konstruktionsaufgaben.

§ **97.** 1. Konstruiere mit den Halbmessern 24 *mm* und 15 *mm* zwei Kreise, die einander *a)* von innen, *b)* von außen berühren!

2. Beschreibe in einen gegebenen Kreis zwei gleiche Kreise so, daß sie ihn von innen und sich selbst von außen berühren!

3. Mit den Halbmessern *a, b, c* drei Kreise zu beschreiben, welche sich gegenseitig von außen berühren. (Siehe Fig. 97.)

Fig. 97.

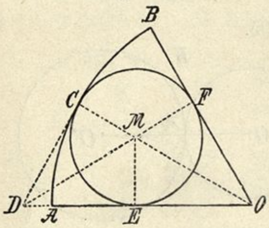


Wie wird die Auflösung geschehen, wenn alle drei Kreise gleiche Halbmesser haben?

4. In einen Kreisausschnitt einen Kreis so einzuschreiben, daß er die beiden Schenkel und den Bogen des Winkels berührt.

Es sei AOB (Fig. 98) der gegebene Kreisausschnitt. Man halbiere den Winkel AOB durch die OC, errichte in C auf OC die Normale CD, die den verlängerten Halbmesser OA in D schneidet, und halbiere auch den Winkel CDO. Der Punkt M, in welchem die Halbierungslinie DM den Halbmesser OC trifft, ist dann der Mittelpunkt und $MC = ME = MF$ der Halbmesser des verlangten Kreises.

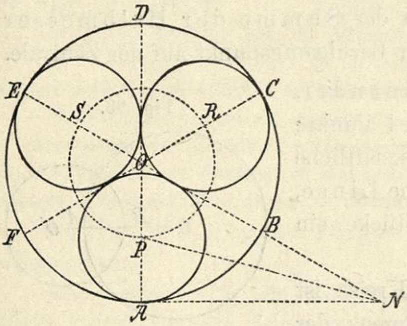
Fig. 98.



5. In einen Kreis drei Kreise so einzuschreiben, daß jeder die beiden andern und den gegebenen Kreis berührt.

Es sei $ABDF$ (Fig. 99) der gegebene Kreis. Man teile ihn in sechs gleiche Teile und ziehe zu den Teilungspunkten die Halbmesser OA, OB, OC .... In A errichte man auf OA die Normale AN, die den verlängerten Halbmesser OB in N trifft, und halbiere den Winkel ANO durch die Gerade NP; dann ist P der Mittelpunkt und PA der Halbmesser des einen der drei verlangten Kreise. Macht man nun $OR = OS = OP$, so sind R und S die Mittelpunkte der beiden andern Kreise.

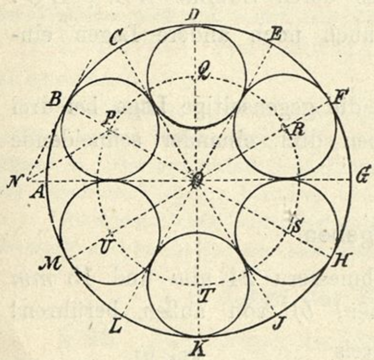
Fig. 99.



6. In einen gegebenen Kreis eine beliebige Anzahl gleicher Kreise (oder Kreisbogen) so einzuschreiben, daß sie einander und den gegebenen Kreis berühren. (Siehe Fig. 100.)

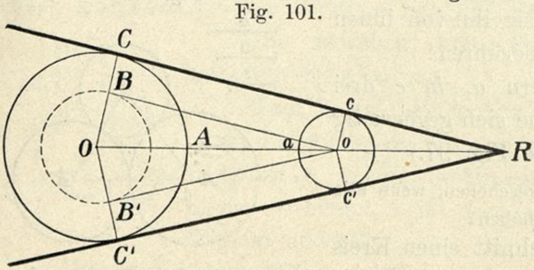
(Auf der Lösung dieser Aufgabe beruht die Konstruktion der sogenannten Fischblasen, welche zu den Grundformen des gotischen Maßwerkes gerechnet werden.)

Fig. 100.



§ 98. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Fig. 101.



Es seien O und o die Mittelpunkte, OA und oa die Halbmesser der zwei Kreise.

a) Man beschreibe (Fig. 101) aus O mit einem Halbmesser OB, der gleich ist der Differenz $OA - oa$ der gegebenen Halbmesser, einen Kreis und ziehe an denselben von o aus die Tangenten oB und OB'. Verlängert man dann die Halbmesser OB und OB' bis zum Durchschnitte des gegebenen Kreises in C und C' und zieht $oc \parallel OC$ und $oc' \parallel OC'$, so sind die Geraden

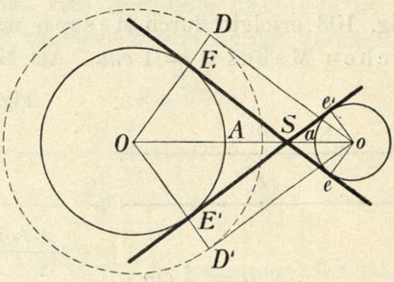
Cc und $C'c'$ zwei gemeinschaftliche, und zwar die äußern Tangenten der beiden gegebenen Kreise.

Denn das Viereck $BCco$ ist, da die Seiten BC und oc gleich und parallel sind, ein Parallelogramm (§ 67, 2); da in diesem ein Winkel CBo ein rechter ist, so sind es auch die andern; also ist $BCc = R$ und $ocC = R$, d. i. Cc ist eine gemeinschaftliche Tangente der zwei Kreise. Ebenso folgt, daß auch $C'c'$ eine Tangente der beiden Kreise ist.

Die äußeren Tangenten zweier Kreise schneiden einander in einem Punkte der verlängerten Zentrale. (Äußerer Ähnlichkeitspunkt.)

b) Man beschreibe (Fig. 102) aus O mit dem Halbmesser OD, der gleich ist der Summe $OA + oa$, einen Kreis und ziehe an denselben von o aus die Tangenten oD und oD'. Zieht man dann die Halbmesser OD und OD', die den gegebenen Kreis in E und E' schneiden, ferner $oe \parallel OE$ und $oe' \parallel OE'$, so sind die Geraden Ee und $E'e'$ ebenfalls zwei gemeinschaftliche und zwar die innern Tangenten der beiden gegebenen Kreise.

Fig. 102.



Die Richtigkeit dieser Lösung läßt sich ebensowie die der früheren unter *a)* erweisen.

Die inneren Tangenten zweier Kreise schneiden einander in einem Punkt der Zentrale. (Innerer Ähnlichkeitspunkt.)

Wenn die zwei gegebenen Kreise außerhalb einander liegen, so haben sie immer vier gemeinschaftliche Tangenten, zwei äußere und zwei innere. In welcher Lage haben zwei Kreise nur drei, nur zwei gemeinschaftliche Tangenten, in welcher Lage haben sie nur eine, in welcher keine gemeinschaftliche Tangente?

Anwendung finden äußere Tangenten als Riementransmissionen behufs Erzeugung gleicher, innere Tangenten hingegen behufs Erzeugung entgegengesetzter Bewegungsrichtung.

Kongruenz der Kreisflächen. Kreisflächen sind kongruent, wenn sie die Radien wechselweise gleich haben. Konstruiere mit dem Halbmesser $r = 26$ *mm* drei kongruente Kreise!

B.

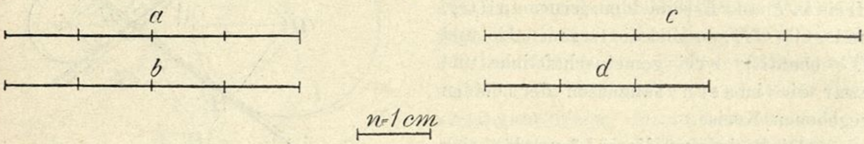
IV. Die Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren.

1. Verhältnisse und Proportionen der Strecken.

§ **99. Verhältnis der Strecken.** Werden zwei Strecken miteinander ihrer Länge nach verglichen, so sind sie entweder gleich ($a = b$, Fig. 103) oder sie sind ungleich ($c > d$, $d < c$, Fig. 103).

Die Vergleichung der beiden Strecken a und b sowie c und d in Fig. 103 erfolgte durch M e s s e n mit Hilfe eines ihnen g e m e i n s c h a f t l i c h e n Maßes $n = 1$ *cm*. Als Maßeinheit für alle Strecken dient bei

Fig. 103.



$a = 4\ cm$ $\quad$ $c = 5\ cm$

$\underbrace{b = 4\ cm}_{a = b}$ $\quad$ $\underbrace{d = 3\ cm}_{c > d}$

$d < c$

uns das metrische Längenmaß. In der Strecke c ist die Maßeinheit (1 *cm*) 5 mal und in der Strecke d 3 mal e n t h a l t e n; daher ist $c = 5$ *cm* und $d = 3$ *cm*. Die Zahlen 5 und 3 sind ihre M a ß z a h l e n. Wird 1 *mm* als Maßeinheit gewählt, so sind 50 und 30 die Maßzahlen dieser Strecken. Die Strecken c und d, a und b sind V i e l f a c h e ihres gemeinschaftlichen Maßes n.

Die Vergleichung zweier Strecken bezüglich ihrer L ä n g e, indem man untersucht, wie oft die Maßzahl der einen Strecke in der Maßzahl der anderen Strecke e n t h a l t e n ist, ergibt ihr V e r h ä l t n i s. Das Verhältnis zwischen den Strecken c und d, d. i. c zu d, geschrieben $c : d$) kann man durch das Verhältnis ihrer Längen 5 *cm* : 3 *cm* oder auch durch das Verhältnis ihrer Maßzahlen 5 : 3 ausdrücken, weil in beiden Fällen ihr Quotient $\frac{5}{3}$ derselbe bleibt.

U n t e r d e m **Verhältnisse** z w e i e r S t r e c k e n v e r s t e h t m a n d a h e r d e n Q u o t i e n t e n i h r e r M a ß z a h l e n i n B e z u g a u f e i n e u n d d i e s e l b e E i n h e i t. Das Verhältnis der Strecken c und d (Fig. 103) ist $= 5 : 3$. In diesem Verhältnisse heißt 5 (c) das V o r d e r g l i e d 3, (d, das H i n t e r g l i e d und $\frac{5}{3}$ $\left(\frac{c}{d}\right)$ der E x p o n e n t.

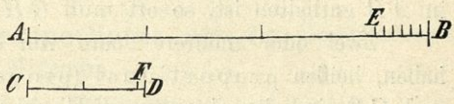
Das Verhältnis der Strecken d und c (Fig. 103) ist $= 3 : 5$; das Verhältnis der Strecken a und b (Fig. 103) ist $= 1 : 1$, das der Strecken n und d ist $1 : 3$.

§ 100. Das Verhältnis zweier Strecken läßt sich nur dann vollständig genau angeben, wenn sie ein gemeinsames Maß haben.

Um das **größte gemeinschaftliche Maß zweier Strecken** zu finden, trage man die kleinere Strecke auf der größeren so oft auf, als es angeht.

a) Ist die kleinere Strecke n (Fig. 103) in der größeren Strecke c mehrmals, z. B. 5 mal, enthalten, so daß kein Rest übrig bleibt, so ist n selbst das größte gemeinschaftliche Maß zwischen c und n; das Verhältnis dieser Strecken ist in diesem Falle gleich $5 : 1$.

Fig. 104.



b) Ist die kleinere Strecke in der größeren nicht ohne Rest enthalten, ist z. B. die Strecke CD (Fig. 104) in der AB 3 mal enthalten und es bleibt noch ein Rest EB übrig, so trage man den Rest EB auf CD so oft auf, als es angeht; es sei EB in CD 2 mal enthalten und es bleibe noch die Strecke FD übrig. Diesen Rest wird man wieder auf den nächst vorhergehenden Rest EB auftragen und es sei FD in EB genau 6 mal enthalten. FD ist dann das größte gemeinschaftliche Maß von AB und CD; denn man hat

$$EB = 6\,FD,$$
$$CD = 2\,EB + FD = 13\,FD,$$
$$AB = 3\,CD + EB = 45\,FD.$$

Aus dieser Darstellung ersieht man, daß die Strecke AB das Maß FD 45 mal und die Strecke CD dasselbe Maß FD nur 13 mal enthält; die Längen dieser beiden Strecken verhalten sich also wie die Zahlen 45 und 13 oder: das Verhältnis von AB zu CD ist $45 : 13$.

Ebenso verfährt man, um das größte gemeinschaftliche Maß zweier Bogen desselben Kreises zu finden.

Aufgaben. Konstruktionsaufgaben.

1. Bestimme das Verhältnis *a)* zwischen der Länge und der Höhe der Schultafel, *b)* zwischen der Breite und der Höhe des Fensters, *c)* zwischen der Länge und Breite dieses Lehrbuches, deines Zeichenheftes!

2. Zeichne mehrere Strecken und bestimme das Verhältnis zwischen je zweien zuerst nach dem Augenmaße und dann mittels des Messens mit einem gemeinschaftlichen Maße! *(dm, cm, mm.)*

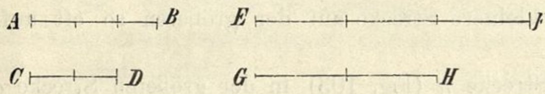
3. Zeichne zwei Strecken im Verhältnisse *a)* von $2 : 3$, *b)* von $4 : 5$, *c)* von $7 : 3$, *d)* von $10 : 1$!

4. Es ist ein Rechteck zu zeichnen, wenn die Länge $l = 100\,mm$ und der Verhältnisexponent von Länge und Breite $\frac{l}{b} = \frac{5}{2}$ gegeben sind.

5. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn eine Kathete $k_1 = 3$ *cm* 9 *mm* und deren Verhältnis zur anderen $k_1 : k_2 = 3 : 7$ gegeben sind!

§ **101. Proportionen der Strecken.** Haben (Fig. 105) sowohl die Strecken AB und CD als auch die Strecken EF und GH das Verhältnis $3 : 2$, so sind die beiden Verhältnisse $AB : CD$ und $EF : GH$ gleich und können durch das Gleichheitszeichen (=) miteinander verbunden werden.

Fig. 105.



Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine **Proportion.** Man erhält demnach $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$; d. h.: So oft CD in AB enthalten ist, so oft muß GH in EF enthalten sein.

Zwei oder mehrere Paare von Strecken, die gleiche Verhältnisse haben, heißen proportional (proportioniert). Die Streeken AB und CD sind den Strecken EF und GH proportional.

In der Proportion $AB : CD = EF : GH$ ist AB das erste, CD das zweite, EF das dritte, GH das vierte Glied (GH wird auch die vierte geometrische Proportionale genannt); auch heißen AB und GH die äußeren, CD und EF die inneren Glieder der Proportion.

Eine Proportion, in der die inneren Glieder gleich sind, z. B. $KL : MN = MN : PQ$ oder in Zahlen: $4 : 6 = 6 : 9$, heißt eine stetige Proportion. Das mittlere Glied MN (6) heißt die mittlere geometrische Proportionale (das geometrische Mittel) zwischen den beiden äußeren Gliedern KL (4) und PQ (9); das vierte Glied PQ (9) wird die dritte stetige Proportionale zu dem ersten Gliede KL (4) und dem mittleren MN (6) genannt.

Das Kennzeichen für die Richtigkeit einer Zahlenproportion ist: 1. Die Gleichheit der Exponenten beider Verhältnisse oder 2. die Gleichheit der Produkte aus den beiden äußeren und aus den beiden inneren Gliedern.

Anmerkung. Proportionen, die aus mehr als zwei gleichen einfachen Verhältnissen bestehen, werden zusammengesetzte Proportionen genannt; z. B.

$$\begin{array}{rl} \text{aus } a : b = 5 : 3 & \\ c : d = 5 : 3 & \\ \hline e : f = 5 : 3 & \text{wird} \end{array}$$

die zusammengesetzte Proportion $a : b = c : d = e : f$. Aus dieser entsteht die erweiterte Proportion $a : c : e = b : d : f$, indem man dem Verhältnisse der Vorderglieder jenes der Hinterglieder gleichstellt.

Aufgaben.

1. Berechne die Länge der Strecken x, y, z, die mit der Strecke $a = 7$ *cm* 5 *mm* die Verhältnisse $a : x = 5 : 4$, $a : y = 3 : 4$, $z : a = 1 : 5$ bilden und zeichne diese vier Strecken!

2. Es ist zu drei gegebenen Strecken ($a = 60\,mm$, $b = 50\,mm$, $c = 40\,mm$) die Länge der vierten geometrischen Proportionale zu berechnen: $a : b = c : x$, $x = \frac{b \cdot c}{a}$; d. h. die vierte geometrische Proportionale ist gleich dem Produkte der Maßzahlen der beiden inneren Glieder, dividiert durch die Maßzahl des bekannten äußeren Gliedes. Zeichne diese vier Strecken!

3. Berechne zu zwei gegebenen Strecken ($a = 9\,cm$, $b = 4\,cm$) die Länge der mittleren geometrischen Proportionale und zeichne diese drei Strecken! $a : x = x : b$, $x = \sqrt{a \cdot b}$; d. h. die mittlere geometrische Proportionale zu zwei Strecken ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte ihrer Maßzahlen.

4. Zu zwei gegebenen Strecken $a = 4\,cm$ und $b = 5\,cm$ ist die dritte stetige Proportionale zu suchen! $a : b = b : x$! $x = \frac{b^2}{a}$. Rechne und zeichne!

5. Bestimme das Verhältnis des Durchmessers der Erde (12.750 *km*) zu dem der Sonne (1,390.000 *km*) und dem des Mondes (3500 *km*) durch Zahlenverhältnisse der einfachsten Form!

2. Anwendung der Streckenproportionen auf die Ähnlichkeit der Figuren.

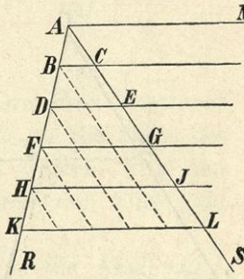
Ähnlichkeit der Dreiecke.

Ähnlichkeitssätze.

§ 102. Zwei Dreiecke, welche dieselbe Gestalt haben und sich nur durch die Größe unterscheiden, heißen ähnlich ($\sim$).

Um die Merkmale zweier ähnlicher Dreiecke anschaulich darzustellen, lasse man eine Gerade AM (Fig. 106) auf einem Schenkel AR des Winkels RAS parallel zu ihrer ersten Lage so fortschreiten, daß sie auf jenem Schenkel gleiche Stücke AB, BD, DF, FH, HK abschneidet; dann werden auch die Abschnitte des zweiten Schenkels AC, CE, EG, GJ, JL untereinander gleich und es entstehen die Dreiecke ABC, ADE, AFG, AHJ, AKL, die zwar verschiedene Größe haben, in der Gestalt jedoch übereinstimmen, somit ähnlich sind.

Fig. 106.



Werden nun irgend zwei dieser Dreiecke, z. B. ADE und AKL verglichen, so findet man, daß sie erstlich paarweise gleiche Winkel haben; denn der Winkel am Scheitel A ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich, die anderen zwei Winkel aber sind als Gegenwinkel paarweise gleich. Werden ferner die Seiten der beiden Dreiecke verglichen, so sieht man, daß AD 2 solche Teile enthält, wie deren auf AK 5 kommen; die Seiten AD und AK haben also das Verhältnis $2 : 5$. Ebenso enthält AE 2 solche Teile, von denen AL 5 enthält; es haben also auch die Seiten AE und AL das Verhältnis $2 : 5$. Dasselbe Verhältnis haben auch die Seiten DE und KL; denn zieht man durch jeden Teilungspunkt der Seite AK eine Parallele mit AL, so wird dadurch DE in 2 und KL in 5 Teile geteilt, die alle untereinander gleich sind, so daß sich auch die Seiten DE und KL so verhalten wie $2:5$. Es ist also $AD:AK = AE:AL = DE:KL = 2:5$, d. i. in den beiden Dreiecken sind je zwei Seiten, die den gleichen Winkeln gegenüberliegen (d. h. die gleichliegenden oder homologen Seiten), einander proportional. Daraus folgt:

In **ähnlichen Dreiecken** sind alle drei Winkel paarweise gleich und die gleichliegenden (homologen) Seiten proportional; jedem Paare gleicher Winkel liegt ein Seitenpaar gegenüber, das eines der gleichen Verhältnisse bildet. Es ist

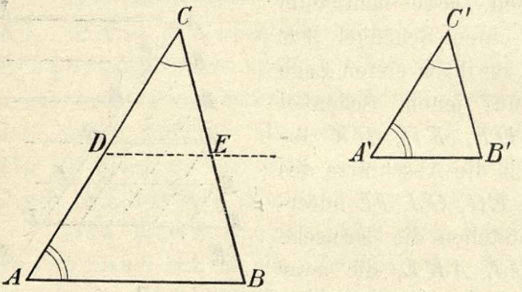
$$\triangle ADE \sim \triangle AKL.$$

Aus der vorstehenden Darstellung folgt auch:

1. Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so werden durch diese die beiden anderen Seiten proportional geschnitten.

2. Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck dem durch die Parallele abgeschnittenen Dreiecke ähnlich.

Fig. 107.



Sollen Dreiecke auf ihre Ähnlichkeit untersucht werden, so ist es nicht notwendig, daß man die Gleichheit dreier Paare von Winkeln und die Gleichheit der drei Verhältnisse gleichliegender Seiten nachweist; schon aus dem Vorhandensein von drei Merkmalen der Ähnlichkeit kann auf die Ähnlichkeit von Dreiecken geschlossen werden

§ **103.** In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ (Fig 107) sei $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$: wir behaupten, daß $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist der Winkel $CDE = \sphericalangle A = \sphericalangle A'$ und daher nach dem I. Kongruenzsatze $\triangle DEC \cong \triangle A'B'C'$. Weil die $DE \parallel$ zur AB gezogen wurde, ist $\triangle DEC \sim \triangle ABC$; und weil statt des Dreieckes DEC das Dreieck $A'B'C'$ gesetzt werden kann, so ist auch $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ oder $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; in diesen ähnlichen Dreiecken sind nicht allein die drei Winkel paarweise gleich, sondern auch die gleichliegenden Seiten sind proportioniert ($AC:A'C' = AB:A'B' = BC:B'C' = 2:1$); d. h.:

I. Ähnlichkeitssatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben zwei Winkel paarweise gleich sind.

Folgesatz. Weil Winkel mit wechselseitig parallelen und normalen Schenkeln einander gleich sind, so kann man aus dem I. Ähnlichkeitssatze folgern:

1. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn alle Seiten des einen zu den Seiten des andern parallel sind. (Fig. 108.)

2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn alle Seiten des einen auf den Seiten des andern normal stehen. (Fig. 109.)

Fig. 108.

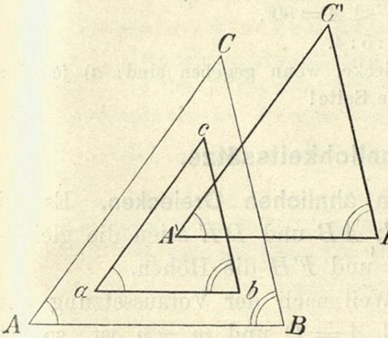
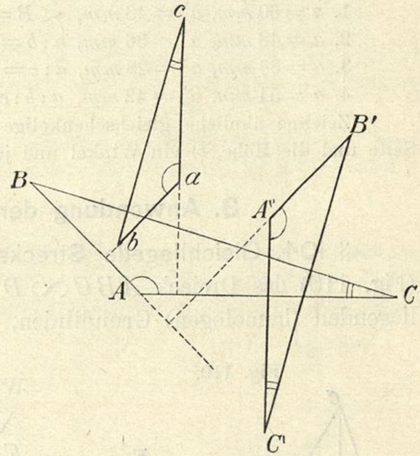


Fig. 109.



Ein Dreieck, das zu einem von zwei ähnlichen Dreiecken kongruent ist, muß zu dem anderen ähnlich sein, denn es kann an die Stelle des ersteren gesetzt und mit ihm zur Deckung gebracht werden. Aus den Bedingungen für die Kongruenz zweier Dreiecke lassen sich somit die Bedingungen für die Ähnlichkeit derselben ableiten.

Entsprechend dem II. Kongruenzsatze reicht für die Ähnlichkeit zweier Dreiecke die Gleichheit der Verhältnisse zweier gleichliegenden Seiten und die Gleichheit der von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel hin. Der **II. Ähnlichkeitssatz** lautet: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportioniert und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind.

In übereinstimmender Weise ergeben sich unter Beziehung der entsprechenden Kongruenzsätze:

III. Ähnlichkeitssatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportioniert und die den größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich sind.

IV. Ähnlichkeitssatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen den drei Seiten des anderen proportioniert sind.

Es gibt also 4 Ähnlichkeitssätze, die den 4 Kongruenzsätzen entsprechen. Von diesen 4 Ähnlichkeitssätzen hat aber der 1. Ähnlichkeitssatz die größte praktische Bedeutung.

Wann sind *a)* ungleichseitig-rechtwinkelige Dreiecke, *b)* gleichschenkelige Dreiecke ähnlich?

Konstruktionsaufgaben. Es sind auf Grund der Ähnlichkeitssätze je zwei ähnliche Dreiecke (mit den Seiten a, b, c und a', b', c' und den diesen Seiten gegenüberliegenden Winkeln A, B, C und A', B', C') zu konstruieren, wenn gegeben sind:

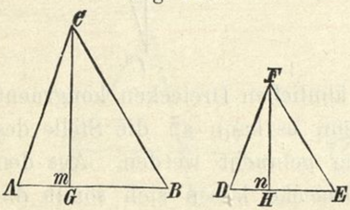
1. $a = 60\,mm,\ a' = 48\,mm,\ \sphericalangle B = 60^0,\ \sphericalangle C = 45^0$.
2. $a = 48\,mm,\ a' = 36\,mm,\ a:b = 3:2,\ \sphericalangle B = 48^0$.
3. $a = 36\,mm,\ a' = 28\,mm,\ a:c = 4:1,\ \sphericalangle A = 80^0$.
4. $a = 54\,mm,\ a' = 42\,mm,\ a:b:c = 6:5:4$.

Zeichne ähnliche gleichschenkelige Dreiecke, wenn gegeben sind: *a)* je eine Seite und die Höhe, *b)* ein Winkel und je eine Seite!

3. Anwendung der Ähnlichkeitssätze.

§ **104. Gleichliegede Strecken in ähnlichen Dreiecken.** Es sei (Fig. 110) das Dreieck $ABC \backsim DEF$; AB und DE seien die gleichliegenden (homologen) Grundlinien, CG und FH die Höhen.

Fig. 110.

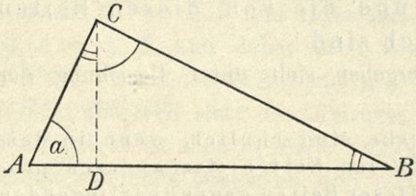


Weil nach der Voraussetzung der Winkel $A = D$ und $m = n$ ist, so ist $\triangle ACG \backsim \triangle DFH$, und daher $CG : FH = AC : DF$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und DEF ist aber auch $AB : DE = AC : DF$.

In diesen beiden Proportionen ist das Verhältnis $AC : DF$ dasselbe; man kann daher den Grundsatz anwenden: Zwei Größen, einer dritten gleich, sind auch untereinander gleich, und erhält die Proportion: $CG : FH = AB : DE$; d. h.:

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen wie die Grundlinien (wie die zugehörigen homologen Seiten).

Fig. 111.



§ **105. Lehrsätze über das rechtwinklige Dreieck.** Es sei ABC (Fig. 111) ein rechtwinkliges Dreieck; $\sphericalangle ACB = R$.

Fällt man von C eine Normale CD auf die Hypotenuse, so haben nach § 103, Folgesatz 2 die dadurch entstehenden kleineren Dreiecke

ACD und BCD mit dem gegebenen Dreiecke ABC und untereinander gleiche Winkel; es ist daher

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \backsim \triangle ACD, \text{ also } AB:AC = AC:AD;\\ \triangle ABC \backsim \triangle BCD, \text{ also } AB:BC = BC:BD;\end{array}\right\} \ldots 1)$$

$$\triangle ACD \backsim \triangle BCD, \text{ also } AD:DC = DC:DB \;\ldots\; 2).$$

Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Normale auf die Hypotenuse, so ist

1. jede Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem jener Kathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse;

2. die Normale ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Konstruktionsaufgaben.

§ 106. 1. Zu drei gegebenen Strecken a, b und c (Fig. 112) die vierte geometrische Proportionale x zu suchen, so daß $a:b = c:x$ (oder $a:c = b:x$) oder $x = \frac{b.c}{a}$ ist.

1. Lösung: Zeichne einen beliegen Winkel A, schneide auf dessen Schenkeln $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$ ab und ziehe $EC \parallel DB$; dann ist $DE = x$. (Begründung!)

2. Lösung: Siehe Fig. 113; begründe die Richtigkeit der Konstruktion!

Fig. 112.

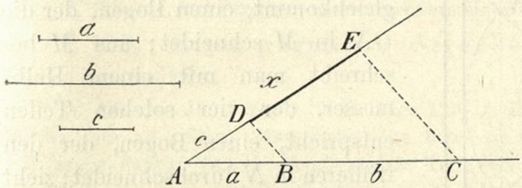
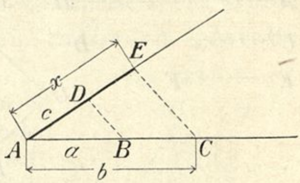


Fig. 113.

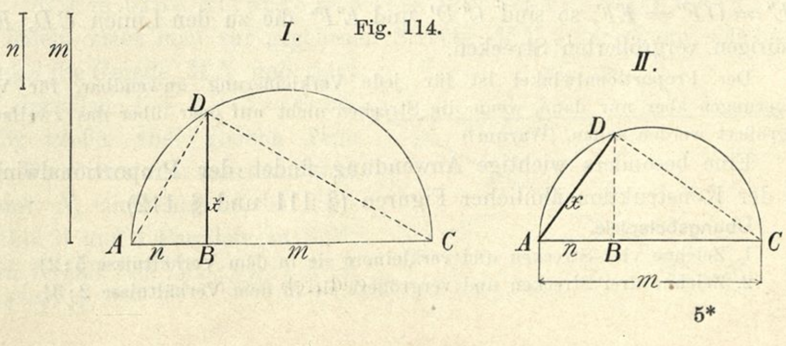


Welche Lösung ist noch möglich?

2. Zu zwei gegebenen Strecken n und m (Fig. 114) ist die mittlere geometrische Proportionale x zu konstruieren. ($n:x = x:m$, $x^2 = n.m$, $x = \sqrt{n.m}$)

I. Art. Trage auf einer Geraden $AB = n$ und $BC = m$ auf, beschreibe über AC einen Halbkreis und ziehe $BD \perp AC$! Dann ist BD die verlangte mittlere geometrische Proportionale x. Warum?

Fig. 114.



II. Art. Die konstruktive Lösung derselben Aufgabe erfolgte mit Beziehung auf § 105 (1).

4. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die dritte stetige Proportionale zu suchen, so daß $a:b = b:y$, $y = \frac{b^2}{a}$ ist.

1. Lösung nach Fig. 115. (Begründung!)

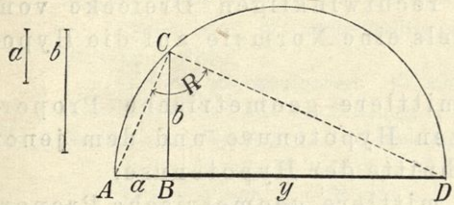


Fig. 115.

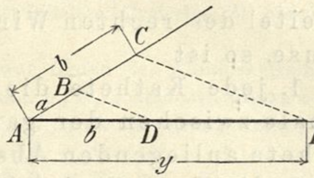


Fig. 116.

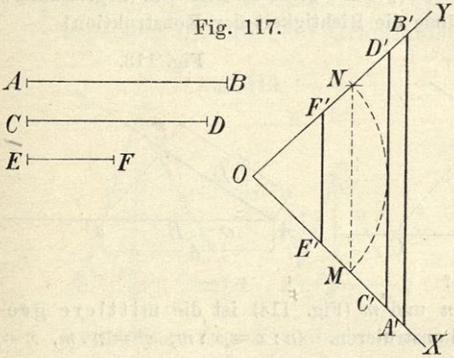
2. Lösung nach Fig. 116. (Begründung!)

§ 107. Mehrere Strecken nach einem gegebenen Verhältnisse zu vergrößern oder zu verkleinern.

a) Mittels des Proportional- oder Reduktionswinkels.

Es seien z. B. die Strecken AB, CD, EF (Fig. 117) in dem Verhältnisse 3:4 zu vergrößern. Man ziehe eine Gerade OX von unbestimmter Länge und beschreibe von O aus mit dem Halbmesser, der einer Strecke von drei beliebig angenommenen aber gleichen Teilen gleichkommt, einen Bogen, der die OX in M schneidet; aus M beschreibt man mit einem Halbmesser, der vier solchen Teilen entspricht, einen Bogen, der den früheren in N durchschneidet; zieht man nun durch O und N die Gerade OY von unbestimmter Länge, so ist XOY der Proportionalwinkel für die verlangte Vergrößerung. Trägt man auf beide Schenkel AB auf, indem man $OA' = OB' = AB$ macht, so ist $A'B'$ die für AB gesuchte vergrößerte Strecke. Macht man ebenso $OC' = OD' = CD$, $OE' = OF' = EF$, so sind $C'D'$ und $E'F'$ die zu den Linien CD, EF gehörigen vergrößerten Strecken.

Fig. 117.



Der Proportionalwinkel ist für jede Verkleinerung anwendbar, für Vergrößerungen aber nur dann, wenn die Strecken nicht auf oder über das zweifache vergrößert werden sollen. (Warum?)

Eine besonders wichtige Anwendung findet der Proportionalwinkel bei der Konstruktion ähnlicher Figuren (§ 111 und § 112).

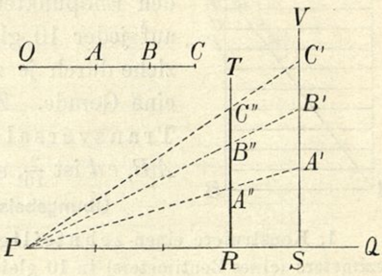
Übungsbeispiele.

1. Zeichne vier Strecken und verkleinere sie in dem Verhältnisse 5:2!
2. Zeichne drei Strecken und vergrößere sie in dem Verhältnisse 2:3!

b) Man kann auch folgendes Verfahren anwenden:

Um die gegebenen Strecken OA, OB, OC (Fig. 118) z. B. in dem Verhältnisse 4 : 3 zu verkleinern, ziehe man eine Gerade PQ, trage von P aus 3 und ebenso von P aus 4 gleiche Teile auf; in den Endpunkten R und S errichte man die Normalen RT und SV, trage auf die entferntere Normale SV die gegebenen Strecken von S bis A', B', C' auf und ziehe durch den Punkt P und die Punkte A', B', C' gerade Linien, welche die nähere Normale in den Punkten A'', B'', C'' treffen; die Geraden RA'', RB'', RC'' sind dann die gesuchten verhältnismäßig verkleinerten Strecken.

Fig. 118.



Wären die gegebenen Strecken in dem Verhältnisse 3 : 4 zu vergrößern, so würde man sie auf die nähere Normale RT auftragen; auf der Normalen SV erhielte man dann die verhältnismäßig vergrößerten Strecken.

Müssen RT und SV gerade $\perp$ auf PQ stehen?

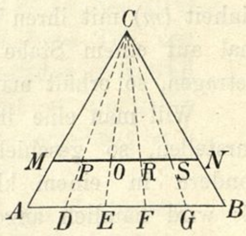
Übungsbeispiele.

1. Zeichne drei Strecken und verkleinere sie in dem Verhältnisse *a*) 2 : 1, *b*) 3 : 2!
2. Zeichne drei Strecken und vergrößere sie in dem Verhältnisse *a*) 1 : 2, *b*) 3 : 5!

§ **108.** Eine gegebene Strecke in mehrere gleiche Teile zu teilen.

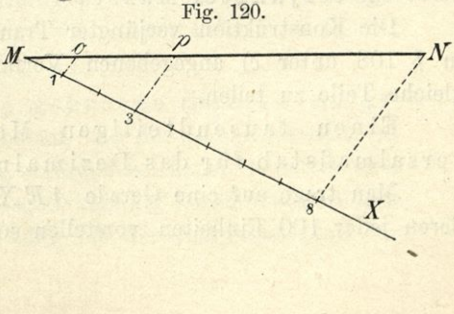
a) Es sei die Strecke MN (Fig. 119) z. B. in 5 gleiche Teile zu teilen. Man ziehe eine beliebige Gerade AB, trage darauf von A aus 5 gleiche Teile bis B auf und beschreibe über AB ein gleichseitiges $\triangle ABC$. Trägt man nun die gegebene Strecke von C aus bis M und N auf, zieht MN und von C aus die Geraden CD, CE, CF, CG, so wird durch diese die MN in die verlangte Anzahl gleicher Teile geteilt. Diese Methode ist besonders geeignet, wenn man mehrere Strecken von verschiedener Länge gleichzeitig in dieselbe Anzahl gleicher Teile zu teilen hat.

Fig. 119.



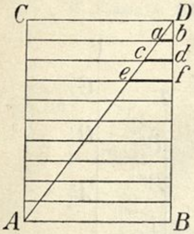
b) Um eine Strecke MN (Fig. 120) im Verhältnisse 1 : 2 : 5 zu teilen, zieht man zur gegebenen Strecke MN unter einem beliebigen Winkel die Gerade MX und trägt auf derselben $1 + 2 + 5 = 8$ beliebig große, aber gleiche Teile auf. Dann verbindet man den Punkt 8 mit N, zieht durch die Teilpunkte 3 und 1 Parallele zu $8N$; dann verhält sich $Mo : op : pN =$ $= 1 : 2 : 5$.

Fig. 120.



c) Wenn sehr kleine Teile, z. B. 10 gleiche Teile der Strecke *AB* (Fig. 121) zu bestimmen sind, die bei der vorhergehenden Konstruktion undeutlich erscheinen würden, so wende man folgendes Verfahren an: Man errichte auf *AB* in den Endpunkten die Normalen *AC* und *BD*, trage auf jeder 10 gleich große Teile bis *C* und *D* auf und ziehe durch je zwei zusammengehörige Teilungspunkte eine Gerade. Zieht man nun die *AD*, die man eine Transversale nennt, so ist *ab* der 10te Teil von *AB*, *cd* ist $\frac{2}{10}$, *ef* $\frac{3}{10}$ usw. von der Strecke *AB*; warum?

Fig. 121.

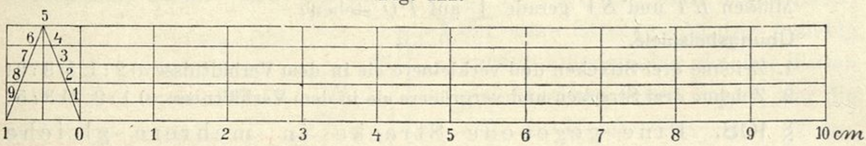


Übungsbeispiele.

1. Konstruiere einen zehnteiligen Transversalmaßstab! Teilung eines Dezimeters (eines Zentimeters) in 10 gleiche Teile (*cm*, *mm*) mit Hilfe des Parallelensystems im Rechtecke. (Fig. 121.) Übung im Auftragen von *cm* (*mm*).

2. Konstruiere einen hundertteiligen Transversalmaßstab! (Fig. 122.) Teilung eines Dezimeters in Zentimeter und Millimeter. Begründung der Richtigkeit der Konstruktion! Übung im Abnehmen (Abgreifen) von *cm* und *mm*; z. B. 1 *cm* 1 *mm*, 64 *mm*, 7 *dm*, 9 *mm*, 92 *mm*.

Fig. 122.



§ **109. Natürliche und verjüngte Maßstäbe.** Wird die Längeneinheit (*m*) mit ihren Unterabteilungen (*dm*, *cm*, *mm*) ein- oder mehreremal auf einem Stabe von Holz, Metall u. a. in wahrer Größe aufgetragen, so erhält man einen natürlichen Maßstab.

Will man eine in der Natur gemessene Strecke auf dem Papiere darstellen, so geschieht dies gewöhnlich nicht in der wahren Größe, sondern in einem kleineren, dem sogenannten verjüngten Maße. Es wird nämlich angenommen, daß eine bestimmte Länge, z. B. ein Zentimeter auf dem Papiere, eine bestimmte Länge, z. B. ein Meter oder 20 Meter, in der Wirklichkeit vorstellen soll. Ein Maßstab, auf dem die in der Wirklichkeit üblichen Längenmaße verkleinert aufgetragen sind, heißt ein verjüngter Maßstab.

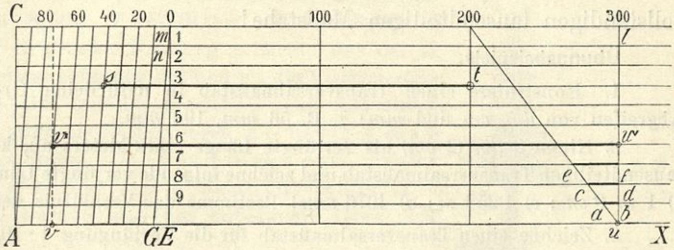
Die Konstruktion verjüngter Transversal-Maßstäbe beruht auf dem in § 108 unter *c*) angegebenen Verfahren, eine Strecke in mehrere gleiche Teile zu teilen.

Einen tausendteiligen Maßstab, d. i. einen Transversalmaßstab für das Dezimalmaß zu konstruieren.

Man trage auf eine Gerade *AEX* (Fig. 123) 10 gleiche Teile auf, deren jeder 100 Einheiten vorstellen soll, so daß auf die ganze Strecke

1000 Einheiten (*mm*) kommen. In den Endpunkten errichte man Normale, trage darauf wieder 10 beliebig große, jedoch gleiche Teile auf und ziehe durch die letzten Teilungspunkte eine Strecke, die mit der zuerst gezogenen Geraden parallel und ihr gleich sein muß und die ebenfalls in 10 gleiche Teile geteilt wird. Sodann ziehe man durch die gegenüberstehenden Teilungspunkte gerade Linien, die alle entweder auf AX normal stehen oder mit AX parallel sind. Um nun einen Teil AE wieder in 10 Teile zu teilen, braucht man nur in irgend einer Abteilung eine Diagonale b 200 zu ziehen. Es ist dann ab der 10te Teil von der Strecke zwischen 200 und 300, folglich auch von AE und $\frac{1}{100}$ der ganzen Strecke AX; ebenso enthält cd 2 solche Teile, ef 3 Teile usw. Diese Teile trägt man nun sowohl auf AE als $C0$ auf, zieht dann durch 0 und G sowie durch je zwei folgende Teilungspunkte Transversale und schreibt an die Teilungspunkte die entsprechenden Zahlen hin.

Fig. 123.



Die ganze Strecke AEX enthält 1000 Teile; AE ist der 10te Teil davon und enthält somit 100 Teile; EG ist der 10te Teil von AE, enthält demnach 10 solche Teile; m 1 endlich ist der 10te Teil von EG, enthält also einen solchen Teil, wie deren auf die ganze Strecke 1000 kommen, m 1 ist also der 1000ste Teil derselben; n 2 enthält zwei solche Teile, ist also $\frac{2}{1000}$ (0·002) AX usw.

Stellt z. B. AE ein Dezimeter vor, so ist GE ein Zentimeter, m 1 ein Millimeter und AX ein Meter des verjüngten Dezimalmaßes.

Wäre nun nach diesem Maßstabe z. B. die Strecke $ts = 2$ *dm* 4 *cm* 3 *mm* zu zeichnen, so setzt man (Fig. 123) mit dem Zirkel in t ein und öffnet ihn bis s; die Zirkelöffnung ts stellt dann die verlangte Strecke vor. Greife mit dem Zirkel ab: 1 *dm* 1 *mm*; 1 *dm* 2 *cm* 3 *mm*; 3 *dm* 7 *cm*; 8 *dm* 4 *cm* 6 *mm*; 9·05 *dm*; 713 *mm*!

Soll mit diesem Maßstabe eine gegebene Strecke uv gemessen werden, so legt man diese so an, daß der eine Endpunkt (u) auf einen Hunderterteilpunkt (300) fällt, während der andere zwischen zwei Teilpunkten von AE (70 und 80) zu liegen kommt; verschiebt man nun die Strecke uv längs der Normalen u 300, bis der Endpunkt eine der schrägen Linien durchschneidet, so gibt die durch diesen Schnittpunkt v' gehende Parallele (6) die Einheiten des Maßstabes an. Es stellt demnach $uv = u'v' = (300 + 70 + 6)\ mm = 376\ mm$ auf diesem verjüngten Maßstabe vor.

Übung im Messen gegebener Strecken auf dem verjüngten vollständigen tausendteiligen Maßstabe!

Übungsbeispiele.

1. Konstruiere einen Transversalmaßstab in natürlicher Größe! Übung im Abgreifen von *dm*, *cm* und *mm*; z. B. 56 *mm*, 194 *mm*.

2. Nimm 2 *dm* (2 *cm*) als verjüngte Länge eines Meters an, konstruiere einen tausendteiligen Transversalmaßstab und zeichne folgende verjüngte Längen: *a*) 478 *mm*; *b*) 1 *m* 9 *cm*; *c*) 1·258 *m*; *d*) 4076 *mm*! Bestimme das Verhältnis der Verkleinerung!

3. Zeichne einen Transversalmaßstab für die Verjüngung 1 : 10, 1 : 200! Übung im Abgreifen!

4. Zeichne einen Transversalmaßstab für die Vergrößerungen 10 : 1, 2 : 1! Übung im Abgreifen!

5. Man entwerfe eine Zeichnnng des Fußbodens des Lehrzimmers (Wohnzimmers) im Maßstabe von 1 : 50, 1 : 75, 1 : 100.

Übung im Bestimmen von Längen mit Hilfe eines Transversalmaßstabes:

6. Zeichne ein Dreieck, ein Viereck und miß die Seiten desselben!

7. Zeichne eine Strecke von 666 *mm* mit Hilfe des Transversalmaßstabes!

8. Zeichne ein Quadrat, wenn $s = 209\ mm$!

9. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 5·76 *m* und 8·52 *m* betragen!

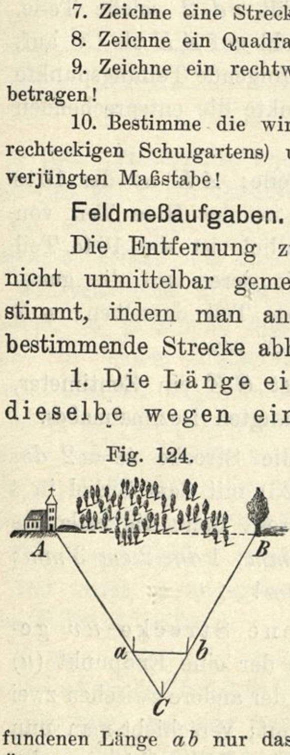
10. Bestimme die wirkliche Breite und Höhe eines Fensters (einer Tür, des rechteckigen Schulgartens) und zeichne dann dasselbe (dieselben) im entsprechend verjüngten Maßstabe!

Feldmeßaufgaben.

Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde kann manchmal nicht unmittelbar gemessen werden; sie wird dann mittelbar bestimmt, indem man andere Strecken mißt, von deren Länge die zu bestimmende Strecke abhängt.

1. Die Länge einer Strecke zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines zwischen ihren Endpunkten befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt.

Fig. 124.

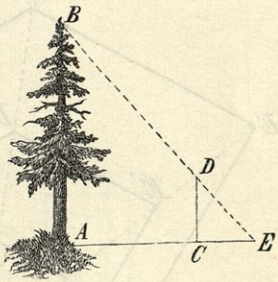


Man messe (Fig. 124) die Strecken CA und CB, trage einen bestimmten, z. B. den 4ten Teil der erhaltenen Länge CA von C bis a und ebenso den 4ten Teil der CB von C bis b auf; in a und b schlage man Pflöcke ein. Mißt man nun die Entfernung ab, so ist diese wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke Cab und CAB der 4te Teil der gesuchten Entfernung AB; man braucht daher von der gefundenen Länge ab nur das Vierfache zu nehmen, um AB zu erhalten. (Welcher Ähnlichkeitssatz kommt bei der Lösung dieser Aufgabe in Anwendung?)

2. Die Höhe eines zugänglichen Gegenstandes zu bestimmen.

a) Es sei z. B. die Höhe eines Baumes AB (Fig. 125) zu finden. Man wählt einen Punkt C, von dem man in gerader Linie zu A hin messen kann, steckt in C einen Stab CD lotrecht ein und legt sich hinter demselben in einer solchen Lage auf den Rücken, daß man die Spitze D des Stabes mit der Spitze B des Baumes in gerader Richtung erblickt; den Ort E, wo sich das Auge befunden hat und wo die Verlängerung der Geraden BD hinfällt, bezeichnet man mit einem Pflocke und mißt die Entfernungen EC und EA sowie die Länge des Stabes CD. Nun hat man zwei ähnliche Dreiecke ABE und CDE, daher ist $AB : CD = AE : CE$, woraus man das unbekannte Glied AB finden kann.

Fig. 125.



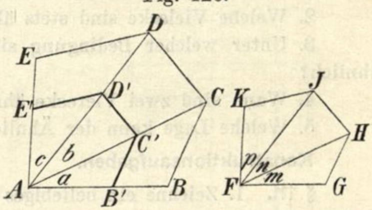
Wäre z. B. $CD = 2\,m$, $CE = 3\,m$, $AE = 9\,m$, so hätte man die Proportion $AB : 2 = 9 : 3$, woraus $AB = 6\,m$ folgt.

b) Auch aus dem Schatten eines Gegenstandes kann dessen Höhe gefunden werden. Man mißt nämlich die Länge des Schattens, welchen der Gegenstand wirft, und auch die Länge des Schattens, den zu derselben Zeit ein lotrecht stehender Stab wirft; hierauf mißt man noch die Höhe des Stabes und schließt: die Höhe des Gegenstandes verhält sich zur Höhe des Stabes, wie sich die Länge des Schattens des Gegenstandes zur Länge des Schattens des Stabes verhält. Aus dieser Proportion wird dann die verlangte Höhe gefunden.

4. Ähnlichkeit der Vielecke.

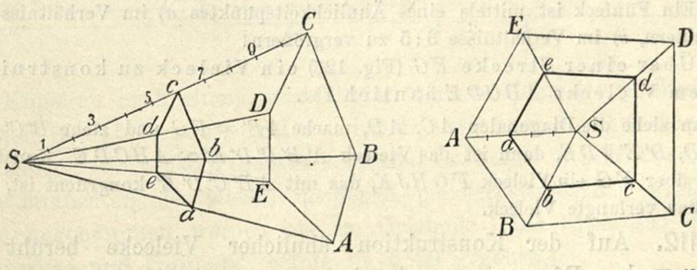
§ 110. Die Ähnlichkeit der Vielecke läßt sich auf die Ähnlichkeit der Dreiecke zurückführen.

Fig. 126.



Soll zu einem gegebenen Vielecke ein ähnliches gezeichnet werden, so nimmt man in einer Ecke (Fig. 126), in einer Seite (Fig. 126), außerhalb der Fläche oder innerhalb derselben (Fig. 127) einen Punkt an und

Fig. 127.

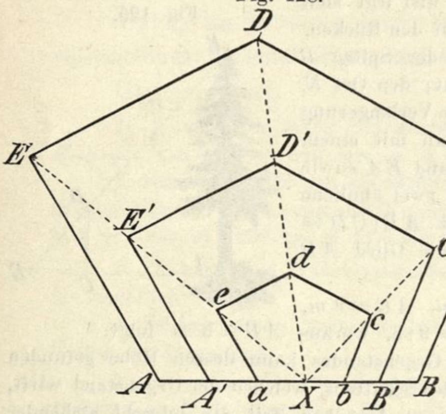


verbindet denselben mit den Eckpunkten des Vieleckes. Teilt man dann eine dieser Linien nach einem gegebenen Verhältnisse und zieht

Parallele zu den Vieleckseiten, so erhält man ähnliche Dreiecke, während die entstandenen Vielecke den gegebenen Vielecken ähnlich sind.

Vielecke also, die aus gleich vielen, der Ordnung nach einander ähnlichen Dreiecken bestehen, sind einander ähnlich.

Fig. 128.



Warum sind die Winkel der ähnlichen Vielecke wechselweise gleich?

Warum sind die parallelen Seiten je zweier dieser Vielecke proportional?

Wie sind in ähnlichen Vielecken die gleichliegenden (homologen) Seiten und Diagonalen?

„Zwei Vielecke heißen ähnlich, wenn in denselben die gleichliegenden Seiten proportioniert und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind.“

Zur Übung:

1. Welche Übereinstimmung zeigen ähnliche Vielecke bezüglich der Seiten und Winkel, wodurch unterscheiden sie sich von kongruenten Vielecken?

2. Welche Vielecke sind stets ähnlich?

3. Unter welcher Bedingung sind zwei Rechtecke, zwei Rhomben einander ähnlich?

4. Wann sind zwei Vierecke ähnlich?

5. Welche Lage kann der Ähnlichkeitspunkt zweier ähnlicher Vielecke haben?

Konstruktionsaufgaben.

§ 111. 1. Zeichne ein beliebiges Sechseck und dann ein zweites ihm ähnliches, so daß sich die Seiten des ersten Sechseckes zu jenen des zweiten wie 10 : 3 verhalten!

2. Zeichne zwei ähnliche Achtecke, deren gleichliegende Seiten sich wie 4 : 5 verhalten!

3. Ein Fünfeck ist mittels eines Ähnlichkeitspunktes *a)* im Verhältnisse 4 : 3 zu verkleinern, *b)* im Verhältnisse 3 : 5 zu vergrößern!

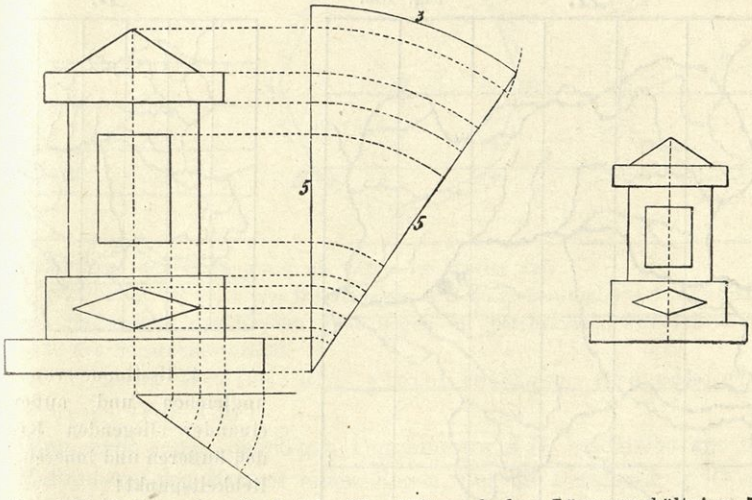
4. Über einer Strecke FG (Fig. 126) ein Vieleck zu konstruieren, das einem Vielecke $ABCDE$ ähnlich ist.

Man ziehe die Diagonalen AC, AD, mache $AB' = FG$ und ziehe $B'C' \parallel BC$, $C'D' \parallel CD$, $D'E' \parallel DE$, dann ist das Vieleck $A'B'C'D'E' \sim ABCDE$. Konstruiert man nun über FG ein Vieleck $FGHJK$, das mit $AB'C'D'E'$ kongruent ist, so ist dasselbe das verlangte Vieleck.

§ 112. Auf der Konstruktion ähnlicher Vielecke beruht das Kopieren der Figuren nach einem vergrößerten oder verkleinerten Maßstabe.

Dabei muß man zunächst die Längenausdehnungen des Originals nach dem gegebenen Verhältnisse vergrößern oder verkleinern, was meistens mittels des Proportionalwinkels geschieht; dann erst ist mit diesen verhältnismäßig geänderten Strecken die Kopie auszuführen.

Fig.129.



1. *a)* Verkleinere den Grabstein (Fig. 129) nach dem Längenverhältnisse 5 : 3! *b)* Vergrößere den Sockel (Fig. 131) nach dem Längenverhältnisse 1 : 3!

2. Vergrößere das Haus (Fig. 130) nach dem Längenverhältnisse 5 : 9!

Fig. 130.

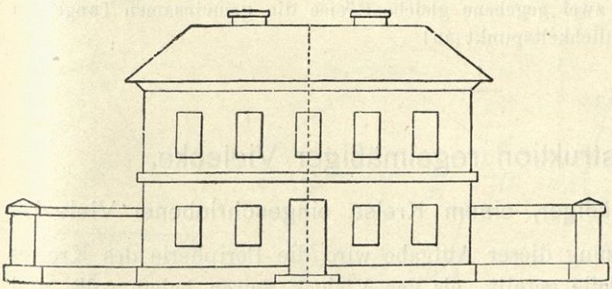
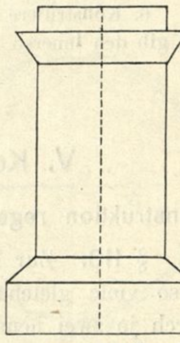


Fig. 131.



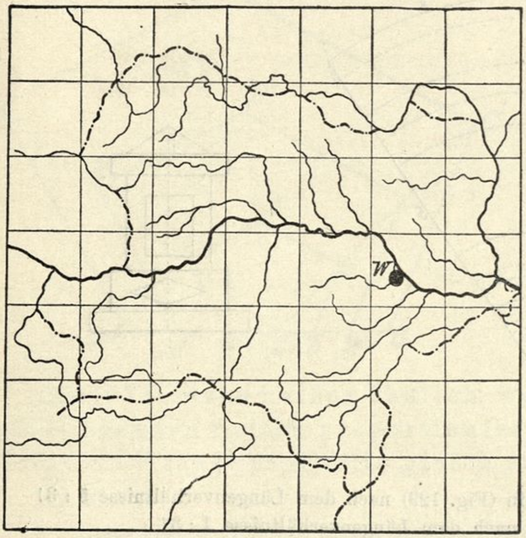
Beim Kopieren nach einem vergrößerten oder verkleinerten Maßstabe kann man auch die Abszissen und Ordinaten wie auch die Quadratnetze anwenden; nur müssen die Abszissen und Ordinaten und im zweiten Falle die Quadratseiten des Netzes in der Kopie verhältnismäßig größer oder kleiner angenommen werden als im Original. (Die Erklärung der Begriffe „Abszisse und Ordinate“ wurde im § 79 gegeben.)

3. Zeichnet ein beliebiges unregelmäßiges Vieleck und vergrößert dasselbe durch Abszissen und Ordinaten im Verhältnisse von 3 : 4!

Wie man das Kopieren in einem gegebenen Verhältnisse mittels des Quadratnetzes ausführt, ist aus der nebenstehenden Fig. 132 *A* und *B* zu ersehen, in der das Verhältnis 7 : 4 eingehalten ist.

Vergrößert oder verkleinert diese Fig. 132 *A* oder die Karte eines sonstigen österreichischen Kronlandes in einem anderen selbstgewählten Verhältnisse!

A. Fig. 132. *B.*



4. Bestimme von zwei ungleichen und außerhalb einander liegenden Kreisen den äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkt!

5. Ziehe an zwei gegebene ungleiche Kreise die gemeinsamen Tangenten, wenn die Kreise *a)* außerhalb einander liegen, *b)* sich von außen berühren, *c)* sich schneiden, *d)* sich von innen berühren!

6. Konstruiere an zwei gegebene gleiche Kreise die gemeinsamen Tangenten und gib den inneren Ähnlichkeitspunkt an!

V. Konstruktion regelmäßiger Vielecke.

Konstruktion regelmäßiger, einem Kreise eingeschriebener Vielecke.

§ 113. Zur Lösung dieser Aufgabe wird die Peripherie des Kreises in so viele gleiche Teile geteilt, als das Vieleck Seiten haben soll, und durch je zwei benachbarte Teilungspunkte eine Sehne gezogen.

1. Einem Kreise ein Quadrat einzuschreiben. (Fig. 133.)

Man ziehe zwei aufeinander normale Durchmesser; ihre Endpunkte sind die Eckpunkte des verlangten Quadrates.

2. Einem Kreise ein regelmäßiges Achteck einzuschreiben. (Fig. 134.)

Man ziehe zwei aufeinander normale Durchmesser *AB* und *CD* und halbiere die vier Quadranten; die Endpunkte der vier Durchmesser sind die Eckpunkte des Achteckes.

3. Einem Kreise ein regelmäßiges Sechseck einzuschreiben. (Fig. 135.)

Fig. 133.

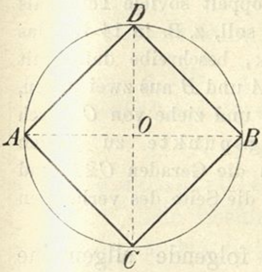


Fig. 134.

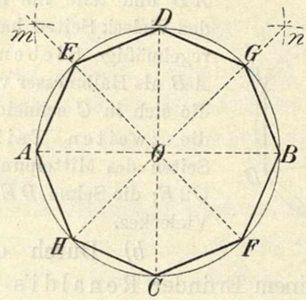
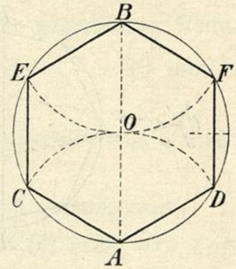


Fig. 135.



Man trage den Halbmesser als Sehne im Kreise auf.

Vorteilhafter ist es, einen Durchmesser AB zu ziehen und aus den Endpunkten mit dem Halbmesser des Kreises zwei Bogen zu beschreiben, wodurch man die Eckpunkte des Sechseckes erhält.

4. Einem Kreise ein gleichseitiges Dreieck einzuschreiben. (Fig. 136.)

Man ziehe einen beliebigen Durchmesser AB, beschreibe aus A mit dem Halbmesser des Kreises einen Bogen, der die Peripherie in C und D schneidet, und ziehe die Sehnen CD, CB und BD.

5. Einem Kreise ein regelmäßiges Fünfeck (ein regelmäßiges Zehneck) einzuschreiben. (Fig. 137 und Fig. 138.)

Fig. 136.

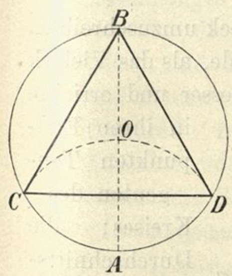


Fig. 137.

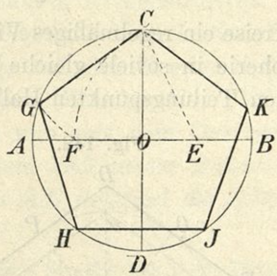
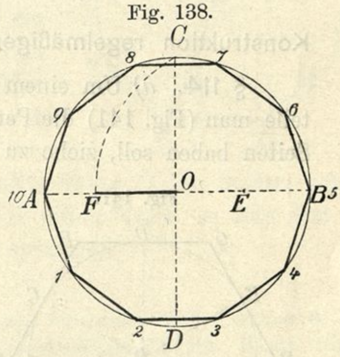


Fig. 138.

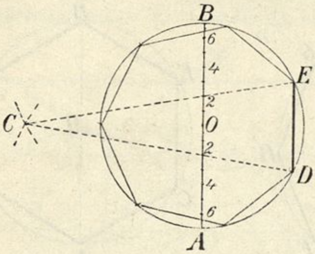


Man ziehe (Fig. 137) zwei aufeinander normale Durchmesser AB und CD, halbiere den Halbmesser OB in E und beschreibe aus E mit dem Halbmesser EC einen Bogen, der den Halbmesser OA in F schneidet; die Strecke CF läßt sich dann genau fünfmal als Sehne im Kreise herum auftragen, die Strecke OF ist die Zehnecksseite.

Konstruktion eines regelmäßigen Fünfeckes im Kreise mit Hilfe der Mittelpunktswinkel!

6. Allgemeines Verfahren, einem Kreise ein beliebiges regelmäßiges Vieleck einzuschreiben. (Näherungsweise.)

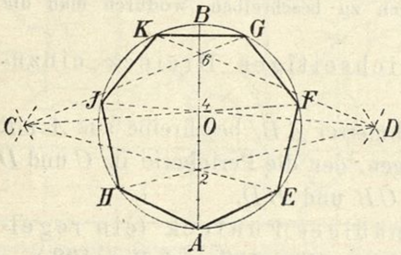
Fig. 139.



a) Man ziehe (Fig. 139) einen Durchmesser AB und teile ihn in doppelt soviele Teile, als das Vieleck Seiten haben soll, z. B. in 14 für das regelmäßige Siebeneck, beschreibe dann mit AB als Halbmesser von A und B aus zwei Bogen, die sich in C schneiden, und ziehe von C durch die zweiten Teilungspunkte zu beiden Seiten des Mittelpunktes die Geraden $C2D$ und $C2E$; die Sehne DE ist die Seite des verlangten Vieleckes.

b) Durch das folgende allgemeine Verfahren, das nach seinem Erfinder Renaldi's Konstruktion heißt, kann man unmittelbar alle Eckpunkte des regelmäßigen Vieleckes bestimmen:

Fig. 140.



Man ziehe (Fig. 140) den Durchmesser AB, beschreibe aus A und B mit AB als Halbmesser Kreisbogen, die sich in C und D schneiden, teile den Durchmesser in soviele gleiche Teile, als das Vieleck Seiten haben soll, z. B. in 7 gleiche Teile, und ziehe durch C und D und durch die geraden Teilungspunkte 2, 4, 6 des Durchmessers die Strecken CE, CF, CG, DH, DJ, DK, bis sie die Peripherie des Kreises auf der hohlen Seite treffen; die Punkte A, E, F, G, H, J, K sind dann die Eckpunkte des regelmäßigen Vieleckes.

Konstruktion regelmäßiger, einem Kreise umgeschriebener Vielecke.

§ 114. *a)* Um einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck umzuschreiben, teile man (Fig. 141) die Peripherie in soviele gleiche Teile, als das Vieleck Seiten haben soll, ziehe zu den Teilungspunkten Halbmesser und errichte in ihren Endpunkten Tangenten des Kreises; die Durchschnittspunkte dieser Tangenten geben die Eckpunkte des regelmäßigen Vieleckes.

Fig. 141.

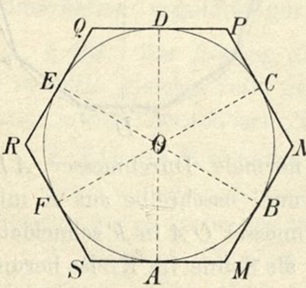
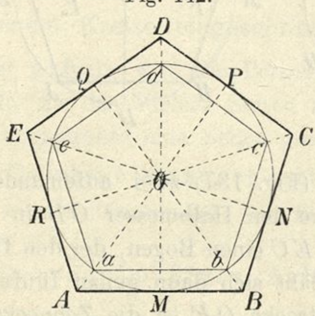


Fig. 142.



b) Ist einem Kreise bereits ein regelmäßiges Vieleck $abcde$ (Fig. 142) eingeschrieben, so erhält man das umgeschriebene regelmäßige

Vieleck $ABCDE$ von ebensovielen Seiten, indem man durch die Mitten der Seiten des eingeschriebenen Vieleckes Halbmesser zieht und durch ihre Endpunkte Parallele zu jenen Seiten konstruiert.

Konstruktion regelmäßiger Vielecke über einer gegebenen Seite.

§ 115. 1. Über einer gegebenen Seite ($s_3 = 60$ *mm*) ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren.

2. Über einer gegebenen Seite ($s_4 = 55$ *mm*) ein Quadrat zu konstruieren.

Die Lösung dieser Aufgaben wird als bekannt vorausgesetzt.

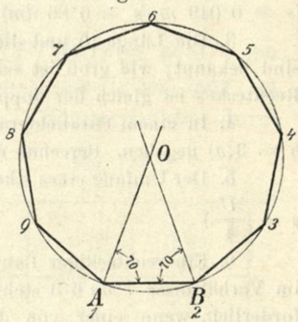
3. Über einer gegebenen Seite ($s_6 = 52$ *mm*) ein regelmäßiges Sechseck zu konstruieren.

Man beschreibe aus den Endpunkten der Seite mit dieser Seite als Halbmesser zwei Bogen: ihr Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt des Kreises, in welchem sich die gegebene Seite sechsmal auftragen läßt.

5. Allgemeines Verfahren, über einer gegebenen Seite ein beliebiges regelmäßiges Vieleck zu konstruieren.

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist die Größe des Kreises zu finden, dem das verlangte Vieleck eingeschrieben erscheint. Dies kann auf mehrere Arten geschehen, von denen hier nur eine erwähnt sei.

Fig. 143.



Mit Hilfe des Transporteurs. Es sei über der Strecke AB (Fig. 143) z. B. ein regelmäßiges Neuneck zu konstruieren. Man berechne die Größe eines Vieleckswinkels (hier 140^0) und trage auf der Strecke AB in A und B den halben Vieleckswinkel (70^0) auf. Beschreibt man nun aus dem Durchschnittspunkte O der beiden neuen Schenkel mit dem Halbmesser $OA = OB$ einen Kreis, so läßt sich in diesem die Seite AB neunmal als Sehne auftragen.

Aufgaben.

1. Zeichne eine Strecke von 5 *cm* Länge und beschreibe über derselben *a)* ein gleichseitiges Dreieck, *b)* ein Quadrat, *c)* ein regelmäßiges Fünfeck, *d)* ein regelmäßiges Sechseck!

2. Konstruiere über der Seite 3 *cm* ein regelmäßiges *a)* Achteck, *b)* Neuneck, *c)* Zehneck, *d)* Zwölfeck!

VI. Von der Größe der Figuren.

Umfang und Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

§ 116. **Umfang.** Die Summe aller Begrenzungslinien einer Figur wird Umfang derselben genannt.

Um den **Umfang** einer geradlinigen Figur zu bestimmen, messe man die Seiten derselben und addiere die gefundenen Maßzahlen.

$$U = a + b + c + \ldots . + n.$$

Der Umfang einer gleichseitigen Figur ist gleich der Maßzahl der Länge einer Seite multipliziert mit der Anzahl der Seiten.

$$\boldsymbol{U = s \times n = ns.}$$

Der Umfang besteht aus Linien und kann daher nur durch das Längenmaß gemessen werden.

Übungsbeispiele.

1. Die Seiten eines Dreieckes messen 4·6 *cm*, 7 *cm* und 53 *mm*; wie groß ist der Umfang?

2. Berechne den Umfang *a)* eines gleichseitigen Dreieckes, *b)* eines Quadrates, *c)* eines regelmäßigen Sechseckes, wenn die Maßzahl einer Seite s = 57·8 *mm* (s = 0·049 *m*, s = 0·86 *dm*) gegeben ist!

3. Die Länge (l) und die Breite (b) eines Rechteckes ($l = \frac{3}{4}$ *m*, b = 4·7 *dm*) sind bekannt; wie groß ist sein Umfang? $U = 2\ (l + b)$; d. h.: Der Umfang eines Rechteckes ist gleich der doppelten Summe von Länge und Breite.

4. In einem Parallelogramme sind die beiden anstoßenden Seiten (a = 7·6 *cm*, $b = 3.a$) gegeben. Berechne den Umfang dieses Parallelogrammes! $U = 2\ (a + b)$.

5. Der Umfang eines Rhombus beträgt $3\frac{1}{5}$ *dm*; wie lang ist jede Seite? ($U = 4s$; $s = \frac{U}{4}$.)

6. Ein rechteckiger Bauplatz von 22·8 *m* Länge und dessen Länge zur Breite im Verhältnisse 7·6 : 6·3 steht, soll eingeplankt werden. *a)* Wieviel Pfähle sind erforderlich, wenn einer von dem anderen 3·4 *m* entfernt ist? *b)* Wieviel Bretter braucht der Zimmermann, wenn jedes durchschnittlich $24\frac{1}{2}$ *cm* breit ist?

§ 117. Unter dem **Flächeninhalte** einer Figur versteht man die Größe der von ihrem Umfange begrenzten Fläche.

Zwei Figuren, die gleichen Flächeninhalt haben, heißen flächengleich.

So wie eine Linie nur durch eine Linie, so kann eine Fläche nur durch eine Fläche gemessen werden. Um daher den **Flächeninhalt** einer Figur zu bestimmen, muß man irgend eine bestimmte Fläche als Einheit annehmen und untersuchen, wie oft dieselbe in der gegebenen Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die Maßzahl der Fläche.

Als Einheit des Flächenmaßes nimmt man ein Quadrat an, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, von welcher dann das Quadrat den Namen erhält. Ein solches Quadrat heißt ein Quadratmeter (m^2), ein Quadratdezimeter (dm^2), ..., je nachdem die Seite ein Meter, Dezimeter . . . . lang ist.

Ein Quadrat, dessen Seite 10 dm beträgt, hat $10\,dm^2 \times 10 = 100\,dm^2$ Inhalt, also ist

$$1\ m^2 = 100\ dm^2.$$

Ebenso folgt:

$1\ dm^2 = 100\ cm^2$ $\qquad$ $1\ km^2 = 1000000\ m^2$

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$ $\qquad$ $1\ \mu m^2 = 100\ km^2.$

Beim Bodenflächenmaße heißt eine Fläche von 100 m^2 ein Ar (a), eine Fläche von 100 Ar ein Hektar (ha).

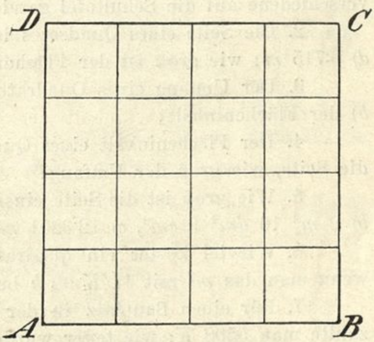
Eine Fläche messen heißt demnach untersuchen, wieviel Quadratmeter, Quadratdezimeter, ... die Fläche enthält. (Maßzahl einer Fläche.)

Die Ausmessung einer Fläche kann mittels des wirklichen Auftragens der Flächeneinheiten nur in wenigen Fällen ausgeführt werden; es ist aber möglich, aus den Maßzahlen der Strecken, von denen die Größe der Figur abhängt, durch Rechnung den Flächeninhalt zu finden. Dazu dienen bestimmte Lehrsätze, die kurz durch Formeln ansgedrückt werden können.

1. Das Quadrat.

§ 118. Es sei eine Seite des Quadrates $ABCD$ (Fig. 144) 4 cm. Teilt man jede Seite in 4 gleiche Teile, deren jeder 1 cm lang ist, und verbindet dann die gegenüberstehenden Teilungspunkte durch gerade Linien, so zerfällt das gegebene Quadrat in lauter kleinere Quadrate, deren jedes 1 cm^2 vorstellt; und zwar enthält der Streifen längs der Seite AB 4 cm^2, der darüber befindliche Streifen ebenfalls 4 cm^2 und der dritte und vierte Streifen auch je 4 cm^2. Man hat also im ganzen 4mal 4 cm^2 = $= 4\,cm^2 \times 4 = 16\,cm^2 = 4^2\,cm^2$.

Fig. 144.



Zeichne ein Quadrat, dessen Seite 5 cm ist, und bestimme auf gleiche Weise, wieviel cm^2 dasselbe enthält!

Der Flächeninhalt eines Quadrates wird gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliziert d. i. zur zweiten Potenz erhebt oder quadriert.

Daher kommt es, daß man auch im Rechnen die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben nennt.

Bezeichnet man die Maßzahl der Seite eines Quadrates mit s und den Flächeninhalt desselben mit f, so ist $\boldsymbol{f = s^2}$.

Heißen S und F die Seite und der Flächeninhalt eines zweiten Quadrates, so ist ebenso $F = S^2$; daher

$$F : f = S^2 : s^2, \text{ d. h.}$$

die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten.

Die Benennung für die Maßzahl des Flächeninhaltes hängt von der Benennung der Maßzahl einer Seite ab; ist z. B. die Seite in Metern gegeben, so wird der Flächeninhalt in Quadratmetern ausgedrückt; ist die Seite des Quadrates in Dezimetern angegeben, so erhält man auch den Flächeninhalt in Quadratdezimetern.

Wenn der Flächeninhalt eines Quadrates bekannt ist und die Länge einer Seite gefunden werden soll, so hat man eine Zahl zu suchen, die mit sich selbst multipliziert den gegebenen Flächeninhalt gibt, d. h. man hat aus der Maßzahl des Flächeninhaltes die Quadratwurzel auszuziehen. Es ist also $s = \sqrt{f}$ z. B. $f = 144\ cm^2$, $s = \sqrt{144} = 12$, also $s = 12\ cm$.

§ 119. Konstruktionsaufgaben.

1. Konstruiere ein Quadrat, dessen Seite $s = 5\ cm$ ist, und beurteile dasselbe nach Umfang und Flächeninhalt!
2. Zeichne ein Quadrat, das die Hälfte eines gegebenen Quadrates ist!
3. Teile ein gegebenes Quadrat in 2, in 4 flächengleiche Teile!

Rechenaufgaben.

1. Machet euch aus Pappendeckel 1 dm^2 mit einer Handhabe und messet damit verschiedene auf die Schultafel gezeichnete Quadrate!

2. Die Seite eines Quadrates ist *a)* 21 *m*, *b)* 5 *m* 4 *dm*, *c)* 3 *m* 5 *dm* 9 *cm*, *d)* 0·715 *m*; wie groß ist der Flächeninhalt, wie groß der Umfang?

3. Der Umfang eines Quadrates ist 23 *m* 2 *dm*; wie groß ist *a)* die Seite *b)* der Flächeninhalt?

4. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist 14 m^2 6 dm^2 25 cm^2; wie groß ist die Seite, wie groß der Umfang?

5. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt *a)* 376·36 dm^2, *b)* 2 m^2 16 dm^2 9 cm^2, *c)* 12·3201 m^2, *d)* 72 *a* 8 m^2 1 dm^2 ist?

6. Wieviel kostet ein quadratischer Bauplatz von 36 *m* 5 *dm* Seitenlänge, wenn man das m^2 mit 11 *K* 90 *h* bezahlt?

7. Für einen Bauplatz in der Form eines Quadrates, dessen Seite 28 *m* ist, zahlte man 5508 *K*; wie teuer wurde 1 m^2 gerechnet?

8. Ein quadratischer Acker kostete 2500 *K*; wieviel *m* mißt eine Seite desselben, wenn 1 *a* zu 16 *K* gerechnet wurde?

9. Die Seite eines Quadrates ist 3 *dm*, die eines zweiten Quadrates 12 *dm*; wie verhalten sich *a)* die Umfänge, *b)* die Flächeninhalte der beiden Quadrate?

10. Ein quadratischer Hof von 12 *m* Seitenlänge soll mit quadratischen Steinplatten von 20 *dm* Umfang gepflastert werden; wieviel solcher Steinplatten sind erforderlich?

11. Welche Seitenlänge hat ein Quadrat, welches so groß ist als zwei Quadrate zusammengenommen, deren Seiten 483 *mm* und 460 *mm* lang sind?

12. Wieviel a hat ein quadratisches Feld, dessen Seite $s = 96\ m\ 8\ dm$?

13. In einem quadratischen Garten soll ringsherum ein 1 m 5 dm breiter Weg angelegt werden; welche Fläche wird dieser haben, wenn die Seite des Quadrates $s = 76\ m$ ist?

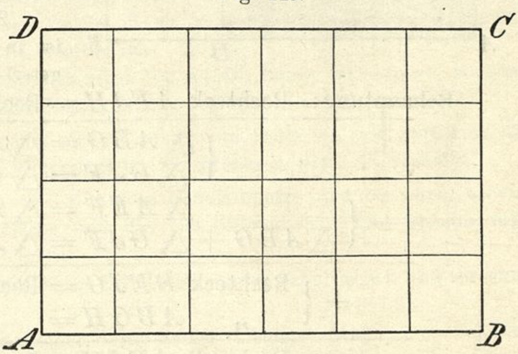
14. Berechne die Seitenlänge eines Quadrates, dessen Flächeninhalt 9 mal so klein (der neunte Teil) ist als jener eines gegebenen mit 8·49 m Seitenlänge!

15. Welchen Druck kann eine quadratische Fußplatte aus Gußeisen von 1 m 4 dm 6 cm Umfang aufnehmen, wenn eine Belastung von 7 q 65 kg auf 1 cm^2 zulässig ist?

2. Das Rechteck.

§ 120. Es sei in dem Rechtecke $ABCD$ (Fig. 145) die Grundlinie $AB = 6\ cm$ und die Höhe $AD = 4\ cm$. Teilt man die AB in 6, die AD in 4 gleiche Teile und zieht zu denselben durch die Teilungspunkte parallele Linien, so ist jedes der dadurch entstehenden Quadrate 1 cm^2 und man hat 4 Streifen solcher Quadrate von je 6 cm^2; der Flächeninhalt des Rechteckes $ABCD$ beträgt daher 4 mal 6 $cm^2 = 6\ cm^2 \times 4 = (6 \times 4)\ cm^2 = 24\ cm^2$.

Fig. 145.



Durch ähnliche Zeichnungen und Schlüsse findet man, daß ein Rechteck, das 7 m lang und 3 m breit ist, $7\ m^2 \times 3 = 21\ m^2$ enthält; daß die Fläche eines Rechteckes, dessen Grundlinie und Höhe 8 dm und 5 dm sind, $(8 \times 5)\ dm^2 = 40\ dm^2$ beträgt.

Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird gefunden, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe (oder die Länge mit der Breite) multipliziert.

Man pflegt diesen Satz kürzer so auszudrücken:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

Hieraus folgt auch:

Zwei Rechtecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

Ist der Flächeninhalt eines Rechteckes und zugleich die Grundlinie bekannt, so findet man die Höhe, indem man den Flächeninhalt durch die Grundlinie dividiert. Ebenso wird die Grundlinie gefunden, indem man den Flächeninhalt durch die Höhe dividiert.

Bezeichnet g die Grundlinie, h die Höhe eines Rechteckes und f den Flächeninhalt desselben, so ist

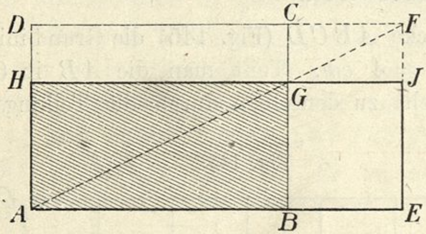
$$f = g \,.\, h;\ g = \frac{f}{h},\ h = \frac{f}{g};\ \text{z. B. } g = 20\ cm,\ h = 8\ cm;$$

$$f = (20 \,.\, 8)\ cm^2 = 160\ cm^2;\ g = \frac{160}{8}\ cm = 20\ cm,\ h = \frac{160}{20}\ cm = 8\ cm.$$

§ 121. Konstruktionsaufgaben. (Verwandlungs- und Teilungsaufgaben.)

Erklärung. Eine Figur in eine andere verwandeln heißt, eine Figur konstruieren, die mit der gegebenen flächengleich ist und gewissen Bedingungen Genüge leistet.

Fig. 146.



1. Zeichne ein Rechteck, wenn dessen Grundlinie $g = 1\ dm$ und dessen Höhe $h = 6\ cm$ gegeben sind! Beurteile dasselbe nach Umfang und Flächeninhalt!

2. Ein Rechteck $ABCD$ (Fig. 146) ist in ein anderes mit gegebener (längerer) Basis zu verwandeln.

Behauptung: Rechteck $AEJH$ = Rechteck $ABCD$

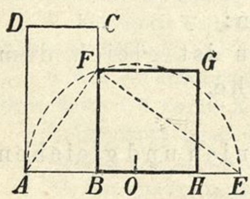
$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \triangle ABG = \triangle AGH \\ \triangle GJF = \triangle GFC \end{array}\right. \\ -\left\{\begin{array}{l} \triangle AEF = \triangle AFD \ldots \\ \triangle ABG + \triangle GJF = \triangle AGH + \triangle GFC \end{array}\right. \\ \hline +\left\{\begin{array}{l} \text{Rechteck } BEJG = \text{Rechteck } HGCD \ldots \\ \quad\ \text{„} \quad\ ABGH = \quad \text{„} \quad\ ABGH \end{array}\right. \\ \hline \text{Rechteck } AEJH = \text{Rechteck } ABCD. \end{array}$$

3. Ein Rechteck $ABCD$ ist in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie kürzer ist als die Grundlinie des gegebenen Rechteckes.

4. Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie hat.

Die Auflösung wie bei der Aufgabe 2 oder 3.

Fig. 147.



5. Ein Rechteck $ABCD$ (Fig. 147) in ein Quadrat zu verwandeln.

Verlängere die kleinere Seite AB bis E, so daß $BE = BC$ wird, beschreibe über AE als Durchmesser einen Halbkreis, der die Seite BC in F schneidet, und konstruiere über BF das Quadrat $BFGH$; dieses ist dann dem gegebenen Rechtecke gleich. Denn zieht man AF und EF, so ist AFE als Winkel im Halbkreise ein rechter, daher in dem rechtwinkligen Dreiecke AFE die Normale FB die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten AB und BE der Hypotenuse. Man hat also $AB : FB =$

$= FB : BE$ oder $AB : FB = FB : AD$, daher $AB \times AD = FB^2$, d. i. Rechteck $ABCD =$ Quadrat $BFGH$.

6. Ein Rechteck in 2, 3, 4 ... flächengleiche Teile zu teilen, *a*) durch Teilung der Basis, *b*) durch Teilung der Höhe. ($f = g \times h$.) Begründung!

7. Ein Quadrat in 5 gleiche Teile zu teilen. Begründung!

8. Ein Rechteck (Quadrat) soll durch Teilungslinien || *a*) zur Basis, *b*) zur Höhe im Verhältnisse 2 : 5 (1 : 3) geteilt werden. Begründung!

Rechenaufgaben.

1. Berechne den Flächeninhalt und den Umfang folgender Rechtecke:

a) Länge	9·2 *m*,	Breite 5·8 *m*;
b) „	12 *m* 3 *dm*,	„ 9 *m* 2 *cm*;
c) Grundlinie	3·215 *m*,	Höhe 1·064 *m*.

2. Der Umfang eines Rechteckes beträgt 87 *m* 4 *dm*, die kürzere Seite 18 m 3 *dm*; wie groß ist *a*) die längere Seite, *b*) der Flächeninhalt?

3. Ein Spiegel mit Rahmen ist 5 *dm* 8 *cm* breit und 8 *dm* 2 *cm* hoch; wie groß ist der Umfang? Wie groß ist die Spiegelfläche, wenn der Rahmen 8 *cm* breit ist?

4. Längs der Hecke eines Gartens, welcher 33 *m* lang und 21 *m* breit ist, werden ringsum Maulbeerbäume, welche 3 *m* voneinander abstehen, gepflanzt; wieviel Maulbeerbäume sind dazu erforderlich?

5. Der Umfang eines Rechteckes mißt 102 *m*, die Länge ist doppelt so groß als die Breite; wie groß ist *a*) die Länge, *b*) die Breite, *c*) der Flächeninhalt?

6. Ein rechteckiger Acker hat einen Umfang von 163·2 *m*; wie groß sind die Seiten desselben, wenn sich die kleinere Seite zur größeren wie 3 : 5 verhält?

7. Miß die Länge, Breite und Höhe des Schulzimmers und berechne, wieviel Flächeninhalt der Boden, die Decke und die vier Wände (Tür und Fenster mitgerechnet) haben!

8. Miß die Länge und Breite eurer Schultafel, eueres Schultisches und berechne den Flächeninhalt!

9. Wie groß ist die Fläche einer Seite deines Übungsheftes, deines Zeichenblattes, deines Reißbrettes?

10. Die Seiten eines Rechteckes sind 9 *dm* und 6 *dm*, die Seiten eines zweiten Rechteckes sind doppelt so groß; wie verhalten sich *a*) die Umfänge, *b*) die Flächeninhalte der beiden Rechtecke?

11. Berechne die Höhe der Rechtecke von

a) 9 m^2	Flächeninhalt und	3·6 *m*	Grundlinie;
b) 46·92 dm^2	„ „	0·92 *m*	„

12. Berechne die Grundlinie der Rechtecke von

a) 24 m^2	Flächeninhalt und	3·2 *m*	Höhe;
b) 26 dm^2 55 cm^2	„ „	450 *mm*	„

13. Wie groß ist die Fläche einer Tischplatte, deren Länge 1·2 *m* und deren Breite $\frac{5}{8}$ von der Länge beträgt?

14. Wieviel *a* hat ein rechteckiger Garten von 38 *m* Länge und 32 *m* Breite?

15. Ein Acker enthält 71·74 *a*, seine Länge ist 425·6 *m*; wie groß ist seine Breite?

16. Jemand vertauscht einen Acker, der 746 m^2 20 dm^2 Flächeninhalt hat, gegen einen anderen von gleichem Inhalte, der 18 *m* 2 *dm* breit ist; wie lang muß dieser Acker sein?

17. Jemand kauft einen Bauplatz in der Form eines Rechteckes, 34·4 *m* lang und 19·2 *m* breit, und bezahlt das m^2 zu $8\frac{1}{2}$ *K*; wieviel kostet der Bauplatz?

18. Die Fußbodenfläche eines Zimmers ist 4·5 *m* lang und 3·5 *m* breit; wieviel Bretter braucht man, um den Fußboden dieses Zimmers zu dielen, wenn jedes Brett 2·5 *m* lang und 2·1 *dm* breit ist?

19. Ein Acker ist 116 *m* lang und 18·5 *m* breit; wieviel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf ein *a* $2\frac{1}{2}$ *l* Weizen aussät?

20. Wieviel kostet die Verglasung von 8 Fenstern, deren jedes im Lichten 0·9 *m* breit und 1·5 *m* hoch ist, wenn man für 1 m^2 Verglasung 5 *K* 60 *h* rechnet?

21. Durch eine Wiese, die 43 *m* lang und 12·3 *m* breit ist, wird der Länge nach ein 2 *m* breiter Graben gelegt; wieviel Flächeninhalt enthält noch die Wiese?

22. Ein Fußboden von 7·5 *m* Länge und 6·4 *m* Breite soll mit harten Brettchen (Parkettbrettchen) belegt werden; wieviel wird dafür der Tischler verlangen, wenn er 1 m^2 Belegung mit $8\frac{1}{2}$ *K* berechnet?

23. Zeichne mit Hilfe eines verjüngten Maßstabes ein Rechteck, das 2 *m* 9 *dm* breit ist und denselben Inhalt hat wie ein Quadrat, dessen Seite 5 *m* 8 *dm* ist!

24. Ein Quadrat ist flächengleich mit einem Rechtecke von 54 *m* Länge und 24 *m* Breite; um wieviel ist der Umfang des Quadrates kleiner als der Umfang des Rechteckes?

25. Ein Hof von 18 *m* Länge und 12 *m* Breite soll mit quadratischen Steinplatten von 3 *dm* Seitenlänge belegt werden; *a)* wieviel Platten sind erforderlich, *b)* wie hoch kommt die Pflasterung, das m^2 zu $5\frac{3}{4}$ *K* gerechnet?

26. 6 größere Türen, jede 2·3 *m* hoch und 1·3 *m* breit, und 4 kleinere Türen, jede 1·9 *m* hoch und 1 *m* breit, sollen von innen und außen mit Ölfarbe angestrichen werden; wie teuer kommt der Anstrich, wenn das m^2 1 *K* 70 *h* kostet?

27. Der Umfang eines Rechteckes, dessen Seiten im Verhältnisse 8 : 13 (Goldener Schnitt!) stehen, beträgt 15 *dm* 9·9 *cm*. Wie lang ist die Seite eines mit diesem Rechtecke flächengleichen Quadrates?

28. Was kostet die Grundeinlösung für eine 24 *km* lange und durchschnittlich $5\frac{3}{4}$ *m* breite Bahnanlage, wenn für 3·59665 m^2 (= 1 Quadrat-Klafter) 1 *K* 16 *h* vereinbart werden?

29. Ein Festsaal von $42\frac{3}{4}$ *m* Länge faßt, wenn man für 1 Person 1 m^2 Fläche rechnet, 750 Personen; wie breit ist er?

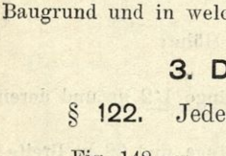
30. Wieviel Zinkplatten à $1\frac{1}{4}$ m^2 braucht ein Spengler zur Eindeckung eines Satteldaches von 18 *m* 6 *dm* Länge und $8\frac{1}{2}$ *m* Breite, wenn bei 20 Platten je eine auf Falz und Verschnitt einzurechnen ist?

31. „Das Rathaus in Wien ist auf einem Rechtecke von 154 *m* Länge und 124 *m* Breite, das k. u. k. Arsenal in Wien auf einem Rechtecke von 689 *m* Länge und 480 *m* Breite, jedes der beiden k. k. Hofmuseen zu Wien auf einem Rechtecke von 168·79 *m* Länge und 63 *m* 86 *cm* Breite erbaut. Wieviel *ha* und *a* beträgt der Baugrund und in welchem Verhältnisse stehen die Flächen zueinander?"

3. Das schiefwinklige Parallelogramm.

§ 122. Jedes schiefwinklige Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 148) kann in ein Rechteck von derselben Grundlinie und derselben Höhe verwandelt werden, indem man das rechtwinklige Dreieck BCE an die Stelle von ADF überträgt. Um den Inhalt des Rechteckes zu finden, muß man die Grundlinie mit der Höhe multiplizieren; daher ist auch der **Flächeninhalt eines**

Fig. 148.



schiefwinkligen Parallelogramms gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

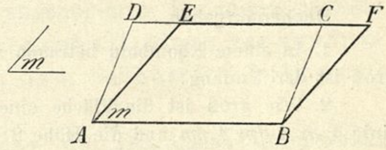
$$f = g \cdot h;\ g = \frac{f}{h},\ h = \frac{f}{g}.$$

Je zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

§ 123. Konstruktionsaufgaben.

1. Ein gegebenes Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 149) in ein anderes zu verwandeln, das an der Grundlinie einen Winkel m enthält.

Fig. 149.



Man konstruiere den Winkel $BAE = m$ und ziehe $BF \parallel AE$, dann ist, wie sich leicht zeigen läßt, das Parallelogramm $ABFE = ABCD$.

2. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

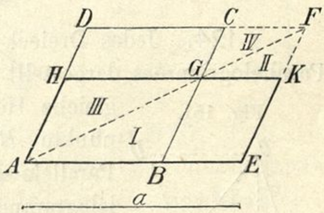
Die Auflösung stimmt mit jener der vorhergehenden Aufgabe überein, wenn man in derselben den Winkel $m = 90^0$ annimmt.

3. Ein Rechteck ist in ein schiefwinkliges Parallelogramm zu verwandeln, das an der Grundlinie einen Winkel n enthält.

4. Ein gegebenes Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 150) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat. ($a > g$, $a < g$.)

Man mache $AE = a$, verlängere DC und ziehe $EF \parallel AD$ und durch A und F eine Gerade, welche die BC in G schneidet. Zieht man nun durch G eine Parallele zu AE, welche die AD in H und die EF in K trifft, so ist $AEKH$ das verlangte Parallelogramm.

Fig. 150.



Es ist nämlich $\triangle AFE \cong \triangle AFD$. Nimmt man daher von dem ersten Dreiecke die Dreiecke I und II und von dem zweiten die mit jenen kongruenten Dreiecke III und IV weg, so müssen in beiden Fällen auch die Reste, d. s. die Parallelogramme $GBEK$ und $HGCD$, gleich sein. Setzt man nun zu dem Parallelogramm $ABGH$ einmal $GBEK$ und dann $HGCD$ hinzu, so müssen auch die Summen gleich sein, also Parallelogramm $AEKH = ABCD$.

5. *a)* Verwandle ein gegebenes Rhomboid unter Beibehaltung der längeren Seite in einen Rhombus! *b)* Verwandle ein schiefwinkeliges # in ein Quadrat!

6. Ein Rechteck in einen Rhombus verwandeln!

7. Ein Parallelogramm in mehrere Teile so zu teilen, daß alle Teilungslinien mit einer Seite parallel sind.

Man teile die dieser Seite anliegenden Gegenseiten in die verlangte Zahl gleicher Teile und ziehe durch die Teilungspunkte gerade Linien; die dadurch entstehenden Parallelogramme haben gleiche Grundlinien und dieselbe Höhe und sind daher einander gleich.

8. Ein schiefwinkliges Parallelogramm ist in dem Verhältnisse 2 : 3 (1 : 2 : 3, 3 : 7, 2 : 3 : 4) so zu teilen, daß alle Teilungslinien mit einer Seite parallel sind. (Begründung!)

Rechenaufgaben.

1. In einem Rhomboid betragen zwei anstoßende Seiten 38 *m* und 23 *m*; wie groß ist der Umfang?

2. Wie groß ist die Fläche eines Parallelogrammes, in welchem die Grundlinie 4 *m* 3 *dm* 4 *cm* und die Höhe 2 *m* 3 *dm* 2 *cm* beträgt?

3. In einem Rhomboid ist
die Grundlinie *a)* 108 *dm*, *b)* 17·3 *m*, *c)* 8 *m* 5 *dm* 1 *cm*;
die Höhe *a)* 64 *dm*, *b)* 9·3 *dm*, *c)* 7 *m* 8 *cm*;
wie groß ist der Flächeninhalt?

4. Der Flächeninhalt eines schiefen Parallelogrammes beträgt 1890 dm^2, die Höhe ist $3\frac{1}{2}$ *m*; wie groß ist die Grundlinie?

5. Bestimme die Höhe eines Rhomboids, dessen Flächeninhalt 0·3179 m^2 und dessen Grundlinie 7·48 *dm* ist!

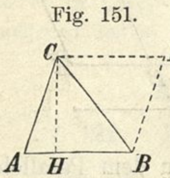
6. Ein Acker hat die Gestalt eines Rhomboids von 8 *ha* 32 *a* Inhalt und 225 *m* Höhe; wie groß ist die Grundlinie?

7. Von einer Wiese, welche die Form eines Rhomboides hat, worin die Grundlinie 66·4 *m* und die Höhe 45·2 *m* beträgt, wird ein Stück von 14 *m* Höhe parallel mit der Grundlinie abgeschnitten und zu Ackerland gemacht; *a)* wie groß war die Wiese, *b)* wie groß ist das übrig bleibende Stück derselben?

4. Das Dreieck.

§ 124. Jedes Dreieck ABC (Fig. 151) kann als die Hälfte eines Parallelogrammes dargestellt werden, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat; man braucht nur durch zwei Eckpunkte B und C mit den gegenüberliegenden Seiten Parallele zu ziehen. Um den Flächeninhalt des Parallelogramms zu erhalten, muß man die Grundlinie mit der Höhe multiplizieren; zur Bestimmung der Dreiecksfläche wird man daher auch die Grundlinie mit der Höhe multiplizieren, jedoch von diesem Produkte nur die Hälfte nehmen.

Fig. 151.



Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

Zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

Wird der doppelte Flächeninhalt eines Dreieckes durch die Grundlinie dividiert, so erhält man die Höhe; wird er durch die Höhe dividiert, so erhält man die Grundlinie.

Bezeichnet g die Grundlinie, h die Höhe und f den Flächeninhalt eines Dreieckes, so ist

$$f = \frac{g.h}{2};\ g = \frac{2f}{h},\ h = \frac{2f}{g};\ \text{z. B. } AB = 14\ mm,$$

$$CH = 12\ mm,\ F = \frac{14.12}{2} = 7.12 = 14.6 = \frac{168}{2} = 84;\ F = 84\ mm^2.$$

§ **125.** Zusätze. 1. In einem rechtwinkligen Dreiecke wird gewöhnlich eine Kathete als Grundlinie angenommen, die andere Kathete stellt dann die Höhe vor. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist daher gleich dem halben Produkte der beiden Katheten.

2. In jedem gleichseitigen # stehen die Diagonalen aufeinander normal; daher kann jedes solche # in zwei $\cong$ Dreiecke zerlegt werden, deren gemeinschaftliche Grundlinie die eine Diagonale ist und deren Höhen die Hälften der anderen Diagonale sind. Daraus folgt:

Der Flächeninhalt eines Rhombus ist gleich dem halben Produkte der beiden Diagonalen.

Wie wird dieser Satz, auf das Quadrat angewendet, lauten?

Konstruktionsaufgaben.

§ **126.** 1. Ein ungleichseitiges Dreieck ABC (Fig 152) in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Man halbiere die AB in D, ziehe $DE \perp AB$ und $CE \parallel AB$; verbindet man den Durchschnittspunkt E mit A und B, so ist ABE das verlangte gleichschenklige Dreieck.

Fig. 152.

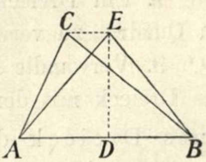
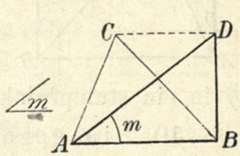


Fig. 153.



Warum muß $\triangle\ ABE$ flächengleich sein dem $\triangle\ ABC$?

2. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 153) in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel m enthält.

$$a)\ \sphericalangle\, m < 90^0;\ b)\ \sphericalangle\, m = 90^0;\ c)\ \sphericalangle\, m > 90^0.$$

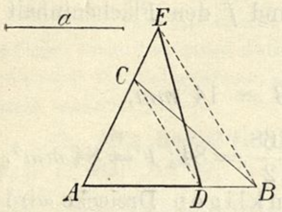
Man konstruiere den Winkel $BAD = m$ und ziehe $CD \parallel AB$; zieht man noch DB, so ist ABD das verlangte Dreieck.

Merke: Dreiecke, die dieselbe Grundlinie haben und deren Scheitel in einer Parallelen zur Grundlinie liegen, sind flächengleich.

$$(f = \frac{g.h}{2} = f'.)$$

3. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 154) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

Fig. 154.



$(a < g,\ a > g.)$

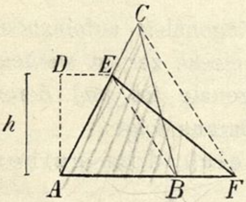
Man mache $AD = a$, ziehe DC und parallel damit BE, welche die verlängerte AC in E trifft; ADE ist nun das verlangte Dreieck. Denn es ist

$$\begin{cases} \triangle ACD = ACD, \\ \triangle CDE = CDB, \text{ warum?} \end{cases}$$

$$\text{Daher } \triangle ACD + CDE = \triangle ACD + CDB,$$
$$\text{oder } \triangle ADE = \triangle ABC.$$

4. Ein Dreieck ABC (Fig. 155) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Fig. 155.



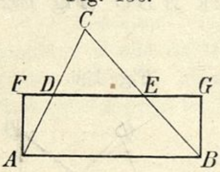
Man errichte $AD = h$ normal auf AB, ziehe $DE \parallel AB$, dann die EB und damit parallel die CF. Verbindet man nun E und F durch eine Strecke, so ist $\triangle AEF = \triangle ABC$. $(h < H,\ h > H.)$

Beweis wie bei der Aufgabe 3.

5. Ein Dreieck ABC (Fig. 156) in ein Rechteck zu verwandeln.

Man halbiere die Seiten AC und BC in D und E, ziehe durch diese Punkte eine Gerade und errichte in A und B die Normalen AF und BG; dann ist $ABGF$ das gesuchte Rechteck.

Fig. 156.



6. Ein Dreieck in ein # mit einem gegebenen Winkel m zu verwandeln.

7. Ein Dreieck *a)* in einen Rhombus, *b)* in ein Quadrat zu verwandeln.

9. Verwandle ein Rechteck *a)* in ein Dreieck, *b)* in ein stumpfwinkliges Dreieck mit dem Winkel $n = 135^0$!

10. Ein gegebenes Dreieck durch gerade Linien, die durch einen Eckpunkt gehen, in mehrere gleiche Teile zu teilen.

Teile die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite in soviele gleiche Teile, als verlangt werden, und verbinde die Teilungspunkte durch Strecken mit jenem Eckpunkte!

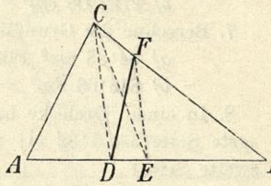
Wäre das gegebene Dreieck in Teile zu teilen, die untereinander in einem gegebenen Verhältnisse stehen, so müßte man auch die Dreieckseite nach dem gegebenen Verhältnisse teilen und weiter wie vorhin verfahren.

11. Ein gegebenes Dreieck von einem Eckpunkte aus durch Gerade *a)* in die Hälfte, *b)* in 3 gleiche Teile, *c)* nach dem Verhältnisse 3 : 4, *d)* nach dem Verhältnisse 2 : 3 : 4 $(\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4})$ zu teilen.

12. Ein Dreieck ABC (Fig. 157) von einem Punkte einer Seite, z. B. von D aus, in zwei gleiche Teile zu teilen.

Man halbiere die AB in E und ziehe CD und CE, so ist ACD um CDE kleiner als die Hälfte von ABC.

Fig. 157.

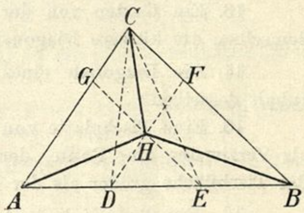


Zieht man daher $EF \parallel CD$ und dann die DF, so ist $\triangle CDF = \triangle CDE$, daher $ADFC = \triangle ACE$, also $ADFC$ die eine Hälfte und $\triangle BDF$ die andere Hälfte des Dreieckes ABC.

13. Ein Dreieck in vier kongruente Dreiecke zu teilen! Verbinde die Halbierungspunkte der Seiten! (Begründung!)

14. Ein Dreieck ABC (Fig. 158) in drei gleiche Teile so zu teilen, daß die Teilungslinien von den drei Eckpunkten ausgehen und in einem gemeinschaftlichen Punkte innerhalb des Dreieckes zusammentreffen.

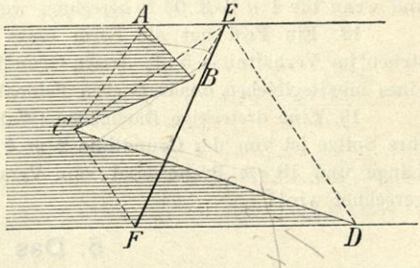
Fig. 158.



Man teile eine Seite AB in den Punkten D und E in drei gleiche Teile und ziehe CD und CE; dann sind die Dreiecke ACD, DCE, BCE gleich. Zieht man nun $DF \parallel AC$ und $EG \parallel BC$, so sind die vom Durchschnittspunkte H aus gezogenen Geraden AH, BH, CH die gesuchten Teilungslinien. Denn es ist $\triangle ACH = \triangle ACD = \frac{1}{3} \triangle ABC$, ferner $\triangle BCH = \triangle BCE = \frac{1}{3} \triangle ABC$; daher muß auch der Rest, nämlich das $\triangle ABH$ ein Drittel von $\triangle ABC$ sein.

15. Die unregelmäßige Grenze $ABCD$ (Fig. 159) zwischen zwei Grundstücken soll in eine geradlinige verwandelt werden, so daß der Flächeninhalt derselbe bleibt. (Begründung!)

Fig. 159.



Rechenaufgaben.

1. Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen Seiten 38 *m* 7 *dm*, 25 *m* 4 *cm*, 31 *m* 5 *dm* 9 *cm* lang sind?

2. Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes ist *a)* 2·3 *m*, *b)* 1 *m* 5 *dm* 2 *cm*, *c)* $97\frac{3}{4}$ *cm*; wie groß ist der Umfang?

3. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Umfang 10 *m* 3 *dm* 5 *cm* beträgt?

4. Berechne den Flächeninhalt folgender Dreiecke:

a) Grundlinie 0·425 *m*, Höhe 2·84 *dm*;

b) „ 1 *m* 4 *dm* 2 *cm*, „ 5 *dm* 9 *cm*!

5. Ein Stück Land von der Gestalt eines Dreieckes hat 108 *m* zur Grundlinie und 72 *m* zur Höhe; wieviel ist es wert, wenn das *ha* zu 2030 K gerechnet wird?

6. Berechne die Höhe der Dreiecke von

a) 58·96 dm^2 Flächeninhalt und 1·34 *m* Grundlinie;

b) 2722·08 cm^2 „ „ 856 *mm* „ !

7. Berechne die Grundlinie der Dreiecke von

a) 34·83 cm^2 Flächeninhalt und 1·032 *dm* Höhe;

b) 843·66 dm^2 „ „ 3·87 *m* „ !

8. In einem Dreiecke betragen zwei Seiten 2·52 *m* und 1·89 *m*, die Höhe auf die erste Seite ist 1·32 *m*; wie groß ist *a)* der Flächeninhalt, *b)* die Höhe auf die zweite Seite?

9. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete 29 *m* 3 *dm*, die andere 18 *m* 4 *dm*; wie groß ist der Inhalt?

10. In einem rechtwinkligen Dreiecke, das 20 m^2 72 dm^2 enthält, ist eine Kathete 7 *m* 4 *dm*; wie groß ist die zweite Kathete?

11. Die Seite eines Quadrates ist 36 *mm*. Zeichne ein rechtwinkliges, dem Quadrate flächengleiches Dreieck, dessen eine Kathete 54 *mm* ist!

12. Wie groß ist der Inhalt einer Raute, deren Diagonalen 2·26 *m* und 1·75 *m* betragen?

13. Ein Garten von der Form eines Rhombus mißt 2 *a*; wie groß ist in demselben die kürzere Diagonale, wenn die längere 25 *m* beträgt?

14. Die Diagonale eines Quadrates ist 3 *m* 4 *dm* 2 *cm*; wie groß ist der Inhalt desselben?

15. Eine Tischplatte von 12 *dm* Länge und 9 *dm* Breite enthält in der Mitte als Verzierung eine Raute, deren Diagonalen 4 *dm* und 3 *dm* sind; um wieviel ist die Tischfläche größer als der Inhalt dieser Raute?

16. Ein Turmdach besteht aus 4 gleichschenkligen Dreiecken. Wieviel m^2 Blech braucht man zu dessen Deckung, wenn die Grundlinie eines solchen Dreieckes 2 *m* 2 *dm* und die Höhe 4 *m* 5 *dm* beträgt und wenn für Verschnitt und Falze 6% hinzugerechnet werden?

17. Welches Erträgnis bringt ein Acker von der Form einer Raute, wenn die Abstände je zweier gegenüberliegender Ecken 186 *m* und 151 *m* 6 *dm* betragen und wenn für 1 *a* 3 K 96 h berechnet werden?

18. Ein Feld hat die Form eines Dreieckes; dessen Grundlinie und Höhe stehen im Verhältnisse 5 : 3, dessen Grundlinie mißt 975 *m*. Wie groß ist die Seite eines inhaltsgleichen quadratischen Feldes?

19. Eine dreieckige Dachfläche (Walm genannt) mißt an der Grundlinie $6\frac{4}{5}$ *m*, ihre Spitze ist von der Grundlinie 2 *m* 4 *dm* entfernt. Wieviel Bretter von $3\frac{3}{4}$ *m* Länge und 18 *cm* Breite sind zum Verschalen notwendig, wenn $4\frac{3}{4}$% Verschnitt gerechnet wird?

5. Das Trapez.

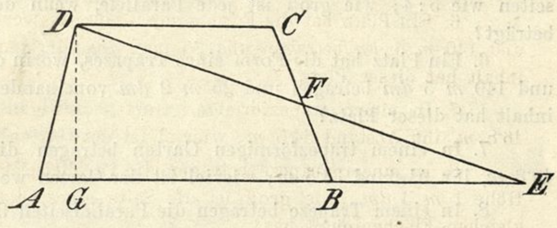
§ 127. Um den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ (Fig. 160) zu erhalten, verlängert man die Grundlinie AB um $BE = DC$ und verbindet D mit E. Wegen der Kongruenz der beiden Dreiecke DCF und BEF kann man das eine für das andere setzen. Es ist demnach das $\triangle AED$ gleich dem gegebenen Trapeze $ABCD$ und die Fläche des $\triangle AED$ gleich der Grundlinie multipliziert mit der halben Höhe. Daher

$$F=\frac{AE\times DG}{2}=\left(\frac{AB+BE}{2}\right)DG=\left(\frac{AB+DC}{2}\right)DG$$ oder kurz,

wenn man die untere Parallele mit a, die obere mit b und die Höhe mit h bezeichnet,

$$f=\left(\frac{a+b}{2}\right)h,$$ d. h.:

Fig. 160.



Der Flächeninhalt eines Trapezes wird gefunden, indem man die halbe Summe der beiden parallelen Seiten mit der Höhe des Trapezes multipliziert; oder: der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus der halben Summe der parallelen Seiten und der Höhe.

Schneidet euch die Fig. 160 aus Pappendeckel aus und bringet das $\triangle DCF$ in die Lage des Dreieckes BEF!

§ 128. Konstruktionsaufgaben.

1. Verwandle ein ungleichschenkliges Trapez *a)* in ein gleichschenkliges, *b)* in ein rechtwinkliges Trapez!

2. Verwandle ein Trapez in ein flächengleiches Dreieck u. zw. in ein *a)* gleichschenkliges, *b)* rechtwinkliges, *c)* stumpfwinkliges!

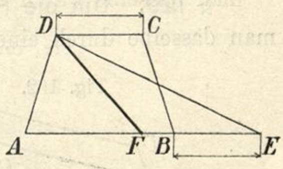
3. Ein Trapez in ein Rechteck *a)* von gleicher Höhe, *b)* von größerer (kleinerer) Höhe zu verwandeln.

4. Ein Trapez in ein Quadrat zu verwandeln.

5. **Ein Trapez in mehrere gleiche Teile zu teilen, so daß die Teilungslinien die beiden parallelen Seiten schneiden.**

Durch die Teilung der Parallelseiten in gleiche Teile.

Fig. 161.



6. **Ein Trapez $ABCD$ (Fig. 161) von einem Eckpunkte D aus in zwei gleiche Teile zu teilen.**

Man verlängere die größere Parallelseite so, daß $BE=DC$ ist; dann ist $\triangle AED=$ Trapez $ABCD$. Halbiert man nun AE in F und zieht DF, so ist $\triangle AFD=\frac{1}{2}AED=\frac{1}{2}ABCD$, daher auch $BCDF=\frac{1}{2}ABCD$.

Rechenaufgaben.

1. In einem Trapeze betragen die parallelen Seiten 36 *m* und 27 *m*, die Höhe ist 18 *m*; wie groß ist der Flächeninhalt?

2. Berechne den Flächeninhalt folgender Trapeze:
   a) Parallelseiten 5 *m* und 60 *dm*, Höhe 400 *cm*;
   b) „ 3·5 *m* und 28 *dm*, Höhe 1·6 *m*?
   c) „ 2 *m* 54 *cm* und 5 *m* 3 *dm* 9 *cm*, Höhe 4 *m* 2·8 *dm*!

3. In einem Trapeze, dessen Parallelseiten $5\frac{1}{2}$ *m* und $4\frac{2}{5}$ *m* sind, beträgt der Flächeninhalt 0 2079 *a*; wie groß tis der Abstand der beiden parallelen Seiten?

4. Ein Trapez von 105 *cm* Höhe hat 2·6565 m² Flächeninhalt; wenn nun die eine Parallelseite 2·75 *m* beträgt, wie groß ist die andere?

5. In einem Trapeze, dessen Höhe 28 *mm* ist, verhalten sich die zwei Parallelseiten wie 5 : 4; wie groß ist jede Parallele, wenn der Flächeninhalt 0·1134 *dm*² beträgt?

6. Ein Platz hat die Form eines Trapezes, worin die Parallelseiten 185 *m* 5 *dm* und 140 *m* 5 *dm* betragen und 25 *m* 2 *dm* voneinander abstehen; welchen Flächeninhalt hat dieser Platz?

7. In einem trapezförmigen Garten betragen die Parallelseiten 58·4 *m* und 46·8 *m*, ihr Abstand 34·5 *m*; wieviel ist der Garten wert, das *a* zu 68 K gerechnet?

8. In einem Trapeze betragen die Parallelseiten 3 *m* 3 *dm* und 1 *m* 5 *dm*, die Höhe 1 *m* 3 *dm*; wie groß ist die Seite eines Quadrates, das mit diesem Trapeze gleichen Flächeninhalt hat?

9. Das Sitzbrett eines Küchenstuhles hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes, in welchem die beiden parallelen Seiten 32 *cm* und 42 *cm* lang sind und 43 *cm* voneinander abstehen; wie groß ist die Sitzfläche?

10. In einem rechtwinkligen Trapeze haben die beiden Parallelen eine Länge von $37\frac{1}{2}$ *m* und $25\frac{3}{4}$ *m*, die Höhe mißt $18\frac{1}{8}$ *m*; wieviel *m*² enthält dieses Trapez?

11. Ein 16 *a* 8 *m*² großer Garten hat die Form eines Trapezes. Wie groß ist der Abstand der beiden Parallelseiten, wenn die eine 64 *m*, die andere 38 *m* mißt? $\left(h = \frac{2f}{a+b}.\right)$

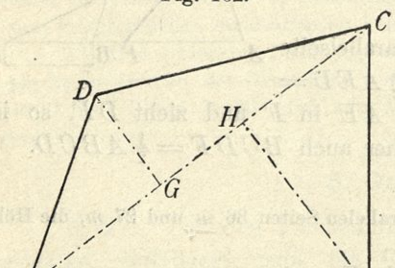
12. Wie groß ist der Querschnitt einer hölzernen Eisenbahnschwelle von der Form eines gleichschenkligen Trapezes, dessen Parallelseiten 18 *cm* und 26 *cm* Länge und 15 *cm* gegenseitigen Abstand haben?

13. Ein Bauplatz von der Form eines Trapezes wurde um 6123 K verkauft. Die Länge der Parallelseiten betrug $25\frac{1}{4}$ *m* und $34\frac{3}{8}$ *m*, ihr Abstand $25\frac{1}{2}$ *m*. Wieviel wurde für 1 *m*² gerechnet?

Das Trapezoid.

§ 129. Um die Fläche eines Trapezoides zu berechnen, zerlegt man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, deren Flächen zusammengenommen den Flächeninhalt des Trapezoides bilden. Bezeichnen wir in der Fig. 162 AC mit d, DG mit h_1 und BH mit h_2, so ist

Fig. 162.

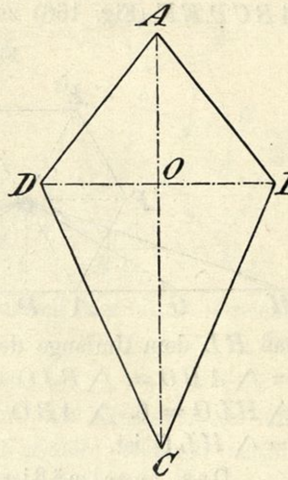


$$f = \frac{d \cdot h_1}{2} + \frac{d \cdot h_2}{2} = \frac{d(h_1 + h_2)}{2}.$$

Für die besondere Art des Trapezoides, die man Deltoid nennt (Fig. 163), muß also auch die Formel gelten $f = \frac{AC(DO + OB)}{2}$. Weil aber $DO + OB$ die andere Diagonale darstellt, so erhalten wir die Regel: Der Flächeninhalt eines Deltoides ist gleich dem halben Produkte der beiden Diagonalen.

Was lernt ihr daraus, wenn ihr diese Formel mit der für den Rhombus S. 89 aufgestellten vergleicht?

Fig. 163.



§ 130. **Konstruktionsaufgaben.**

1. Ein Trapezoid in ein Dreieck zu verwandeln. (Fig. 164.)

2. Ein Trapezoid *a)* in ein Rechteck, *b)* in ein Quadrat zu verwandeln.

3. Ein Deltoid *a)* in ein Dreieck, *b)* in ein Rechteck, *c)* in ein Quadrat zu verwandeln.

4. Ein Trapezoid in beliebig viele gleiche Teile zu teilen.

Ziehe eine Diagonale, teile dieselbe in die verlangte Anzahl gleicher Teile und ziehe von den Teilungspunkten gerade Linien zu den der Diagonale gegenüberliegenden Eckpunkten!

5. Halbiere ein Trapezoid von irgend einem Eckpunkte aus (Fig. 165)!

Rechenaufgaben.

1. Zeichnet ein beliebiges Trapezoid und berechnet seine Fläche!

2. In einem Trapezoide beträgt die eine Diagonale 42·5 *m*, die beiden anderen Eckpunkte des Viereckes stehen von der Diagonale 137·5 *dm* und 243 *cm* ab; wie groß ist die Fläche dieses Trapezoides?

3. Ziehet in einem Trapezoide eine Diagonale und auf diese von den beiden anderen Eckpunkten Normale, messet diese 3 Strecken und berechnet den Flächeninhalt: dann verfahret ebenso mit der zweiten Diagonale und vergleichet die beiden Ergebnisse!

Fig. 164.

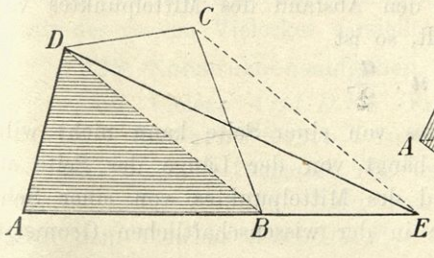
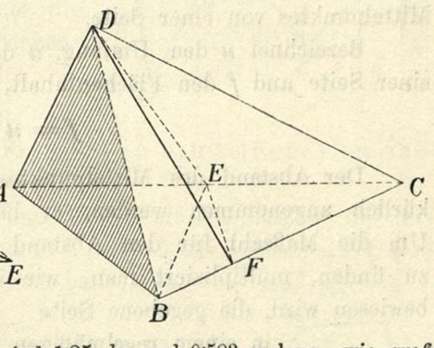


Fig. 165.



4. Die Diagonalen eines Deltoides sind 1·25 *dm* und 0·583 *m* lang; wie groß ist der Flächeninhalt?

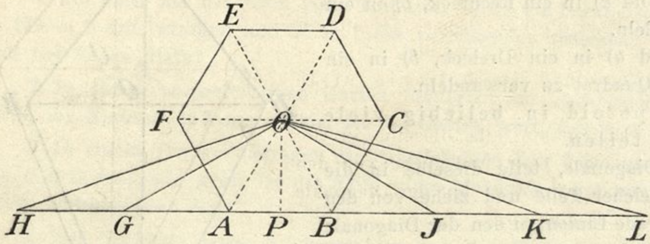
5. Ein Knabe will sich aus einem Zeichenblatte von $6\frac{3}{4}$ *dm* Länge und $5\frac{1}{2}$ *dm* Breite einen deltoidischen Drachen schneiden, welcher $6\frac{1}{4}$ *dm* lang und $5\frac{1}{4}$ *dm* breit sein soll; wieviel Papier fällt ab?

6. Auf dem Deckel einer Kassette sind um den Mittelpunkt acht deltoidische Flächen von 3·5 *cm* Länge und 1·7 *cm* Breite mit Karlsbader Sprudelsteinen eingelegt; wie groß sind diese eingelegten Flächen zusammen?

6. Das Vieleck.

§ **131.** Um die Fläche eines regelmäßigen Vieleckes $ABCDEF$ (Fig. 166) zu finden, zieht man von dessen Mitte zu allen Eckpunkten gerade Linien; es ist $ABCDE = 6 . ABO$; warum? Trägt man nun auf der Verlängerung von AB die übrigen Seiten des Vieleckes auf, so

Fig. 166.



daß HL dem Umfange desselben gleich ist, so ist $\triangle HGO = \triangle GAO = \triangle ABO = \triangle BJO = \triangle JKO = \triangle KLO$ (§ 124 und § 126), also $\triangle HLO = 6 . \triangle ABO$. Daraus folgt, daß das Sechseck $ABCDEF = \triangle HLO$ ist.

Das regelmäßige Vieleck ist einem Dreiecke gleich, das den Umfang des Vieleckes zur Grundlinie und den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite des regelmäßigen Vieleckes zur Höhe hat.

Da nach § 124 der Flächeninhalt des Dreieckes HLO, $f = \frac{HL \times OP}{2}$, so gilt der Satz:

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Umfange multipliziert mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Bezeichnet u den Umfang, a den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite und f den Flächeninhalt, so ist

$$f = u \cdot \frac{a}{2}.$$

Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt von der Länge der Seite ab. Um die Maßzahl für den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite zu finden, multipliziert man, wie in der wissenschaftlichen Geometrie bewiesen wird, die gegebene Seite

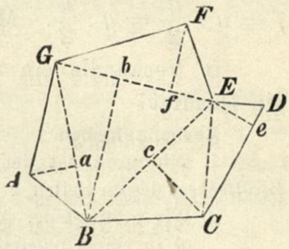
in einem regelmäßigen Fünfecke mit 0·68819,
„ „ „ Sechsecke „ 0·86603,
„ „ „ Achtecke „ 1·20711,
„ „ „ Zehnecke „ 1·53884,
„ „ „ Zwölfecke „ 1·86603.

§ **132. Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes** kann man auf eine der folgenden zwei Arten bestimmen.

a) Durch Zerlegung in Dreiecke.

Zerlege die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, berechne jedes derselben und addiere alle Dreiecksflächen!

Fig. 167.



Es sei die Fläche des Vieleckes $ABCDEFG$ (Fig. 167) auszurechnen. Man zerlege das Vieleck in Dreiecke, so ist $\triangle ABG = \frac{BG \times Aa}{2}$,

$\triangle BEG = \frac{GE \times Bb}{2}$, $\triangle GEF = \frac{GE \times Ff}{2}$

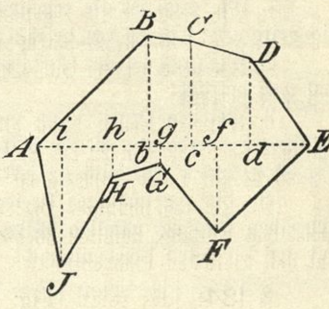
$\triangle BEC = \frac{BE \times Cc}{2}$ $\triangle CDE = \frac{CD \times Ee}{2}$

und die Fläche des Vieleckes gleich der Summe der fünf Dreiecke $ABG + BEG + GEF + BEC + CDE$.

b) Mittels Abszissen nnd Ordinaten.

Ziehe durch zwei Eckpunkte eine Gerade als Abszissenlinie und fälle darauf von allen übrigen Eckpunkten Normale; dadurch zerfällt die Figur in lauter rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, die einzeln berechnet und addiert werden. Dabei werden die Ordinaten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abszissenteile als Höhen betrachtet.

Fig. 168.



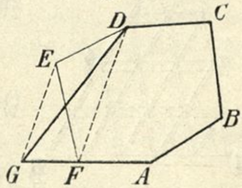
Messet an dieser Fig. 168 oder an einer selbst gezeichneten größeren Figur die notwendigen Strecken und berechnet die 9 Teilfiguren, deren Summe den Flächeninhalt des ganzen Vieleckes darstellt!

§ 133. Konstruktionsaufgaben.

1. Ein Vieleck $ABCDEF$ (Fig. 169) in ein anderes zu verwandeln, das eine Seite weniger hat.

Man ziehe die Diagonale DF und dazu $\parallel$ die EG, welche die verlängerte AF in G trifft. Zieht man DG, so ist das Vieleck $ABCDG$ gleich dem Vielecke $ABCDEF$, weil beide aus gleichen Teilen bestehen.

Fig. 169.



2. Verwandle ein unregelmäßiges Sechseck in ein Fünfeck, — Viereck, — Dreieck, Rechteck, Quadrat; miß die Seite dieses Quadrates und berechne daraus den Flächeninhalt desselben, der zugleich der Inhalt des gegebenen Sechseckes ist!

3. Zeichne drei kongruente unregelmäßige Fünfecke und bestimme den Flächeninhalt des ersten und zweiten nach den in § 132 unter *a)*

und *b*) angegebenen Methoden, des dritten aber mittels Verwandlung in ein Quadrat!

4. Ein regelmäßiges Fünfeck ist in ein Dreieck zu verwandeln. $f = u \cdot \frac{a}{2} = g \cdot \frac{h}{2}$. Mache daher $g = u$ und $h = a$!

5. Verwandle ein regelmäßiges Sechseck *a*) in ein Dreieck, *b*) in ein Quadrat!

Rechenaufgaben.

1. Wie groß ist der Umfang eines regelmäßigen Sechseckes, Achteckes, Zwölfeckes, dessen Seiten 1 *m* 2 *dm* 5 *cm* sind?

2. Wie groß ist der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite:
   a) in einem regelmäßigen Fünfecke mit der Seite 8·2 *dm*?
   b) in einem regelmäßigen Achtecke mit der Seite 2·5 *dm*?

3. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes mit der Seite 4·8 *m*!

4. Die Seite eines regelmäßigen Zehneckes ist 1·2 *m*; berechne *a*) den Umfang, *b*) den Flächeninhalt!

5. Der Umfang eines regelmäßigen Fünfeckes ist 21·5 *dm* lang; wie groß ist *a*) die Seite, *b*) der Flächeninhalt?

6. Es soll ein regelmäßig achtseitiges Gartenhaus, dessen Seite 1·8 *m* lang ist, ausgesteckt werden: wie groß ist die dazu erforderliche Fläche?

7. Wie groß ist die regelmäßige sechseckige Grundfläche eines Pfeilers, wenn die Seite $s = 4$ *dm* 6 *cm* beträgt?

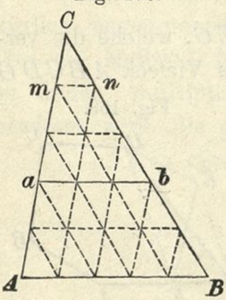
8. Wie groß ist der Querschnitt eines achtkantigen Eisenstabes, dessen Umfang 120 *mm* beträgt?

9. Welchen Druck kann eine gußeiserne Platte, deren Querschnitt ein regelmäßiges Sechseck von 22 *cm* Seitenlänge ist, aufnehmen, wenn eine Belastung von 4 *q* 50 *kg* auf 1 cm^2 zulässig ist?

10. Ein regelmäßiges Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck und Achteck haben denselben Umfang, nämlich 36 *cm*. Welche dieser Figuren hat den größten, welche hat den kleinsten Flächeninhalt?

§ 134. Es seien (Fig. 170) ABC und abC zwei ähnliche Dreiecke, deren gleichliegende Seiten sich wie 5 : 3 verhalten. Teilt man AC in 5 gleiche Teile, von denen auf aC 3 kommen, und zieht durch die Teilungspunkte der AC Parallele mit AB und BC, so zerfallen die gegebenen Dreiecke in lauter kongruente und mit mnC gleiche Dreiecke, und zwar ist $\triangle ABC = 25\, mnC$, $\triangle abC = 9\, mnC$, daher

Fig. 170.



$$ABC : abC = 25 : 9.$$

Dasselbe Verhältnis 25 : 9 haben aber auch die Quadrate zweier gleichliegender Seiten.

Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Maßzahlen ihrer gleichliegenden (homologen) Seiten.

$$\boldsymbol{F : f = S^2 : s^2}.$$

Da sich in ähnlichen Dreiecken die Höhen wie ihre Grundlinien verhalten, so gilt auch der Satz:

Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Maßzahlen ihrer gleichliegenden Höhen.

$$F : f = H^2 : h^2.$$

§ 135. 1. Wenn jede Seite eines Vieleckes 2mal, 3mal, 4mal so groß ist als die gleichliegende Seite eines ähnlichen Vieleckes, so wird auch die Summe aller Seiten, d. i. der Umfang des ersten Vieleckes, 2mal, 3mal, 4mal so groß sein als der Umfang des zweiten Vieleckes. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich also wie zwei gleichliegende Seiten.

2. Zerlegt man zwei ähnliche Vielecke, deren Seiten sich z. B. wie 5 : 3 verhalten, durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke, so verhalten sich nach § 36 je zwei gleichliegende Dreiecke der beiden Vielecke wie 25 : 9; es müssen sich demnach auch die Summen der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke, d. i. die beiden Vielecke selbst, wie 25 : 9 verhalten. Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Vielecke verhalten sich also wie die Quadrate der Maßzahlen zweier gleichliegender Seiten.

Wird daher eine in wahrer Größe aufgenommene Figur im verjüngten Maße auf das Papier gezeichnet, so daß jede Seite auf dem Papiere nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, . . . von der wirklich gemessenen Länge beträgt, so ist der Flächeninhalt der Figur auf dem Papiere $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{100}$, . . . von dem Flächeninhalte der ähnlichen, in der Wirklichkeit aufgenommenen Figur.

Übungsbeispiele.

1. Wie verhalten sich die beiden Grundflächen der unteren quadratischen Platten in der Fig. 29?

2. In welchem Verhältnisse stehen die Oberflächen der beiden Landkärtchen in Fig. 32?

3. Ein Plan ist in dem Maßstabe 1 : 2000 gezeichnet; wie verhält sich seine Fläche zur wahren (natürlichen) Größe?

4. Wievielmal so groß müssen die Ausdehnungen (Dimensionen) einer Zeichnung werden, wenn dieselbe ihrer Fläche nach *a)* 9mal, *b)* 3mal so groß gemacht werden soll?

5. Die Umfänge zweier ähnlicher Vielecke sind 26 *dm* 8 *cm* und 19 *dm* 56 *mm*; wie verhalten sich *a)* ihre Seiten, *b)* ihre Flächeninhalte?

6. Wenn der Flächeninhalt eines Dreieckes 56 cm^2 beträgt, wie groß ist die Fläche eines ähnlichen Dreieckes, dessen Seiten sich zu denen des ersteren verhalten wie 7 : 2 (1 : 10)?

§ 136. Wiederholungsaufgaben.

1. An der Fläche eines Quadrates, dessen Seite 48 *cm* ist, wird der Rand 3 *cm* breit vergoldet; wieviel dm^2 beträgt die Vergoldung?

2. Man will in einem quadratförmigen Garten, dessen Seiten 58 *m* 5 *dm* ist, ringsherum einen Weg machen, der eine Breite von 1 *m* 2 *dm* haben soll; welchen Flächeninhalt wird dieser Weg einnehmen?

3. Bestimme den Umfang eines Quadrates, das so groß ist als zwei andere Quadrate von 8·85 *m* und 4·72 *m* Seitenlänge zusammengenommen!

4. Berechne die Seite eines Quadrates, das gleich ist der Summe dreier Quadrate mit den Seiten 184 *cm*, 138 *cm* und 552 *cm*!

5. Ein Spiegel mit Rahmen hat 6 *dm* 3 *cm* Breite und 8 *dm* 5 *cm* Höhe; wie groß ist der Inhalt der sichtbaren Spiegelfläche, wenn der Rahmen 5 *cm* breit ist?

6. Ein rechteckiges Feld von 72·4 *m* Länge verliert durch Anlage eines Weges 1·75 *m* von seiner Breite; welche Entschädigung ist dem Eigentümer zu leisten, wenn er für 1 m^2 52 h verlangt?

7. Jemand besitzt einen Garten in der Form eines Rechteckes, der 68·4 *m* lang und 42·5 *m* breit ist; er will denselben mit einer 8 *dm* breiten Mauer umfassen; wieviel Grundfläche wird diese Mauer wegnehmen?

8. *A* hat zwei Gärten von gleicher Größe, einen quadratischen von 56 *m* Seitenlänge und einen rechteckigen von 42 *m* Breite; um jeden dieser Gärten will er eine Hecke anpflanzen lassen; wieviel Meter wird die Hecke um den rechteckigen Garten länger sein als die um den quadratischen?

9. Die beiden Seiten eines Satteldaches bilden Rechtecke von 27 *m* Länge und 6·8 *m* Breite; sie sollen belattet und mit Ziegeln bedeckt werden. *a)* Wieviel Latten von 4·5 *m* Länge sind erforderlich, wenn dieselben 17 *cm* voneinander abstehen? *b)* Wieviel Ziegel braucht man, wenn jeder Ziegel 15 *cm* nach der Länge des Daches deckt?

10. Ein Trapezoid besteht aus zwei Dreiecken, deren gemeinschaftliche Grundlinie eine Diagonale von 8·4 *m* Länge ist und deren Höhen 5·6 *m* und 4·5 *m* betragen; wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezoids?

11. Ein Trapez mit den Parallelen 9·2 *dm* und 5·8 *dm* und der Höhe 9·2 *dm* soll in ein Rechteck mit der Grundlinie 9·6 *dm* verwandelt werden; wie groß wird die Höhe dieses Rechteckes sein?

12. Ein Walmdach, d. h. ein Dach, von dessen vier gleichgeneigten Dachflächen zwei die Form von Trapezen und zwei die Form von Dreiecken haben, soll mit Schiefer gedeckt werden; die obere Länge des Daches, der First, beträgt 10·4 *m*, die untere Länge 24 *m*, die Breite des Dachsaumes 13·6 *m* und der Abstand des Firstes vom Dachsaume 8·4 *m*. Wieviel kostet die Schiefereindeckung, wenn 1 m^2 mit 2 K 80 h berechnet wird?

13. Der Umfang eines Dreieckes beträgt 14 *m* 4 *dm*; die Seiten eines ihm ähnlichen Dreieckes sind 4·5 *m*, 5·4 *m* und 6·1 *m*; wie groß sind die Seiten des ersten Dreieckes?

14. Die Seiten zweier ähnlichen Dreiecke verhalten sich wie 4 : 5; die Fläche des ersten Dreieckes ist 8 m^2; wie groß ist die Fläche des zweiten?

15. Der Flächeninhalt eines Dreieckes, dessen eine Seite 4 *cm* lang ist, beträgt 12 cm^2; wie groß ist der Flächeninhalt eines ähnlichen Dreieckes, in dem die entsprechende Seite 1 *dm* 5 *cm* mißt?

16. Die Umfänge zweier ähnlicher Vielecke sind 23·52 *cm* und 1·784 *dm*; wie verhalten sich ihre Flächeninhalte?

17. In einem Bauplane, in welchem 4 *cm* des gewählten Maßstabes 3 *m* vorstellen sollen, beträgt der Flächeninhalt des Grundrisses 5·2 dm^2 20 cm^2; wie groß ist die wirkliche Baufläche?

18. Auf einer Landkarte sind die natürlichen Längen in dem Verhältnisse 1 : 250000, auf einer zweiten in dem Verhältnisse 1 : 50000 dargestellt; welche Fläche nimmt auf der ersten Karte ein Land ein, das auf der zweiten eine Fläche von 1 dm^2 60 cm^2 hat?

19. Wie groß ist die mittlere geometrische Proportionale zu zwei Strecken von 850·5 *dm* und 10·5 *dm*?

(Welche geometrische Deutung läßt diese Aufgabe zu?)

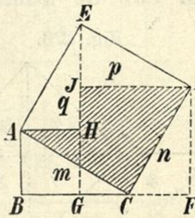
20. Wie groß ist die dritte stetige Proportionale zu zwei Strecken, die 72·9 *m* und 40·5 *m* Länge haben, wenn die letztere als mittlere geometrische Proportionale erscheint?

(Welche geometrische Deutung kommt dieser Aufgabe zu?)

VII. Der Pythagoräische Lehrsatz.

§ 137. Man errichte über der Hypotenuse AC (Fig. 171) das Quadrat $ACDE$, verlängere BC und fälle darauf die Normalen DF und EG; ebenso fälle man auf EG die Normalen AH und DJ. Die rechtwinkligen Dreiecke ABC, CDF, DEJ und EHA, die wir kürzer durch m, n, p und q bezeichnen wollen, haben nun eine Seite, nämlich die Hypotenuse, gleich; ferner haben sie außer dem rechten Winkel auch die spitzen Winkel wechselseitig gleich, weil ihre Schenkel beziehungsweise entweder $\parallel$ oder aufeinander $\perp$ sind; jene vier Dreiecke sind demnach $\cong$. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt, daß $AH = AB$, daß also $ABHG$ das Quadrat über der Kathete AB ist; ferner daß $DF = DJ = BC$, daß als $DFGJ$ das Quadrat der Kathete BC ist. — Die Figur $ABFDJH$ enthält die Quadrate der beiden Katheten; man erhält aber offenbar denselben Flächeninhalt, wenn man von dieser Figur die zwei Dreiecke m und n unten wegnimmt und sie oben an die Stelle der Dreiecke p und q anlegt; die Figur $ACDE$, die dadurch entsteht, ist das Quadrat der Hypotenuse AC. Da nun diese neu entstandene Figur mit der früheren gleichen Flächeninhalt hat, so ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten:

Fig. 171.



Das Quadrat $ACDE = ABGH + GFDJ$, d. h.: **In jedem rechtwinkligen Dreiecke** ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

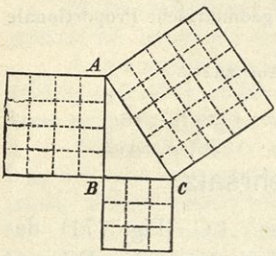
Dieser Satz heißt nach dem griechischen Philosophen und Mathematiker Pythagoras (geb. in Samos, lebte um 540 v. Chr.) der **Pythagoräische Lehrsatz.**

Stellet auch diese Fig. aus Pappendeckel dar und liefert den Beweis durch Deckung!

§ 138. Ein besonders interessanter Fall des Pythagoräischen Lehrsatzes ergibt sich aus Fig. 172. Zeichne einen rechten Winkel ABC, trage auf den einen Schenkel 3, auf den andern 4 gleiche Teile, z. B. Zentimeter, auf und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke AC;

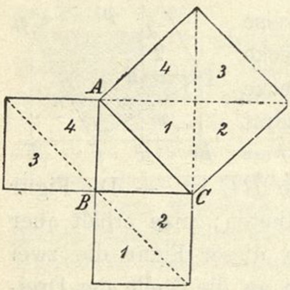
die Hypotenuse des dadurch entstandenen Dreieckes wird genau 5 Zentimeter enthalten. Das Quadrat von 3 ist 9, das Quadrat von 4 ist 16 und die Summe der Quadrate 25; das Quadrat der Hypotenuse 5 ist auch 25. Es ist also das Quadrat der Hypotenuse so groß als die Summe aus den Quadraten der beiden Katheten. Dieses läßt sich auch geometrisch ableiten. Zeichnet man nämlich sowohl über der Hypotenuse als über den Katheten Quadrate und zerlegt jedes derselben in Quadratzentimeter, so sieht man, daß in dem Quadrate über der Hypotenuse ebensoviele Quadratzentimeter vorkommen als in den Quadranten über den beiden Katheten zusammengenommen.

Fig. 172.



Für das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck läßt sich durch die Fig. 173 die Wahrheit des Pythagoräischen Lehrsatzes ganz anschaulich darstellen; woraus zugleich der Satz erhellt, daß in jedem Quadrate das Quadrat der Diagonale doppelt so groß ist wie das Quadrat selber.

Fig. 173.



§ 139. Mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes kann man, wenn zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bekannt sind, durch Rechnung die dritte Seite finden.

1. Sind die beiden Katheten bekannt, so erhebt man jede Kathete zum Quadrate und addiert die Quadrate; diese Summe gibt das Quadrat der Hypotenuse. Um die Hypothenuse selbst zu erhalten, ist aus dieser Summe die Quadratwurzel zu ziehen.

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Es sei z. B. die eine Kathete 36 *cm*, die andere 160 *cm*; wie groß ist die Hypotenuse?

$$\text{Katheten}\begin{cases} 36\ cm & 36^2 = 1296 \\ 160\ cm & 160^2 = \underline{25600} \end{cases}$$

$$\text{Hypotenuse} = \sqrt{26896} = 164\ cm.$$

2. Sind die Hypotenuse und eine Kathete bekannt, so erhebe man beide zum Quadrate, subtrahiere vom Quadrate der Hypotenuse das Quadrat der bekannten Kathete, der Rest gibt das Quadrat der andern noch unbekannten Kathete; will man diese Kathete selbst finden, so darf man nur aus jenem Reste die Quadratwurzel ziehen.

$$b^2 = a^2 - c^2, \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2};$$
$$c^2 = a^2 - b^2, \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Es sei z. B. die Hypotenuse 2 *m* 8 *cm,* eine Kathete 8 *dm*; wie groß ist die andere Kathete?

$$\begin{array}{llrl} \text{Hypot.} & 208\ cm & 208^2 = & 43264 \\ \text{Kathete} & 80\ cm & 80^2 = & 6400 \\ \hline \end{array}$$

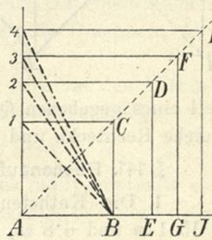
$$\text{Zweite Kathete} = \sqrt{36864} = 192\ cm.$$

§ 140. Konstruktionsaufgaben.

1. Ein Quadrat zu konstruieren, das der Summe zweier gegebener Quadrate gleich ist.

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich sind den Seiten der gegebenen Quadrate; die Hypotenuse dieses Dreieckes ist die Seite des verlangten Quadrates.

Fig. 174.

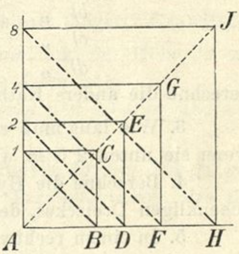


2. Ein Quadrat zu konstruieren, das der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.

Man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der Seite des größeren und dessen eine Kathete gleich der Seite des kleineren Quadrates ist; dann ist die zweite Kathete die Seite des verlangten Quadrates.

3. Ein Quadrat zu konstruieren, das doppelt, 3mal, 4mal, ... so groß ist als ein gegebenes Quadrat *ABC1* (Fig. 174).

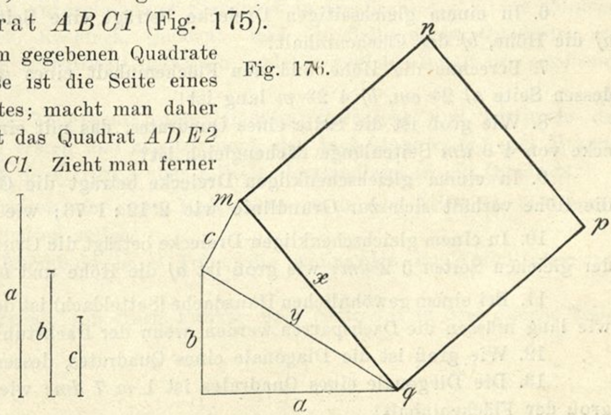
Fig. 175.



Zieht man in dem gegebenen Quadrate die Diagonale *B1*, so ist diese die Seite eines doppelt so großen Quadrates; macht man daher $A2 = B1$ und beschreibt über $A2$ das Quadrat *A2DE,* so ist dieses das doppelte des gegebenen Quadrates. Zieht man die Strecke $B2$ und macht $A3 = B2$, so ist das Quadrat *A3FG* 3mal so groß als *A1CB*. Ebenso erhält man, wenn man $A4 = B3$ macht, *A4HJ* als das 4fache des gegebenen Quadrates.

4. Ein Quadrat zu konstruieren, das 2mal, 4mal, 8mal, ... so groß ist als ein gegebenes Quadrat *ABC1* (Fig. 175).

Fig. 176.



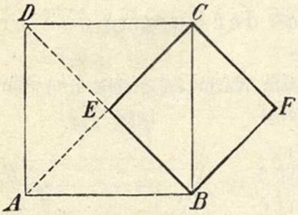
Man ziehe in dem gegebenen Quadrate die Diagonale *B1,* diese ist die Seite eines 2mal so großen Quadrates; macht man daher $A2 = AD = B1$, so ist das Quadrat *ADE2* doppelt so groß als *ABC1*. Zieht man ferner in dem neuen Quadrate *ADE2* die Diagonale *D2* und macht $A4 = AF = D2$, so ist das Quadrat *AFG4* 4mal so groß als das gegebene. Ebenso erhält man, wenn die Diagonale *F4* gezogen und $A8 = AH = F4$ gemacht wird, das 8mal so große Quadrat *AHJ8*.

5. Ein Quadrat zu zeichnen, das so groß ist wie drei gegebene Quadrate zusammengenommen.

Die drei Strecken a, b, c seien die Seiten der gegebenen Quadrate; die Konstruktion ist an der Fig. 176 leicht ersichtlich.

Wegen $b \perp a$ ist $y^2 = a^2 + b^2$ und wegen $c \perp y$ ist $x^2 = y^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$, so daß $mnpq$ das verlangte Quadrat ist.

Fig. 177.



6. Ein Quadrat zu konstruieren, das die Hälfte eines gegebenen Quadrates $ABCD$ (Fig. 177) ist.

Man ziehe die beiden Diagonalen AC und BD, die sich in $E \perp$ schneiden; das Quadrat $BECF$ ist dann die Hälfte des gegebenen Quadrates.

7. Ein Quadrat zu zeichnen, das der fünfte Teil eines gegebenen Quadrates ist. (Teilung des gegebenen Quadrates in 5 flächengleiche Rechtecke und Verwandeln eines derselben in ein Quadrat.)

§ 141. Rechenaufgaben.

1. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind *a)* 35 *m* und 12 *m*, *b)* 15·1 *m* und 6·8 *m*, *c)* 3 *m* 15 *cm* und 4 *m* 2 *dm*, *d)* 3·55 *dm* und 852 *mm*; wie groß ist die Hypotenuse, der Umfang und der Flächeninhalt?

2. In einem rechtwinkligen Dreiecke beträgt

a) die Hypotenuse	51 *dm*,	eine Kathete		24 *dm*;
b) „	8·7 *m*,	„	„	60 *dm*;
c) „	1·35 *m*,	„	„	0·83 *m*;
d) „	689 *mm*,	„	„	26·5 *cm*;

berechne die andere Kathete, den Umfang und den Flächeninhalt?

3. Wie lang muß eine Leiter sein, damit sie an einer Mauer 6 *m* hoch reiche, wenn sie unten 2·5 *m* weit von der Mauer aufgestellt werden soll?

4. Berechne die Hypotenuse und den Flächeninhalt eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreieckes, dessen Kathete 1·64 *m* beträgt!

5. In einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke ist die Hypotenuse 58 *mm*; wie lang ist jede Kathete, wie groß der Flächeninhalt?

6. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt eine Seite 8 *dm*; wie groß ist *a)* die Höhe, *b)* der Flächeninhalt?

7. Berechne die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite *a)* 24 *cm*, *b)* 4·26 *m* lang ist!

8. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, das mit einem gleichseitigen Dreiecke von 4·6 *dm* Seitenlänge flächengleich ist?

9. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 3·46 *m* und die Höhe verhält sich zur Grundlinie wie 2·12 : 1·73; wie lang ist ein Schenkel?

10. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 4·8 *dm* und jede der gleichen Seiten 5·2 *dm*; wie groß ist *a)* die Höhe und *b)* der Flächeninhalt?

11. Bei einem gewöhnlichen Hausdache (Satteldach) ist der Dachstuhl 14 *m* breit; wie lang müssen die Dachsparren werden, wenn der Dachstuhl 6 *m* hoch werden soll?

12. Wie groß ist die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite 1 *m* ist?

13. Die Diagonale eines Quadrates ist 1 *m* 7 *dm*; wie groß ist die Seite, wie groß der Flächeninhalt?

14. Eine quadratische Tischplatte hat 0·961 m^2; wie lang ist die Diagonale und der Umfang?

15. Die anstoßenden Seiten eines Rechteckes sind 8·85 *m* und 4·72 *m*; wie lang ist die Diagonale?

16. In einem Rechtecke beträgt die Diagonale 923 *mm* und eine Seite 355 *mm*; wie groß ist die zweite Seite?

17. Wie groß ist die Diagonale eines Rechteckes, dessen Länge 5·2 *m* und dessen Flächeninhalt 20·28 m^2 beträgt?

18. Die Diagonalen einer Raute betragen 2·26 *m* und 1·75 *m*; berechne *a)* die Seite, *b)* den Umfang, *c)* den Flächeninhalt!

19. Ein Garten hat die Form eines Rhombus; wieviel *a* enthält er, wenn eine Seite 24 *m* und eine Diagonale 32 *m* beträgt?

20. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1·2 *m* ist flächengleich mit einem Rhombus, dessen eine Diagonale 1·8 *m* beträgt; wie groß ist *a)* die zweite Diagonale, *b)* die Seite, *c)* der Umfang dieses Rhombus?

21. Die Seite eines regelmäßigen Sechseckes $s = 1\ dm$; berechne den Abstand *a* des Mittelpunktes von einer Seite und den Flächeninhalt *f* dieses Sechseckes!

Wiederholungsaufgaben.

§ 142. 1. Zeichne ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck und verwandle es in ein rechtwinkliges! Berechne Umfang und Inhalt desselben aus den notwendigen Abmessungen!

2. Zeichne ein Dreieck mit der Grundlinie 36 *mm* und den anliegenden Winkeln 60^0 und 45^0 und verwandle es in ein Dreieck über derselben Grundlinie mit dem anliegenden Winkel 30^0!

3. Zeichne ein Dreieck und verwandle es in anderes mit längerer Grundlinie!

4. Konstruiere ein Dreieck mit der Grundlinie 42 *mm* und der Höhe 32 *mm* und verwandle dieses in ein anderes Dreieck, dessen Höhe 4 *cm* ist!

5. Zeichne ein Dreieck mit den Seiten 35 *mm*, 30 *mm* und 40 *mm* und verwandle es in ein Rechteck von gleicher Höhe!

6. Konstruiere ein Parallelogramm, in welchem die Seiten 30 *mm* und 24 *mm* den Winkel 45^0 einschließen und verwandle es in ein Parallelogramm, das den Winkel 45^0 und die Seite 26 *mm* enthält!

7. Zeichne ein Viereck und verwandle es in ein Dreieck!

8. Verwandle ein unregelmäßiges Siebeneck in ein Sechseck, in ein Fünfeck, — Viereck, — Dreieck, Rechteck, Quadrat; miß die Seite dieses Quadrates und berechne daraus den Flächeninhalt desselben, welcher zugleich Inhalt des gegebenen Siebenecks ist!

9. Zeichne drei kongruente unregelmäßige Sechsecke und bestimme den Flächeninhalt bei dem ersten und zweiten nach den in § 34 unter *a)* und *b)* angegebenen Methoden, bei dem dritten aber mittels Verwandlung in ein Quadrat!

10. Teile ein Dreieck von einem Endpunkte aus in drei Teile, die sich zueinander wie 1 : 2 : 3 verhalten sollen!

11. Teile ein Rhomboid in 2 Teile, die zueinander im Verhältnisse wie $\frac{1}{2} : \frac{3}{8}$ stehen!

12. Teile ein Dreieck von einem Punkte einer Seite aus in drei gleiche Teile! Vergleiche Fig. 157!

VIII. Umfang und Flächeninhalt des Kreises.

1. Umfang des Kreises.

§ 143. Das einem Kreise eingeschriebene regelmäßige Sechseck hat einen kleineren, das umgeschriebene regelmäßige Seckseck einen größeren Umfang als der Kreis. Bestimmt man daher die Umfänge dieser Sechsecke, so erhält man zwei Werte, zwischen denen der Umfang des Kreises liegt.

In noch engere Grenzen wird die Kreislinie durch zwei dem Kreise eingeschriebene und umgeschriebene regelmäßige 12-, 24-, 48-, ... Ecke eingeschlossen. Durch Berechnung der Umfänge solcher Vielecke, deren Seitenzahl immer um das Doppelte zunimmt, hat man näherungsweise die Länge des Kreisumfanges bestimmt und gefunden, daß **der Umfang eines Kreises** $3 \cdot 14159\ldots$ mal so lang ist als der Durchmesser.

Die Zahl, die das Verhältnis zwischen dem Umfange eines Kreises und dem Durchmesser angibt, heißt die Ludolfische Zahl*) und wird mit dem griechischen Buchstaben π**) bezeichnet. Es ist also $\pi = 3 \cdot 14159\ldots$. In vielen Fällen ist der Näherungswert $\pi = 3\frac{1}{7}$ oder $\pi = 3 \cdot 14\ldots$ ausreichend.

Zur Veranschaulichung nehme man einen aus Holz gefertigten Kreis, dessen Durchmesser 1 Dezimeter beträgt, umspanne den Umfang möglichst genau mit einem Faden und messe dann die Länge dieses Fadens. Man findet, daß der Faden, also auch der Umfang des Kreises 3 Dezimeter und beinahe 14 Millimeter, d. i. beinahe $3 \cdot 14$ Dezimeter lang ist.

Konstruktionsaufgabe. Stelle den Umfang eines Kreises ($r = 21\ mm$) näherungsweise als Strecke dar! (Der Durchmesser des gegebenen Kreises ist $3\frac{1}{7}$mal auf einem Halbstrahle aufzutragen.)

Bezeichnet r den Halbmesser, d den Durchmesser und u den Umfang eines Kreises, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$\boldsymbol{u = \pi d} \text{ oder } \boldsymbol{u = 2\pi r}, \text{ daher}$$

$$d = \frac{u}{\pi} \text{ und } r = \frac{u}{2\pi}; \text{ d. h.}$$

1) **Der Umfang eines Kreises** ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser (oder dem doppelten Halbmesser) und der Ludolfischen Zahl.

2. Der Durchmesser eines Kreises ist gleich dem Umfange dividiert durch die Ludolfische Zahl.

---

*) Benannt nach Ludolf von Ceulen (geboren am 28. Jänner 1540 in Hildesheim, gestorben am 31. Dezember 1610 in Leyden), der diese Zahl zuerst auf 35 Dezimalstellen berechnete.

**) lies: *pi* (Anfangsbuchstabe des griechischen Wortes Peripherie).

3. Der Halbmesser eines Kreises ist gleich dem Umfange dividiert durch die doppelte Ludolfische Zahl.

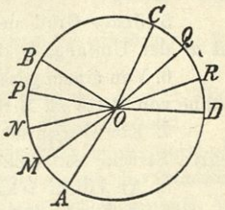
Heißt U der Umfang eines zweiten Kreises, der den Halbmesser R und den Durchmesser D hat, so ist

$$U : u = \pi D : \pi d = D : d, \text{ und}$$
$$U : u = 2\pi R : 2\pi r = R : r; \text{ d. h.}$$

die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser oder Halbmesser.

§ 144. **Länge eines Kreisbogens.** Wenn (Fig. 178) die Winkel AOM, MON, NOP, POB und COQ, QOR, ROD einander gleich sind, so müssen auch die Bogen AM, MN, NP, PB und CQ, QR, RD gleich sein.

Fig. 178.



Es ist daher nicht nur der Winkel AOM in dem Winkel AOB 4mal und in COD 3mal enthalten, sondern es kommt ebenso der Bogen AM in AB 4mal, in CD 3mal vor, so daß folgende Verhältnisse stattfinden:

Winkel AOB : Winkel $COD = 4 : 3$ und

Bogen AB : Bogen $CD = 4 : 3$.

Daraus folgt: Bog. AB : Bog. $CD = \sphericalangle AOB : \sphericalangle COD$, d. h.

In demselben Kreise verhalten sich die Kreisbogen wie die zugehörigen Zentriwinkel.

§ 145. Ein Bogen kann im Gradmaße durch Grade, Minuten und Sekunden oder im Längenmaße durch die Längeneinheit ausgedrückt werden.

Um einen Kreisbogen, der im Gradmaße gegeben ist, im Längenmaße und umgekehrt zu bestimmen, wendet man den aus § 144 hervorgehenden Satz an:

Die Länge eines Bogens verhält sich zu dem Umfange des Kreises wie der entsprechende Zentriwinkel zu 360^0.

Bezeichnet in einem Kreise, dessen Halbmesser r ist, b das Längenmaß eines Kreisbogens, dessen Gradmaß m ist, der also dem Zentriwinkel m^0 entspricht, so hat man nach diesem Satze

$$b : 2\pi r = m^0 : 360^0,$$

aus welcher Proportion jede der drei Größen b, m, r berechnet werden kann, wenn die beiden anderen gegeben sind; $\boldsymbol{b = \frac{\pi m r}{180}}$.

Z. B. Wie lang ist ein Bogen von 35^0 in einem Kreise, dessen Halbmesser 2 *dm* ist?

Umfang $= 4\,dm \times 3{\cdot}14 = 12{\cdot}56\,dm$; $x : 12{\cdot}56 = 35 : 360$,

daher Bogenlänge $x = 1{\cdot}22\,dm$.

§ 146. Konstruktionsaufgaben.

1. Konstruiere mit Hilfe der Zahl des Archimedes ($\pi = 3\frac{1}{7}$) eine Strecke, die näherungsweise dem Umfange eines gegebenen Kreises gleich ist!

2. Konstruiere den Durchmesser d eines Kreises, dessen Umfang der gegebenen Strecke s gleich ist! ($s : d = 22 : 7$).

Rechenaufgaben.

1. Der Durchmesser eines Kreise beträgt 6 *dm*; wie groß ist der Umfang?

$$\frac{6\ dm \times 3\frac{1}{7}}{18\frac{6}{7}\ dm} \quad \text{oder} \quad \frac{6\ dm \times 3{\cdot}14}{18{\cdot}84\ dm;} \quad \text{genauer} \quad \frac{6\ dm \times 3{\cdot}1416}{18{\cdot}8496\ dm.}$$

2. Wie groß ist *a)* der Durchmesser, *b)* der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang 20 *m* beträgt?

3. Der Minutenzeiger einer Uhr ist 14 *cm* lang; welche Länge hat der Weg, den seine Spitze in einer Stunde beschreibt?

4. Das Schwungrad an einer Maschine hat $2\frac{1}{2}$ *m* Durchmesser; wie lang ist sein Umfang?

5. Jeder Grad des Erdäquators ist 15 geographische Meilen lang; wie groß ist *a)* der Umfang, *b)* der Halbmesser des Äquators?

6. Von einem gezahnten Rade von 1 *m* 3 *dm* Durchmesser soll die Entfernung der Zähne von Mitte zu Mitte 2 *dm* 2 *cm* betragen; wieviele Zähne wird das Rad erhalten?

7. Ein Wagenrad, dessen Durchmesser 1·1 *m* beträgt, hat auf einer zurückgelegten Strecke 240 Umläufe gemacht; wie lang war die Strecke?

8. An einem Wagen hat jedes Vorderrad 1 *m*, jedes Hinterrad 1·4 *m* Durchmesser; wieviel Umläufe hat jedes Rad gemacht, wenn der Wagen eine Strecke von 1 *km* zurückgelegt hat?

9. Welchen Durchmesser hat ein Lokomotivrad, das sich auf einem Schienenweg von 990 *m* 314 mal umdreht?

10. Von zwei Rollen, die durch dieselbe Schnur in Umlauf gesetzt werden, hat die eine 2·4 *dm* im Durchmesser und dreht sich 8 mal, während die andere 3 Umdrehungen macht; welchen Durchmesser hat die zweite Rolle?

11. Man will einen kreisrunden Tisch für 8 Personen machen; wie groß wird man den Durchmesser dazu nehmen, wenn man auf eine Person 8 *dm* des Umfanges rechnet?

12. Ein kreisrundes Wasserbecken (Bassin) hat im Umfange 42 Steine, deren jeder an der inneren Seite 29 *cm* lang ist; wie lang muß ein Balken sein, damit er genau über die Mitte reiche und auf jeder Seite noch 6 *dm* hervorstehe?

13. Der Durchmesser der Winde bei einem Brunnen ist 37 *cm*; wie tief ist der Brunnen, wenn das Seil, das bis auf den Boden reicht, 12 mal um die Winde geht?

14. Wie lang ist ein Bogen von 45^0 bei einem Kreise, dessen Halbmesser 2 *dm* ist?

15. Bestimme die Bogenlänge von *a)* 56^0, *b)* 120^0, *c)* 180^0 in einem Kreise vom Halbmesser $r = 1$ *m*!

16. Der Durchmesser eines Kreises ist *a)* 1 *m*, *b)* 2 *m*, *c)* 3 *m*; welche Länge hat in jedem Kreise ein Bogen von 60^0?

17. Ein Bogen von 48^0 hat 1·26 *m* Länge; wie lang ist der Halbmesser dieses Kreises?

18. Welchen Durchmesser hat ein Kreis, in welchem ein Bogen von 15^0 *a)* 3 *dm*, *b)* 7·5 *dm*, *c)* 25·2 *dm*, *d)* 4·5 *m* lang ist?

19. Wieviel Grad hat ein Bogen von 7·853 *dm* Länge, wenn der Kreisdurchmesser 2 *m* beträgt?

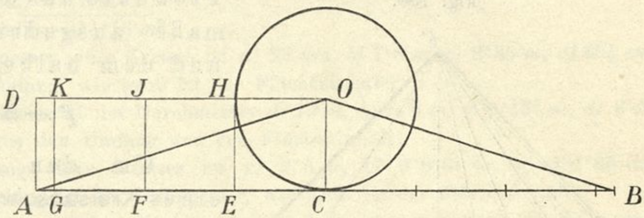
20. Die Stadt Graz hat eine geographische Breite von $47^0\ 4'$; wieviel *km* ist sie vom Äquator entfernt, wenn man den Meridian als einen Kreis von 6371·56 *km* Halbmesser annimmt?

2. Flächeninhalt des Kreises.

§ 147. Nach § 94 ist der Kreis ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten. Jeder Kreis ist, wie das regelmäßige Vieleck, einem Dreiecke flächengleich (§ 131), dessen Grundlinie der Umfang und dessen Höhe der Halbmesser des Kreises ist.

Macht man $AC = CB = 3\frac{1}{7}\, CO$ (Fig. 179), so ist AB gleich dem Umfange (§ 143) und das Dreieck ABO gleich der Fläche des Kreises. Legt man $\triangle OCB$ passend an $\triangle ACO$ (wie in der Figur), so erhält man das Rechteck $ACOD$, das der Fläche des Kreises gleich ist, denn $\triangle OCB = \triangle OAC$. Macht man $CE = EF = FG$ und zieht die Normalen auf AB, so erhält man die Figuren $COHE$, $EHJF$, $FJKG$ und $GKDA$, von denen die drei ersten Figuren Quadrate über dem Halbmesser des Kreises sind und die letzte Figur der 7. Teil eines solchen Quadrates ist. Folglich besteht das Rechteck $ACOD$ aus $3\frac{1}{7}$ Quadraten über dem Halbmesser des Kreises und da dieses Rechteck dem gegebenen Kreise flächengleich ist, so gilt der Satz:

Fig. 179.



Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate des Halbmessers und der Ludolfischen Zahl.

$$f = \pi r^2.$$

Z. B. für $r = 5\,dm$ ist $f = \pi \,.\, 5^2 = 3{\cdot}14 \times 25 = 78{\cdot}5$; $f = 78{\cdot}5\,dm^2$.

Bezeichnet F den Flächeninhalt eines zweiten Kreises, dessen Halbmesser R ist, so hat man ebenso $F = \pi R^2$; daher

$$F : f = \pi R^2 : \pi r^2 = R^2 : r^2; \text{ d. h.}$$

die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Ist umgekehrt der Flächeninhalt eines Kreises bekannt und die Länge des Halbmessers zu suchen, so braucht man nur den Flächeninhalt durch die Ludolfische Zahl zu dividieren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers vor; zieht man daraus die Quadratwurzel, so hat man den Halbmesser selbst; folglich

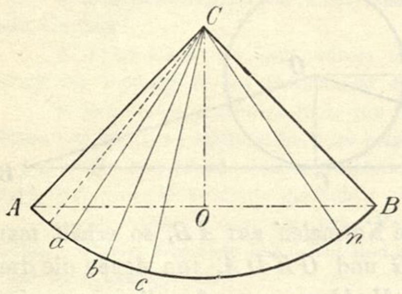
$r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$. Z. B. für $f = 113{\cdot}04\ m^2$ ist $r = \sqrt{\frac{113{\cdot}04}{3{\cdot}14}} = \sqrt{36} = 6$; $r = 6\ m$.

Veranschauliche an der Fig. 179 folgenden Satz: **Der Flächeninhalt eines Kreises** ist gleich dem Umfange multipliziert mit dem halben Halbmesser.

$$f = u \cdot \frac{r}{2}.$$

§ 148. Durch die Fig. 180 wird der folgende Satz veranschaulicht: Der Flächeninhalt eines **Kreisausschnittes** ist gleich dem Produkte aus dem im Längenmaße ausgedrückten Bogen und dem halben Halbmesser;

Fig. 180.

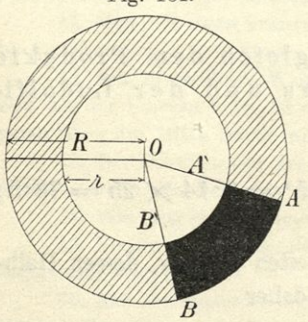


$$f = b \cdot \frac{r}{2}.$$

Um den Flächeninhalt eines **Kreisabschnittes** zu finden, berechnet man den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes und subtrahiert davon den Inhalt des Dreieckes, um das der Ausschnitt größer als der Abschnitt ist.

Der Flächeninhalt eines **Kreisringes** (Fig. 181) wird gefunden, indem man die Flächen der beiden Kreise, deren Unterschied der Ring ist, berechnet und voneinander subtrahiert.

Fig. 181.



$$f = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi.$$

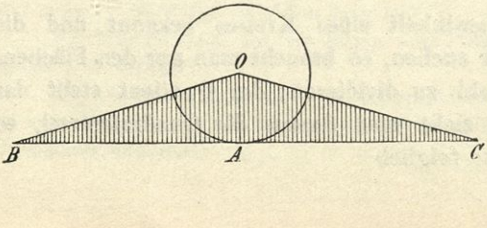
Vergleiche Form und Inhaltsberechnung von Trapez und Kreisring, von Trapez und Kreisringausschnitt!

Kreisring $= (U + u)\,\frac{B}{2}$; Kreisringausschnitt $= (Bog + bog) \cdot \frac{B}{2}$, wobei $\frac{B}{2}$ die halbe Ringbreite bezeichnet.

§ 149. Konstruktionsaufgaben.

1. Aufgabe. Einen Kreis ($r = 10\,mm$; $r = 15\,mm$) in ein Dreieck zu verwandeln. (Fig. 182.)

Fig. 182.



2. Verwandle einen gegebenen Kreis ($r = 35\,mm$) in ein Rechteck, dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist! $\left(g = \frac{u}{2}.\right)$

3. Verwandle einen gegebenen Kreis ($r = 40\,mm$) in ein Quadrat!

4. Konstruiere einen Kreis, welcher *a)* der Summe, *b)* der Differenz zweier gegebener Kreise gleich ist! (Mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes.)

5. Konstruiere einen Kreis, welcher der Summe von 3 gegebenen Kreisen gleich ist!

6. Es soll eine Kreisfläche konzentrisch in 2 (3) gleiche Teile geteilt werden!

7. Eine Kreisfläche ist vom Mittelpunkte aus in 3 Teile zu teilen, die sich verhalten wie 1 : 2 : 3!

Rechenaufgaben.

1. Der Halbmesser eines Kreises ist 10 *m*; wie groß ist der Flächeninhalt?

Halbm. = 10 *m*
Durchm. = 20 *m*
Umfang = 62·832 *m*
halb. Halbm. = 5 *m*
Flächeninhalt = 314·16 m^2.

oder 10 × 10
100 × 3·1416
$f = 314{\cdot}16\ m^2 = 3\ a\ 14\ m^2\ 16\ dm^2$.

2. Der Halbmesser eines Kreises ist *a)* 28 *dm*, *b)* 1·8 *m*, *c)* 2·65 *m*, *d)* $35\frac{1}{2}$ *cm*; wie groß ist der Umfang, wie groß ist der Flächeninhalt?

3. In einem Kreise ist der Durchmesser *a)* 13 *m*, *b)* 5·8 *m*, *c)* 0·135 *m*, *d)* 8 *dm* 3 *cm* 4 *mm*; berechne den Umfang und den Flächeninhalt!

4. Der Umfang eines Kreises ist *a)* 2·5 *m*, *b)* 0·8168 *m*, *c)* 131·95 *dm*, *d)* 18·3469 *m*; wie lang ist der Halbmesser, wie groß ist der Flächeninhalt?

5. Der Durchmesser eines Kreises ist 2 *dm* lang, ebenso groß ist die Seite eines Quadrates; um wieviel ist der Flächeninhalt des Kreises kleiner als der des Quadrates?

6. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt 7 m^2 76 dm^2 beträgt?

$$7\ m^2\ 76\ dm^2 = 776\ dm^2 \qquad 776 : 3{\cdot}14 = 247{\cdot}14$$
$$r = \sqrt{247{\cdot}14} = 15{\cdot}7\ dm = 1\ m\ 5\ dm\ 7\ cm.$$

7. Wie lang ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt *a)* $86\frac{5}{8}$ dm^2, *b)* 1451·44 cm^2, *c)* 84 dm^2 90 cm^2 56 mm^2 beträgt?

8. Die Durchmesser zweier Kreise sind 2·4 *dm* und 3·6 *dm* lang; wie verhalten sich *a)* ihre Umfänge, *b)* ihre Flächeninhalte?

9. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Kreise zueinander, wenn sich ihre Umfänge wie 3 : 5 verhalten?

10. Ein kreisrundes Zimmer hat $5\frac{1}{2}$ *m* im Durchmesser; wie groß ist der Flächeninhalt?

11. Eine Scheibe hat 1 *m* 48 *cm* im Umfange; berechne *a)* ihren Durchmesser, *b)* ihren Flächeninhalt!

12. Der Umfang eines Baumstammes mißt $2\frac{5}{8}$ *m*; wie lang ist der Durchmesser, wie groß der Flächeninhalt eines Querschnittes?

13. Bestimme den Halbmesser eines Kreises, der an Inhalt gleich ist einem Quadrate mit der Seite $s = 2\ m\ 3\ dm$!

14. Ein Kreis hat mit einem Quadrate gleichen Umfang, nämlich 9·42 *dm*; wie groß ist der Unterschied der Flächeninhalte des Kreises und des Quadrates?

15. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisausschnittes, dessen Halbmesser 5·8 *m* und dessen Bogenlänge 8·2 *m* ist?

16. Ein Kreisausschnitt von 4·52 *dm* Halbmesser *a)* 18°, *b)* 40°, *c)* 106° 30′; welche Länge hat der Bogen, wie groß ist der Inhalt des Ausschnittes?

17. Wieviel Grade umfaßt der Bogen eines Kreisausschnittes, dessen Fläche 74·2 dm^2 und dessen Halbmesser 7 *dm* beträgt?

18. Wie groß ist die Fläche eines Kreisabschnittes, dessen Halbmesser 50 *mm* und dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist?

19. Um einen kreisrunden Teich, der eine Fläche von 15 *a* bedeckt, führt ein Weg von 125 *cm* Breite; welche Fläche nimmt derselbe ein?

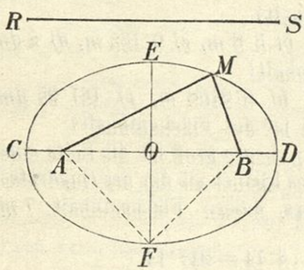
20. Wieviel m^2 Blech braucht man zu einem Schilde von der Form eines Halbkreisringes, wenn der Halbmesser des großen Kreises 1·4 *m* und jener des kleinen 0·95 *m* beträgt?

IX. Die Ellipse und einige andere krumme Linien.

1. Die Ellipse.

§ 150. Es seien in einer Geraden zwei Punkte A und B (Fig. 183) gegeben. Befestigt man in A und B Stifte und legt um dieselben einen an den Enden zusammengebundenen Faden, der länger ist als der Abstand AB der beiden Punkte A und B, spannt sodann den Faden mittels eines Zeichenstiftes M und führt diesen so, daß der Faden immer straff gespannt bleibt, um die beiden Punkte herum, so beschreibt der Punkt M eine krumme Linie, die Ellipse heißt.

Fig. 183.



Die Ellipse ist eine krumme Linie, in der die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen Punkten immer dieselbe ist.

Die Ellipse ist, wie der Kreis, eine geschlossene krumme Linie.

Die zwei gegebenen Punkte A und B heißen die Brennpunkte der Ellipse; die Entfernungen eines Punktes M von den beiden Brennpunkten, nämlich die Strecken AM und BM, werden Leitstrahlen dieses Punktes genannt.

Die Strecke CD, die durch die beiden Brennpunkte geht, heißt die große Achse. Die Endpunkte C und D derselben heißen die Scheitel und der Halbierungspunkt O der Mittelpunkt der Ellipse. Die große Achse CD ist gleich der gegebenen Strecke RS. Man kann daher sagen:

Die Summe der beiden Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist der großen Achse derselben gleich.

$$AM + BM = AF + BF = \ldots = CD.$$

Die Strecke EF, die im Mittelpunkt O auf der großen Achse normal steht, heißt die kleine Achse der Ellipse.

Die Entfernung eines Brennpunktes der Ellipse von dem Mittelpunkte derselben heißt die Exzentrizität der Ellipse (AO und BO). Je kleiner die Exzentrizität ist, desto mehr nähert sich die Ellipse einem

Kreise. Ein Kreis kann daher als eine Ellipse, deren Exzentrizität Null ist, angesehen werden.

Die Ellipse wird vielfach angewendet: man macht z. B. Gewölbe, Wasserbehälter, Rasenplätze, Blumenbeete u. dgl. von elliptischer Form; von Bedeutung aber ist diese Linie in der Astronomie, indem unsere Erde und alle Planeten unseres Sonnensystems in mehr oder weniger gestreckten Ellipsen sich um die Sonne bewegen, die sich in einem der Brennpunkte aller jener elliptischen Bahnen befindet.

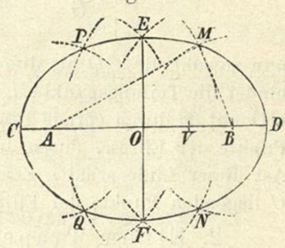
In dem rechtwinkligen Dreiecke AOF (Fig. 183) ist die Hypotenuse AF gleich der halben großen Achse (a), die Kathete OF gleich der halben kleinen Achse (b) und die Kathete AO gleich der Exzentrizität (e) der Ellipse. Sind daher von diesen drei Größen zwei gegeben, so kann man aus denselben die dritte bestimmen.

$$a^2 = b^2 + e^2;\ b^2 = a^2 - e^2;\ e^2 = a^2 - b^2.$$

§ **151. Konstruktionsaufgaben.** Wenn die große Achse und die Entfernung der beiden Brennpunkte gegeben sind, beliebig viele Punkte der Ellipse zu bestimmen.

Es seien (Fig. 184) A und B die beiden Brennpunkte. Man ziehe durch dieselben eine Gerade, halbiere den Abstand AB in O und trage von O aus bis C und D die halbe Länge der gegebenen großen Achse auf; CD ist nun die große Achse der Ellipse, C und D sind ihre Scheitel. Beschreibt man ferner mit der halben großen Achse aus beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen, so liegen die Durchschnittspunkte E und F in dem Umfange der Ellipse. Zieht man durch diese Punkte die Strecke EF, so muß dieselbe, weil über AB als Grundlinie auch oben und unten ein gleichschenkliges Dreieck gedacht werden kann, durch den Punkt O gehen und auf AB normal stehen; EF ist also die kleine Achse der Ellipse. Nun nehme man in der Strecke AB irgend einen Punkt V an, so wird dadurch die große Achse in zwei Abschnitte geteilt; beschreibt man zuerst mit dem größeren CV aus beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen und dann ebenso mit dem kleineren Abschnitte DV, so sind die vier Durchschnittspunkte M, N, P und Q Punkte der Ellipse, weil für jeden derselben der eine Leitstrahl dem Abschnitte CV der großen Achse und der andere Leitstrahl dem Abschnitte DV, also ihre Summe der ganzen großen Achse, gleich ist. Auf diese Art können, wenn man in der Strecke AB verschiedene Punkte annimmt, beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmt werden. Verbindet man diese Punkte durch eine stetig gekrümmte Linie, so erhält man dadurch die verlangte Ellipse und zwar umso genauer, je mehr Punkte derselben man bestimmt hat.

Fig. 184.



Es ist eine Ellipse zu konstruieren, von welcher die beiden Achsen AB und CD gegeben sind.

1. Art. Bestimmen der beiden Brennpunkte der Ellipse und Konstruieren derselben nach dem eben beschriebenen Verfahren in § 151.

2. Art. nach Fig. 185.

Fig. 185.

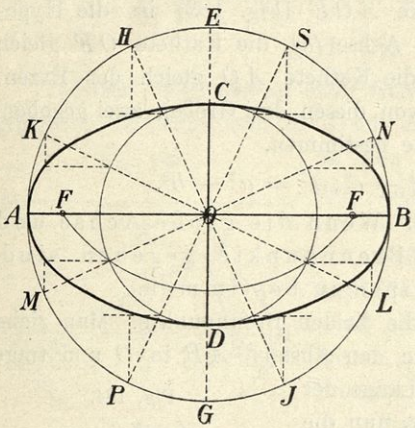
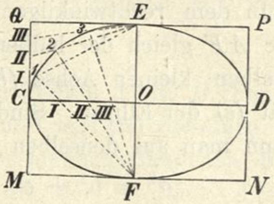


Fig. 186.



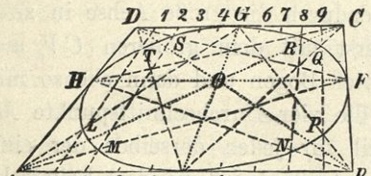
§ 152. 1. In ein gegebenes Rechteck $MNPQ$ (Fig. 186) eine Ellipse zu zeichnen.

Man ziehe durch die Mitten der Seiten die Strecken CD und EF, so sind diese bezüglich die große und die kleine Achse und ihr Durchschnitt O der Mittelpunkt der Ellipse. Teilt man nun sowohl die CQ als die CO in gleich viele, z. B. in vier gleiche Teile, und verbindet die Teilungspunkte *I, II, III* der CQ mit E die Teilungspunkte *I, II, III* der CO mit F durch gerade Linien, so geben die Durchschnitte 1, 2, 3 dieser Geraden Punkte der Ellipse, durch deren Verbindung man den zwischen C und E liegenden Ast dieser Linie erhält. Ebenso kann man die zwischen E und D, D und F, F und C liegenden Punkte der Ellipse bestimmen.

2. Einem Trapeze eine Ellipse einzuschreiben.

Die Mitten E und G (Fig. 187) der beiden Parallelseiten sind Punkte der Ellipse; ebenso die Punkte F und H, die man erhält, wenn man durch den Durchschnitt O der Diagonalen die $HF \parallel AB$ zieht. Teilt man dann jede der zwei Parallelseiten in 10 gleiche Teile, verbindet die ersten zwei und die letzten zwei Teilungspunkte durch Strecken und zieht auch von den Punkten E, F, G, H zu den gegenüberstehenden Eckpunkten des Trapezes Strecken, so liegen die Durchschnitte L, M, N, P, Q, R, S, T dieser und der früher gezogenen Strecken in der Ellipse. Man hat also zur Bestimmung der Ellipse zwölf Punkte.

Fig. 187.



§ 153. Flächeninhalt der Ellipse. Man hat gefunden, daß eine Ellipse ebensoviel Fläche einschließt wie ein Kreis, in dem das Quadrat des Halbmessers gleich ist dem Produkte aus den beiden Halbachsen der Ellipse. Da nun der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist dem Quadrate des Halbmessers multipliziert mit der Ludolfischen Zahl, so folgt:

Der Flächeninhalt einer Ellipse wird gefunden, indem man das Produkt der beiden halben Achsen mit der Ludolfischen Zahl multipliziert; $f = a \cdot b \cdot \pi$.

Z. B. wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren Achsen 11 *m* und 7 *m* sind?

Produkt der Halbachsen $= \frac{11}{2} \times \frac{7}{2} = 19\frac{1}{4}$.

Flächeninhalt $= 19\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{7} = 60\frac{1}{2}$; $f = 60{\cdot}5\ dm^2 = 60\ dm^2\ 50\ cm^2$.

§ 154. **Aufgaben.**

1. Die kleine Achse der Ellipse ist 3 *dm*, die Exzentrizität 8 *dm*; wie groß ist die halbe große Achse?

2. Bei einer Ellipse ist $e = 1{\cdot}6\ m$, die große Achse $6{\cdot}8\ m$; wie groß ist die kleine Achse?

3. Die Bahn unserer Erde um die Sonne ist eine Ellipse, deren halbe große Achse 20657700 und deren halbe kleine Achse 20655100 geographische Meilen beträgt; wie groß ist die Exzentrizität der Erdbahn?

4. Ein Gärtner hat eine Ellipse zu konstruieren, deren Achsen 522 *cm* und 378 *cm* betragen; wie weit muß er die Brennpunkte voneinander nehmen?

5. Bei einer Ellipse ist $a = 29\ dm$, $b = 22\ dm$; wie groß ist der Flächeninhalt?

6. Wie groß ist *a)* der Flächeninhalt, *b)* der Umfang einer Ellipse, deren Achsen $4{\cdot}35\ m$ und $3{\cdot}02\ m$ betragen? $[u = (a + b) . \pi.]$

7. Ein Blumenbeet hat die Form einer Ellipse von $4\frac{1}{2}\ m$ Länge und $3\frac{3}{4}\ m$ Breite; wie groß ist der Flächeninhalt und der Umfang?

8. Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren kleine Achse $7{\cdot}2\ dm$ ist und deren Brennpunkte 3 *dm* voneinander abstehen?

9. Die elliptische Grundfläche eines Gefäßes soll 10 dm^2 betragen. Wie lang muß die große Achse genommen werden, wenn die kleine Achse eine Länge von 28 *cm* hat?

10. Die kleine Achse einer Ellipse ist $1{\cdot}12\ m$, die Exzentrizität $1{\cdot}05\ m$; wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, der mit der Ellipse gleichen Inhalt hat?

2. Konstruktion verschiedener krummliniger Gebilde.

§ 155. 1. Aus vier Kreisbogen kann durch verschiedene Konstruktionsarten eine geschlossene krumme Linie, die sich an Gestalt einer Ellipse nähert, hergestellt werden.

Fig. 188.

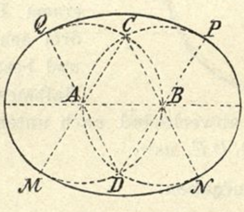
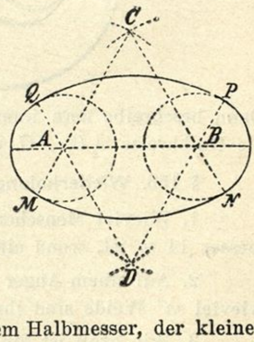


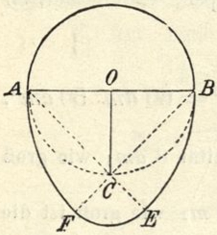
Fig. 189.



a) Man beschreibe (Fig. 188) aus zwei beliebigen Punkten *A* und *B* mit ihrem Abstande *AB* als Halbmesser zwei Kreise, die sich in *C* und *D* schneiden, und ziehe aus *C* und *D* durch *A* und *B* Gerade, welche die Peripherien der beiden Kreise in *M*, *N*, *P* und *Q* schneiden. Beschreibt man dann aus *C* den Kreisbogen *MN* und aus *D* den Kreisbogen *QP*, so erhält man die krumme Linie *MNPQM*, die sich einer Ellipse nähert und Korblinie genannt wird.

b) Man beschreibe (Fig. 189) aus *A* und *B* mit einem Halbmesser, der kleiner als die Hälfte von *AB* ist, zwei Kreise und dann aus denselben Punkten mit *AB* als Halbmesser die sich in C und D schneidenden Kreisbogen, ziehe aus C und D durch A und B Gerade, welche die Peripherien der beiden Kreise in M, N, P und Q schneiden, und beschreibe sodann aus C und D die Kreisbogen MN und QP.

Fig. 190.

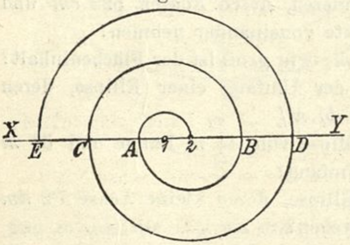


2. Die Eilinie oder das Oval (Fig. 190) ist aus einem Halbkreise und einem länglichen Gebilde, das einer halben Ellipse ähnlich ist, zusammengesetzt.

Man erhält das Oval, indem man über AB einen Kreis konstruiert, den Halbmesser $OC \perp AB$ errichtet, durch C die Geraden AE und BF gleich AB zieht, dann aus A den Kreisbogen BE, aus B den Bogen AF und aus C den Bogen FE beschreibt.

3. Die Spirallinie (Fig. 191) ist aus konzentrischen, auf den entgegengesetzten Seiten einer Geraden gelegenen Halbkreisen zusammengesetzt. Diese winden sich so umeinander herum, daß die Windungen stets gleich weit abstehen.

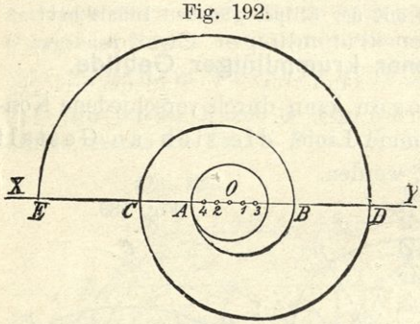
Fig. 191.



Um eine Spirale zu erhalten, beschreibt man aus dem Punkte 1 der Geraden XY einen Halbkreis $A2$ nach oben, dann aus 2 mit dem Halbmesser $2A$ einen Halbkreis nach unten und so fort weitere Halbkreise aus 1 nach oben, aus 2 nach unten.

4. Die Schneckenlinie (Fig. 192) besteht aus exzentrischen, zu beiden Seiten einer Geraden gelegenen Halbkreisen. Die beiden inneren Halbkreise ergänzen sich zu einem Kreise, dem sogenannten Auge; die weiteren Halbkreise bilden Windungen, deren Abstand immer größer wird.

Fig. 192.



Konstruktion der Schneckenlinie: Man trage auf der Geraden YX von einem Punkte O beliebig viele, z. B. drei sehr kleine gleiche Strecken auf und beschreibe zuerst aus O mit dem Halbmesser OA einen Kreis (das Auge). Dann beschreibe man immer abwechselnd nach unten und nach oben aus 1, 2, 3, 4 die Halbkreise AB, BC, CD DE, usw.

§ 156. **Wiederholungsaufgaben.**

1. Wieviel Menschen haben in einem kreisrunden Saale Platz, dessen Durchmesser 14 m ist, wenn ein Mensch $17\frac{1}{2}$ dm^2 einnimmt?

2. Auf einem Anger ist eine Kuh mit einem 2·8 m langen Stricke angebunden; wieviel m^2 Weide sind ihr zugemessen?

3. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Inhalt gleich ist der Fläche eines Kreises vom Halbmesser 8 dm?

4. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, wenn der zu 24^0 gehörende Ausschnitt desselben 4·8 dm^2 beträgt, und welche Länge hat der Bogen des Kreisausschnittes?

5. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisabschnittes, dessen Sehne = 2 *m* 5 *dm* dem Halbmesser des Kreises gleich ist?

6. Wie groß ist die Fläche eines Kreisringes, wenn die beiden konzentrischen Kreise 3 *m* 6 *dm* und 4 *m* 4 *dm* zu Durchmessern haben?

7. Bestimme den Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die ihn einschließenden Kreisumfänge 315·8 *mm* und 410·5 *mm* betragen!

8. Wie groß ist der längere Halbmesser eines Kreisringes von 50·24 cm^2, wenn der kürzere Halbmesser 3 *cm* beträgt?

9. Auf einer Schießscheibe beträgt der Durchmesser des innern schwarzen Ringes 0·15 *m* und die Breite des weißen Ringes 0·3 *m*; wie groß ist der weiße Ring?

10. Ein kreisrunder Grasplatz von 18 *m* Durchmesser ist mit einem 2 *m* breiten Wege umgeben; wieviel Fläche nimmt dieser Weg ein?

11. Um einen kreisrunden Turm von 32 *m* Umfang wird ein 3 *m* breiter Graben gezogen; welche Fläche nimmt dieser ein?

12. Ein Garten ist 68 *m* 2 *dm* lang, 41 *m* 3 *dm* breit; in der Mitte desselben befindet sich ein kreisrunder Teich, welcher samt der ihn einschließenden Mauer 12 *m* 4 *dm* im Durchmesser hat; wie groß ist die Landfläche des Gartens?

13. In einen Kreis, dessen Halbmesser 2 *m* 4 *dm* ist, wird ein regelmäßiges Sechseck beschrieben; um wieviel ist die Fläche dieses Sechseckes kleiner als die Fläche des Kreises?

14. Die elliptische Grundfläche eines Gefäßes soll 15 dm^2 betragen. Wie lang muß die kleine Achse genommen werden, wenn die große Achse eine Länge von 48 *cm* hat?

15. Die kleine Achse einer Ellipse ist $4\frac{4}{7}$ *m*, die Exzentrizität $3\frac{1}{7}$ *m*; wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, der mit der Ellipse gleichen Inhalt hat?

16. Stelle in Übersicht die Formeln über die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt der behandelten gerad- und krummlinigen Figuren zusammen und präge sie dir durch fleißige Übung unvergeßlich ein!

C.

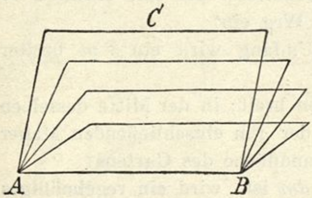
Stereometrie.

X. Gerade Linien und Ebenen im Raume.

Bestimmungsstücke einer Ebene.

§ **157.** Durch zwei Punkte A und B (Fig. 193) wird eine Gerade vollkommen bestimmt, d. h. es läßt sich durch zwei Punkte eine einzige gerade Linie ziehen. Legt man nun durch diese Gerade AB eine Ebene, so kann man diese rings um die Gerade drehen, wodurch sie unzählig viele verschiedene Lagen einnimmt. Durch zwei Punkte oder durch eine Gerade ist demnach eine Ebene der Lage nach nicht bestimmt. Nimmt man aber außer der Geraden noch einen dritten Punkt C an, so wird es unter jenen unzählig vielen Lagen, welche die Ebene während ihrer Umdrehung annehmen kann, eine einzige geben, in der die Ebene durch die Gerade AB und den außer ihr liegenden Punkt C geht. Durch eine Gerade und einen außer ihr liegenden Punkt oder durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte kann demnach eine einzige Ebene gelegt werden.

Fig. 193.



Die Lage einer Ebene ist vollkommen bestimmt:

1. durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte;
2. durch eine Gerade und einen außer ihr liegenden Punkt;
3. durch zwei sich schneidende Gerade (Winkel);
4. durch zwei parallele Gerade. (Veranschaulichung!)

Die Lage einer Ebene im Raume kann 1. wagrecht (horizontal), 2. lotrecht (vertikal) oder 3. schräg sein. (Veranschaulichung, Beispiele!)

Was für Gerade der Richtung nach lassen sich *a)* in einer wagrechten Ebene, *b)* in einer lotrechten und *c)* in einer schrägen Ebene ziehen? Welche Richtung können Gerade, die man in einer schrägen Ebene zieht, nicht haben?

1. Lage der Geraden im Raume.

Zwei Gerade im Raume.

§ **158.** Zwei Gerade im Raume lassen sich entweder in einer und derselben Ebene liegend vorstellen oder nicht. Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen und sich nicht decken, sind entweder parallel (gleichlaufend) oder sie schneiden sich in einem Punkte, je nachdem sie dieselbe oder eine verschiedene Richtung haben. Gerade, die man sich nicht in einer und derselben Ebene liegend vorstellen kann, gehen aneinander vorbei, sie kreuzen sich; man nennt sie sich kreuzende (windschiefe) Gerade.

Zwei Gerade im Raume können also *a)* parallel (gleichlaufend) sein, *b)* sich in einem Punkte schneiden oder *c)* sich kreuzen.

Beispiele!

Lage der Geraden gegen eine Ebene.

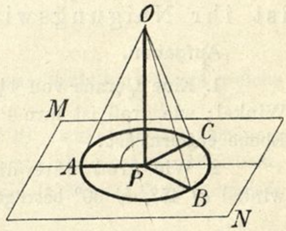
§ 159. Eine Gerade im Raume kann gegen eine Ebene in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder liegt die Gerade ganz in der Ebene; oder es schneidet die hinreichend verlängerte Gerade die Ebene in einem Punkte, sie ist gegen die Ebene geneigt; oder es trifft die unbegrenzt verlängerte Gerade mit der beliebig erweiterten Ebene nie zusammen, die Gerade ist mit der Ebene parallel.

Der Punkt, in dem eine Gerade eine Ebene schneidet, heißt der Fußpunkt dieser Geraden in der Ebene.

Eine gegen eine Ebene geneigte Gerade kann auf derselben normal oder schief stehen. Eine Gerade steht auf einer Ebene normal, wenn sie auf jeder Geraden, die durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogen wird, normal steht; in jedem anderen Falle steht sie auf der Ebene schief.

Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck APO (Fig. 194) um die eine Kathete OP, so beschreibt die zweite Kathete AP während dieser Drehung eine Ebene, worauf die erste Kathete OP normal steht.

Fig. 194.



Die Normale ist die kürzeste unter allen Strecken, die von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser gezogen werden können. Denn: ist $OP \perp$ Ebene MN und OA irgend eine andere von O zu der Ebene geneigte Strecke, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke APO die Kathete OP kleiner als die Hypotenuse OA.

Die Normale von einem Punkte auf eine Ebene gibt die Entfernung (den Abstand) jenes Punktes von der Ebene an.

Aus dem Obigen folgt auch:

Zieht man von einem Punkte zu einer Ebene eine Normale und mehrere gleich lange geneigte Strecken, so liegen die Fußpunkte der letzteren Strecken in einem Kreise, der den Fußpunkt der Normalen zum Mittelpunkte hat.

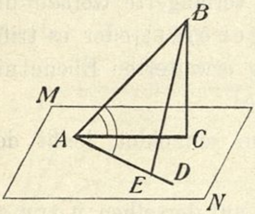
Von einem Punkte (Fig. 194, O) außerhalb einer Ebene (MN) kann auf diese nur eine Normale (OP) gezogen werden.

In einem Punkte (Fig. 194, P) einer Ebene (MN) kann auf diese nur eine Normale (PO) errichtet werden.

Neigungswinkel einer Geraden zu einer Ebene.

§ 160. Erklärung. Die Strecke AB (Fig. 195) trifft die Ebene MN im Fußpunkte A. Zieht man von dem anderen Endpunkte B eine Normale auf MN, so heißt die Strecke AC zwischen den Fußpunkten der Normalen und der gegebenen Strecke die **Projektion** dieser Strecke auf der Ebene.

Fig. 195.



Der Winkel, den eine Gerade mit ihrer Projektion auf einer Ebene einschließt, bildet den **Neigungswinkel** der Geraden zur Ebene (Fig. 195, $\sphericalangle BAC$).

Es sei in Fig. 195 $BC \perp$ Ebene MN, also AC die Projektion der Geraden AB auf der Ebene MN. Zieht man durch A in der Ebene MN irgend eine andere Gerade AD, macht $AE = AC$ und zieht noch BE, so ist diese BE länger als die Normale BC, $BE > BC$ (§ 159); in den Dreiecken BAE und BAC sind also zwei Seiten paarweise gleich, dagegen die dritten Seiten ungleich; daher liegt auch der größeren dieser Seiten ein größerer Winkel gegenüber, also Winkel $BAE > BAC$ oder Winkel $BAC < BAE$; d. h.:

Unter allen Winkeln, die eine Gerade mit den durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogenen Geraden bildet, ist ihr Neigungswinkel gegen diese Ebene der kleinste.

Aufgaben.

1. Eine Gerade von $1\frac{1}{2}$ *dm* Länge schneidet eine Ebene unter einem schiefen Winkel; wie groß ist ihre Projektion, wenn der eine Endpunkt 1 *dm* 2 *cm* von der Ebene entfernt ist?

2. Wie groß wäre die Projektion derselben Geraden, wenn der Neigungswinkel *a)* 45^0, *b)* 60^0 betrüge?

2. Lage der Ebenen gegeneinander.

§ 161. Zwei Ebenen können gegeneinander in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder fallen die zwei Ebenen ganz zusammen; oder es schneiden sich die hinreichend erweiterten Ebenen in einer geraden Linie, sie sind gegeneinander geneigt; oder es treffen die beiden Ebenen, soweit man sie auch erweitern mag, nie zusammen, sie sind parallel. (Veranschaulichung!)

Der Abstand zweier parallelen Ebenen ist die Normale, die von einem Punkte der einen auf die andere gefällt wird.

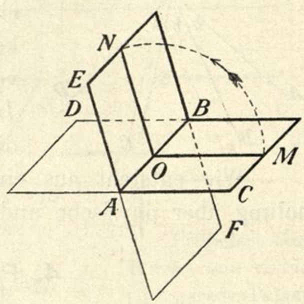
Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so ist ihr Schnitt eine gerade Linie.

Neigungswinkel zweier Ebenen.

§ 162. Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so heißt die Größe der Drehung, welche die eine Ebene um die gemeinschaftliche Schnittlinie machen muß, um in die Lage der anderen Ebene zu gelangen, der **Flächenwinkel** oder Keil der beiden Ebenen; die gemeinschaftliche Schnittlinie der Ebenen heißt man die Kante und die beiden Ebenen selbst die Seitenflächen des Flächenwinkels.

In Fig. 196 sind AB die Kante, BE und BC die Seitenflächen des von den Ebenen BE und BC gebildeten Flächenwinkels $C(AB)E$.

Fig. 196.



Errichtet man in einem beliebigen Punkte O der Kante AB auf diese in den beiden Seitenflächen die Normalen OM und ON, so wird, wenn man die Ebene BC um AB in die Lage BE dreht, gleichzeitig der Winkel MON beschrieben; der von diesen Normalen gebildete Winkel MON bestimmt den **Neigungswinkel der beiden Seitenflächen.**

Die Größe des Flächenwinkels wird durch den Neigungswinkel der sich schneidenden Ebenen gemessen.

Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so stehen diese normal, sonst schief aufeinander.

Übung.

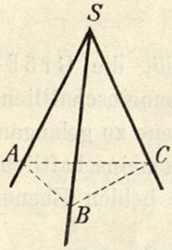
1. Welche Ebenen im Schulzimmer sind parallel; welche stehen normal, welche schief aufeinander?

2. Welche Lage gegeneinander können (müssen) *a)* zwei lotrechte Ebenen, *b)* eine lotrechte und eine wagrechte Ebene, *c)* eine lotrechte und eine schiefe Ebene, *d)* zwei wagrechte Ebenen, *e)* eine wagrechte und eine schiefe Ebene, *f)* zwei schiefe Ebenen haben?

3. Körperliche Ecken.

§ 163. Erklärungen: Drei oder mehrere Ebenen, deren Schnittlinien durch einen und denselben Punkt gehen, schließen einen nach einer Seite hin unbegrenzten Raum ein, der eine **körperliche Ecke**, auch bloß **Ecke**, genannt wird. Der Punkt, in dem die Schnittlinien der Ebenen zusammentreffen, heißt der Scheitel oder die Spitze der körperlichen Ecke; die Schnittlinien nennt man die Kanten, die Winkel je zweier aufeinander folgenden Kanten die Kantenwinkel und ihre Ebenen die Seitenflächen (Seiten), endlich die Neigungswinkel je zweier benachbarter Seitenflächen die Flächenwinkel (Winkel) der Ecke.

Fig. 197.

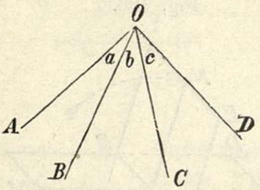


Ist (Fig. 197) S der Scheitel der Ecke und sind SA, SB, SC deren Kanten, so bezeichnet man die körperliche Ecke durch $SABC$ oder durch S; die Winkel ASB, BSC, CSA sind deren Kantenwinkel.

Zur Entstehung einer Ecke sind wenigstens drei Ebenen erforderlich. Eine Ecke heißt dreiseitig, vierseitig, . . je nachdem sie von drei, vier, . . Ebenen gebildet wird.

§ 164. In jeder Ecke ist die Summe der Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.

Fig. 198.



Denn würden alle Kantenwinkel zusammen 4 R betragen, so müßten alle Seitenebenen in eine einzige Ebene übergehen und könnten daher keine Ecke bilden. Je größer die Summe der von den Kanten eingeschlossenen Winkel AOB, BOC, COD (Fig. 198) ist, desto flacher ist die Ecke.

Wie entsteht aus einer körperlichen Ecke ein Körper? Wiederholung über physische und geometrische Körper!

4. Projizieren, Projektion.

Projizieren auf eine Ebene.

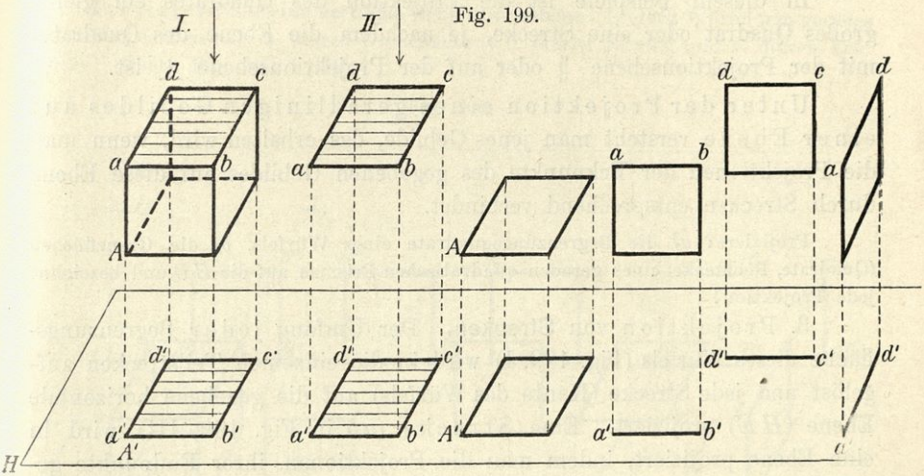
§ 165. Die zeichnerische Darstellung der Raumgebilde kann nicht im Raume, sondern stets nur auf einer Zeichenfläche (Ebene) erfolgen. Daher werden außerhalb der Zeichenebene liegende Raumgebilde gleichsam in die Ebene „geworfen“, projiziert.

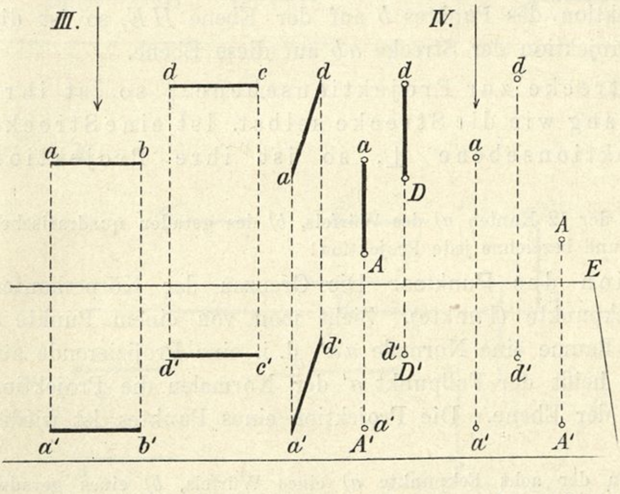
1. Projektion des **Körpers.** Ein Körper, z. B. ein Würfel, ist über einer horizontalen Ebene entsprechend aufgestellt (Fig. 199, I). Betrachtet man ihn von oben und zwar aus sehr großer Entfernung, so daß die Sehstrahlen || sind, so sieht man bloß die obere Grundfläche ($abcd$). Man nennt die Ansicht eines Körpers von oben den **Grundriß** oder die **horizontale Projektion.***) Die Ebene (HE), in der die horizontale Projektion gezeichnet (dargestellt) wird, heißt Grundrißebene oder horizontale Projektionsebene. Der Würfel erscheint in diesem Falle im Grundriß als ein Quadrat, oder die horizontale Projektion dieses Würfels ist ein Quadrat, d. i. eine Fläche, die aus der Projektion der oberen sichtbaren Fläche dieses Körpers besteht. Sie wird

*) Projektion, d. h. Zeichnung oder Darstellung eines Körpers auf einer Fläche (Flächenzeichnung).

erhalten, wenn man die auf die Projektionsebene senkrecht stehenden Kanten des Würfels verlängert, bis sie diese treffen, und wenn man diese Durchschnittspunkte (Fußpunkte) miteinander entsprechend verbindet. So erhält man in der Grundrißebene den **Grundriß** des Würfels, worin dessen Länge und Breite in wahrer Größe angegeben sind.

Fig. 199.





Projiziere einen Würfel (ein vierseitiges gerades Prisma) auf die *HE* und zeichne dessen Projektion!

2. **Projektion geradliniger Figuren.** Die Oberfläche des Würfels (Fig. 199, I), d. i. die Summe dessen sämtlicher Begrenzungsflächen, wird in die einzelnen Teilflächen aufgelöst. Jedes der 6 gleich großen Begrenzungsquadrate wird wieder von oben aus sehr großer Entfernung betrachtet und das Bild in der horizontalen Projektionsebene (*HE*) dargestellt. Von jedem der 4 Eckpunkte des gegebenen Quadrates (*abcd* in Fig. 199, II) im Raume wird eine Normale (aa' — bb' — cc' — dd'), Projektionsstrahl oder projizierende Gerade genannt, auf die horizontale Projektionsebene (*HE*)

gezogen. Der Fußpunkt a' (b', c', d') dieser Normalen heißt die Projektion des Punktes a (b, c, d) auf der horizontalen Projektionsebene. Die Projektionen der Eckpunkte der gegebenen Figur auf dieser Ebene werden durch Strecken entsprechend miteinander verbunden und geben eine Figur, welche die Projektion des Quadrates auf einer Ebene darstellt.

In diesem Beispiele ist die Projektion des Quadrates ein gleich großes Quadrat oder eine Strecke, je nachdem die Ebene des Quadrates mit der Projektionsebene $\parallel$ oder auf der Projektionsebene $\perp$ ist.

Unter der Projektion eines geradlinigen Gebildes auf einer Ebene versteht man jenes Gebilde, das erhalten wird, wenn man die Projektionen der Eckpunkte des gegebenen Gebildes auf diese Ebene durch Strecken entsprechend verbindet.

Projiziere: *a)* die Begrenzungsquadrate eines Würfels, *b)* die Grenzflächen (Quadrate, Rechtecke) eines geraden quadratischen Prismas auf die *HE* und bezeichne jede Projektion!

3. Projektion von **Strecken.** Der Umfang jeder Begrenzungsfläche dieses Würfels (Fig. 199, I) wird in die einzelnen Teilstrecken aufgelöst und jede Strecke (Kante des Würfels) auf die gegebene horizontale Ebene (*HE*) projiziert. Eine Strecke (ab in Fig. 199, III) wird in eine Ebene projiziert, indem man die Projektionen ihrer Endpunkte geradlinig verbindet. Ist (in Fig. 199, III) a' die Projektion des Punktes a und b' die Projektion des Punktes b auf der Ebene *HE*, so ist die Strecke $a'b'$ die Projektion der Strecke ab auf diese Ebene.

Ist eine Strecke zur Projektionsebene $\parallel$ so ist ihre Projektion so lang wie die Strecke selbst. Ist eine Strecke auf der Projektionsebene $\perp$, so ist ihre Projektion ein Punkt.

Projiziere jede der 12 Kanten *a)* des Würfels, *b)* des geraden quadratischen Prismas auf die *HE* und bezeichne jede Projektion!

4. Projektion des **Punktes.** Die Grenzen der Körperkanten (Strecken) sind Eckpunkte (Punkte). Zieht man von einem Punkte a (Fig. 199, IV) im Raume eine Normale aa', d. i. eine Projizierende auf die Ebene *HE*, so heißt der Fußpunkt a' der Normalen die Projektion des Punktes a auf der Ebene. Die Projektion eines Punktes ist wieder ein Punkt.

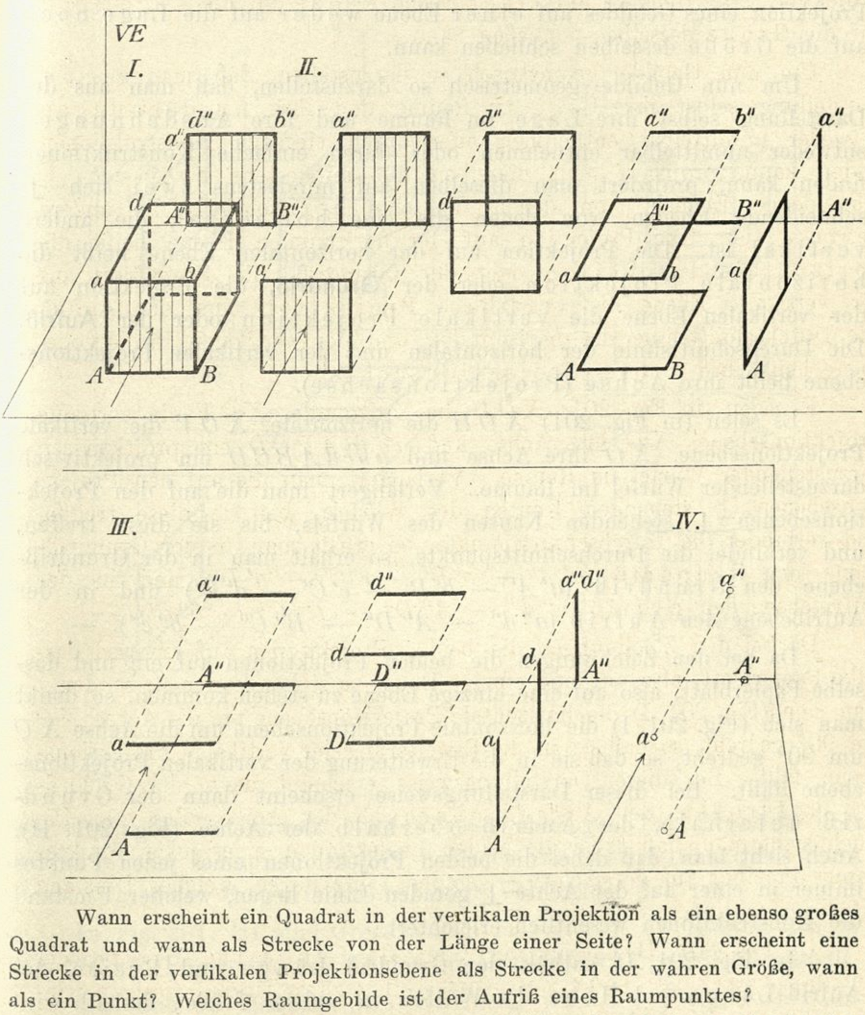
Projiziere jeden der acht Eckpunkte *a)* eines Würfels, *b)* eines geraden quadratischen Prismas auf die *HE* und bezeichne jede Projektion!

§ **166.** Ein Würfel (Fig. 200, I) wird auf **eine vertikale Projektionsebene** projiziert. Betrachtet man diesen Körper von vorn aus sehr großer Entfernung, so daß die Sehstrahlen parallel sind, so sieht man bloß die vordere Seitenfläche $abBA$. Man nennt die Ansicht (eines Körpers) von vorn den **Aufriß** oder die **vertikale Projektion.**

Verlängert man die auf der vertikalen Projektionsebene normal stehenden Kanten des Würfels, bis sie diese treffen, und verbindet die Durchschnittspunkte entsprechend, so erhält man in der Aufrißebene den **Aufriß** des Würfels. Dieser ist ein Quadrat, in dem Länge und Höhe des Würfels in wahrer Größe angegeben sind.

Projiziere auf eine **vertikale Projektionsebene**: 1. einen Würfel (ein gerades quadratisches Prisma); 2. dessen Grenzflächen; 3. dessen Kanten und 4. dessen Eckpunkte! (Siehe Fig. 200, I—IV.)

Fig. 200.



Wann erscheint ein Quadrat in der vertikalen Projektion als ein ebenso großes Quadrat und wann als Strecke von der Länge einer Seite? Wann erscheint eine Strecke in der vertikalen Projektionsebene als Strecke in der wahren Größe, wann als ein Punkt? Welches Raumgebilde ist der Aufriß eines Raumpunktes?

Die Ansicht des Körpers von der Seite, die **Seitenansicht** oder der **Kreuzriß**, wird auf einer Ebene (Kreuzrißebene KE) gezeichnet, die sowohl auf der Grundrißebene wie auch auf der Aufrißebene normal steht.

Projiziere auf eine Kreuzrißebene: 1. einen Würfel, 2. jede seiner Grenzflächen (Quadrate), 3. jede der Körperkanten (Strecken), 4. die Eckpunkte des Körpers!

Projizieren auf zwei zugeordnete Ebenen.

§ 167. Sind mehrere Gerade auf einer Ebene $\perp$, so haben alle Gebilde, deren entsprechende Punkte in denselben Normalen liegen, dieselbe Projektion auf diese Ebene. Daraus folgt, daß man aus der Projektion eines Gebildes auf einer Ebene weder auf die Lage noch auf die Größe desselben schließen kann.

Um nun Gebilde geometrisch so darzustellen, daß man aus der Darstellung selbst ihre Lage im Raume und ihre Ausdehnungen entweder unmittelbar entnehmen oder durch einfache Konstruktionen finden kann, projiziert man dieselben auf mindestens zwei sich $\perp$ schneidende Ebenen, von denen die eine horizontal, die andere vertikal ist. Die Projektion auf der horizontalen Ebene heißt die horizontale Projektion oder der **Grundriß**, die Projektion auf der vertikalen Ebene die vertikale Projektion oder der **Aufriß**. Die Durchschnittslinie der horizontalen und der vertikalen Projektionsebene heißt ihre Achse (Projektionsachse).

Es seien (in Fig. 201) XOH die horizontale, XOV die vertikale Projektionsebene, XO ihre Achse und $abcdABCD$ ein projektivisch darzustellender Würfel im Raume. Verlängert man die auf den Projektionsebenen $\perp$ stehenden Kanten des Würfels, bis sie diese treffen, und verbindet die Durchschnittspunkte, so erhält man in der Grundrißebene den Grundriß ($a'A' - b'B' - c'C' - d'D'$) und in der Aufrißebene den Aufriß ($a''d'' - A''D'' - B''C'' - b''c''$). —

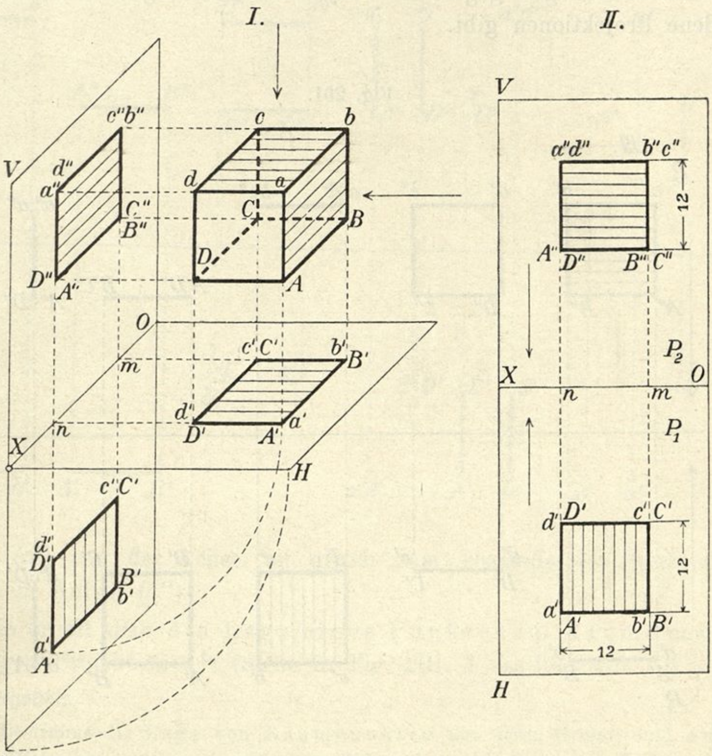
Da bei den Zeichnungen die beiden Projektionen auf ein und dasselbe Papierblatt, also auf eine einzige Ebene zu stehen kommen, so denkt man sich (Fig. 201, I) die horizontale Projektionsebene um die Achse XO um 90^0 gedreht, so daß sie in die Erweiterung der vertikalen Projektionsebene fällt. Bei dieser Darstellungsweise erscheint dann der Grundriß unterhalb, der Aufriß oberhalb der Achse (Fig. 201, II). Auch sieht man, daß dabei die beiden Projektionen eines jeden Punktes immer in einer auf der Achse $\perp$ geraden Linie liegen, welcher Umstand die Konstruktionen wesentlich erleichtert.

In Fig. 201, II enthält der Grundriß Länge und Breite, der Aufriß Länge und Höhe des Würfels in wahrer Größe; deshalb wird im Grundriß die Länge und Breite, im Aufriß die Höhe mit der zugehörigen Maßzahl versehen, d. h. kotiert (die Kote oder Maßzahl).

Die Kotenhaken werden schwarz, die Kotenlinien rot ausgezogen; die Koten (Maßzahlen) werden stets normal auf die Richtung der Kotenlinien geschrieben.

Unter der **Projektion eines Körpers** auf einer Ebene versteht man das Gebilde, das durch das Projizieren der Flächen (Kanten) des Körpers auf diese Ebene erhalten wird. Zeichnet man die Projektionen eines Körpers auf beiden Projektionsebenen (in P_1 seinen Grundriß, in P_2 seinen Aufriß), so sind durch diese die Flächen und Strecken bestimmt,

Fig. 201.



von denen der Rauminhalt eines Körpers abhängt. Der **Grundriß und Aufriß** eines Körpers enthält demnach die geometrische Darstellung seines Rauminhaltes oder Volumens.

In Fig. 201, III sind Grenzflächen, in Fig. 201, IV Kanten und in Fig. 201, V Eckpunkte des Würfels im Grundriß und Aufriß dargestellt.

Ein **ebenes Gebilde** des Raumes wird im Grund- und im Aufriß dargestellt, indem man die Projektionen seiner Grenzlinien konstruiert.

Fig. 201, III veranschaulicht folgende Sätze:

1. Ist die Ebene eines Gebildes zu einer *PE* parallel, so ist die Projektion auf dieser Ebene mit dem Gebilde kongruent, die andere Projektion aber eine zur Achse parallele Strecke.

2. Steht die Ebene des Gebildes auf beiden Projektionsebenen normal, so sind beide Projektionen Strecken.

Daraus geht hervor, daß dasselbe Gebilde, wenn es durch Drehung in verschiedene Lagen gegen die Projektionsebenen gebracht wird, verschiedene Projektionen gibt.

Fig. 201.

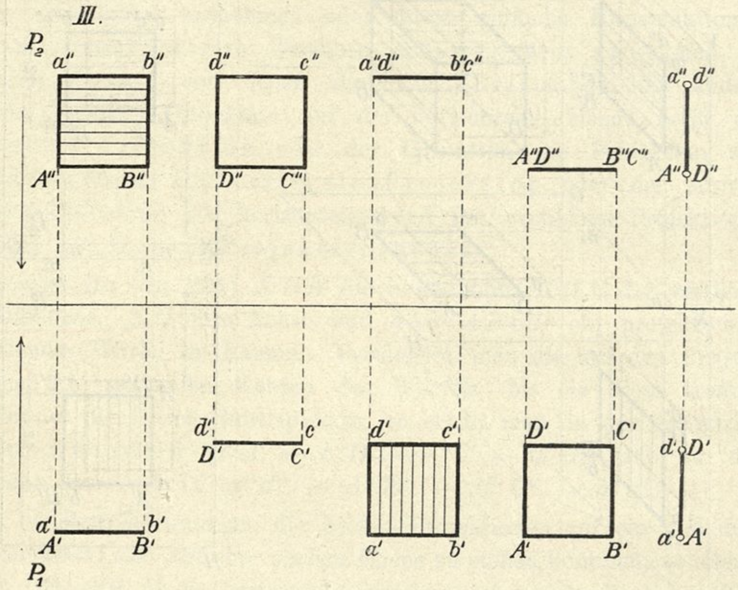


Fig. 201, IV veranschaulicht folgende Sätze:

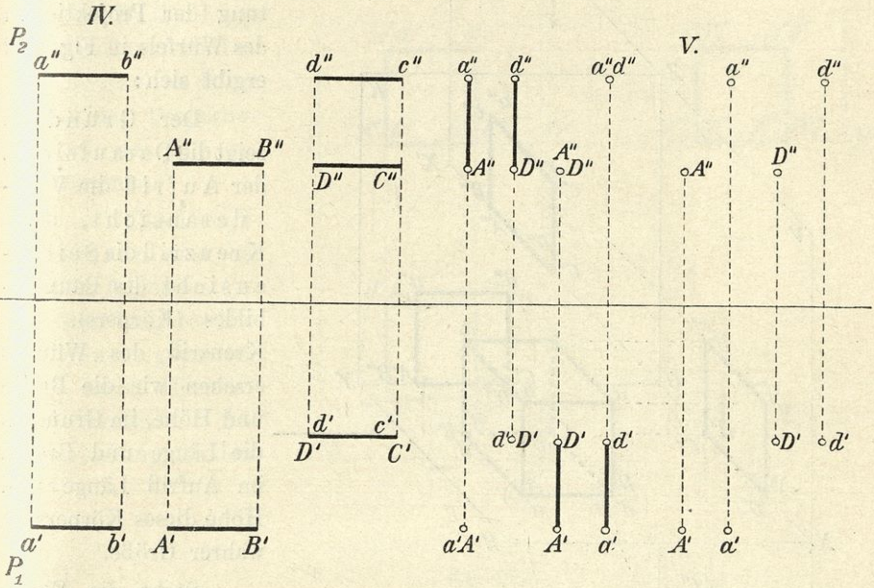
1. Ist eine Strecke parallel zu beiden Projektionsebenen, also parallel zur Achse, so sind auch ihre beiden Projektionen parallel zur Achse und mit der Raumstrecke von gleicher Länge.

2. Ist eine Raumstrecke normal zu einer *P E*, so ist ihre Projektion auf dieser Ebene ein Punkt, ihre andere Projektion ist normal auf der Achse und mit der Raumstrecke von gleicher Länge.

Die in der Aufrißebene gezeichnete horizontal Projizierende eines Raumpunktes (*a* in Fig. 201, I), d. i. der Abstand des Aufrisses dieses Punktes (a'') von der Achse, ist gleich dem Abstande des Punktes (a) von dem Grundriß (a').

Die in der Grundrißebene gezeichnete vertikal Projizierende eines Raumpunktes (*a* in Fig. 201, I), d. i. der Abstand des Grundrisses dieses

Fig. 201.



Punktes (a') von der Achse, ist gleich dem Abstande des Punktes (a) von seinem Aufriß (a'').

Wie erhält man die Lage eines Punktes im Raume aus den zugehörigen Projektionen? (Siehe in Fig. 201, I das Rechteck $aa'na''$!)

Aufgaben.

1. Bestimme die Lage von Raumpunkten aus deren Grund- und Aufriß, d. h. mit Hilfe der gegebenen vertikal Projizierenden und horizontal Projizierenden derselben!

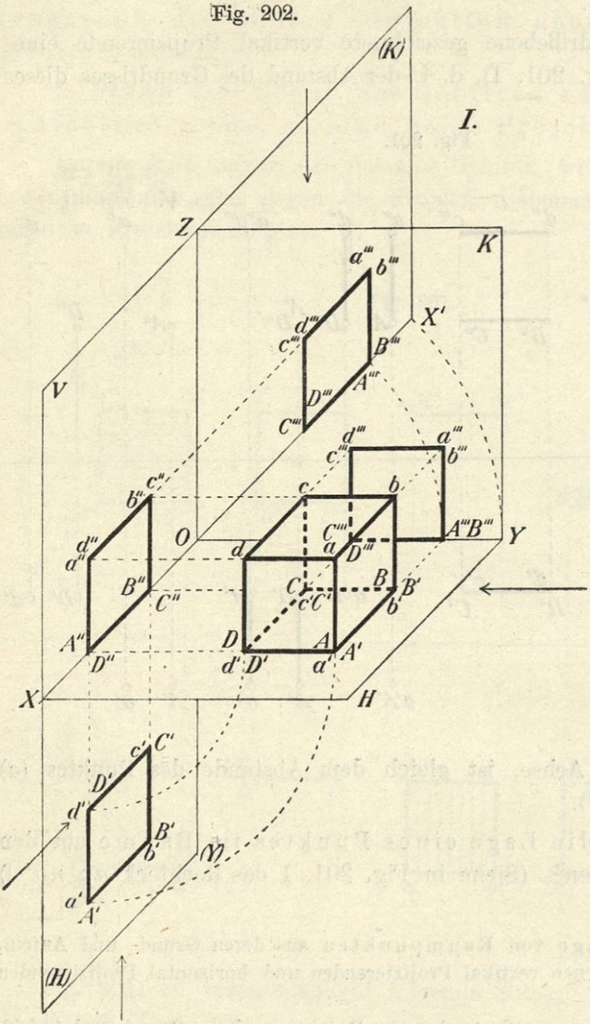
2. Bestimme die Lage von Strecken im Raume aus deren Grund- und Aufriß, d. h. mit Hilfe der gegebenen Projizierenden deren Endpunkte!

3. Bestimme nach Fig. 201, I und II Grund- und Aufriß *a)* eines Würfels, *b)* eines geraden quadratischen Prismas!

Projizieren auf drei zugeordnete Projektionsebenen.

§ 168. Oft ist bei der projektiven Darstellung eines Raumgebildes noch ein drittes Bild nötig, nämlich die Ansicht von der Seite, der Kreuzriß; dieser wird auf einer Ebene, Kreuzrißebene (KO, in Fig. 202, I) gezeichnet, die auf der Grundriß- und Aufrißebene normal steht. Nach dem Umklappen der Kreuzrißebene in die Erweiterung der Aufrißebene erscheint der Kreuzriß rechts seitwärts vom Aufriß. (Siehe Fig. 202, II!)

Fig. 202.



Aus der Betrachtung der Projektionen des Würfels in Fig. 202 ergibt sich:

Der Grundriß zeigt die Daraufsicht, der Aufriß die Vorderansicht, der Kreuzriß die Seitenansicht des Raumgebildes (Körpers). Im Kreuzriß des Würfels ersehen wir die Breite und Höhe, im Grundriß die Länge und Breite, im Aufriß Länge und Höhe dieses Körpers in wahrer Größe.

Steht die Ebene einer Figur auf den ersten beiden Projektionsebenen (P_1 und P_2) normal, so sind beide Projektionen Strecken; in solchem Falle gibt erst der Kreuzriß ein klares Bild von der geradlinigen Figur (Fig. 203, I, 5).

Liegt eine Figur in einer Projektionsebene, so stellt diese selbst die eine gleichnamige Projektion dar; die andere ungleichnamige liegt in der Projektionsachse (Fig. 203 I, 3).

Liegt eine Raumstrecke in einer PE, so fällt die gleichnamige Projektion mit ihr zusammen und die andere in die Achse (Fig. 203, II, 1).

Liegt ein Punkt in einer *PE*, so fällt die eine gleichnamige Projektion mit ihm zusammen und die andere in die Achse (Fig. 203, III, 1). Liegt ein Punkt in der Achse, so fallen beide Projektionen mit ihm zusammen.

Das Projizieren wird bei der folgenden Behandlung der einzelnen geometrischen Körper praktische Anwendung finden.

Fig. 202.

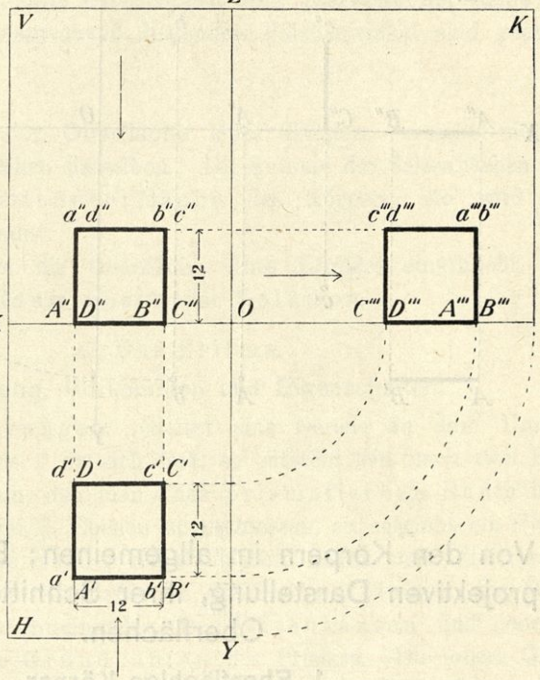


Fig. 203.

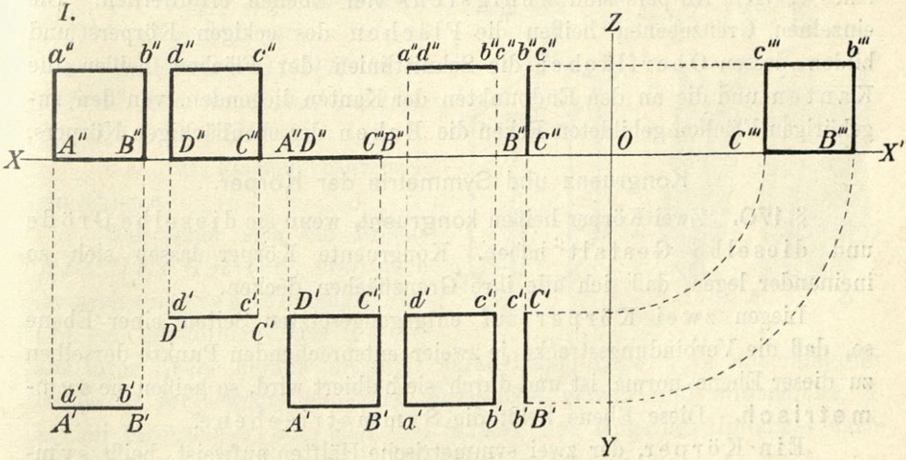
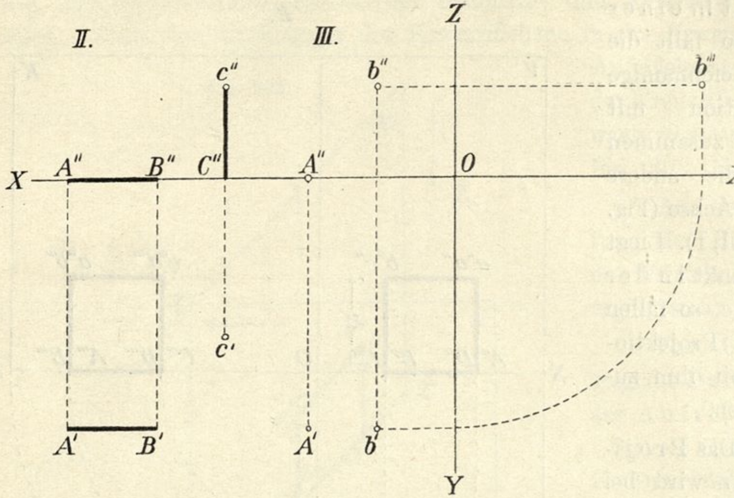


Fig. 203.



XI. Von den Körpern im allgemeinen; Bestimmung ihrer projektiven Darstellung, ihrer Schnitte, Netze und Oberflächen.

1. Ebenflächige Körper.

§ **169.** Ein Körper, der von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein ebenflächiger oder **eckiger Körper** (Polyeder). Zur Begrenzung eines eckigen Körpers sind wenigstens **vier** Ebenen erforderlich. Die einzelnen Grenzebenen heißen die Flächen des eckigen Körpers und bilden dessen Oberfläche; die Schnittlinien der Flächen heißen die Kanten und die an den Endpunkten der Kanten liegenden, von den zugehörigen Flächen gebildeten Ecken die Ecken des ebenflächigen Körpers.

Kongruenz und Symmetrie der Körper.

§ **170.** Zwei Körper heißen **kongruent,** wenn sie dieselbe Größe und dieselbe Gestalt haben. Kongruente Körper lassen sich so ineinander legen, daß sich alle ihre Grenzflächen decken.

Liegen zwei Körper auf entgegengesetzten Seiten einer Ebene so, daß die Verbindungsstrecke je zweier entsprechenden Punkte derselben zu dieser Ebene normal ist und durch sie halbiert wird, so heißen sie **symmetrisch.** Diese Ebene heißt die Symmetrieebene.

Ein Körper, der zwei symmetrische Hälften aufweist, heißt symmetrisch.

Beispiele! Nenne Körper mit mehreren Symmetrieebenen!

Ähnliche Körper haben zwar dieselbe Gestalt, aber verschiedene Größe; ihre Grenzflächen sind paarweise der Reihe nach ähnlich und ihre entsprechend liegenden Flächenwinkel sind paarweise gleich.

Beispiele!

§ 171. Unter der **Oberfläche** eines Körpers versteht man die Summe aller Grenzflächen desselben. Die Summe der Seitenflächen heißt insbesondere die Seitenoberfläche des Körpers; sie wird auch Mantelfläche genannt.

Der Raum, den die Oberfläche eines Körpers einschließt, heißt dessen **Kubikinhalt**, Rauminhalt oder Volumen.

a) Das Prisma.

Entstehung, Vorkommen und Eigenschaften.

§ 172. Erklärungen. Gleitet eine Gerade an dem Umfange eines ebenen Vieleckes || zu sich fort, so entsteht ein nach zwei Seiten hin unbegrenzter Raum, den man einen prismatischen Raum nennt. Wird dieser durch zwei || Ebenen abgeschlossen, so entsteht ein **Prisma.** (Fig. 204, 205.) Die zwei || Schnittflächen nennt man die Grundflächen, die übrigen Grenzflächen die Seitenflächen, die Durchschnitte der letzteren miteinander die Seitenkanten und jene mit den Grundflächen die Grundkanten des Prismas. Die obere Grundfläche wird auch die Deckfläche genannt. Der Normalabstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

Vorkommen: Nenne Gegenstände und Kristalle, die Prismen sind!

Der Körper $ABCDE\,A'B'C'D'E'$ (Fig. 204) ist ein Prisma, wenn die Ebene $ABCDE \parallel A'B'C'D'E'$ und wenn $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel EE'$ ist.

Was für Flächen begrenzen ein Prisma?

Man kann sich ein Prisma $ABCDEFGH$ (Fig. 205) auch dadurch entstanden denken, daß sich eine geradlinige Figur $ABCD$ aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage || in unveränderter Größe so fortbewegt, daß ihre Eckpunkte gerade und miteinander || Linien beschreiben, oder daß eine Strecke sich längs des Umfanges einer geradlinigen Figur || zu sich selbst fortbewegt.

Fig. 204.

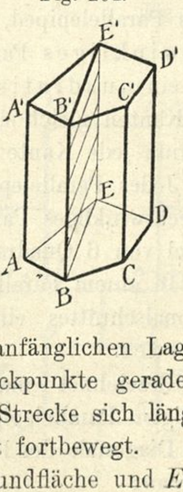
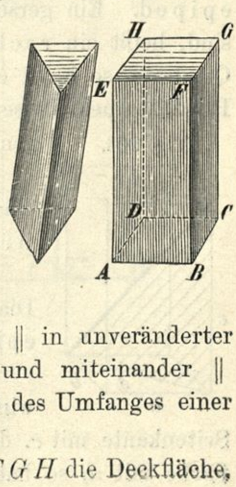


Fig. 205.



In Fig. 205 ist $ABCD$ die Grundfläche und $EFGH$ die Deckfläche, Eine Ebene ($BB'E'E$ in Fig. 204), die durch zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein Diagonalschnitt des Prismas.

Aus den vorhergehenden Erklärungen folgt:

1. Die beiden Grundflächen eines Primas sind $\cong$ Vielecke;

denn die gleichliegenden Seiten der Grundflächen sind als Parallele zwischen Parallelen gleich und die gleichliegenden Winkel haben parallele Schenkel, sind also auch gleich.

2. Alle Seitenflächen des Prismas sind Parallelogramme.

3. Alle Seitenkanten des Prismas sind einander gleich.

Arten des Prismas.

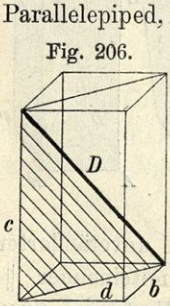
§ 173. Nach der Anzahl der Seitenflächen heißt das Prisma drei-, vier- oder mehrseitig, je nachdem es drei, vier oder mehrere Seitenflächen hat.

Mit Rücksicht auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundflächen ist ein Prisma **gerade** oder **schief**, je nachdem die Seitenkanten auf den Grundflächen normal oder schief stehen. In einem geraden Prisma ist die Höhe gleich einer Seitenkante; die Seitenflächen sind Rechtecke. In einem schiefen Prisma ist die Höhe kürzer als die Seitenkante.

Ein gerades Prisma mit regelmäßigen Grundflächen heißt regelmäßig.

Ein Prisma, dessen Grundflächen $\#$ sind, heißt ein Parallelepiped. Ein gerades Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped; sind die Grundflächen Quadrate, so heißt es ein quadratisches Prisma. Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten gleich sind, wird ein Würfel oder Kubus genannt; jede Kante heißt auch Seite des Würfels.

Fig. 206.



Jedes Parallelepiped wird von 6 Parallelogrammen, ein rechtwinkliges Parallelepiped von 6 Rechtecken, ein Würfel von 6 Quadraten begrenzt.

In einem Parallelepiped heißt jede Diagonale eines Diagonalschnittes eine Diagonale des Parallelepipedes.

Bezeichnet man die Grundkanten eines rechtwinkligen Parallelepipedes (Fig. 206) mit a und b, die Seitenkante mit c, die Diagonale des Prismas mit D und jene der Grundfläche mit d, so hat man:

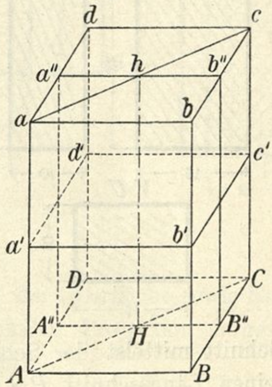
$$d^2 = a^2 + b^2 \text{ und}$$
$$D^2 = c^2 + d^2 = c^2 + a^2 + b^2, \text{ oder}$$
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Wie läßt sich daher die Diagonale eines Würfels durch dessen Kante ausdrücken?

Schnitte am Prisma.

§ 174. 1. **Wird ein Prisma durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfigur mit der Grundfläche** ≌ ($a'b'c'd'$ Fig. 207).

Fig. 207.



Durch jeden solchen Querschnitt zerfällt das Prisma in 2 Prismen, die, wenn der Schnitt durch die Mitte einer Seitenkante geht, einander gleich, sonst aber ungleich sind.

2. **Jeder Diagonalschnitt eines vielseitigen Prismas ist ein** $\#$ ($ACca$ in Fig. 207).

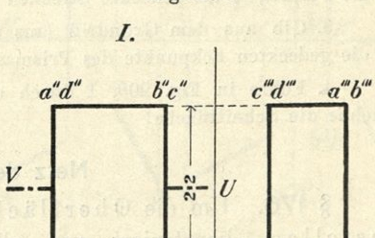
Jedes vielseitige Prisma läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen von der Höhe des ganzen Prismas zerlegen.

3. Der zu einer Seitenkante $\|$ geführte Schnitt ($A''B''b''a''$ in Fig. 207) heißt ein **Längsschnitt**.

Projektionen des Prismas.

§ 175. Fig. 208, I stellt den **Grundriß, Aufriß** und **Kreuzriß** eines geraden vierseitigen Prismas dar, dessen Grundfläche auf P_1 ruht und von dem eine Seitenfläche $\|$ zu P_2, die zu ihr $\perp$ Seitenfläche parallel zu P_3 ist.

Fig. 208.

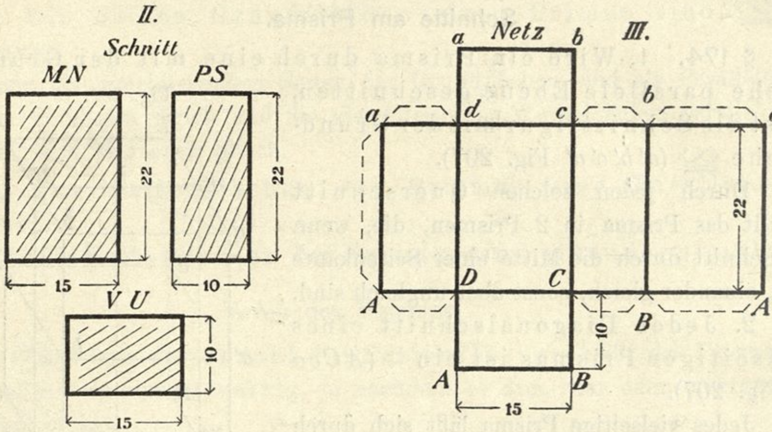


Der Grundriß ist mit der Grundfläche des Prismas ≌ und stellt daher deren Größe (Länge und Breite des Prismas) dar, der Aufriß gibt die Höhe des Körpers an.

In Fig. 208, I wurde die Schnittebene $VU \|$ zur Grundfläche des Prismas geführt; der **Querschnitt** VU (Fig. 208, II) ist, wie aus der Entstehung des Prismas hervorgeht, mit der Grundfläche ≌ und wir erkennen an demselben Länge und Breite des Prismas.

Der Schnitt des Prismas mit Hilfe der Schnittebene MN (Fig. 208, I) ist der Längsschnitt, eine Fläche MN (in Fig. 208, II) von der Größe und Gestalt des Aufrisses, die Höhe und Länge des Prismas enthält; der

Fig. 208.



Schnitt mittelst der Schnittfläche PS (in Fig. 208, I) gibt eine Figur (einen Längsschnitt PS in Fig. 208, II) von der Größe und Gestalt der Seitenansicht des Prismas, woraus Höhe und Breite des Prismas entnommen werden kann. Die Schnittfiguren werden durch Schraffieren besonders hervorgehoben.

Aufgaben.

1. Gib (Fig. 208, I) unter Benützung eines Modelles die Flächen des Prismas an, die *a)* als sichtbare Flächen, *b)* als Strecken, *c)* als gedeckte Flächen erscheinen!

2. Gib aus den drei Projektionen die Kanten an, die *a)* als sichtbare Strecken, *b)* als Punkte, *c)* als gedeckte Strecken erscheinen!

3. Gib aus dem Grundriß (aus dem Auf- und Kreuzriß) *a)* die sichtbaren, *b)* die gedeckten Eckpunkte des Prismas an!

4. Führe in Fig. 208, I durch das Prisma einen Diagonalschnitt und zeichne die Schnittfläche!

Netz des Prismas.

§ 176. Um die Oberfläche eines Körpers geometrisch darzustellen, konstruiert man alle Grenzflächen desselben zusammenhängend in einer einzigen Ebene. Eine solche Zeichnung heißt das Netz des Körpers.

Die Körpernetze dienen nicht bloß zur Bestimmung der Oberfläche, sondern auch, wenn man sie gehörig ausschneidet und zusammenfügt, zur Anfertigung von Modellen der Körper. Die inneren Kanten am Netze werden bis zur Hälfte eingeritzt; durch Zusammenfalten des Netzes erhält man den Körper, dem durch Kleben und Anwendung von Klebestreifen eine feste Form gegeben werden kann.

Um das **Netz des Prismas** zu erhalten, zeichne man (Fig. 208, III) die Rechtecke (⌗), welche die Seitenoberfläche bilden, so nebeneinander, daß je 2 eine gemeinschaftliche Seite haben und konstruiere dann über und unter einem dieser Rechtecke (⌗) die Grundflächen.

Fig. 209.

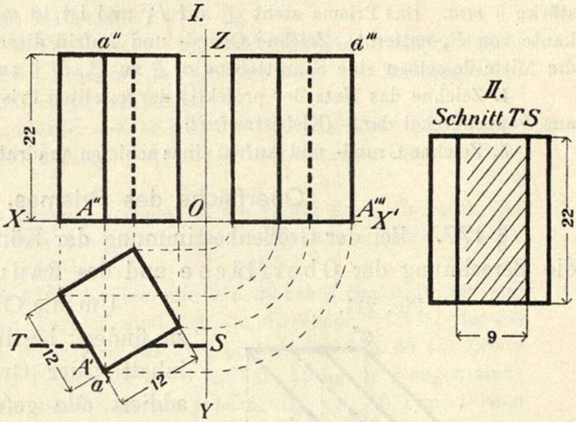
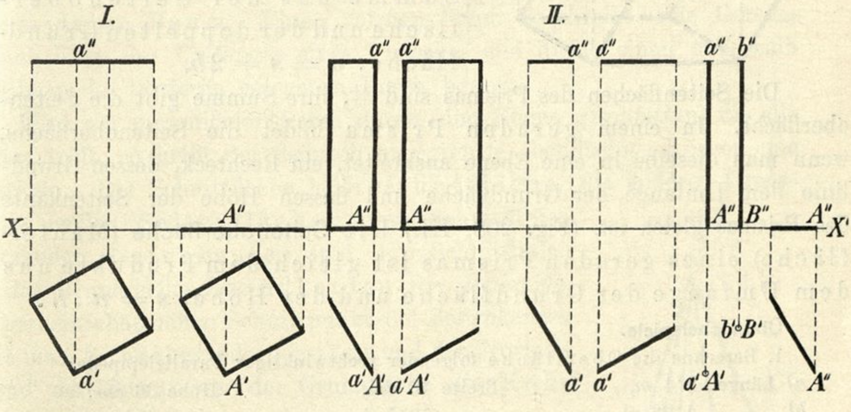


Fig. 209, I enthält die projektive Darstellung eines geraden quadratischen Prismas, durch das mittelst der Ebene TS ein Längsschnitt geführt worden ist (Fig. 209, II).

In Fig. 210, I und II, erscheinen Teile der Oberfläche sowie Kanten dieses Prismas in der horizontalen und vertikalen Projektion dargestellt. Was lehren die Projektionen der Seitenflächen?

Erkläre die einzelnen Beispiele!

Fig. 210.



Übungsbeispiele.

1. Ein rechtwinkliges Parallelepiped hat 78 *mm* Höhe, seine Grundfläche, die ein Rechteck von 60 *mm*, bezw. 35 *mm* Seitenlänge ist, liegt in P_1, so daß die kürzere Seite in einem Abstande von 15 *mm* zu der Achse ∥ ist; konstruiere *a)* den Grundriß, den Aufriß, *b)* einen Quer-, Längs- und Diagonalschnitt und *c)* das Netz des Körpers!

2. Ein reguläres sechsseitiges Prisma, dessen Grundkante 30 *mm* und dessen Seitenkante 94 *mm* beträgt, steht ⊥ auf der P_2 und ruht mit einer Seitenfläche auf der P_1. Konstruiere Grund-, Auf- und Kreuzriß dieses Körpers, schneide dieses

Prisma durch eine horizontale Ebene, die 40 *mm* von der P_1 entfernt ist und zeichne die Schnittfigur!

3. Von einem hohlen rechtwinkligen Parallelepiped betragen: die Länge der Grundfläche 72 *mm*, die Breite derselben 46 *mm*, die Höhe 92 *mm* und die Wandstärke 6 *mm*. Das Prisma steht $\perp$ auf P_1 und ist 16 *mm* mit der längeren Grundkante von P_2 entfernt. Zeichne Grund- und Aufriß dieses Körpers und führe durch die Mitte desselben eine Schnittebene *a)* $\parallel$ zu P_2, *b)* $\parallel$ zu P_3!

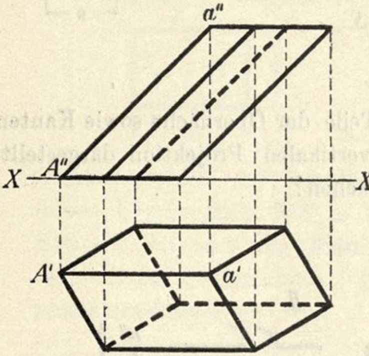
4. Zeichne das Netz der projektiv dargestellten Prismen und stelle diese Körper aus Pappendeckel dar! (Klebestreifen!)

5. Zeichne Grund- und Aufriß eines schiefen quadratischen Prismas! (Fig. 211.)

Oberfläche des Prismas.

§ 177. Bei der Größenbestimmung der Körper handelt es sich um die Berechnung der Oberfläche und des Rauminhaltes.

Fig. 211.



Um die **Oberfläche** eines Körpers zu finden, bestimmt man den Flächeninhalt jeder Grenzfläche für sich und addiert alle gefundenen Flächeninhalte.

Die Darstellung der Grenzflächen eines Prismas in einer Ebene (Netz desselben) führt zur Berechnung der Oberfläche desselben. Die **Oberfläche** eines Prismas ist gleich der Summe aus der Seitenoberfläche und der doppelten Grundfläche: $o = s + 2b$.

Die Seitenflächen des Prismas sind #, ihre Summe gibt die Seitenoberfläche. In einem geraden Prisma bildet die Seitenoberfläche, wenn man dieselbe in eine Ebene ausbreitet, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche und dessen Höhe der Seitenkante des Prismas gleich ist. (Fig. 208, III.) Die **Seitenoberfläche** (Mantelfläche) eines geraden Prismas ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe: $s = u \,.\, h$.

Übungsbeispiele.

1. Berechne die Oberfläche folgender rechtwinkliger Parallelepipede:

a)	Länge 2·4 *m*,	Breite 18 *dm*,	Höhe 36 *cm*;
b)	„ 1·26 *m*,	„ 10·5 *dm*,	„ 0·84 *m*;
c)	„ 12 *m* 4 *cm*,	„ 1 *m* 7 *dm* 5 *cm*,	„ 8 *m* 3 *dm*!

2. Die Grundfläche eines 6 *dm* hohen geraden Prismas ist ein Quadrat, dessen Seite 5 *dm* 4 *cm* beträgt; wie groß ist die Oberfläche?

3. Eine vierseitige Schachtel, die 3 *dm* lang, 15 *cm* breit und 160 *mm* hoch ist, soll mit buntem Papier überzogen werden; wieviel dm^2 Papier braucht man dazu?

4. Ein viereckiges Gefäß von Blech ist 0·6 *m* lang, $\frac{1}{2}$ *m* breit und $\frac{3}{8}$ *m* hoch; wieviel m^2 Blech ist dazu erforderlich, wenn das Gefäß oben unbedeckt ist?

5. Berechne *a)* die Wandfläche des Lehrzimmers, *b)* die Oberfläche eines Mauerziegels! (Modell!)

6. Die Seitenoberfläche eines 4·2 *m* hohen geraden Pfeilers, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck von 0·4 *m* Seitenlänge ist, soll einen Ölanstrich erhalten; wieviel kostet derselbe, wenn für das m^2 1 K 50 h gezahlt werden?

7. Der Querschnitt eines quadratischen Pfeilers beträgt 625 cm^2, die Höhe des letzteren 3 *m* 8 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

8. Die Basis eines geraden Prismas ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten sich verhalten wie 3 : 4 : 5; wie groß ist die Oberfläche des Prismas, wenn die Höhe und die kürzeste Basiskante 25 *cm* messen?

9. Man berechne die Grundfläche, den Mantel und die Oberfläche eines regelmäßigen dreiseitigen (sechsseitigen) Prismas von 13 *cm* Grundkanten- und 2·9 *dm* Seitenkantenlänge.

10. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein regelmäßiges Sechseck, die Höhe des Körpers beträgt 1 *m* 8 *dm*; wie groß ist die Oberfläche des Prismas, wenn eine Seite der Grundfläche 1 *m* 1 *dm* ist?

11. Ein $7\frac{1}{2}$ *m* langes, 5 *m* 4 *dm* breites und 3·6 *m* hohes Speisezimmer soll tapeziert werden; wieviel Rollen Tapeten sind für die 4 Wände, wieviel für die Decke (den Plafond) erforderlich, wenn eine Rolle $7\frac{1}{4}$ laufende *m* von 50 *cm* Breite enthält und wenn für Türen und Fenster 12 m^2 8 dm^2 in Abzug zu bringen sind?

12. Wieviel m^2 Schnittholz bedarf man zur Anfertigung von 450 Exportkisten von 60 *cm* Länge, 3 *dm* 5 *cm* Breite und 0·34 *m* Höhe?

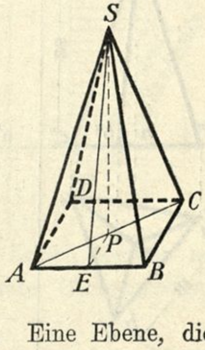
b) Die Pyramide.

Entstehung, Vorkommen und Eigenschaften.

§ 178. Erklärungen. Ein von den Seitenflächen einer Ecke umschlossener, nach einer Seite hin unbegrenzter Raum heißt ein pyramidaler Raum. Einen solchen Raum beschreibt eine Gerade, die sich längs des Umfanges eines Vieleckes und durch einen außerhalb der Ebene des letzteren gelegenen Punkt bewegt.

Wird ein pyramidaler Raum durch eine Ebene geschnitten, die alle Kanten trifft, so heißt der dadurch abgegrenzte ebenflächige Körper eine Pyramide. Die Schnittfläche heißt Grundfläche, die anderen Grenzflächen heißen Seitenflächen, ihre Schnittlinien miteinander Seitenkanten und ihre Schnittlinien mit der Grundfläche Grundkanten der Pyramide. Den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der Seitenkanten nennt man Scheitel oder Spitze und den Normalabstand der Spitze von der Grundfläche die Höhe der Pyramide.

Fig. 212.



Vorkommen der Pyramide: Gib Beispiele darüber aus dem gewerblichen Leben, aus der Baukunst und aus dem Mineralreiche an!

Der Körper *SABCD* (Fig. 212) ist eine Pyramide.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind Dreiecke. Eine Ebene, die durch 2 nicht unmittelbar aufeinander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein Diagonalschnitt der Pyramide (*SAC* in Fig. 212).

Man kann sich eine Pyramide $SABCD$ auch dadurch entstanden denken, daß sich eine geradlinige Figur $ABCD$ aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage || in stetig abnehmender Größe so fortbewegt, daß ihre Eckpunkte gerade und in einem Punkte zusammentreffende Linien beschreiben.

Arten der Pyramiden.

§ 179. Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten der Grundflächen teilt man die Pyramiden in drei-, vier- und mehrseitige ein. Die dreiseitige Pyramide wird von 4 Dreiecken begrenzt und heißt, wenn alle Kanten gleich sind, Tetraeder.

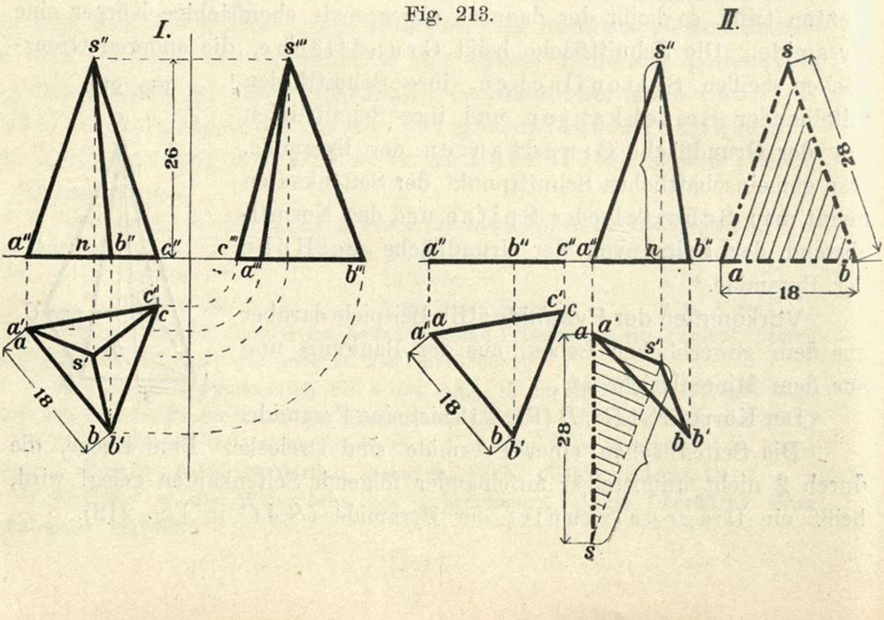
Steht die Verbindungsstrecke (SP in Fig. 212) der Spitze einer Pyramide mit dem Mittelpunkte der Grundfläche auf dieser normal, so heißt die Pyramide **gerade**, sonst **schief**.

Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, heißt regelmäßig. Die Seitenflächen einer solchen Pyramide sind $\cong$ gleichschenklige Dreiecke; die Höhe eines jeden derselben heißt die Seitenhöhe der regelmäßigen Pyramide. Die Seitenhöhe SE (in Fig. 212) einer regelmäßigen Pyramide ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, das den Abstand EP der Mitte der Grundfläche von einer Seite und die Höhe SP der Pyramide zu Katheten hat.

Projektionen und Netz der Pyramide.

§ 180. Fig. 213, I stellt den Auf-, Grund- und Kreuzriß einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide vor. Der Grundriß gibt die Grundfläche, der Aufriß (oder der Kreuzriß) die Höhe der Pyramide an.

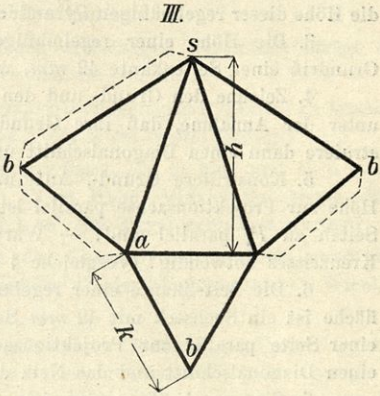
Fig. 213.



In Fig. 213, II sind die Grundfläche *(abc)* und die Seitenfläche *(sab)* von dieser dreiseitigen Pyramide losgelöst und projiziert.

Bei der Seitenfläche *sab* ist die Bestimmung der wahren Größe der Seitenkante *sa* durchgeführt und die Seitenfläche *sab* in wahrer Größe bezeichnet. Jede Seitenkante *(sa)* kann als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes dargestellt werden, dessen Katheten der Grundriß dieser Kante *(s' a')* und die Höhe der Pyramide *(s'' n)* sind.

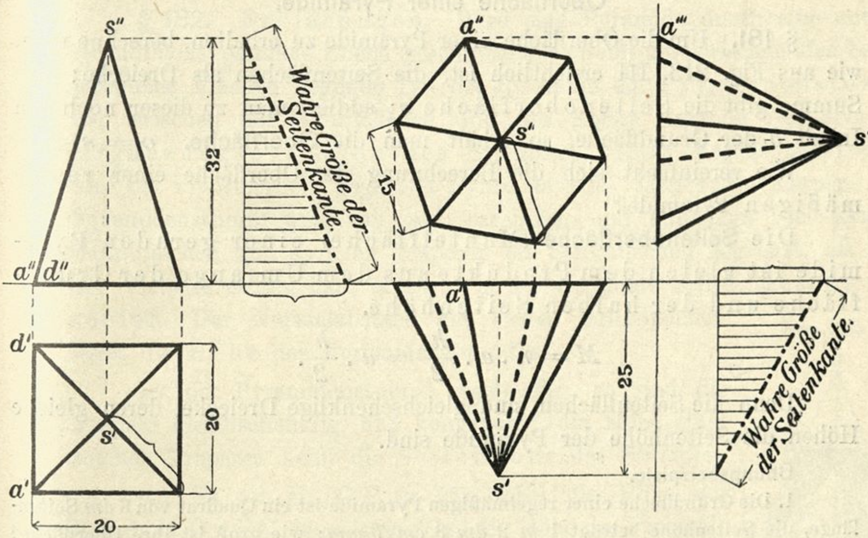
Fig. 213.



Das **Netz einer Pyramide** wird erhalten, wenn man die Seitendreiecke nebeneinander so konstruiert, daß sie den Scheitel gemeinschaftlich haben, und an eines dieser Dreiecke unten die Grundfläche anlegt. (Fig. 213, III.)

In Fig. 214 ruht *a)* eine regelmäßige vierseitige Pyramide auf der horizontalen *PE*, *b)* eine regelmäßige sechsseitige Pyramide auf der

Fig. 214.



vertikalen *PE*. Zur Darstellung der Netze dieser beiden Körper ist die Bestimmung der wahren Größe e i n e r Seitenkante (Erzeugenden) erforderlich.

Jeder durch die Spitze und die Grundfläche einer Pyramide geführte ebene Schnitt ist ein Dreieck.

Konstruktions- und Rechenaufgaben.

1. Die Seitenkante einer regelmäßigen Pyramide beträgt 79 *mm*, die Grundfläche ist ein Quadrat mit 45 *mm* Seitenlänge; wie groß ist die Höhe der Pyramide?

2. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat mit 45 *mm* Seitenlänge; die Höhe dieser regelmäßigen Pyramide beträgt 70 *mm*; wie lang ist die Seitenkante?

3. Die Höhe einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide mißt 75 *mm*, der Grundriß einer Seitenkante 42 *mm*, wie lang ist die Erzeugende (Seitenkante)?

4. Zeichne den Grund- und den Aufriß der in 1.—3. angegebenen Pyramiden unter der Annahme, daß ihre Grundflächen in P_1 (P_2 oder P_3) liegen, und konstruiere dann einen Diagonalschnitt und das Netz jeder Pyramide!

5. Konstruiere Grund-, Auf- und Kreuzriß einer geraden Pyramide, deren Höhe zur Projektionsachse parallel ist, und in deren quadratischer Grundfläche zwei Seiten zu P_1 parallel sind! — Warum ist in dieser Aufgabe die Zeichnung des Kreuzrisses notwendig? (Vergleiche § 195, Aufgabe 3.)

6. Die Seitenkante einer regelmäßigen Pyramide beträgt 85 *mm*, ihre Grundfläche ist ein Sechseck mit 42 *mm* Seitenlänge, das in der Ebene P_1 und zwar mit einer Seite parallel zur Projektionsachse liegt; zeichne den Grundriß, den Aufriß, einen Diagonalschnitt und das Netz der Pyramide!

7. Eine regelmäßige fünfseitige Pyramide mit der Höhe $H = 75$ *mm* und der Grundkante $K = 50$ *mm* steht normal in der P_1 auf der Spitze, so daß *a)* die eine Grundkante parallel zur P_2 und 5 *mm* von P_2 entfernt ist; *b)* die Pyramide mit einem Eckpunkte der Grundfläche die P_2 berührt und die gegenüberliegende Grundkante zu P_2 parallel bleibt. Zeichne die drei Projektionen und das Netz dieser Pyramide!

Oberfläche einer Pyramide.

§ **181.** Um die Oberfläche einer Pyramide zu erhalten, berechne man, wie aus Fig. 213, III ersichtlich ist, die Seitenflächen als Dreiecke; ihre Summe gibt die Seitenoberfläche s; addiert man zu dieser noch den Inhalt b der Grundfläche, so erhält man die **Oberfläche.** $\boldsymbol{o = s + b}$.

Wie vereinfacht sich die Berechnung der Oberfläche einer regelmäßigen Pyramide?

Die **Seitenoberfläche** (Mantelfläche) einer geraden Pyramide ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der halben Seitenhöhe.

$$M = n \,.\, a \,.\, \frac{h}{2} = u \,.\, \frac{h}{2}.$$

Denn die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke, deren gleiche Höhen die Seitenhöhe der Pyramide sind.

Übungsbeispiele.

1. Die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide ist ein Quadrat von 6 *dm* Seitenlänge, die Seitenhöhe beträgt 1 *m* 2 *dm* 3 *cm* 7 *mm*; wie groß ist ihre Oberfläche?

2. Ein Turmdach hat die Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide von $9\frac{5}{8}$ *m* Umfang der Grundfläche und 10·2 *m* Seitenhöhe; wieviel m^2 Blech sind zur Eindeckung erforderlich, wenn für Verschnitt und Falze 6% hinzugerechnet werden?

3. In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt jede Grundkante 4 *dm* und jede Seitenkante 5 *dm*; wie groß ist *a)* die Seitenhöhe, *b)* die Höhe der Pyramide, *c)* die Oberfläche?

4. In einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist eine Seite der Grundfläche 2 *dm* und eine Seitenkante 3·4 *dm* lang; bestimme die Oberfläche!

5. Die Seite eines Tetraeders ist 1 *dm* ($4\frac{1}{5}$ *dm*) lang; wie groß ist die Oberfläche?

6. Berechne *a)* die Grundfläche, *b)* die Seitenoberfläche und *c)* die Oberfläche der im § 180, 4—7 projektiv dargestellten Pyramiden!

7. Die Grundkante einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide beträgt 4 *cm* 8 *mm*, eine Seitenkante 9·5 *cm*; man berechne die Oberfläche!

8. Es ist die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide zu berechnen, deren Grundkante 46 *mm* und deren Höhe 1 *dm* 2 *cm* 5 *mm* beträgt!

9. Über einem Gebäude von rechteckiger Basis, $19\frac{1}{2}$ *m* lang und 12·3 *m* breit, erhebt sich ein sogenanntes Zeltdach von 12 *m* Höhe; wieviel Dachziegel sind zu dessen Eindeckung erforderlich, wenn auf 1 m^2 150 Ziegel gerechnet werden?

10. Wie groß ist die Mantelfläche der Cheopspyramide, deren quadratische Basis eine Seitenlänge von 232·8 *m* hat (größer als der Stephansplatz zu Wien), und deren Höhe 145 *m* beträgt?

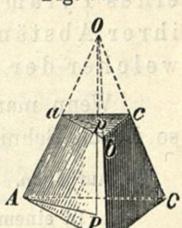
11. Es ist die Oberfläche einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide zu berechnen, deren Grundkante 3 *cm* 8 *mm* und deren Seitenkante $7\frac{1}{4}$ *cm* beträgt!

12. Das Dach eines Gartenhauses hat die Form einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide; wieviel Schindeln sind zum Eindecken desselben erforderlich, wenn die Grundlinie eines Seitendreieckes $1\frac{1}{2}$ *m*, dessen Höhe aber 3·1 *m* beträgt und wenn 1 Schindel 60 cm^2 deckt?

Der Pyramidenstumpf.

§ 182. Erklärungen. Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen den beiden parallelen Flächen liegende Teil der Pyramide ein Pyramidenstumpf, der zwischen der Schnittfläche und der Spitze liegende Teil aber die Ergänzungspyramide des Stumpfes. Diese Ergänzungspyramide und die ursprünglich gegebene Pyramide sind ähnliche Körper. Der Pyramidenstumpf wird von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und sovielen Trapezen als Seitenflächen begrenzt, als jedes der Vielecke Seiten hat; er ist, wie die Pyramide selbst, gerade oder schief. Der Normalabstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Pyramidenstumpfes.

Fig. 215.



Ist der Pyramidenstumpf regelmäßig, so sind die Trapeze gleichschenklig und kongruent; die Höhe eines solchen Trapezes heißt die Seitenhöhe des Stumpfes.

a.) Es sei H (OP in Fig. 215) die Höhe der Pyramide $OABC$, dann ist x (Op) die Höhe der Pyramide $Oabc$ und h (pP) die Höhe des Pyramidenstumpfes. Zieht man AP und ap, so ist

wegen $AP \parallel ap \ldots \boldsymbol{H : x = OA : Oa}, \ldots\ldots$ 1)

und wegen $AB \parallel ab \ldots AB : ab = OA : Oa$, daher

$\boldsymbol{H : x = AB : ab}$; d. h. . . . 2)

Die Höhen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie zwei gleichliegende Seitenkanten (1) oder wie zwei entsprechende Grundkanten (2).

Wenn die Höhe eines Pyramidenstumpfes und zwei gleichliegende Seiten der unteren und der oberen Grundfläche desselben bekannt sind, lo lassen sich daraus die Höhen der ganzen Pyramide und der Ergänzungspyramide berechnen.

Bezeichnet man mit H und x die Höhen dieser zwei Pyramiden, mit h die Höhe des Pyramidenstumpfes, mit S und s zwei gleichliegende Seiten der Grundflächen des letzteren, so ist nach dem vorhergehenden Satze

$$H : x = S : s.$$

Da sich in jeder Proportion die Differenz der ersten zwei Glieder zur Differenz der letzten zwei Glieder so verhält, wie das erste Glied zum dritten oder wie das zweite zum vierten, so hat man

$$(H - x) : (S - s) = H : S, \quad (H - x) : (S - s) = x : s,$$

oder, weil $H - x = h$ ist,

$$h : (S - s) = H : S, \qquad h : (S - s) = x : s,$$

woraus $\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S} - \boldsymbol{s}}$, $\quad \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{s}}{\boldsymbol{S} - \boldsymbol{s}}$ folgt.

Drücke diese zwei Formeln mit Worten aus!

b) Aus der Proportion $AB : ab = H : x$ ergibt sich durch Quadrierung aller Glieder $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 : H^2 : x^2$, wenn wir OP als ganze Höhe mit H und Op als kleine Höhe mit x bezeichnen. Da nun aber die Grundfläche und Schnittfläche als ähnliche Figuren sich wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten AB und ab verhalten, so kann man das Verhältnis der großen und kleinen Grundfläche $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{g} = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \boldsymbol{H}^2 : \boldsymbol{x}^2$ setzen; d. h. Die beiden Grundflächen eines Pyramidenstumpfes verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze der ganzen Pyramide, von welcher der Rumpf ein Teil ist.

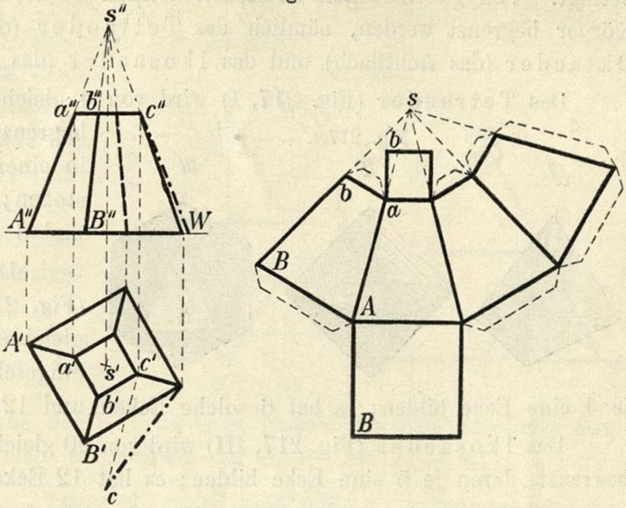
Wenn man demnach eine Pyramide in der Hälfte der Höhe schneidet, so ist die Schnittfläche das Viertel der Grundfläche.

Aufgaben.

1. In einem regelmäßigen Pyramidenstumpfe sind die Grundflächen Quadrate mit 62 *mm* und 31 *mm* Seitenlänge, die Höhe des Stumpfes beträgt 64 *mm*; berechne *a)* die Höhe der Ergänzungspyramide, *b)* die Seitenkante des Stumpfes!

2. Zeichne den in 1. angegebenen Pyramidenstumpf unter der Annahme, daß die größere Grundfläche in der Ebene P_1 liegt, im Grund- und im Aufriß und sodann auch dessen Netz! (Siehe Fig. 216.)

Fig. 216.



3. Wie groß ist die Schnittfläche einer Pyramide im Verhältnis zu der Grundfläche, wenn man den Parallelschnitt im oberen Drittel, Viertel, Zehntel der Höhe führt?

§ 183. **Die Oberfläche eines Pyramidenstumpfes** wird erhalten, wenn man die Summe s aller Seitenflächen, die Trapeze sind, bestimmt und zu dieser Summe die beiden Grundflächen B und b addiert: also

$$o = s + B + b.$$

1. Die Grundflächen eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes sind Quadrate mit den Umfängen 1 *m* 6 *dm* 2 *cm* und 1 *m* 2 *dm*, die Höhe eines Seitentrapezes beträgt 2 *m* 8 *cm*; wie groß ist die Oberfläche?

2. Die Grundflächen eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes sind gleichseitige Dreiecke von 0·58 *m* und 37 *cm* Seitenlänge, die Höhe eines Seitentrapezes beträgt 8·4 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

3. Bei einem geraden sechsseitigen Pyramidenstumpfe beträgt die Grundkante $S = 5$ *cm* 2 *mm*, die Deckkante $s = 3\frac{1}{2}$ *cm* und die Seitenkante $k = 2·8$ *cm*; berechne die Oberfläche!

4. Bestimme von einem gegebenen Modelle eines Pyramidenstumpfes die erforderlichen Abmessungen zur Berechnung seiner Oberfläche und berechne diese!

5. In welchem Abstande von der Spitze muß eine Pyramide durch eine Ebene || zur Grundfläche geschnitten werden, damit die Schnittfläche $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$) der Grundfläche ist?

c) Regelmäßige Körper.

§ 184. Ein Körper heißt **regelmäßig**, wenn alle Grenzflächen desselben kongruente regelmäßige Vielecke sind und kongruente Ecken bilden.

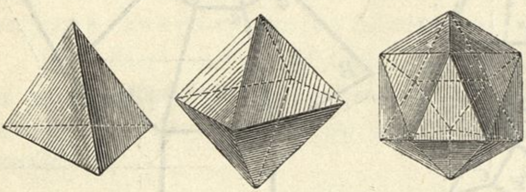
Aus dem Satze, daß die Summe aller Kantenwinkel einer Ecke kleiner als 360° sein muß (§ 164), folgt: Es gibt nur fünf regelmäßige Körper.

Denn der Winkel eines regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieckes beträgt 60°; von solchen Winkeln können drei, vier oder auch fünf eine Ecke bilden; aus sechs oder mehr als sechs solchen Winkeln aber kann keine Ecke entstehen, da ihre Summe 360° oder mehr als 360°

beträgt. Von gleichseitigen Dreiecken können daher nur 3 regelmäßige Körper begrenzt werden, nämlich das T e t r a e d e r (das Vierflach), das O k t a e d e r (das Achtflach) und das I k o s a e d e r (das Zwanzigflach).

Fig. 217.

I II III



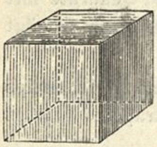
Das T e t r a e d e r (Fig. 217, I) wird von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je 3 in einer Ecke zusammenstoßen; es hat 4 Ecken und 6 Kanten.

Das O k t a e d e r (Fig. 217, II) wird von 8 gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen, von denen je 4 eine Ecke bilden; es hat 6 solche Ecken und 12 Kanten.

Das I k o s a e d e r (Fig. 217, III) wird von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, deren je 5 eine Ecke bilden; es hat 12 Ecken und 30 Kanten.

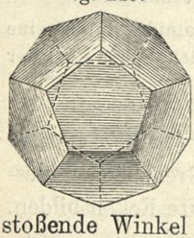
Der Winkel eines regelmäßigen Viereckes (Quadrates) ist ein rechter; von solchen Winkeln können n u r d r e i in einer Ecke zusammentreten; aus 4 oder mehr als 4 rechten Winkeln kann keine Ecke gebildet werden. Es gibt daher einen einzigen von Quadraten begrenzten Körper; er heißt H e x a e d e r (Sechsflächner, Kubus oder Würfel). Das Hexaeder (Fig. 218) wird von 6 Quadraten eingeschlossen und hat 8 dreiseitige Ecken und 12 Kanten.

Fig. 218.



Der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes beträgt 108°; von solchen Winkeln können nur 3 eine Ecke bilden. Es gibt daher einen einzigen von regelmäßigen Fünfecken begrenzten regelmäßigen Körper. Dieser heißt das D o d e k a e d e r (das Zwölfflächner Fig. 219) und hat 12 Seitenflächen, 20 dreiseitige Ecken und 30 Kanten.

Fig. 219.



Im regelmäßigen Sechsecke ist jeder Winkel 120°. Von solchen Winkeln wie auch von den Winkeln eines regelmäßigen Vieleckes von mehr als 6 Seiten kann k e i n e E c k e gebildet werden, denn schon 3 zusammenstoßende Winkel von 120° würden einen vollen Winkel geben, also eine Ebene bilden.

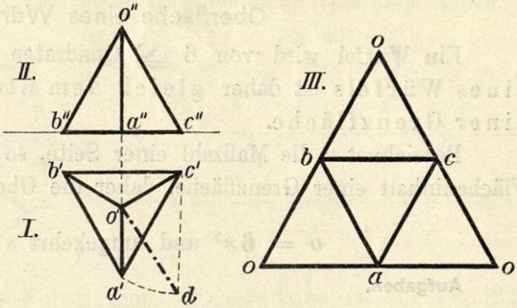
E s g i b t d a h e r n u r f ü n f r e g e l m ä ß i g e K ö r p e r.

Projektionen, Netz und Oberfläche des Tetraeders.

§ **185.** Fig. 220, I ist der G r u n d r i ß, II der A u f r i ß, III das N e t z eines T e t r a e d e r s. Um die Höhe des Dreieckes im Aufrisse zu bestimmen, zieht man $o'd \perp$ auf $o'c'$ und durchschneidet aus c' mit dem Halbmesser $c'a'$ jene Normale. Dann ist $o'd = a''o''$ die Höhe des Aufrisses. (Erklärung am Modelle!)

Um das **Netz** eines Tetraeders zu erhalten, konstruiere man mit der Kante desselben ein gleichseitiges Dreieck und sodann über jeder Seite wieder ein gleichseitiges Dreieck.

Fig. 220.



Ordne am Netze des Tetraeders selbständig die Klebestreifen an!

Die **Oberfläche** des Tetraeders besteht aus 4 gleichseitigen Dreiecken; bezeichnet man die Maßzahl der Kante mit s, so ist

$$o = 4 \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = s^2\sqrt{3}.$$

Aufgaben.

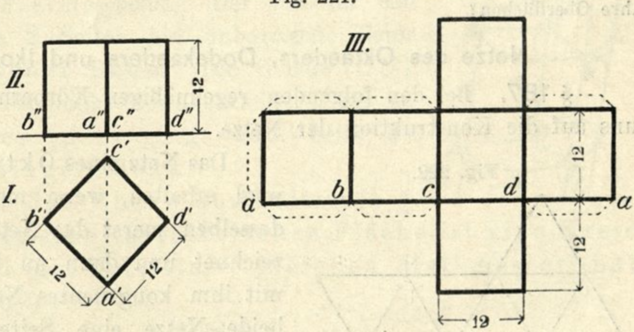
1. Berechne die Oberfläche (O) eines Tetraeders, dessen Kante 1 dm (235 mm) beträgt!
2. Die Oberfläche eines Tetraeders sei 35 cm^2 84·9 mm^2; wie groß ist jede Kante?
3. Wie verhalten sich die Oberflächen zweier Tetraeder, deren Kanten im Verhältnisse wie 1 : 2 (2 : 3) stehen?
4. Berechne die Oberfläche eines Tetraeders nach gegebenem Modelle!

Projektionen, Netz und Oberfläche des Hexaeders.

§ **186.** Fig. 221, I stellt den Grundriß, II den Aufriß, III das Netz eines Würfels dar, der auf der Ebene P_1 so aufruht, daß eine Diagonalebene sowohl auf P_1 als auch auf P_2 $\perp$ steht.

Das **Netz** des Würfels wird erhalten, wenn man die 4 Quadrate, welche die Seitenoberfläche bilden, nebeneinander zeichnet und dann an den entgegengesetzten Seiten eines dieser Quadrate noch zwei solche Quadrate konstruiert. (Klebestreifen!)

Fig. 221.



Aufgaben.

1. Zeichne Grund- und Aufriß eines Würfels mit 45 mm Kantenlänge, in dem die Grundfläche in einem Abstande von 15 mm zu P_1 $\parallel$ ist und zwei Seitenflächen auf P_2 $\perp$ stehen!

2. Konstruiere im Grund- und im Aufrisse einen Würfel von 5 *cm* Kantenlänge, in dem die Grundfläche in der Ebene P_1 liegt und keine Seitenfläche zu P_2 || ist! Zeichne das Netz des Würfels!

Oberfläche eines Würfels.

Ein Würfel wird von 6 $\cong$ Quadraten begrenzt; die **Oberfläche** eines Würfels ist daher gleich dem 6fachen Flächeninhalte einer Grenzfläche.

Bezeichnet s die Maßzahl einer Seite, so ist s^2 die Maßzahl für den Flächeninhalt einer Grenzfläche, daher die Oberfläche

$$o = 6s^2 \text{ und umgekehrt } s = \sqrt{\frac{o}{6}}.$$

Aufgaben.

1. Berechne die Oberfläche eines Würfels, dessen Seite ist:
a) 12 *cm*, *b)* 2 *m* 4 *dm*, *c)* 1·05 *m*,
d) $1\frac{3}{4}$ *dm*, *e)* 1 *m* 3 *dm* 5 *cm*, *f)* 0·575 *m*!

2. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 3 dm^2 98 cm^2 $53\frac{1}{2}$ mm^2; wie groß ist seine Seite?

3. Es soll ein würfelförmiges, oben offenes Gefäß von 38 *cm* Kantenlänge angefertigt werden; wieviel m^2 Kupferblech braucht man?

4. Die Kanten zweier Würfel sind 4 *cm* und 12 *cm* lang; wie verhalten sich ihre Oberflächen?

5. Die Diagonale der Grundfläche eines Würfels beträgt 2 *dm* 4 *cm* (42·8 *mm*); wie groß ist *a)* die Seite und *b)* die Oberfläche des Würfels?

6. Die Körperdiagonale eines Würfels mißt $1\frac{4}{5}$ *dm*; wie groß ist seine Oberfläche?

7. Die Oberfläche eines Würfels beträgt $0 = 1$ dm^2 12 cm^2 8 mm^2; berechne die Länge einer Kante und die Diagonale eines Quadrates!

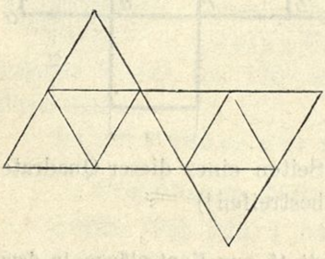
8. Berechne die Oberfläche eines Würfels nach gegebenem Modelle!

9. Ein Würfel und ein Tetraeder haben 1 *dm* zur Kante; wie verhalten sich ihre Oberflächen?

Netze des Oktaeders, Dodekaeders und Ikosaeders.

§ **187.** Bei den folgenden regelmäßigen Körpern beschränken wir uns auf die Konstruktion der Netze.

Fig. 222.



Das Netz eines Oktaeders (Fig. 222) wird erhalten, wenn man mit der Kante desselben zuerst das Netz eines Tetraeders zeichnet und dann an dieses ein zweites mit ihm kongruentes Netz so anlegt, daß beide Netze eine Seite gemeinschaftlich haben. Das Oktaeder kann in 2 gleiche Pyramiden mit quadratischer Grundfläche zerlegt werden.

Um das Netz des Dodekaeders (Fig. 223) zu konstruieren, zeichne man mit der Kante desselben ein regelmäßiges Fünfeck, beschreibe über dessen Seiten wieder regelmäßige Fünfecke (wobei man sich mit Vorteil der Verlängerung der Diagonalen bedient) und lege an dieses Netz ein zweites mit ihm kongruentes so an, daß beide in einer Seite zusammenstoßen.

Fig. 223.

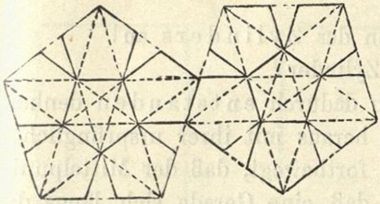
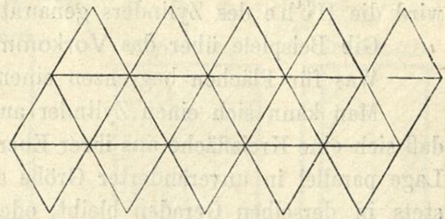


Fig. 224.



Die Konstruktion des Netzes eines Ikosaeders ist aus Fig. 224 ersichtlich.

2. Krummflächige Körper.

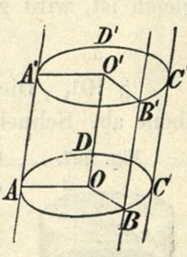
§ 188. Körper, die ganz oder teilweise von gekrümmten Flächen begrenzt werden, heißen krummflächige Körper. Bei den krummflächigen Körpern, die eine oder mehrere ebene Grenzflächen haben, werden diese als Grundflächen betrachtet, da man sich die Körper darüber aufgerichtet vorstellen kann; die gekrümmte Fläche heißt dann der Mantel.

a) Der Zylinder.

Zylindrische Fläche.

§ 189. Bewegt sich eine Gerade AA' (Fig. 225) längs des Umfanges eines Kreises ($ABCDA$) parallel zu sich selbst fort, so beschreibt sie eine gekrümmte Fläche, die eine zylindrische Fläche heißt. Der von ihr eingeschlossene nach 2 Seiten hin unbegrenzte Raum heißt zylindrischer Raum. Die Gerade (OO'), die durch den Mittelpunkt des Leitkreises ∥ zur erzeugenden Geraden (AA') gelegt wird, heißt die Achse der Zylinderfläche.

Fig. 225.



Jeder mit der Ebene der Leitlinie ∥ gelegte Schnitt einer zylindrischen Fläche ist eine Kreislinie, die mit der Leitlinie gleichen Halbmesser hat. (Veranschaulichung!)

Der Zylinder.

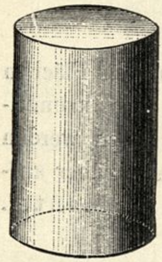
§ 190. Wird eine zylindrische Fläche durch zwei mit der Ebene der Leitlinie parallele Ebenen geschnitten, so heißt der von diesen und der zylindrischen Fläche begrenzte Körper ein **Zylinder.** Die zwei ebenen Schnittflächen sind kongruente Kreise (§ 189) und heißen die Grundflächen; die sie begrenzende zylindrische Fläche nennt man den Mantel des Zylinders. Die Strecke, welche die Mittelpunkte beider Kreise verbindet, heißt die A c h s e und jede Gerade der Mantelfläche heißt eine S e i t e n l i n i e oder S e i t e des Zylinders. Alle Seiten des Zylinders sind parallel und einander gleich. Der Normalabstand der beiden Grundflächen wird die H ö h e des Zylinders genannt.

Gib Beispiele über das Vorkommen des Z y l i n d e r s an!

Was für Flächen begrenzen einen Zylinder?

Man kann sich einen Zylinder auch dadurch e n t s t a n d e n denken, daß sich eine Kreisfläche aus ihrer Ebene heraus mit ihrer ursprünglichen Lage parallel in unveränderter Größe so fortbewegt, daß der Mittelpunkt stets in derselben Geraden bleibt, oder daß eine Gerade sich längs des Umfanges eines Kreises parallel zu sich selbst herumbewegt; demzufolge kann ein Zylinder auch als ein Prisma angesehen werden, dessen Grundfläche ein Vieleck von unendlich vielen Seiten ist.

Fig. 226.



Steht die Achse auf den Grundflächen normal, so heißt der Zylinder ein g e r a d e r (Fig. 226), sonst ein s c h i e f e r. Einen geraden Zylinder kann man sich auch dadurch e n t s t a n d e n denken, daß sich ein Rechteck um eine seiner Seiten dreht. In einem geraden Zylinder stellt die Achse zugleich die Höhe vor.

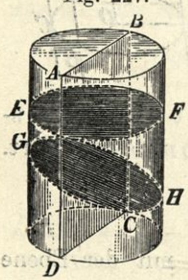
Es gibt auch elliptische Zylinder; in diesem Buche soll aber immer nur von Kreiszylindern die Rede sein.

Ein gerader Zylinder, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, wird g l e i c h s e i t i g genannt.

Schnitte am Zylinder.

§ 191. Die Art der Schnittfignr hängt von der Lage der Schnittebene ab. Schneidet man (Fig. 227) einen Zylinder parallel mit der Achse, so ist die Schnittfläche ein R e c h t e c k $ABCD$ oder ein s c h i e f e s P a r a l l e l o g r a m m, je nachdem der Zylinder gerade oder schief ist.

Fig. 227.



1. J e d e r A c h s e n s c h n i t t e i n e s Z y l i n d e r s i s t e i n P a r a l l e l o g r a m m. ($ABCD$ in Fig. 227.)

2. W i r d e i n Z y l i n d e r d u r c h e i n e m i t d e r G r u n d f l ä c h e p a r a l l e l e E b e n e g e s c h n i t t e n, s o i s t d i e S c h n i t t f l ä c h e (EF in Fig. 227) e i n m i t d e r G r u n d f l ä c h e k o n g r u e n t e r K r e i s.

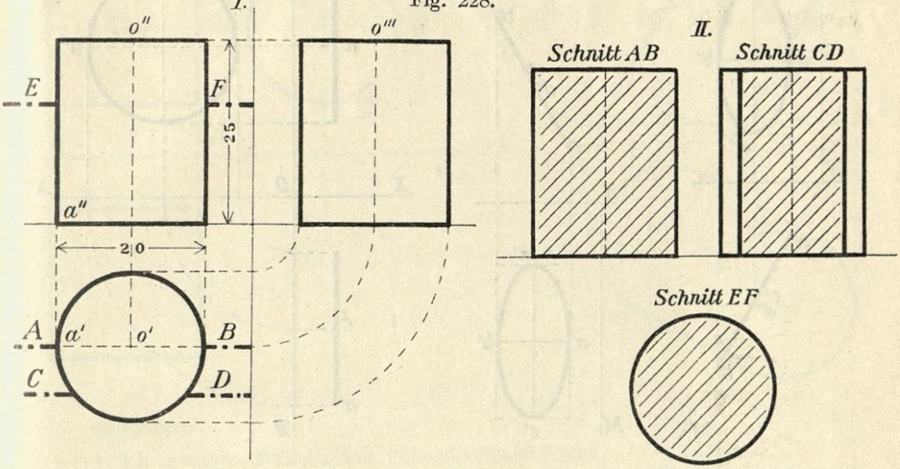
Dieser Satz folgt aus der Entstehung des Zylinders.

3. Wird ein g e r a d e r Zylinder durch eine Ebene geschnitten, die weder zur Grundfläche noch zur Achse parallel ist, so ist der Schnitt (GH) eine E l l i p s e.

Projektionen und Netz des Zylinders.

§ 192. Figur 228 stellt in I den Grund-, Auf- und Kreuzriß eines geraden Zylinders, in II den Achsenschnitt *AB*, den Längsschnitt *CD*

Fig. 228.



und den Parallelschnitt *EF*, in III das Netz desselben dar. Der Grundriß gibt die Grundfläche, der Aufriß (oder der Kreuzriß) die Höhe des Zylinders an.

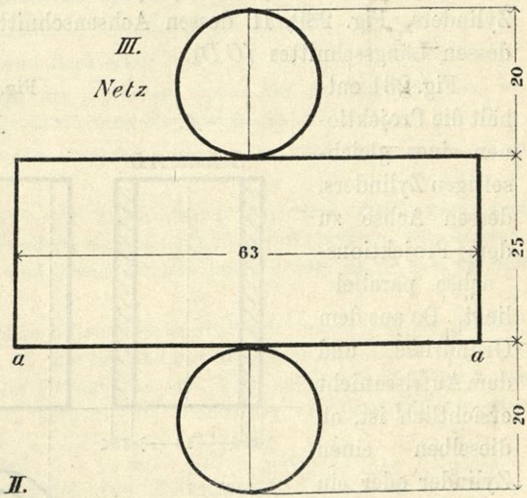
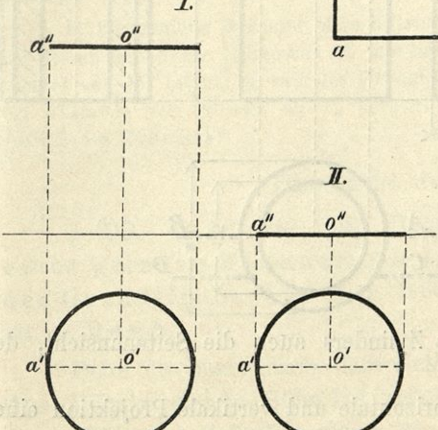


Fig. 229.



Erkläre die Darstellung des Netzes eines geraden Zylinders!

In Fig. 229, I—IV, ist ein Kreis projektiv dargestellt. Veranschauliche und erkläre die einzelnen Fälle!

Fig. 229.

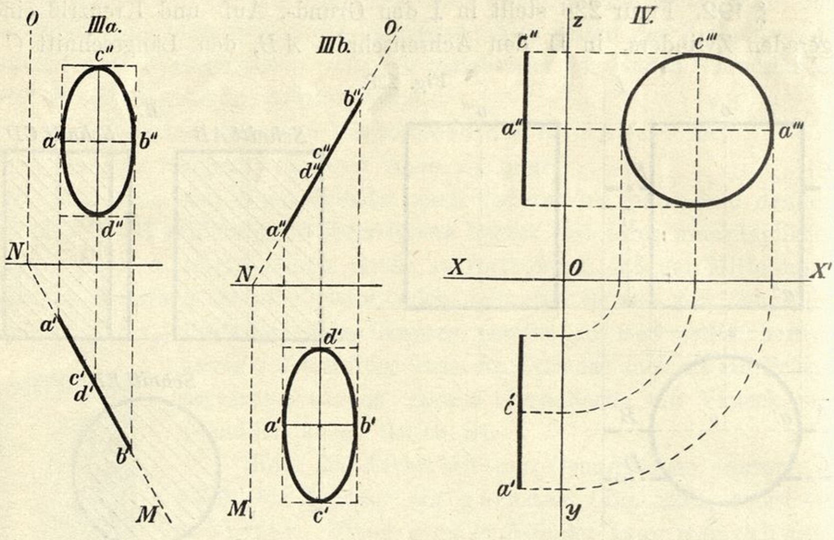
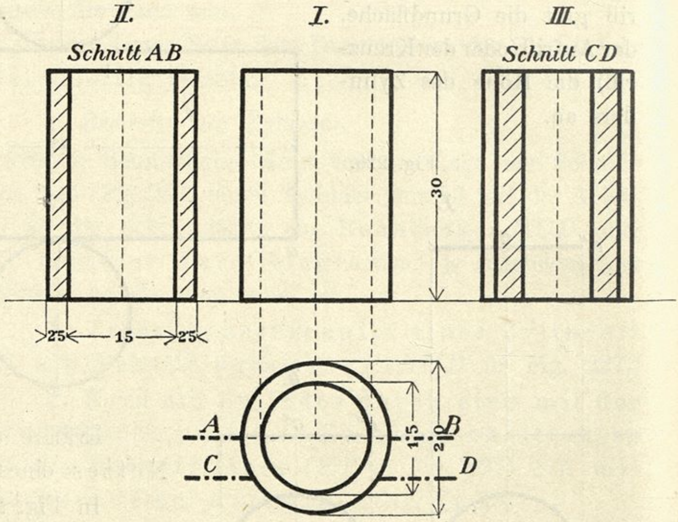


Fig. 230, I zeigt die projektive Darstellung eines geraden hohlen Zylinders, Fig. 230, II dessen Achsenschnittes *(AB)* und Fig. 230, III dessen Längsschnittes *(CD)*.

Fig. 231 enthält die Projektionen eines gleichseitigen Zylinders, dessen Achse zu der Projektionsachse parallel liegt. Da aus dem Grundrisse und dem Aufrisse nicht ersichtlich ist, ob dieselben einen Zylinder oder ein Parallelepiped (einen Würfel) darstellen, so ist in diesem Falle zur vollständigen Darstellung des Zylinders auch die Seitenansicht, der Kreuzriß, erforderlich.

Fig. 230.



In Fig. 232 erscheint die horizontale und vertikale Projektion eines schiefen Zylinders gezeichnet.

Fig. 231.

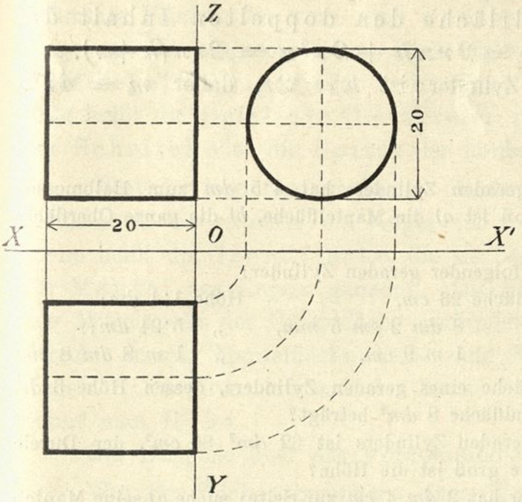
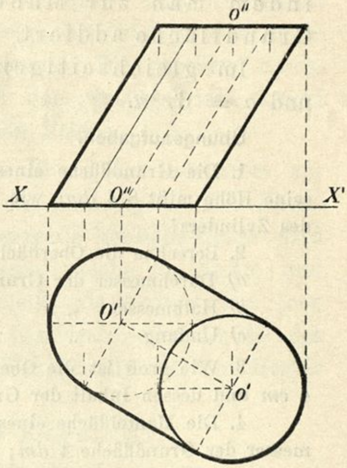


Fig. 232.



Aufgaben.

1. Ein gerader Zylinder hat folgende Projektionen:

a) der Grundriß ist ein Kreis, der Aufriß ein Rechteck;

b) der Grundriß ist ein Rechteck, der Aufriß ein Kreis;

c) Grundriß und Aufriß sind Rechtecke;

d) die beiden Grundflächen des Zylinders geben im Aufrisse Ellipsen, im Grundrisse Gerade; der ganze Grundriß erscheint als Rechteck.

Welche Lage gegen die beiden Projektionsebenen hat der Zylinder in jedem dieser Fälle?

2. Zeichne den Grund- und den Aufriß, sowie das Netz, den Achsen- und Parallelschnitt eines geraden Zylinders, dessen Grundfläche 60 *mm* im Durchmesser hat und in der Ebene P_2 liegt, und dessen 95 *mm* lange Achse von P_1 um 45 *mm* absteht!

3. Ein schiefer Zylinder, dessen Grundfläche ein Kreis von 43 *mm* Durchmesser ist, dessen Achse eine Länge von 85 *mm* hat und mit der Grundfläche einen Neigungswinkel von 45° bildet, ist mit der Grundfläche auf P_1 so aufgestellt, daß die Achse im Abstande von 28 *mm* zu P_2 parallel ist; konstruiere den Grundriß und den Aufriß des Zylinders!

Oberfläche des Zylinders.

§ 193. 1. Aus Fig. 228, III ist ersichtlich, daß die **Mantelfläche** eines geraden Zylinders dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe des Zylinders gleich ist.
$$m = 2r\pi h.$$

Denn die Mantelfläche läßt sich als ein Rechteck denken, das mit dem Zylinder gleiche Höhe hat und dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche des Zylinders gleich ist.

2. Die Oberfläche eines geraden Zylinders wird erhalten, indem man zur Mantelfläche den doppelten Inhalt der Grundfläche addiert. $o = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi(h+r)$.

Im gleichseitigen Zylinder ist $h = 2r$, daher $m = 4r^2\pi$ und $o = 6r^2\pi$.

Übungsaufgaben.

1. Die Grundfläche eines geraden Zylinders hat 4·5 *dm* zum Halbmesser, seine Höhe mißt 8·4 *dm*; wie groß ist *a)* die Mantelfläche, *b)* die ganze Oberfläche des Zylinders?

2. Berechne die Oberfläche folgender geraden Zylinder:

a) Durchmesser der Grundfläche 23 *cm*, Höhe 1·4 *dm*;

b) Halbmesser „ „ 8 *dm* 2 *cm* 5 *mm*, „ 5·24 *dm*;

c) Umfang „ „ 1 *m* 9 *cm*, „ 1 *m* 8 *dm* 8 *cm*!

3. Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Zylinders, dessen Höhe 3 *dm* 4 *cm* und dessen Inhalt der Grundfläche 8 dm^2 beträgt?

4. Die Mantelfläche eines geraden Zylinders ist 62 dm^2 80 cm^2, der Durchmesser der Grundfläche 4 *dm*; wie groß ist die Höhe?

5. Ein gleichseitiger Zylinder hat 2 *dm* 4 *cm* zur Seite; suche *a)* seine Mantelfläche, *b)* die ganze Oberfläche!

6. Wie verhält sich die Mantelfläche eines gleichseitigen Zylinders zur ganzen Oberfläche desselben?

7. Wieviel dm^2 Eisenblech braucht man für eine Ofenröhre, die 5 *m* lang ist und 2 *dm* im Durchmesser hat?

8. Ein zylindrisches, oben offenes Gefäß ist von außen anzustreichen; der Halbmesser der Grundfläche beträgt 3·2 *dm*; die Höhe 54 *cm*; wieviel dm^2 sind anzustreichen?

9. Wie oft wird sich eine Walze um ihre Achse drehen müssen, wenn ein Stück Feld von 20 *a* ganz überwalzt werden soll und die Walze 1 *m* 6 *dm* lang ist und 3 *dm* im Durchmesser hat?

10. Berechne die Oberfläche eines geraden Zylinders nach einem gegebenen Modelle!

11. Berechne die Oberfläche eines halben geraden Zylinders, wenn der Durchmesser der Grundfläche *(D)* mit $5\frac{4}{5}$ *cm* und die Höhe *(H)* mit 10 *cm* kotiert sind!

12. Wieviel m^2 Plakatierungsfläche liefert der Mantel einer Annoncensäule *a)* von 1 *m* 4 *dm* Durchmesser, *b)* von 6 *m* 2 *dm* 9 *cm* Umfang und $3\frac{1}{4}$ *m* Höhe?

13. Wieviel m^2 Eisenblech braucht man zu einem halbzylindrisch geformten Ofenschirm von 58 *cm* Radius und $1\frac{1}{3}$ *m* Höhe?

14. Wieviel m^2 Pappendeckel braucht ein Kartonnagenarbeiter zur Anfertigung von 6 Dutzend zylindrisch geformter Schachteln, wenn jede einen Durchmesser von 24 *cm* und eine Höhe von $3\frac{4}{5}$ *dm* erhalten soll und wenn 30% auf Verschnitt gerechnet wird?

15. Wieviel m^2 Zinkblech braucht ein Klempner zur Anfertigung von 2 halbzylindrischen Dachrinnen von $14\frac{3}{5}$ *m* Länge und $15\frac{1}{2}$ *cm* Durchmesser, wenn für Verschnitt und Überdeckung 10% zugeschlagen werden?

b) Der Kegel.

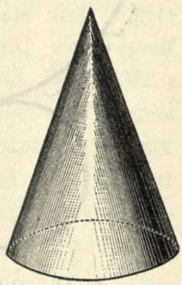
§ 194. Erklärungen. Bewegt sich eine Gerade durch alle Punkte einer Kreislinie so, daß sie dabei stets durch einen festen Punkt außerhalb der Ebene dieser Kreislinie geht, so beschreibt sie eine gekrümmte Fläche, die man eine konische (Kegel-) Fläche nennt. Der von ihr eingeschlossene, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum heißt kegelförmiger oder konischer Raum. Die gegebene Kreislinie heißt die Leitlinie (Leitkreis) und der gegebene feste Punkt der Scheitel oder die Spitze der konischen Fläche.

Wird der kegelförmige Raum durch die Ebene des Leitkreises abgeschlossen, so entsteht ein **Kegel** (u. zw. ein Kreiskegel). Die Kreisebene heißt die Grundfläche, die sie begrenzende konische Fläche wird der Mantel des Kegels genannt. Die Strecke, welche die Spitze und den Mittelpunkt der Grundfläche verbindet, heißt die Achse und jede Strecke in der Mantelfläche heißt eine Seitenlinie oder Seite des Kegels. Den Normalabstand der Spitze von der Grundfläche des Kegels nennt man Höhe.

Gib Beispiele über das **Vorkommen** des Kegels an!

Was für Flächen begrenzen einen Kegel? Ein Kegel kann als eine Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche ein Kreis ist. Ein Kegel entsteht auch, wenn ein Kreis parallel zu sich selbst in stetig abnehmender Größe so fortschreitet, daß sein Mittelpunkt eine Gerade, die Achse, beschreibt.

Fig. 233.



Ein Kegel, dessen Achse auf der Grundfläche normal steht, heißt ein **gerader** (Fig. 233), jeder andere ein **schiefer.** Einen geraden Kegel kann man sich durch Drehung eines rechtwinkligen Dreieckes um eine seiner Katheten als Achse entstanden denken. In einem geraden Kegel sind alle Seiten einander gleich und die Achse stellt zugleich die Höhe vor. Die Seite eines geraden Kegels ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, das den Halbmesser der Grundfläche und die Höhe des Kegels zu Katheten hat.

Ist in einem geraden Kegel die Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich, so heißt er ein gleichseitiger Kegel.

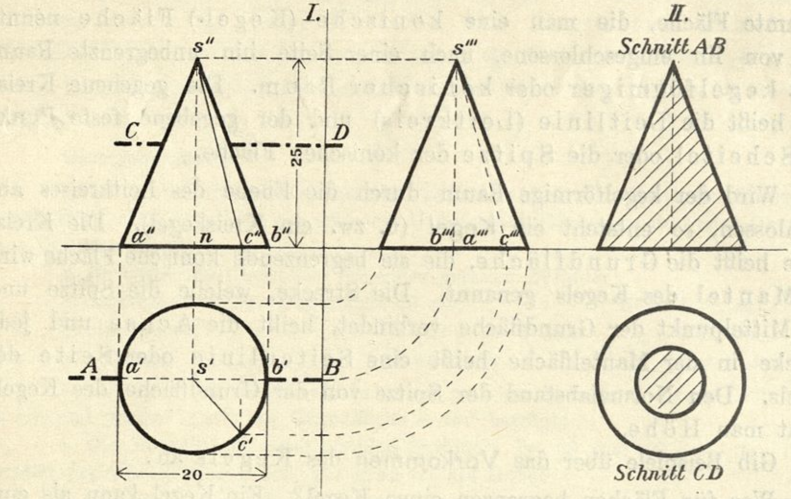
Kegelförmige Körper werden auch konische (von *conus*) genannt.

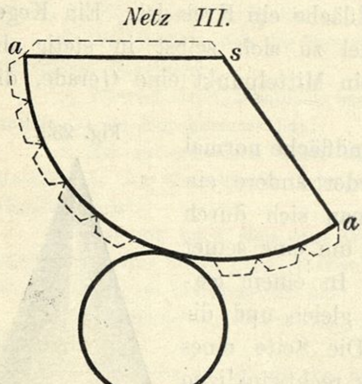
Projektionen, Schnitt und Netz des Kegels.

§ 195. Fig. 234, I stellt den Grundriß, den Aufriß und den Kreuzriß, II den Achsenschnitt AB und den Parallelschnitt CD, III das **Netz** eines geraden Kegels dar, dessen Grunddurchmesser $ab = 20$ *mm*, dessen Höhe $sn = 25$ *mm* ist.

Der Grundriß gibt den Halbmesser der Grundfläche, der Aufriß die Höhe und die Seite des Kegels.

Fig. 234.



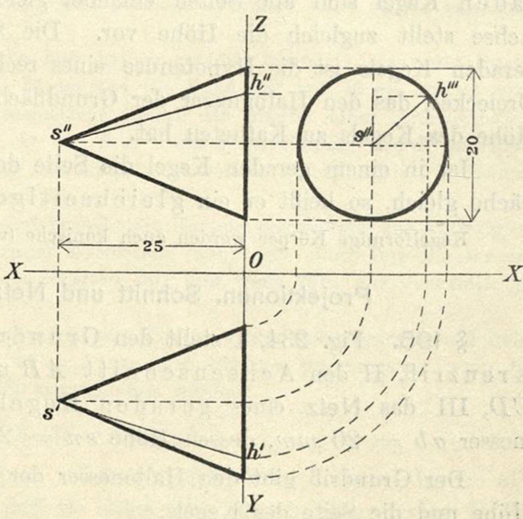


Wie müßte man vorgehen, um den Aufriß eines senkrechten Kreiskegels zu finden, von dem man außer dem Durchmesser der Grundfläche noch die Seite kennt?

Wie wird das **Netz** eines geraden Kegels erhalten?

In Fig. 235 erscheint ein gerader Kegel, auf der Kreuzrißebene ruhend, projektiv dargestellt.

Fig. 235.



In Fig. 236, I sind der Grund- und Aufriß eines hohlen geraden, auf der P_1 normal auf der Spitze stehenden Kegels, in II der Achsenschnitt AB und der Parallelschnitt CD dargestellt.

Aufgaben.

1. Die Grundfläche eines 100 *mm* hohen geraden Kegels hat 65 *mm*

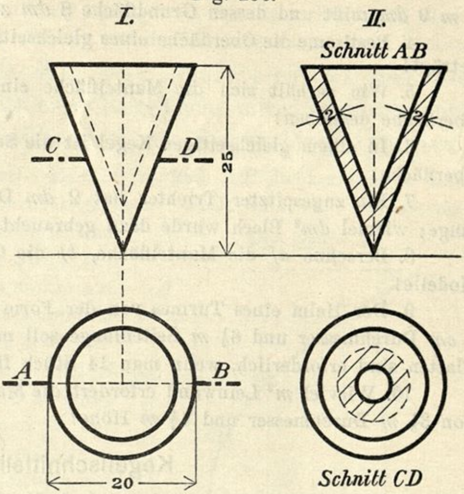
im Durchmesser; wie groß ist die Seite des Kegels?

2. Konstruiere das Netz des in 1. angegebenen Kegels und den Grund- und den Aufriß dieses Körpers unter der Annahme, daß die Grundfläche in der Ebene P_2 liegt und die Achse von der Ebene P_1 um 45 *mm* absteht!

3. Zeichne den Grund-, Auf- und Kreuzriß eines geraden Kegels, dessen Achse zu der Projektionsachse parallel ist! — (Vergl. § 180, Aufgabe 5.)

4. Zeichne die horizontale, vertikale und Kreuzrißprojektion eines schiefen Kegels, dessen Grundfläche in der *a)* P_1, *b)* P_2, *c)* P_3 liegt!

Fig. 236.



Oberfläche eines Kegels.

§ 196. Die **Oberfläche** eines Kegels wird gefunden, indem man zuerst die Grundfläche, dann die Mantelfläche berechnet und beide addiert.

$$o = m + r^2\pi.$$

Bei einem geraden Kegel wird die Mantelfläche gefunden, indem man den Umfang der Grundfläche mit der halben Seite des Kegels multipliziert. Denn die Mantelfläche des Kegels erscheint, wenn man sie in eine Ebene ausbreitet, als ein Kreisausschnitt, dessen Bogen dem Umfange der Grundfläche und dessen Halbmesser der Seite des Kegels gleich ist; nun ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes gleich der Länge des Bogens multipliziert mit dem halben Halbmesser; folglich ist die **Mantelfläche** eines geraden Kegels gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche und der halben Seite.

$$m = 2r\pi . \frac{s}{2} = sr\pi \text{ und die Oberfläche}$$

$$o = m + r^2\pi = rs\pi + r^2\pi = r\pi(s + r).$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher

$$m = 2r^2\pi \text{ und}$$

$$o = 3r^2\pi.$$

Aufgaben.

1. In einem geraden Kegel ist:

a) der Durchmesser der Grundfläche 4 *m*, eine Seite 6 *m*;
b) der Halbmesser „ „ 5 *dm* 6 *cm*, „ „ 8·4 *dm*;
c) der Umfang „ „ 1 *m* 1 *dm* 7 *cm*, „ „ 3 *m* 2 *cm*;

wie groß ist der Mantel und wie groß ist die ganze Oberfläche?

2. Die Seite eines geraden Kegels ist 3·33 *dm*, die Mantelfläche 1759·296 cm^2; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche?

3. Suche *a)* die Seite, *b)* die Mantelfläche eines geraden Kegels, dessen Höhe 3 *m* 9 *dm* mißt und dessen Grundfläche 8 *dm* zum Halbmesser hat!

4. Bestimme die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Seite 1 *m* 4 *dm* beträgt!

5. Wie verhält sich die Mantelfläche eines gleichseitigen Kegels zur ganzen Oberfläche desselben?

6. In einem gleichseitigen Kegel ist die Seitenlänge 7·5 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

7. Ein zugespitzter Trichter hat 2 *dm* Durchmesser und 2 *dm* 4 *cm* Seitenlänge; wieviel dm^2 Blech wurde dazu gebraucht?

8. Berechne *a)* die Mantelfläche, *b)* die Oberfläche eines Kegels nach einem Modelle!

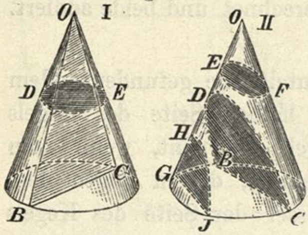
9. Der Helm eines Turmes von der Form eines geraden Kreiskegels mit 2 *m* 6 *cm* Durchmesser und $6\frac{1}{2}$ *m* Seitenlänge soll mit Schiefer gedeckt werden; wieviele Platten sind erforderlich, wenn man 14 Stück für 1 m^2 rechnet?

10. Wieviel m^2 Leinwand erfordert die Mantelfläche eines kegelförmigen Zeltes von $3\frac{1}{5}$ *m* Durchmesser und $4\frac{1}{2}$ *m* Höhe?

Kegellschnittslinien.

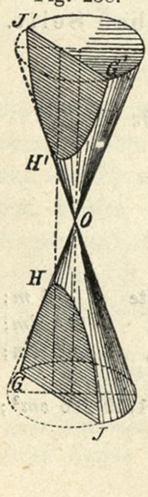
§ 197. Besonders wichtig sind die Schnitte, die entstehen, wenn ein gerader Kegel von einer Ebene geschnitten wird. Geht der Schnitt durch die Achse (Fig. 237, I), so bildet er ein gleichschenkliges Dreieck *OBC*; steht er auf der Achse normal, oder, was dasselbe ist, geht er parallel mit der Grundfläche, so ist die Schnittfigur ein Kreis *DE*. Ist aber (Fig. 237, II) die schneidende Ebene gegen die Achse geneigt, so sind drei Fälle möglich. Trifft die schneidende Ebene alle Seiten des Kegels, so ist dle Schnittfigur eine Ellipse *EF*. Ist die Schnittebene parallel zu einer Seite des Kegels, so ist die Schnittfigur eine nach einer Seite offene krummlinige Figur *BCD*, die Parabel heißt. Ist endlich die schneidende Ebene parallel zu zwei Seiten des Kegels, welcher Fall z. B. eintritt, wenn sie parallel zur Achse ist, so ist die Schnittfigur auch eine krummlinige Figur *GHJ*, die Hyperbel heißt; diese Schnittlinie ist jedoch nur ein Ast der Hyperbel.

Fig. 237.



Erweitert man die Mantelfläche eines geraden Kegels über die Spitze hinaus und schneidet die so erweiterte Fläche durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so erhält man einen Kegel, der mit dem gegebenen einen Doppelkegel bildet (Fig. 238). Wird dieser durch eine Ebene, die zur Achse parallel ist, geschnitten, so erhält man die vollständige Hyperbel, die aus zwei getrennten Ästen besteht.

Fig. 238.

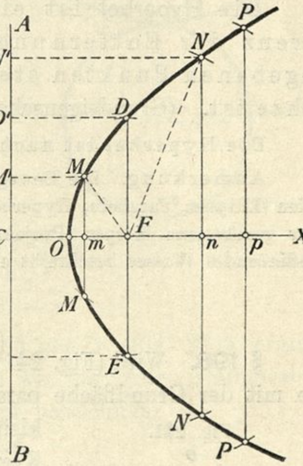


Die vorstehend angeführten Schnittlinien lassen sich auf sehr anschauliche Weise darstellen, wenn man ein kegelförmig zugespitztes Glas zum Teile mit einer gefärbten Flüssigkeit füllt, dann oben schließt und die Richtung seiner Achse ändert.

Die krummen Linien: die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel, die durch den Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene entstehen, heißen mit einem gemeinschaftlichen Namen Kegelschnittslinien.

Konstruktion einer **Parabel.** Es sei (Fig. 239) AB die Leitlinie und F der Brennpunkt (Fokus) der Parabel gegeben. Fällt man von dem Brennpunkte die Normale FC auf die Leitlinie und halbiert diese Normale, so ist O der Scheitel der Parabel. Errichtet man im Brennpunkte auf CF eine Normale, auf die man vom Brennpunkte aus dessen Entfernung von der Leitlinie (FC) aufträgt, so sind die so erhaltenen Punkte D und E Punkte der Parabel. Die Normale DE heißt Parameter der Parabel. Wählt man in der gegen X verlängerten Achse einen beliebigen Punkt m, errichtet in diesem eine Normale auf die Achse und beschreibt von F mit dem Abstande Cm nach oben und unten Kreisbogen, welche die Normale in den Punkten M und M schneiden, so geben diese Punkte zwei Punkte der Parabel. Ebenso verfährt man mit den Abständen Cn, Cp ... und erhält jedesmal zwei weitere Punkte der Parabel. Auf diese Weise kann man beliebig viele Punkte bestimmen. Werden diese durch eine krumme Linie verbunden, so erhält man die verlängerte Parabel. Die Parabel ist in Bezug auf die Achse symmetrisch.

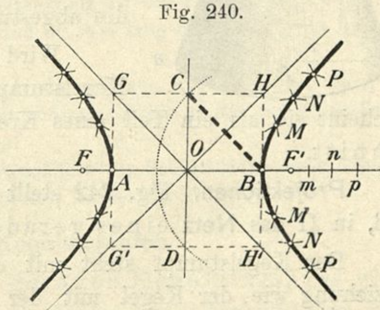
Fig. 239.



Die **Parabel** ist eine krumme Linie, deren Punkte von einem gegebenen Punkte ebensoweit entfernt sind wie von einer gegebenen Geraden. (Grundeigenschaft.)

Konstruktion einer **Hyperbel.** Es seien (Fig. 240) F und F' die beiden Brennpunkte der Hyperbel. Man verbinde dieselben durch die Strecke FF', halbiere diese in O und trage von O aus bis A und B die halbe Länge der gegebenen Hauptachse (AB) auf, womit die beiden Scheitel (A und B), also zwei Punkte der Hyperbel bestimmt sind. Nun nehme man in der Geraden BX einen Punkt m an und beschreibe von F und F' mit Am und Bm nach oben und unten Kreisbögen, so geben ihre Durchschnittspunkte vier Punkte der Hyperbel an. Ebenso verfährt man mit An, Ap ... und erhält jedesmal vier weitere Punkte der Hyperbel. Auf diese Weise kann man beliebig viele Punkte bestimmen; werden dieselben durch eine krumme Linie miteinander verbunden, so erhält man die verlangte Hyperbel. Der

Fig. 240.



Halbierungspunkt O der Hauptachse AB heißt der Mittelpunkt der Hyperbel. Dieser ist zugleich der Halbierungspunkt der Nebenachse CD. Die Entfernung eines Brennpunktes der Hyperbel vom Mittelpunkte (O) heißt die Exzentrizität der Hyperbel ($FO = OF'$). Die durch die Punkte G und H', dann H und G' gezogenen Geraden GH' und $G'H$, die zugleich durch den Mittelpunkt O gehen müssen, heißen die Asymptoten der Hyperbel. Man errichtet in den Scheiteln Normale auf die Hyperbelachse und beschreibt mit der Exzentrizität vom Scheitel einen Bogen, welcher die Nebenachse in zwei Punkten (C und D) schneidet; die verlängerten Diagonalen des so erhaltenen Rechteckes bilden die Asymptoten, denen sich die Hyperbeläste unaufhörlich nähern.

Die **Hyperbel** ist eine krumme Linie, in der die Differenz der Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen Punkten stets dieselbe und gleich der Hauptachse ist. (Grundeigenschaft.)

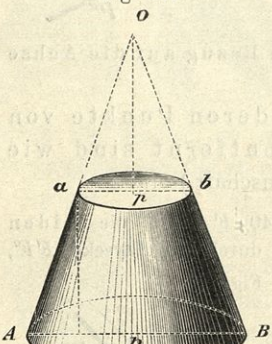
Die Hyperbel ist nach beiden Achsen symmetrisch.

Anmerkung. Die Bewegungsbahnen der Himmelskörper sind Kegelschnittslinien (Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln). In schräger Richtung geworfene, geschleuderte oder geschossene Körper (Projektile) beschreiben parabolische Bahnen (Wurflinie); ausfließendes Wasser beschreibt einen parabolischen Bogen.

Kegelstumpf.

§ 198. Wird (Fig. 241) ein Kegel durch eine Ebene ab geschnitten, die mit der Grundfläche parallel ist, so zerfällt er in zwei Körper, einen kleineren Kegel und einen zwischen zwei parallelen Kreisflächen liegenden Körper, der ein abgestutzter Kegel oder ein **Kegelstumpf** genannt wird. Der zwischen der Schnittfläche und der Spitze liegende Teil des Kegels heißt der Ergänzungskegel des Stumpfes. Was für Flächen begrenzen einen Kegelstumpf? Die Entfernung Pp der beiden Kreisflächen ist die Höhe des Kegelstumpfes. Jede Strecke in der Mantelfläche des abgestutzten Kegels heißt Seite, z. B. aA.

Fig. 241.

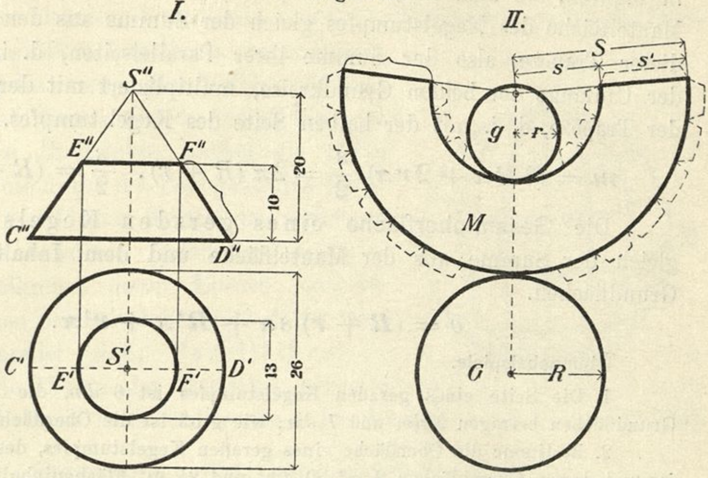


Wird die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes auf eine Ebene abgewickelt, so erscheint sie als ein Teil eines Kreisringes u. zw. als Kreisringausschnitt.

Projektionen. Fig. 242 stellt in I den Grundriß und den Aufriß, in II das **Netz** eines geraden Kegelstumpfes dar.

Der Kegelstumpf steht mit dem Pyramidenstumpfe in derselben Beziehung wie der Kegel mit der Pyramide (§ 194). Wie sich beim Pyramidenstumpfe zwei gleichliegende Seiten der beiden Grundflächen verhalten, so verhalten sich beim Kegelstumpfe die Halbmesser der beiden

Fig. 242.



Grundkreise. Wenn daher die Höhe h des Kegelstumpfes und die Halbmesser R und r seiner Grundflächen bekannt sind, so kann man daraus mit Rücksicht auf § 182 die Höhen H und x des ganzen Kegels und des Ergänzungskegels berechnen. Man erhält

$$H = \frac{h \,.\, R}{R - r} \text{ und } x = \frac{h \,.\, r}{R - r}.$$

Aus den ähnlichen Dreiecken APO und $ap\,O$ (Fig. 241) ergibt sich $AP : ap = OP : Op$ oder kürzer, wenn wir die beiden Halbmesser mit R und r, die beiden Höhen mit H und x bezeichnen:

$R : r = H : x$; daraus

$R^2 : r^2 = H^2 : x^2$ und

$\pi R^2 : \pi r^2 = H^2 : x^2$: oder

$\boldsymbol{G : g = H^2 : x^2}$, d. h.: Die beiden Grundflächen eines Kegelstumpfes verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze des ganzen Kegels, von dem der Stumpf ein Teil ist. (Siehe § 182, b.)

Aufgaben.

1. Ein gerader Kegelstumpf, dessen Seitenkante 76 *mm* beträgt, hat zu Grundflächen Kreise, deren Durchmesser 65 *mm* und 40 *mm* lang sind; wie groß ist die Höhe des Stumpfes?

2. Zeichne Grund- und Aufriß des in 1. angegebenen Kegelstumpfes, wenn er mit der größeren Grundfläche auf P_1 aufsteht und seine Achse 40 *mm* von P_2 entfernt ist; konstruiere auch das Netz des Stumpfes!

3. Wie groß ist im Verhältnis zur Grundfläche die Schnittfläche eines Kegels, wenn man den Schnitt im obern Drittel, Fünftel, Achtel der Höhe führt?

Oberfläche des Kegelstumpfes.

§ 199. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes wird gefunden, indem man die Summe der Umfänge seiner Grundflächen mit der halben Seite desselben multipliziert. Denkt man sich nämlich in dem Mantel des Stumpfes unzählig viele Seiten gezogen, so zerfällt derselbe in Figuren, die man als ebene Trapeze ansehen kann; es ist daher die Mantelfläche des Kegelstumpfes gleich der Summe aus den Flächen aller dieser Trapeze, also der Summe ihrer Parallelseiten, d. i. der Summe der Umfänge der beiden Grundkreise, multipliziert mit der halben Höhe der Trapeze, d. i. mit der halben Seite des Kegelstumpfes.

$$m = (2R\pi + 2r\pi)\,\frac{s}{2} = 2\pi\,(R+r)\,.\,\frac{s}{2} = (R+r)\,s\pi.$$

Die **Gesamtoberfläche** eines geraden Kegelstumpfes ist gleich der Summe aus der Mantelfläche und dem Inhalte der beiden Grundflächen.

$$o = (R+r)\,s\pi + R^2\pi + r^2\pi.$$

Übungsbeispiele.

1. Die Seite eines geraden Kegelstumpfes ist 6 *dm*, die Durchmesser der Grundflächen betragen 9 *dm* und 7 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

2. Bestimme die Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes, dessen Seite 1·5 *m* ist und dessen Grundflächen 2 m^2 80 dm^2 und $2\frac{1}{2}$ m^2 Flächeninhalt haben!

3. Ein silberner Becher hat die Form eines Kegelstumpfes, der oben 14 *cm*, unten 10 *cm* weit ist und eine Tiefe von 16 *cm* hat; wieviel cm^2 Vergoldung sind für die innere Fläche des Bechers erforderlich?

4. Berechne *a)* die Mantelfläche, *b)* die Oberfläche eines Kegelstumpfes nach einem gegebenen Modelle!

c) Die Kugel.

§ **200.** Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage gelangt, so beschreibt er eine gekrümmte Fläche, die Kugelfläche genannt wird. Der von der Kugelfläche begrenzte Körper heißt **Kugel** (Fig. 243).

Fig. 243.

Beispiele über das **Vorkommen** der Kugel!

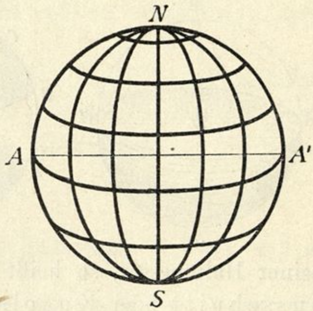
Jeder Punkt der Kugelfläche ist von dem Mittelpunkte des erzeugenden Halbkreises gleich weit entfernt; dieser Punkt heißt darum der Mittelpunkt der Kugel. Eine Strecke, die vom Mittelpunkte bis zur Kugelfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Strecke, die durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der Kugeloberfläche verbindet, ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich; ebenso alle Durchmesser.

Unter allen Kugelkreisen ist der am größten, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Ein solcher Kreis heißt darum auch größter Kugelkreis; sein Halbmesser ist dem Halbmesser der Kugel gleich.

Erklärungen. Denkt man sich eine Kugelfläche durch Drehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser (*NS* in Fig. 244) entstanden, so nimmt der Halbkreis nach und nach die Lagen aller durch die Endpunkte jenes Durchmessers gehenden größten Halbkreise der Kugel ein;

ebenso beschreibt jeder Punkt des sich drehenden Halbkreises einen größeren oder kleineren Kugelkreis, u. zw. der Halbierungspunkt des Halbkreises einen größten Kugelkreis. Jener Durchmesser (NS) des erzeugenden Halbkreises heißt in Bezug auf diese bezeichneten Kreise die Achse, ihre Endpunkte heißen die Pole (N und S), die durch die Pole gehenden Halbkreise die Meridiane, die von den einzelnen Punkten des bewegten Halbkreises beschriebenen Kugelkreise, deren Ebenen sämtlich auf der Achse normal stehen und daher miteinander parallel sind, Parallelkreise; der durch die Mitten der Meridiane gehende größte Parallelkreis heißt insbesondere der Äquator (AA' in Fig. 244).

Fig. 244.



Projektionen, Netz und Schnitt der Kugel.

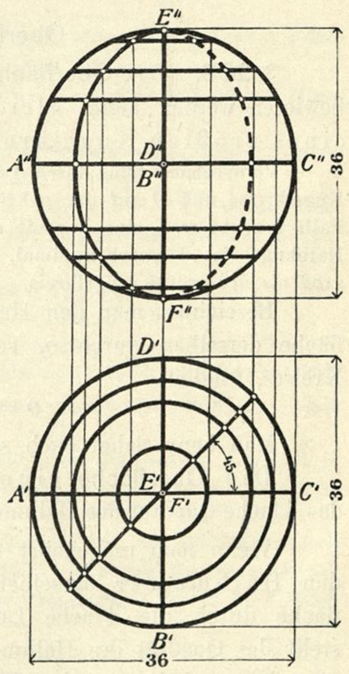
§ 201. Fig. 245 stellt den Grundriß und den Aufriß einer Kugel dar.

Der Grund- und der Aufriß einer Kugel sind Kreise, deren Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich sind. Steht die Achse der Kugel auf der Horizontalebene normal, so erscheinen im Grundriß alle Meridiane als Durchmesser, im Aufriß einer als Kreis, einer als Durchmesser und alle übrigen als Ellipsen; die Parallelkreise erscheinen im Grundriß als konzentrische Kreise, im Aufriß als parallele Sehnen.

Die Oberfläche der Kugel läßt sich, da sie nach allen Seiten gekrümmt ist, nicht in eine Ebene ausbreiten; daher kann von der Kugelfläche auch kein vollkommen genaues Netz konstruiert werden.

§ 202. Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so ist die Schnittfigur ein Kreis, der umso größer ist, je näher die Schnittebene dem Mittelpunkte der Kugel liegt. Am größten wird er, wenn die Schnittfläche durch den Mittelpunkt geht; ein solcher Kreis heißt ein größter Kreis der Kugel.

Fig. 245.



Eine Ebene schneidet eine Kugel in zwei Teile, die man Kugelabschnitte (Segmente) nennt. Diese können untereinander gleich oder ungleich sein, je nachdem die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel oder außerhalb desselben geht; im ersten Falle heißt jeder der beiden Kugelabschnitte eine Halbkugel (Fig. 246). Die gekrümmte Oberfläche eines Kugelabschnittes ASM (Fig. 247) heißt eine Kugelmütze oder Kalotte. Dreht sich ein Ausschnitt (Sektor) eines größten Kugelkreises um einen seiner Halbmesser, so heißt der dadurch gebildete Körper ein Kugelausschnitt oder Kugelsektor.

Fig. 246.

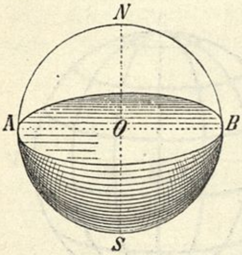
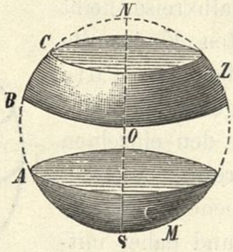


Fig. 247.



Von wieviel Flächen ist ein Kugelausschnitt begrenzt?

Wird eine Kugel durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so heißt der zwischen ihnen befindliche Teil der Kugel eine Kugelschicht und der dazu gehörige Teil BCZ (Fig. 247) der Kugeloberfläche eine Kugelzone (Gürtel).

Oberfläche einer Kugel.

§ 203. Die **Oberfläche** einer Kugel ist, wie jedoch hier nicht bewiesen werden kann, gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kugelkreises.

Veranschaulichung durch Aufwickeln eines starken Spagates *a)* auf dem größten Kugelkreise und *b)* auf der gekrümmten Oberfläche einer Halbkugel; im letzteren Falle braucht man eine doppelt so lange Schnur als im ersteren. Die Fläche der Halbkugel ist demnach zweimal, die Oberfläche der ganzen Kugel also viermal so groß als der größte Kugelkreis.

Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel durch r und die Oberfläche derselben durch o, so ist πr^2 der Flächeninhalt eines größten Kreises, folglich

$$o = 4\pi r^2 = 4 r^2 \pi.$$

Man kann daher auch sagen:

Die **Oberfläche** einer Kugel wird gefunden, indem man das 4fache Quadrat des Halbmessers mit der Ludolfischen Zahl multipliziert.

Wenn man umgekehrt aus der bekannten Oberfläche einer Kugel den Halbmesser derselben finden will, braucht man nur die Oberfläche durch die 4fache Ludolfische Zahl zu dividieren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers dar; zieht man daraus die Quadratwurzel, so erhält man den Halbmesser selbst. Es ist demnach

$$r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}.$$

Heißt R der Halbmesser und O die Oberfläche einer zweiten Kugel, so ist auch $O = 4\pi R^2$, daher

$$O : o = 4\pi R^2 : 4\pi r^2 = R^2 : r^2; \text{ d. h.:}$$

Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Die Oberfläche einer Kugelzone oder einer Kugelkappe (Kalotte) wird berechnet, indem man den Umfang eines größten Kugelkreises mit der Höhe der Kugelzone oder der Kugelkappe multipliziert.

$$m = 2 r \pi . h.$$

Übungsaufgaben.

1. Berechne die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser *a)* 3 *dm*, *b)* 1 *m* 4 *dm*, *c)* 1 *m* 5 *cm*, *d)* 17½ *cm* ist!

2. Der Durchmesser einer Kugel ist *a)* 5 *dm*, *b)* 4·3 *cm*, *c)* 2 *dm* 8 *mm*; wie groß ist die Oberfläche?

3. Der Umfang eines größten Kugelkreises sei 2 *m* 7 *dm* 9 *mm*; berechne die Oberfläche der Kugel!

4. Der größte Kreis einer Kugel hat 855·3 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist die Oberfläche?

5. Die Oberfläche einer Kugel ist *a)* 22 dm^2, *b)* 9 dm^2 7 cm^2 46 mm^2; wie groß ist der Halbmesser?

6. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn man diese als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser 6368·96 *km* beträgt? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

7. Der Durchmesser eines Erdglobus ist 4 *dm*; wie verhält sich dessen Oberfläche zur Oberfläche der Erde?

8. Wie groß müßte der Durchmesser eines Erdglobus angenommen werden, auf welchem 1000 km^2 als 1 mm^2 erscheinen sollen?

9. Von der Oberfläche der Erde sind 0·73 Wasser und 0·27 festes Land. Wieviel cm^2 kommen auf einen Globus von 55 *cm* Durchmesser auf das Wasser und wieviel auf das feste Land?

10. Man will einen Luftballon machen, dessen Durchmesser 3·2 *m* beträgt; wieviel *m* Taffet von 92 *cm* Breite wird man dazu brauchen?

11. Ein kugelrunder Turmkopf von 1·2 *m* Durchmesser soll vergoldet werden; wie hoch kommt die Vergoldung, wenn für 1 m^2 Vergoldung 97 K 60 h zu zahlen sind?

12. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches der Oberfläche einer Kugel von 1 *m* 1 *dm* Durchmesser gleich ist?

13. Ein gerader Kegel hat 0·8 *m* Höhe und eine Grundfläche von 0·3 *m* Halbmesser; wie groß muß der Durchmesser einer Kugel sein, deren Oberfläche gleich ist der Mantelfläche jenes Kegels?

14. Eine Kuppel, welche die Form einer Halbkugel hat, soll mit Kupferblech gedeckt werden; wieviel Blech ist dazu erforderlich, wenn der Durchmesser der Kugel 6 *m* 3 *dm* ist, und wieviel kostet diese Bedeckung, wenn 1 m^2 zu 34 K 40 h gerechnet wird?

15. Ein Kuppelgewölbe ruht auf einem zylindrischen Mauerwerke; der innere Durchmesser der Kuppel, die eine Halbkugel vorstellt, ist 12 *m*, die Höhe der Kuppel vom Boden an gerechnet 22 *m*, folglich die Höhe der zylindrischen Mauer 16 *m*. Wieviel Kalk ist erforderlich, um das Innere dieses ganzen Mauerwerkes auszuweißen, wenn man 1 *kg* Kalk braucht, um 1 m^2 Fläche auszuweißen?

16. Berechne die Oberfläche des Mondes, wenn sein Umfang 11.070 *km* beträgt!

17. Ein Steinmetz haut aus Sandstein eine Kugel von 45 *cm* Durchmesser aus; wie teuer kommt die Arbeit, wenn 1 cm^2 mit 8 K 25 h bezahlt wird?

18. Berechne die Oberfläche *a)* einer Kugel, *b)* einer Halbkugel nach einem gegebenen Modelle!

§ 204. **Übung** im Kotieren und Aufnehmen (Darstellen) von geometrischen Holzmodellen, Kombinationskörpern und architektonischen Grundformen im Grund- und Aufriß, nötigenfalls auch im Kreuzriß und Übung im Bestimmen von Achsen-, Längs- und Parallelschnitten als praktische Anwendung des projektivischen Zeichnens! Benützung von Modellen!

XII. Rauminhalt der Körper.

§ 205. Um den **Rauminhalt** (den Kubikinhalt oder das Volumen) eines Körpers, d. i. die Größe des von seinen Grenzflächen eingeschlossenen Raumes, zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Einheit des Kubikmaßes an und untersucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Körper enthalten ist. Die gefundene Zahl heißt die Maßzahl für den Rauminhalt des Körpers.

Als Einheit des Körper- oder Kubikmaßes nimmt man einen Würfel oder Kubus an, dessen Kante einer Längeneinheit gleich ist, und der ein Kubikmeter (m^3), ein Kubikdezimeter (dm^3), ein Kubikzentimeter (cm^3) heißt, je nachdem die entsprechende Längeneinheit ein Meter, ein Dezimeter, ein Zentimeter ist.

$$1\ m^3 = 1.000\ dm^3 \text{ à } 1.000\ cm^3 \text{ à } 1.000\ mm^3.$$

Als Hohlmaß heißt das Kubikdezimeter Liter (*l*);

100 Liter = 1 Hektoliter (*hl*).

Einen Körper **messen** heißt also untersuchen, wieviel Kubikmeter, Kubikdezimeter usw. in demselben enthalten sind. Es würde zu mühsam und in vielen Fällen unausführbar sein, diese Untersuchung durch wirkliches Neben- und Aufeinanderlegen der Kubikeinheit vorzunehmen; einfacher wird der Rauminhalt eines Körpers mittelbar aus den Maßen der Linien oder Flächen, von denen die Größe desselben abhängt, durch Rechnung gefunden.

Zwei Körper, die denselben Rauminhalt haben, heißen inhaltsgleich.

§ 206. Läßt man einen Körper durch die Parallelbewegung eines ebenen Gebildes entstehen, so hängt sein Kubikinhalt ab: 1. von der ursprünglichen Größe des sich bewegenden Gebildes, d. i. von der Grundfläche des Körpers; 2. von der Größe dieses Gebildes während des Verlaufes der ganzen Bewegung und 3. von der Entfernung der letzten Stellung des Gebildes von der ursprünglichen Stellung, d. i. von der Höhe des Körpers.

Bleibt die Größe der Grundfläche während der Parallelbewegung unverändert, wie bei dem Prisma und dem Zylinder, oder nimmt sie stetig ab, bis sie in einem Punkte verschwindet, wie bei der Pyramide und dem Kegel, so hängt dann der Kubikinhalt bloß von der Grundfläche und von der Höhe ab. Daraus folgt:

Zwei Prismen, zwei Zylinder, zwei Pyramiden oder zwei Kegel sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. Veranschaulichung!

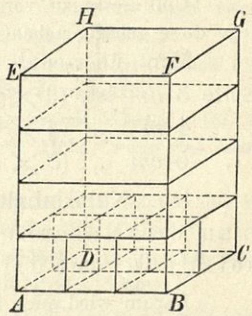
Der Rauminhalt einer Kugel hängt bloß von ihrem Halbmesser ab.

Zwei Kugeln sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben.

1. Kubikinhalt der Prismen.

§ 207. Es sei zunächst der Körperinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedes $ABCDEFGH$ (Fig. 248) zu bestimmen, in dem die Länge $AB = 3\ dm$, die Breite $AD = 2\ dm$ und die Höhe $AE = 4\ dm$ ist. Da die Grundfläche $3\ dm^2 \times 2 = 6\ dm^2$ enthält, so läßt sich auf ihr ein dm^3 6mal auflegen; das Prisma enthält also bis zu einer Höhe von 1 dm eine Schichte von 6 dm^3; zu jeder weiteren gleichen Höhe gehört wieder eine Schichte von 6 dm^3. Das ganze Prisma hat vier Schichten, jede Schichte mit 6 dm^3, daher $6\ dm^3 \times 4 = 24\ dm^3 = (3 \times 2 \times 4)\ dm^3$. — Allgemein lassen sich der Grundfläche jedesmal so viele Kubikeinheiten aufstellen, als dieselbe Quadrateinheiten enthält, und es erscheinen so viele solcher Schichten von Würfeln übereinander, als die Höhe Längeneinheiten enthält. Man muß daher, um den Rauminhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedes zu erhalten, die Maßzahlen seiner Grundfläche und Höhe, oder was gleichviel ist, die Maßzahlen seiner Länge, Breite und Höhe miteinander multiplizieren.

Fig. 248.



Kürzer sagt man gewöhnlich:

Der **Rauminhalt** eines rechtwinkligen Parallelepipedes ist gleich dem Produkte aus der Länge, Breite und Höhe oder dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

$$v = l \times b \times h = g \times h.$$

Da jedes Prisma mit einem rechtwinkligen Parallelepiped, das mit ihm gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe hat, inhaltsgleich ist (§ 50), so folgt allgemein:

Der Rauminhalt eines jeden Prismas ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

Bezeichnet g die Maßzahl der Grundfläche, h die Maßzahl der Höhe und v den Rauminhalt eines Prismas, so ist

$$v = g \cdot h, \qquad g = \frac{v}{h}, \qquad h = \frac{v}{g}.$$

Hier und weiterhin sind, wenn von Produkten aus Flächen und Linien geredet wird, immer nur die Maßzahlen derselben zu verstehen.

§ 208. Ein Würfel (Kubus, Hexaeder) ist ein rechtwinkliges Parallelepiped von gleicher Länge, Breite und Höhe; der Kubikinhalt eines Würfels ist also gleich der dritten Potenz einer Seite.

Ist z. B. die Länge der Seite eines Würfels 2 dm, so beträgt die Grundfläche 2 $dm^2 \times 2 = 4\ dm^2$. Es lassen sich demnach auf der Grundfläche 4 dm^3 auflegen und zwar bis zu einer Höhe von 1 dm, und von da bis zur Höhe von 2 dm liegt noch eine Schichte von 4 dm^3; also enthält der Würfel

$$4\ dm^3 \times 2 = (2 \times 2 \times 2)\ dm^3 = 2^3\ dm^3 = 8\ dm^3.$$

Um dieses zu versinnlichen, nehme man 8 kleine und gleiche Würfel und lege diese gehörig neben- und aufeinander.

Man überzeugt sich auf gleiche Weise, daß ein Würfel, dessen
Seite 3 dm ist, $(3 \times 3 \times 3)\ dm^3 = 3^3\ dm^3 = 27\ dm^3$,
„ 4 m „ $(4 \times 4 \times 4)\ m^3 = 4^3\ m^3 = 64\ m^3$,
„ 5 cm „ $(5 \times 5 \times 5)\ cm^3 = 5^3\ cm^3 = 125\ cm^3$ enthält.

Der Kubikinhalt eines Würfels wird also gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite (Kante) dreimal als Faktor setzt oder zur dritten Potenz erhebt.

Darum wird auch im Rechnen die dritte Potenz einer Zahl der Kubus derselben genannt.

Bezeichnet s die Länge einer Seite und v den Rauminhalt eines Würfels, so ist

$$v = s^3 \text{ und } s = \sqrt[3]{v}.$$

Heißt S die Seite und V der Rauminhalt eines zweiten Würfels, so ist $V = S^3$, daher $V : v = S^3 : s^3$; d. h.

die Rauminhalte zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Seiten.

§ 209. Übungsaufgaben.

1. Berechne den Rauminhalt folgender rechtwinkliger Parallelepipede:

a)	Länge 2·4 m,	Breite 18 dm,	Höhe 360 cm;
b)	„ 1·26 m,	„ 10·5 dm,	„ 0·84 m;
c)	„ 12 m 4 cm,	„ 1 m 7 dm 5 cm,	„ 8 m 3 dm!

2. Wie groß ist der Rauminhalt eines Prismas, dessen Grundfläche 5 dm^2 46 cm^2 und dessen Höhe 2 dm 9 cm ist?

3. Die Grundfläche eines 6 dm hohen geraden Prismas ist ein Quadrat, dessen Seite 5 dm 4 cm beträgt; wie groß ist der Rauminhalt?

4. Der Inhalt eines Prismas ist 5 m^3 850 dm^3, die Höhe 1 m 3 dm; wie groß ist die Grundfläche?

5. In einem rechtwinkligen Parallelepiped ist die Grundfläche 7·3 dm lang und 24 cm breit; wie groß ist die Höhe, wenn der Inhalt 61 dm^3 320 cm^3 beträgt?

6. Ein Pfeiler mit quadratischer Grundfläche hat 40 dm^3 353 cm^3 Inhalt und $7\frac{1}{2}$ dm Höhe; wie groß ist eine Grundkante?

7. Wie groß ist der Rauminhalt eines vierkantigen Holzes von 2·3 m Länge, 8 dm und 0·2 m Dicke?

8. Wieviel Hektoliter Getreide kann ein Getreidekasten aufnehmen, wenn die Länge desselben 2 m, die Breite 1·3 m und die Höhe $1\frac{2}{5}$ m beträgt?

9. Ein Wasserbehälter ist, von außen gemessen, 2 m lang, 8 dm breit und 5 dm hoch; wieviel Liter kann er fassen, wenn die Wände und der Boden 1 dm dick sind?

10. Welche Höhe muß man einer Kiste geben, die bei 9 dm Länge und 5 dm Breite 135 dm^3 fassen soll?

11. Die Grundfläche eines prismatischen Gefäßes ist ein Rechteck von 2 m Länge und 1 m 2 dm Breite; wie tief muß das Gefäß sein, wenn es 12 Hektoliter fassen soll?

12. Die Länge einer Mauer ist 21 m, die Höhe 2 m 5 dm, die Dicke 9 dm; wieviel Ziegel braucht man, um diese Mauer aufzuführen, wenn ein Ziegel samt Verbindungsmittel 30 cm lang, 15 cm breit und 7 cm hoch anzunehmen ist?

13. Eine Mauer ist 21 m lang, 8 dm dick und 8 m hoch; welchen Druck übt dieselbe auf die Unterlage aus, wenn 1 m^3 Mauerwerk 1634 kg wiegt?

14. 1 cm^3 reines Wasser wiegt 1 g; wieviel wiegt ein mit Wasser gefülltes Blechkästchen von $1\frac{1}{2}$ dm Länge, $1\frac{1}{5}$ dm Breite und 8 cm Höhe, wenn das leere Blechkästchen 155 g wiegt?

15. Ein Prisma, dessen Grundfläche 4 dm^2 und dessen Höhe 8 dm ist, soll in einen Würfel verwandelt werden; wie groß wird die Seite des Würfels sein?

16. Die Höhe eines Prismas ist 1 m 5 dm, die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von 1 m Seitenlänge; wie groß ist der Rauminhalt dieses Prismas?

17. Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck von 1 dm 6 cm Grundlinie und 15 cm Höhe ist, hat 3 dm^3 Inhalt; wie groß ist dessen Oberfläche?

18. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein regelmäßiges Sechseck, die Höhe gleich 1 m 8 dm; wie groß ist der Rauminhalt des Prismas, wenn eine Seite der Grundfläche 1 m 1 dm ist?

19. Der Dachraum einer Scheune bildet ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche 5·6 m zur Grundlinie, 3 m zur Höhe hat, und dessen Höhe (Länge des Daches) 8·4 m beträgt; wieviel kg Heu kann dieser Raum aufnehmen, wenn 1 m^3 Heu 114 kg wiegt?

20. Eine 3 km 560 m lange und 6 m breite Straße soll mit Kies 1·2 dm hoch beschüttet werden; wieviel m^3 Kies braucht man dazu und wieviel Fuhren sind nötig, wenn der Wagenkasten 1·6 m lang, 7 dm breit und 5 dm tief ist?

21. Ein Balken ist 4 m lang und hat zu Grundflächen zwei gleiche Trapeze, in denen die Parallelseiten 4 dm und 3 dm sind und die Höhe 1·5 dm beträgt; wie groß ist der Rauminhalt?

22. Wieviel m^3 Erde faßt ein Wagenkasten, welcher 2 m lang, $8\frac{1}{2}$ dm tief, oben 1·2 m und unten 8 dm breit ist?

23. Zur Herstellung eines Kellers muß die Erde in einer Länge von 9·6 m durchaus 74 dm breit und $2\frac{4}{5}$ m tief ausgegraben werden; wieviel Wagen Erde gibt dieses, wenn die Wagentruhe 1·8 m lang, 1 m breit und 0·7 m tief ist und wenn 10 m^3 feste Erdmasse beim Ausgraben 18 m^3 lockeres Erdreich geben?

24. Aus 29 m^3 gebranntem Kalk erhält man 100 m^3 gelöschten Kalk; wieviel m^3 gebrannten Kalk braucht man, um eine Grube von 3 2 m Länge, $2\frac{1}{5}$ m Breite und 15 dm Tiefe mit gelöschtem Kalke zu füllen?

25. Ein Kasten von 1·2 m Länge und 7 dm Breite war zum Teil mit Wasser gefüllt; als man in denselben einen Stein von unregelmäßiger Form legte, stieg das Wasser um 1 dm und bedeckte den Stein; wie groß ist der Rauminhalt des Steines?

26. Messen und Berechnen prismatischer Modelle!

27. Miß die Länge, Breite und Höhe eures Lehrzimmers und berechne, wieviel m^3 Luftraum auf einen Schüler kommt?

28. Berechne den Rauminhalt eines Würfels, dessen Seite ist:

a) 12 cm, *b)* 2 m 4 dm, *c)* 1·05 m,
d) $1\frac{3}{4}$ dm, *e)* 1 m 3 dm 5 cm, *f)* 0·575 m!

29. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 3 dm^2 98 cm^2 $53\frac{1}{2}$ mm^2; wie groß ist sein Rauminhalt?

30. Wie groß ist die Kante eines Würfels, dessen Rauminhalt *a)* 2 m^3, *b)* 6 dm^3 751 cm^3 269 mm^3 beträgt?

31. Eine Seitenfläche des Würfels beträgt 3 m^2 61 dm^2; wie groß ist *a)* die Kante, *b)* der Rauminhalt?

32. Wie groß ist die Oberfläche eines Würfels, dessen Rauminhalt 8 dm^3 615 cm^3 125 mm^3 beträgt?

33. Ein würfelförmiges Gefäß hat 4·8 dm innere Weite; wieviel Liter faßt es?

34. An einem Würfel von Granit beträgt jede Seite 1·4 m; wieviel wiegt der Würfel, wenn ein dm^3 Granit 2·7 kg wiegt?

35. Die Seiten zweier Würfel sind 4 cm und 12 cm; wie verhalten sich *a)* ihre Oberflächen, *b)* ihre Rauminhalte?

36. Die Diagonale der Grundfläche eines Würfels beträgt 2·4 dm; wie groß ist *a)* die Seite, *b)* die Oberfläche, *c)* der Inhalt des Würfels?

37. Es soll ein Würfel verfertigt werden, der so groß ist wie zwei andere Würfel, deren Seiten 5 dm 4 cm und 4 dm 9 cm betragen; wie lang wird eine Seite desselben genommen werden müssen?

38. Miß und berechne vorhandene Würfel!

39. Wie groß ist das Gewicht eines Sandsteinwürfels von 2 m^2 8 dm^2 Oberfläche, wenn 1 m^3 Sandstein 2·35 t wiegt?

2. Kubikinhalt eines Zylinders.

§ 210. Da jeder Zylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, betrachtet werden kann, so gilt der Satz:

Der Kubikinhalt eines Zylinders ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

Nach der Formel: $v = g \cdot h = \pi r^2 \cdot h$.

Für den gleichseitigen Zylinder hat man $h = 2r$, daher

$$v = 2\pi r^3.$$

Öfters ist der Rauminhalt einer zylindrischen Röhre zu berechnen. Dieser Körper entsteht, wenn aus einem Zylinder ein anderer herausgeschnitten wird, der mit ersterem dieselbe Achse gemeinschaftlich hat. Den Rauminhalt einer zylindrischen Röhre findet man demnach, wenn man vom Rauminhalte des vollen Zylinders den des herausgeschnittenen Zylinders subtrahiert.

$$v = R^2 \pi h - r^2 \pi h = h \pi (R^2 - r^2).$$

Übungsbeispiele.

1. Die Grundfläche eines geraden Zylinders hat 4·5 *dm* zum Halbmesser seine Höhe ist 8·4 *dm*; wie groß ist der Rauminhalt des Zylinders?

2. Berechne den Rauminhalt folgender gerader Zylinder:

a) Durchmesser (Halbmesser) der Grundfläche 23 *cm*, Höhe 1·4 *dm*;

b) Umfang „ „ 1 *m* 9 *cm*, „ 1 *m* 8 *dm* 8 *cm*!

3. Der Rauminhalt eines Zylinders ist 3 m^3 360 dm^3, der Durchmesser der Grundfläche 1·4 *m*; wie groß ist die Höhe?

4. Der Inhalt eines Zylinders ist 6 dm^3, die Höhe 1 *dm* 6 *cm*; wie groß ist die Grundfläche?

5. Bestimme den Halbmesser der Grundfläche eines Zylinders, dessen Höhe 4 *dm* und dessen Inhalt 9 dm^3 496 cm^3 beträgt!

6. Ein gleichseitiger Zylinder hat 2 *dm* 4 *cm* zur Seite; suche den Rauminhalt!

7. Die Mantelfläche eines geraden Zylinders beträgt 7 dm^2 4 cm^2, der Umfang der Grundfläche 1 *dm* 7 *cm* 6 *mm*; wie groß ist der Rauminhalt des Zylinders?

8. Ein Würfel ist inhaltsgleich mit einem geraden Zylinder von 4 *dm* Durchmesser und 3 *dm* Höhe; wie verhalten sich die Oberflächen der beiden Körper?

9. Es soll ein runder Brunnenschacht gegraben werden, dessen Weite 1½ *m* und dessen Tiefe 8 *m* 4 *dm* beträgt; wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn für das Ausheben und Wegführen von 1 m^3 Erde 3 K bezahlt werden?

10. Welchen Druck übt eine Wassersäule von 2·2 *m* Höhe auf den Boden eines zylindrischen Gefäßes von 6 *dm* Durchmesser aus, da 1 dm^3 Wasser 1 *kg* wiegt?

11. Ein zylindrisches Gefäß soll 1 Liter enthalten; wie hoch muß es sein, wenn der innere Durchmesser 108·4 *mm* beträgt?

12. Wie groß ist der Durchmesser eines zylindrischen Gefäßes, das 5·031 *dm* hoch ist und 1 *hl* hält?

13. In ein zylindrisches Gefäß von 4 *dm* Durchmesser, welches zum Teile mit Wasser gefüllt war, wurde ein unregelmäßiger Körper gesenkt, so daß ihn das Wasser bedeckte; das Wasser stand dann 36 *cm* hoch. Nachdem man den Körper herausgenommen hatte, stand das Wasser noch 24 *cm* hoch; welchen Rauminhalt hat der Körper?

14. Eine Feuerspritze hat 2 Zylinder (Stiefel), deren innerer Durchmesser 1·8 *dm* beträgt, die Hubhöhe des Kolbens ist in jedem 2·3 *dm* und jeder Kolben steigt während einer Minute 25mal auf und ab; wieviel *hl* Wasser wird diese Feuerspritze während einer Stunde unausgesetzter Wirksamkeit verspritzen?

15. Der innere Durchmesser eines runden Turmes ist 4·2 *m*, die Mauer ist 1·2 *m* dick; wieviel m^3 enthält die Mauer, wenn die Höhe des Turmes 14·5 *m* beträgt?

16. Wieviel dm^3 Gußeisen braucht man zum Gießen einer Röhre von 2·6 *m* Länge, wenn die Wandstärke 12 *mm* und der innere Durchmesser 2 *dm* betragen soll?

17. Eine gußeiserne Walze von 1·2 *m* Länge und 11 *cm* Durchmesser wird so weit abgedreht, daß der Durchmesser nur 9·5 *cm* beträgt; um wieviel ist die abgedrehte Walze kleiner als die frühere?

18. Es soll eine hohle metallene Walze gegossen werden, deren Länge 1 *m* ist; die Weite im Lichten ist 3 *dm*, die Stärke des Metalls 2·5 *cm* und 1 dm^3 desselben wiegt 7·2 *kg*. Wenn nun das *kg* zu 64 h gerechnet wird, wieviel kostet die ganze Walze?

19. Zu einer Leitung braucht man in einer Länge von 848 *m* Röhren von Blei, welche 1·6 *cm* dick sind, und deren Weite im Lichten 8 *cm* beträgt; wieviel kostet das Blei, wenn 1 dm^3 desselben 11·35 *kg* wiegt und das *kg* Blei mit 80 h bezahlt wird?

20. Ein Mühlstein hat 1·6 *m* im Durchmesser und ist 3 *dm* dick; die innere vierseitige Öffnung ist 1 *dm* weit; wieviel wiegt derselbe, wenn 1 dm^3 Stein 2·7 *kg* wiegt?

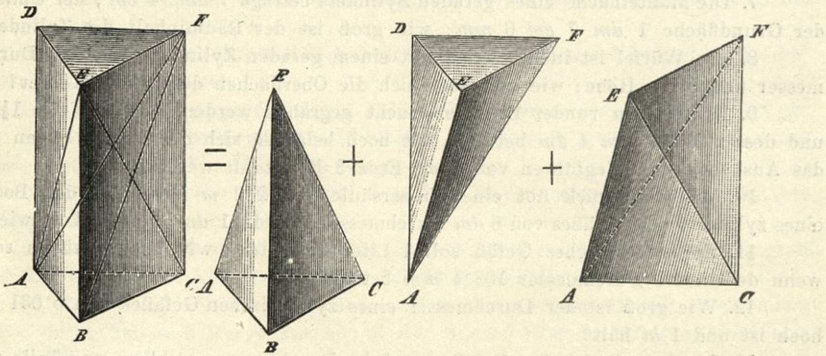
21. Wieviel Ziegel braucht man, um ein Tor zu verlegen, das mit vollem Bogen geschlossen ist, wenn die Weite im Lichten 2·4 *m*, die Höhe bis zum Schlußsteine 3·6 *m*, die Dicke der Mauer 7·5 *dm* ist und wenn auf 1 m^3 Mauerwerk 264 Ziegel gerechnet werden?

22. Miß und berechne zylindrische Modelle!

3. Kubikinhalt einer Pyramide und eines Pyramidenstumpfes.

§ 211. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen. (Fig. 249.)

Fig. 249.



Schneidet man das dreiseitige Prisma $ABCDEF$ durch die beiden Ebenen AEC und AEF,[1]) so erhält man die drei dreiseitigen Pyramiden $ABCE$, $DEFA$ und $ACFE$, von denen die beiden ersten sofort als inhaltsgleich erkannt werden, da die Grundflächen ABC und DEF und die Höhen EB und AD gleich sind. Aber auch die zweite und dritte Pyramide sind inhaltsgleich; denn die Grundflächen ADF und ACF sind gleich als Hälften des Rechteckes $ACDF$, und von der Spitze E auf diese Grundflächen gezogene Höhen sind auch gleich. Es sind somit alle 3 Pyramiden einander gleich. Daraus ergibt sich der Satz:

Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

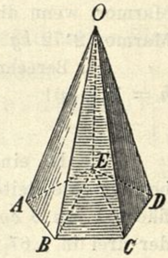
---

[1]) Der Schnitt könnte auch nach den Ebenen ABF und AEF geführt werden.

Da der Rauminhalt eines Prismas gleich ist dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe, so folgt: Der Rauminhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und dem dritten Teile der Höhe.

§ 212. Jede mehrseitige Pyramide *OABCDE* (Fig. 250) läßt sich in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen, die mit ihr dieselbe Höhe haben. Der Rauminhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich der Grundfläche multipliziert mit dem dritten Teile der Höhe; daher ist der Rauminhalt aller dreiseitigen Pyramiden, d. i. der Rauminhalt der mehrseitigen Pyramide, gleich der Summe der Grundflächen aller dreiseitigen Pyramiden, d. i. der Grundfläche der mehrseitigen Pyramide, multipliziert mit dem dritten Teile der gemeinschaftlichen Höhe.

Fig. 250.



Es gilt also allgemein der Satz:

Der Rauminhalt einer Pyramide ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und dem dritten Teile der Höhe.

Nach der Formel: $v = g \cdot \frac{h}{3}$.

§ 213. Der Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes wird gefunden, indem man die Summe der beiden Grundflächen und der Quadratwurzel aus dem Produkte derselben mit dem dritten Teile der Höhe multipliziert. Bezeichnet man die beiden Grundflächen mit *G* und *g* und die Höhe des Stumpfes mit *h*, so erfolgt die Berechnung des Rauminhaltes nach der Formel:

$$v = (G + \sqrt{Gg} + g) \cdot \frac{h}{3}.$$

Annäherungsweise findet man den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfes, indem man die halbe Summe der beiden Grundflächen mit der Höhe des Stumpfes multipliziert.

Übungsbeispiele.

1. Berechne den Rauminhalt folgender Pyramiden:

a) Grundfläche 13 dm^2, Höhe 8 *dm*;

b) „ 2 dm^2 34 cm^2, Höhe 6·3 *dm*;

c) „ 1 m^2 85 dm^2, Höhe 5 *dm* 6 *cm*!

2. Der Inhalt einer Pyramide ist 626 dm^3 400 cm^3, die Höhe 0·9 *m*; wie groß ist die Grundfläche?

3. Der Inhalt einer Pyramide ist 9 m^3 61 dm^3, die Grundfläche 4 m^2 41 dm^2; wie groß ist die Höhe?

4. In einer Pyramide ist die Grundfläche ein Rechteck von 3 *dm* 4 *cm* Länge und 1 *dm* 9 *cm* Breite, und der Rauminhalt 17 dm^3 955 cm^3; wie groß ist die Höhe?

5. In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt jede Grundkante 4 *dm* und jede Seitenkante 5 *dm*; wie groß ist der Rauminhalt?

6. In einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist eine Seite der Grundfläche 2 *dm* und eine Seitenkante 3 *dm* 4 *cm*; bestimme den Rauminhalt!

7. Die Seite eines Tetraeders ist 1 *dm*; wie groß ist der Rauminhalt?

8. Wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Rauminhalt eines Oktaeders, dessen Seite 4 *dm* beträgt?

9. Es soll eine Pyramide, deren Grundfläche 1 m^2 15 dm^2 und deren Höhe 2 *m* beträgt, aus Eisen gegossen werden; wieviel wird sie wiegen, da 1 dm^3 Eisen 7·21 *kg* wiegt?

10. Wie groß ist das Gewicht einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide aus Marmor, wenn die Höhe 3 *m*, eine Seite der Grundfläche 5 *dm* beträgt und 1 dm^3 Marmor 2·72 *kg* wiegt?

11. Berechne den Kubikinhalt der großen Pyramide von Gizeh ($s = 232·8$ *m*, $h = 145$ *m*)!

---

12. In einem Pyramidenstumpfe, dessen Grundflächen Quadrate sind, beträgt eine Seite der unteren Grundfläche 2 *dm* 5 *cm*, eine Seite der oberen Grundfläche 1 *dm* 9 *cm*, die Höhe 2 *dm*; berechne den Rauminhalt desselben nach jeder der drei in § 67 angeführten Methoden!

13. Es sei ein regelmäßiger dreiseitiger Pyramidenstumpf aus Eisen zu gießen; die Höhe soll 2·5 *m*, die Seiten der Grundflächen sollen 0·8 *m* und 0·4 *m* betragen; wieviel *kg* Eisen wird man dazu brauchen? (1 dm^3 Eisen wiegt 7·21 *kg*.)

14. Wieviel wiegt ein Pyramidenstumpf aus Marmor, dessen Grundflächen Quadrate von 1·2 *m* und 1 *m* Seitenlänge sind und 1 5 *m* voneinander abstehen? (1 dm^3 Marmor wiegt 2·72 *kg*.)

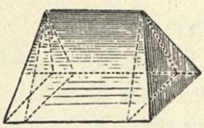
15. Ein vierkantig behauener Baumstamm von 5 *m* Länge ist an der einen Grundfläche 28 *cm* breit und 22 *cm* hoch, an der anderen 24 *cm* breit und 19 *cm* hoch; wieviel m^3 Holz enthält er?

16. Wieviel Liter faßt ein 6·2 *dm* tiefes Gefäß von der Form eines Pyramidenstumpfes, dessen Grundflächen Quadrate von 4·8 *dm* und 3·2 *dm* Seitenlänge sind?

17. Eine 22 *dm* tiefe Grube ist unten 3 *m* lang und 2·6 *m* breit, oben 4 *m* lang und 3·5 *m* breit; wieviel m^3 Erde braucht man, um die Grube zuzuschütten?

18. Auf einer Landstraße ist jeder Schotterhaufen unten 2·2 *m*, oben 1·4 *m* lang, seine Breite beträgt 1 *m* und die Höhe 0·7 *m*; wie groß ist sein Rauminhalt?

Fig. 251.



Um den Rauminhalt eines solchen Körpers (Fig. 251) zu bestimmen, braucht man nur von den oberen Eckpunkten auf die Grundfläche zwei parallele normale Schnitte führen; dann erscheint der Mittelteil als ein dreiseitiges Prisma und die beiden Seitenteile geben zusammen eine vierseitige Pyramide.

19. Berechne *a)* die Oberfläche, *b)* den Kubikinhalt von Pyramiden und Pyramidenstumpfen nach gegebenen Modellen auf Grund genauer Messungen!

4. Kubikinhalt eines Kegels und eines Kegelstumpfes.

§ 214. 1. Da ein Kegel als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden kann, so folgt:

Der Rauminhalt eines Kegels ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und dem dritten Teile der Höhe.

$$v = g \cdot \frac{h}{3} = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}.$$

Ist der Kegel ein gerader und s eine Seite desselben, so ist

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}, \quad \text{daher } v = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \sqrt{s^2 - r^2}.$$

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, folglich

$$v = \frac{\pi r^3}{3} \sqrt{3}.$$

2. Der Rauminhalt eines Kegelstumpfes wird auf dieselbe Weise wie der Inhalt eines Pyramidenstumpfes berechnet, indem man die Summe der beiden Grundflächen und der Quadratwurzel aus dem Produkte derselben mit dem dritten Teile der Höhe multipliziert. Nach der Formel: $v = (G + \sqrt{Gg} + g) \cdot \frac{h}{3}$.

$$v = (R^2\pi + Rr\pi + r^2\pi) \cdot \frac{h}{3} = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

In der Praxis begnügt man sich häufig mit einer annähernd genauen Bestimmung des Rauminhaltes eines Kegelstumpfes, indem man diesen als einen Zylinder berechnet, dessen Grundfläche gleich ist der halben Summe der beiden Grundflächen des Stumpfes (das arithmetische Mittel derselben) und dessen Höhe die Höhe des Stumpfes ist.

$$v = \frac{G + g}{2} \cdot h.$$

Übungsbeispiele.

1. Berechne den Rauminhalt folgender Kegel:
a) Halbmesser der Grundfläche 6 *dm* 2 *cm*, Höhe 7·5 *dm*;
b) Durchmesser „ „ 14½ *cm*, „ 23⅗ *cm*;
c) Umfang „ „ 1 *m* 1 *dm* 8 *cm*, Höhe 2 *m* 6 *cm*!

2. Der Rauminhalt eines Kegels ist 26 dm^3 225 cm^3, die Grundfläche 4 dm^2 25 cm^2; wie groß ist die Höhe?

3. Der Inhalt eines Kegels ist 1 m^3 88 dm^3 46 cm^3, die Höhe 1·8 *m*; wie groß ist die Grundfläche?

4. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels, dessen Höhe 3·5 *dm* und dessen Inhalt 55·894 dm^3 beträgt?

5. Wie groß ist *a)* die Höhe, *b)* der Rauminhalt eines geraden Kegels, dessen Seite 2·4 *dm* beträgt und dessen Grundfläche 2 *dm* zum Halbmesser hat?

6. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist 2 dm^2 85 cm^2, der Halbmesser der Grundfläche 5 *cm*; wie groß ist der Rauminhalt?

7. Welche Länge hat die Seite eines Würfels, der mit einem Kegel von 4·2 *dm* Durchmesser und 4·5 *dm* Höhe inhaltsgleich ist?

8. In einem gleichseitigen Kegel ist die Seitenlänge 7 *dm* 5 *cm*; wie groß ist der Inhalt?

9. Ein kegelförmiger Filtriertrichter soll ein Liter halten und oben 1·5 *dm* Durchmesser haben; wie groß muß dessen Höhe sein?

10. In einem kegelförmig aufgeschütteten Getreidehaufen beträgt der Umfang der Grundfläche 2 *m* 5 *dm* und die Höhe 1 *m*; wieviel *hl* Getreide enthält der Haufen?

11. Ein Heuschober hat 2·6 *m* Durchmesser und 4·5 *m* Höhe; wieviel *kg* Heu enthält er, wenn das m^3 Heu 114 *kg* wiegt?

12. Ein messingener Kegel ist 21 *cm* hoch und hat eine Grundfläche von 10·5 *cm* Durchmesser; wie groß ist das Gewicht desselben, wenn 1 dm^3 Messing $8\frac{3}{5}$ *kg* wiegt?

13. Welchen Wert hat eine Tanne, die 12·6 *m* hoch ist und unten 2·2 *m* im Umfange hat, wenn das m^3 Holz mit 16 K 80 h bezahlt wird?

14. Aus einem kegelförmigen, mit Wasser gefüllten Gefäße von 21 *cm* Durchmesser und 15 *cm* Höhe wird das Wasser in ein zylindrisches Gefäß von 12 *cm* Durchmesser gegossen; wie hoch wird das Wasser in diesem Gefäße stehen?

15. Ein Ziment für Öl von der Form eines gleichseitigen Kegels faßt 1 *l*; wie groß ist sein Durchmesser?

---

16. Wie groß ist der Rauminhalt eines Kegelstumpfes, dessen Grundflächen 3 *m* und 2 *m* zu Durchmessern haben und 1·2 *m* voneinander abstehen?

17. Die Durchmesser der Grundflächen eines geraden Kegelstumpfes sind 2·4 *dm* und 1·8 *dm*, die Seite beträgt 3·02 *dm*; wie groß ist *a)* die Höhe, *b)* der Rauminhalt des Stumpfes?

18. Ein Baumstamm hat an dem einen Ende 17 *dm*, an dem andern 13·6 *dm* Umfang, die Länge beträgt 7 *m*; wie groß ist *a)* sein Rauminhalt, *b)* sein Gewicht, wenn ein dm^3 0·48 *kg* wiegt?

19. Ein Bottich hat 1 *m* unteren und 1·4 *m* oberen Durchmesser und 1·2 *m* Tiefe; wieviel Hektoliter faßt derselbe?

20. Ein in Form eines Kegelstumpfes anzufertigendes Gefäß soll unten 24 *cm* und oben 27 *cm* Umfang haben und 10 Liter halten; wie hoch muß es gemacht werden?

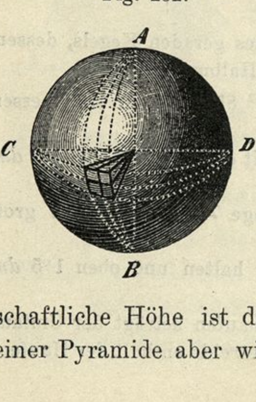
21. Wieviel m^3 Scheitholz gibt ein Baumstamm von 5 *m* Länge, der an dem einem Ende 7 *dm*, an dem andern 6 *dm* Durchmesser hat, wenn man annimmt, daß 1 m^3 Stammholz $1\frac{1}{2}$ m^3 Scheitholz gibt?

22. Berechne *a)* die Mantelfläche, *b)* die Oberfläche, *c)* den Körperinhalt eines Kegels und eines Kegelstumpfes nach einem Modelle!

5. Kubikinhalt einer Kugel.

§ 215. Legt man durch die Durchmesser AB und CD (Fig. 252) sehr viele größte Kreise, so zerfällt die Oberfläche der Kugel in lauter Vierecke und Dreiecke, die man für eben und geradlinig ansehen kann, wenn die Anzahl jener Kreise sehr groß angenommen wird. Zieht man nun von allen Durchschnittspunkten der Oberfläche gerade Linien zum Mittelpunkte der Kugel und denkt sich durch je zwei solche Strecken eine Ebene gelegt, so erscheint die Kugel aus lauter Pyramiden zusammengesetzt, die alle ihre Grundfläche an der Kugeloberfläche und ihre Scheitel am Mittelpunkte haben; ihre gemeinschaftliche Höhe ist daher der Halbmesser der Kugel. Der Rauminhalt einer Pyramide aber wird gefunden, indem man die Grundfläche mit dem

Fig. 252.



dritten Teile der Höhe multipliziert; daher ist der Rauminhalt aller jener Pyramiden zusammengenommen, d. i. der Inhalt der ganzen Kugel, gleich der Summe aller Grundflächen, d. i. der Kugeloberfläche, multipliziert mit dem dritten Teile des Halbmessers.

Der Kubikinhalt einer Kugel ist also gleich dem Produkte aus der Oberfläche derselben und dem dritten Teile des Halbmessers.

Bezeichnet man durch r den Halbmesser, durch o die Oberfläche und durch v den Rauminhalt einer Kugel, so ist

$$o = 4\pi r^2, \text{ daher } v = 4\pi r^2 \frac{r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3; \text{ d. h.}$$

der Kubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Kubus des Halbmessers, multipliziert mit $\frac{4}{3}$ der Ludolfischen Zahl.

Um umgekehrt aus dem Kubikinhalte einer Kugel den Halbmesser zu finden, braucht man nur den Inhalt durch $\frac{4}{3}$ der Ludolfischen Zahl zu dividieren; der Quotient ist der Kubus des Halbmessers; zieht man daraus die Kubikwurzel, so erhält man den Halbmesser selbst. Es ist also

$$r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}.$$

Heißt R der Halbmesser und V der Kubikinhalt einer zweiten Kugel, so ist $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, daher

$$V : v = \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3 = R^3 : r^3; \text{ d. h.}$$

die Kubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

Anmerkung.

1. Der Kubikinhalt eines Kugelausschnittes (Sektors) ist gleich dem Produkte aus seiner Kugelmütze und dem dritten Teile des Halbmessers der Kugel.

$$v = m \cdot \frac{r}{3} = \frac{2r^2\pi h}{3}.$$

2. Der Kubikinhalt eines Kugelabschnittes (Segmentes) ist gleich der Differenz (oder der Summe) aus dem Kugelausschnitte und dem dazugehörigen Kegel.

3. Der Kubikinhalt einer Kugelschichte wird als Differenz der Inhalte zweier Kugelsegmente berechnet.

Übungsaufgaben.

1. Berechne den Rauminhalt einer Kugel, deren Halbmesser *a)* 3 *dm*, *b)* 1·4 *m*, *c)* 1 *m* 15 *cm*, *d)* 17½ *cm* lang ist!

2. Der Durchmesser einer Kugel ist *a)* 5 *dm*, *b)* 4·3 *cm*, *c)* 1 *dm* 4 *cm* 8 *mm* lang; wie groß ist der Rauminhalt?

3. Der Umfang eines größten Kugelkreises ist 2 *m* 7 *dm* 9 *cm* 6 *mm*; berechne den Kubikinhalt der Kugel!

4. Der größte Kreis einer Kugel hat 8 dm^2 55 cm^2 30 mm^2 Flächeninhalt; wie groß ist der Kubikinhalt?

5. Die Oberfläche einer Kugel ist *a)* 22 dm^2, *b)* 9 dm^2 7 cm^2 46 mm^2; wie groß ist der Rauminhalt?

6. Der Rauminhalt einer Kugel sei *a)* $14 \cdot 13\ dm^3$, *b)* $91\ cm^3\ 89\ mm^3$; berechne den Halbmesser und die Oberfläche!

7. Wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Kubikinhalt der Erde, wenn man diese als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser $6368 \cdot 96\ km$ beträgt? ($\pi = 3 \cdot 14$.) Wie groß ist das absolute Gewicht der Erde, wenn deren Dichte gleich $5 \cdot 57$ angenommen wird?

8. Ein kugelförmiger Dampfkessel hat $1 \cdot 2\ m$ Durchmesser; wieviel Hektoliter Wasser hält er?

9. Wieviel wiegt eine Kegelkugel von $1\ dm$ Durchmesser, wenn das dm^3 $1 \cdot 05\ kg$ wiegt?

10. Eine Kugel von $2 \cdot 8\ dm$ Halbmesser wiegt $4 \cdot 5\ kg$; wieviel wiegt eine andere Kugel aus demselben Stoffe, deren Halbmesser $3 \cdot 2\ dm$ ist?

11. Wieviel Kugeln von $5\ mm$ Durchmesser können aus $3\ kg$ Blei gegossen werden, wenn $1\ dm^3$ Blei $11 \cdot 35\ kg$ wiegt?

12. Wie groß ist der Durchmesser einer Kanonenkugel von $15\ kg$ Gewicht, wenn $1\ dm^3$ Eisen $7 \cdot 2\ kg$ wiegt?

13. Die Seite eines Würfels ist $1\ m$ und ebenso groß ist auch der Durchmesser einer Kugel; welches Verhältnis haben *a)* die Oberflächen, *b)* die Kubikinhalte beider Körper?

14. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, welche so groß ist wie ein Würfel, dessen Seite $1\ m\ 1\ dm\ 1\ cm$ beträgt?

15. Suche die Seite eines Würfels, der mit einer Kugel von $1\ m\ 2\ dm$ Durchmesser inhaltsgleich ist!

16. Einem gleichseitigen Zylinder von $1\ dm$ Halbmesser werden eine Kugel und ein gerader Kegel eingeschrieben; *a)* wie groß ist der Kubikinhalt jedes dieser drei Körper; *b)* wie verhalten sich die Inhalte des Kegels, der Kugel und des Zylinders zueinander?

17. Eine Kugel, ein gleichseitiger Zylinder und ein Würfel haben gleiche Oberfläche, nämlich $10\ dm^2$; wie groß sind die Rauminhalte dieser drei Körper?

18. Eine Kugel, ein gleichseitiger Zylinder und ein Würfel haben gleichen Rauminhalt, nämlich $10\ dm^3$; wie groß sind die Oberflächen dieser drei Körper?

19. Um eine Kugel von $1\ dm$ Halbmesser werden ein gleichseitiger Zylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich *a)* die Oberflächen, *b)* die Inhalte dieser drei Körper? (Vergleichet den Satz von den Mittellinien im Dreiecke!)

20. Von zwei Kugeln hat die erste $6\ dm$, die zweite $5\ dm$ im Durchmesser; wie groß wird der Durchmesser einer Kugel sein, deren Inhalt gleich ist dem Inhalte der beiden anderen Kugeln zusammengenommen?

21. Ein zylindrischer Dampfkessel mit zwei halbkugelförmigen Endstücken ist $1\ m$ weit und $4\ m$ lang, so daß die Länge des Zylinders $3\ m$ beträgt; wie groß ist *a)* die Oberfläche, *b)* der Inhalt des Kessels?

22. Der Umfang des äußeren größten Kreises einer Hohlkugel beträgt $1 \cdot 2\ m$, die Wandstärke $2\ cm$; wie groß ist der Inhalt der Kugelschale?

23. Wenn man den Durchmesser der Erde $= 6368 \cdot 96\ km$ und die Höhe ihrer Luftschichte $= 63\ km$ setzt, wieviel km^3 beträgt der Inhalt der Luftschichte?

24. Wie groß ist der Kubikinhalt eines Kugelausschnittes von $5\frac{5}{8}\ cm$ Halbmesser und $2 \cdot 1\ cm$ Segmenthöhe?

25. Von einer Kugel, deren Durchmesser $10\ cm$ beträgt, wird ein Segment von $2\frac{3}{4}\ cm$ Höhe abgeschnitten; wie groß ist der Kubikinhalt dieses Abschnittes?

26. Die Oberfläche des Mondes beträgt $39{,}000.000\ km^2$; berechne seinen Körperinhalt!

6. Inhalt der Fässer.

§ 216. Ein Faß nähert sich in der Form einem Zylinder; nur ist es in der Mitte bauchig und sein Durchmesser daselbst größer als der Durchmesser seiner Grund- und Bodenfläche. Man begeht keinen erheblichen Fehler, wenn man den Inhalt eines Fasses dem Inhalte eines Zylinders gleichsetzt, dessen Höhe gleich ist der Länge des Fasses und dessen Grundfläche den dritten Teil aus dem doppelten Bauch- und dem einfachen Bodendurchmesser zum Durchmesser hat.

$$v = \left(\frac{2R + r}{3}\right)^2 \pi . h.$$

Am zweckmäßigsten werden die Maßlängen in Dezimetern ausgedrückt, da dann das Faß soviel Liter hält, als der Rauminhalt desselben Kubikdezimeter hat.

Aufgaben.

1. Bestimme den Inhalt folgender Fässer:

Bauchdurchmesser	Bodendurchmesser	Länge
a) 7·2 *dm*,	5·4 *dm*,	11·2 *dm*;
b) 6·5 *dm*,	5 *dm*,	10·4 *dm*!

2. Ein Bierfaß hat 8·4 *dm* Bauchdurchmesser, 7·2 *dm* Bodendurchmesser und 13 *dm* Länge; wieviel Liter hält es?

3. Ein Faß von 6 *dm* Bauch- und 4·5 *dm* Bodendurchmesser soll 1 Hektoliter fassen; welche innere Länge muß man ihm geben?

7. Holzberechnung.

§ 217. Ein Baumstamm hat, wenn er gefällt und von seinen Ästen befreit ist, die Form eines Kegels; am vollkommensten ist diese Form bei den Nadelhölzern. Solche Stämme werden daher als Kegel (§ 214, 1) berechnet. Alle größeren Baumstämme, die in den Handel kommen, sind entwipfelt; sie haben die Form von Kegelstumpfen und werden als solche (§ 214, 2) berechnet, wobei man sich in der Praxis gewöhnlich der annähernd genauen Berechnungsweise bedient, nämlich der für Zylinder von mittlerem Querschnitte.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Inhalt eines nicht entwipfelten Baumstammes von 9 *m* Länge, der am Wurzelende 21 *cm* im Durchmesser hat?

2. Ein Rundholz hat am Stammende 42 *cm*, am Zopfende 28 *cm* im Durchmesser, die Länge beträgt 7 *m*; wie groß ist der Rauminhalt?

Untere Grundfläche $= (21^2 \times 3\tfrac{1}{7})\ cm^2 = 1386\ cm^2$
Obere " $= (14^2 \times 3\tfrac{1}{7})\ cm^2 = \underline{616\ "}$
$\underline{2002\ cm^2 : 2}$
Mittlere " .... $= 1001\ cm^2$
Inhalt $= (1001 \times 700)\ cm^3 = 700700\ cm^3 = 0{\cdot}7007\ m^3$.

3. Berechne den Inhalt folgender Baumstämme:

Unterer Durchm.	Oberer Durchm.	Länge
a) 40 *cm*,	27 *cm*,	12·6 *m*;
b) 36 *cm*,	28 *dm*,	11·5 *m*;
c) 43 *cm*,	25 *cm*,	8·9 *m*!

§ **218.** Die Berechnung des Inhaltes bereits behauener Hölzer hängt von ihrer Gestalt ab. Sie sind entweder durchaus gleich stark oder an dem einen Ende dicker als an dem andern; ferner ist die Grundfläche ein Quadrat, ein Rechteck oder ein Trapez.

Haben sie durchaus dieselbe Weite, so werden sie als Prismen (§ 207) berechnet. Haben sie dagegen ungleiche Grundflächen, so berechnet man sie als abgekürzte Pyramiden (§ 213), wobei man sich meist mit einem nur annähernd genauen Resultate begnügt.

Aufgaben.

1. Die Grundflächen eines Balkens sind gleiche Quadrate von 32 *cm* Seitenlänge, die Länge ist 6 *m*; wie groß ist der Rauminhalt?

2. Ein prismatisches Bauholz hat zur Grundfläche ein Rechteck von 42 *cm* Länge und 28 *cm* Breite und ist 6·1 *m* lang; man berechne den Inhalt!

3. Ein Balken ist 5 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei gleiche Trapeze, in denen die Parallelseiten 40 *cm* und 30 *cm* lang sind und die Höhe 15 *cm* beträgt; wie groß ist der Inhalt?

4. Ein vierkantiges Bauholz ist 5 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei ungleiche Quadrate, deren Seiten 31 *cm* und 27 *cm* lang sind; wie groß ist der Inhalt?

5. Ein vierkantig behauenes Holz ist 8 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei Rechtecke, deren Längen 4 *dm* und 3 *dm* und deren Breiten 3 *dm* und 2·4 *dm* sind; wie groß ist der Rauminhalt!

6. Wieviel ist ein Balken von quadratischem Querschnitte wert, wenn er 3·2 *m* lang, an dem einem Ende 41 *cm*, an dem anderen 31 *cm* stark ist, und wenn das m^3 mit 56 K bezahlt wird?

8. Bestimmung des Rauminhaltes durch das Gewicht.

§ **219.** Der Rauminhalt eines Körpers läßt sich auch durch das Gewicht bestimmen.

Die Größe des Druckes, den ein Körper von beliebigem Rauminhalte auf seine Unterlage ausübt, heißt das absolute Gewicht des Körpers. Das Gewicht, das eine Kubikeinheit, z. B. 1 dm^3 oder 1 cm^3 des Körpers hat, nennt man dessen spezifisches Gewicht oder dessen Eigengewicht. Z. B. das Eigengewicht des Silbers ist 10·51; d. h. 1 dm^3 Silber wiegt 10·51 *kg*, oder 1 cm^3 Silber wiegt 10·51 *g*.

Da 1 dm^3 destilliertes Wasser 1 *kg* wiegt, so zeigt das spezifische Gewicht eines Körpers für 1 dm^3 auch an, wie vielmal so groß als das Gewicht eines bestimmten Raumteiles reinen Wassers das Gewicht eines ebenso großen Raumteiles des betreffenden Körpers ist.

Hier folgen die spezifischen Gewichte einiger Körper.

1 Kubikdezimeter

Bernstein . . . . wiegt	1·08 *kg*	Kupfer, gegossen . . . wiegt	8·79 *kg*
Blei . . . . „	11·35 „	Marmor . . . . „	2·72 „
Buchenholz . . . . . „	0·74 „	Messing (Mittel) . . . . „	8·40 „
Eichenholz . . . . . . „	0·86 „	Platin . . . . „	21·45 „
Eisen, geschmiedet . . „	7·79 „	Quecksilber . . . . . . „	13·60 „
„ gegossen . . . . „	7·21 „	Silber . . . . „	10·51 „
Elfenbein . . . . „	1·83 „	Steinkohle (im Mittel) . „	1·30 „
Gold . . . . „	19·36 „	Stahl . . . . „	7·82 „
Granit (Mittel) . . . . „	2·70 „	Zink . . . . „	7·19 „
Kalkstein . . . . . . „	2·46 „	Zinn . . . . „	7·29 „
Korkholz . . . . „	0·24 „	Zucker . . . . „	1·50 „

Es sei z. B. der Rauminhalt eines Silberbarrens, der 32 *kg* wiegt, zu bestimmen.

Da 1 dm^3 Silber 10·51 *kg* wiegt, so nehmen 32 *kg* Silber soviel dm^3 Raum ein, so oft 10·51 *kg* in 32 *kg* enthalten sind; man hat daher

$$32\ kg : 10{\cdot}51\ kg = 3{\cdot}045,\ v = 3{\cdot}045\ dm^3 = 3\ dm^3\ 45\ cm^3.$$

Der Rauminhalt eines Körpers in Kubikdezimetern wird demnach gefunden, indem man das absolute Gewicht desselben in Kilogrammen durch das spezifische Gewicht für 1 Kubikdezimeter dividiert.

Hiernach kann man auch den Inhalt eines Gefäßes durch das Gewicht bestimmen. Man wägt das leere Gefäß ab, füllt es mit Wasser, bestimmt dann das Gewicht des so gefüllten Gefäßes und subtrahiert das erste Gewicht von dem zweiten Soviel Kilogramm der Gewichtsunterschied beträgt, soviel Kubikdezimeter oder Liter enthält das Gefäß.

Umgekehrt findet man aus dem Rauminhalte eines Körpers sein absolutes Gewicht, indem man sein spezifisches Gewicht mit der Maßzahl des in Kukikdezimetern ausgedrückten Rauminhaltes multipliziert.

Ist z. B. das absolute Gewicht von 346 dm^3 Steinkohle zu bestimmen, so hat man:

1 dm^3 Steinkohle wiegt 1·3 *kg*,

346 „ „ wiegen $1{\cdot}3\ kg \times 346 = 449{\cdot}8\ kg$.

§ 220. **Aufgaben.**

1. Wieviel m^3 enthält ein Balken *a)* Eichenholz, *b)* Tannenholz, der 135 *kg* wiegt?

2. Eine Goldstange wiegt 28·5 *kg*; welchen Rauminhalt hat sie?

3. Welchen Rauminhalt haben 3450 *kg* Blei?

4. Wie lang ist der Halbmesser einer Kugel von Blei, die $18\frac{1}{2}$ *kg* wiegt?

5. Wieviele Kugeln von 1 *cm* Durchmesser können aus 4 *kg* Gußeisen gegossen werden?

6. Ein Gefäß wiegt leer 1·45 *kg*, mit Wasser gefüllt 10·95 *kg*; wieviel Liter hält es?

7. Wieviel *kg* wiegt das Wasser, das in einem Gefäße von 165 *cm* Länge, 85 *cm* Breite und 7 *dm* Tiefe enthalten ist?

8. Es soll ein zylinderförmiges Gewicht von 1 *kg* aus Messing gegossen werden; wie hoch muß dasselbe werden, wenn der Durchmesser 0·4 *dm* betragen soll?

9. Eine Walze von Messing soll 20 *kg* wiegen und 3 *dm* lang sein; welchen Durchmesser muß sie haben?

10. Wieviel *kg* wiegt eine Stange Stabeisen, die 6 *m* lang, 1 *dm* breit und 0·25 *dm* dick ist?

11. Wieviel *kg* wiegt eine vierseitige Pyramide von Granit, wenn eine Seite der quadratischen Grundfläche 0·6 *m* lang ist und die Höhe 3 *m* beträgt?

12. Wieviel wiegt eine Kugel

a) von Elfenbein, deren Durchmesser 6 *cm* beträgt?

b) „ Marmor, „ „ 3·1 *dm* „ ?

13. Welches Gewicht hat ein Zuckerhut von 2 *dm* Bodendurchmesser und 4 *dm* Höhe?

14. Wieviel wiegt ein m^3 Buchenholz von 80 *cm* Scheitlänge, wenn man für die leeren Zwischenräume $\frac{1}{3}$ des Inhaltes in Abzug bringt?

15. Ein hohler Würfel aus 2 *mm* starkem Zinkblech hat äußerlich eine Höhe von 1 *dm*; wieviel wiegt ein Zinkwürfel, der genau den hohlen Würfel ausfüllt?

16. Wie hoch kommen 18 Kugeln von Gußeisen zu einer Gitterverzierung, wenn jede 1·2 *dm* Durchmesser hat und das Kilogramm Gußeisen 56 h kostet?

17. Wieviele Hufeisen zu $\frac{1}{2}$ *kg* Gewicht lassen sich aus einer Eisenstange von $1\frac{1}{2}$ *m* Länge, 5 *cm* Breite und 1 *cm* Dicke schmieden?

18. Wieviele Gewichte zu 1 *kg* können aus einer alten eisernen Kugel von 3 *dm* Durchmesser gegossen werden, wenn $\frac{1}{10}$ der Masse in Abgang kommt?

§ 221. Vermischte Aufgaben.

1. Ein Würfel hat 5·22 *dm* Seitenlänge, die Seite eines zweiten Würfels ist doppelt so lang; wie groß ist der Inhalt des zweiten Würfels und in welchem Verhältnisse steht er zum Inhalte des ersten?

2. Ein Würfel hat 1·728 dm^3 Inhalt, ein anderer Würfel ist 27 mal so groß; wie lang ist die Seite des zweiten Würfels und wie verhält sie sich zu der Seite des ersten?

3. Welchen Rauminhalt hat die Erde, wenn man sie als eine Kugel ansieht? (Umfang des Äquators gleich 4000 *µm*.)

4. Wieviel Mondkugeln könnte man aus unserer Erdkugel machen? (Monddurchmesser = 384·2 *µm*.)

5. Welchen Rauminhalt hat eine Silberkrone, deren Dicke 1·75 *mm* beträgt? (D = 23 *mm*.)

6. Welchen Inhalt hat ein Stoß von achtzehn Zwanzig-Kronenstücken, wenn die Dicke eines Stückes 1·5 *mm* beträgt? (D = 21 *mm*.)

7. In ein dm^3 wird eine Kugel gegeben, so daß sie allseitig die Wandung berührt; welchen Inhalt hat der freibleibende Luftraum?

8. In einem geschliffenen 6seitigen Trinkglase von 9 *cm* Durchmesser steht Wasser 1·57 *cm* hoch; wie hoch würde dieselbe Wassermenge in einem zylindrischen Glase von gleichem Durchmesser stehen?

9. Aus einem prismatischen Gefäße von quadratischem Querschnitte, das 2·4 *m* Umfang hat, fließen durch eine Röhre in je 2 Minuten 9 *l* Wasser ab; um wieviel wird der Wasserspiegel nach $\frac{1}{2}$ Stunde gesunken sein?

10. In einen quadratischen Balken von 3·1 *m* Länge und 25 *cm* Dicke wird der Länge nach eine zylindrische Öffnung von 1 *dm* Weite gebohrt; wie groß ist der Rauminhalt der festen Holzmasse?

11. Aus einer Kugel von 4 *cm* Halbmesser sollen zwei andere gegossen werden, deren eine einen Halbmesser von 2 *cm* haben soll; welcher Halbmesser kommt der anderen zu?

12. Ein Zeichenblatt von 6·28 *dm* Länge und 4 *dm* Breite wird zu einer Kreisröhre gebogen; welchen Rauminhalt hat diese Röhre, wenn man sie *a)* nach der Länge, *b)* nach der Breite rollt?

13. Wieviel Erdkugeln könnte man aus einem Sonnenballe machen? (Sonnendurchmesser = 138700 *μm*.)

14. In eine würfelförmige Kiste von 1 *m* Seitenlänge paßt genau ein Zylinder; wie groß ist der Luftraum in der Kiste?

15. In ein zylindrisches Gefäß von 1·6 *dm* Weite gibt ein Knabe eine Glaskugel, so daß das Wasser im Gefäße um $1\frac{1}{3}$ *cm* steigt; welchen Durchmesser hat die Kugel?

16. Wie hoch ist ein zylindrisches Gefäß von 25·12 *cm* Umfang, wenn es 1 *l* fassen soll?

17. Es ist eine regelmäßige sechsseitige Pyramide gegeben, welche eine Grundkante von 10 *cm* und eine Höhe von 17·32 *cm* hat; wie groß ist ihr Rauminhalt?

18. Eine hölzerne Truhe von 108 *cm* Länge und 52 *cm* Breite und 48 *cm* Höhe ist mit Ausnahme des Bodens mit Stoff zu überziehen; wieviel *m* eines 45 *cm* breiten Stoffes braucht man, wenn man wegen der Verschneidung 8% mehr rechnen muß?

19. Eine elliptische Badewanne von der Form eines Zylinders, 1·8 *m* lang, 9 *dm* breit und 8 *dm* tief, ist zu drei Vierteilen mit Wasser gefüllt; wieviel *kg* wiegt die Füllung?

20. In einen zylindrischen Kessel von 8 *dm* Halbmesser und $2\frac{1}{2}$ *m* Länge münden 3 Röhren, von denen die erste den Kessel in 6, die zweite in 3, die dritte in 2 Stunden zu füllen vermag. *a)* Wieviel dm^3 des Kessels werden gefüllt, wenn die erste und zweite Röhre eine Stunde lang geöffnet sind; *b)* wie lange muß die erste und dritte Röhre geöffnet sein, um den Rest des Kesselraumes zu füllen?

21. Aus einem Kupferzylinder von 2 *dm* Länge und 2 *cm* Dicke soll ein 2 *mm* dicker Draht gezogen werden; wie lang wird der Draht sein?

22. Aus drei Kugeln von 3 *cm*, 4 *cm* und 5 *cm* Durchmesser soll eine neue Kugel gegossen werden; welchen Durchmesser hat sie?

23. Ein sechsseitiges Zelt von regelmäßiger Grundfläche hat 25 *m* 2 *dm* Umfang und 3 *m* 4 *dm* Höhe. Das Dach ist durch eine Pyramide gebildet, deren Spitze von jeder Ecke 5 *m* 5 *dm* Abstand hat. Wieviel *m* eines 72 *cm* breiten Segeltuches braucht man zu diesem Zelte, wenn man wegen Einsäumung und sonstigen Abfalles $\frac{1}{8}$ des Stoffes mehr kaufen muß?

24. Ein Faß hat einen Spunddurchmesser von 10·2 *dm* und einen Bodendurchmesser von 8·4 *dm* und 1 *m* innerer Länge. Wie oft müßte man mit einem zylindrischen Gefäße von 9·6 *cm* Durchmesser und 2 *dm* Höhe schöpfen, um das gefüllte Faß zu entleeren?

D.

Anhang.

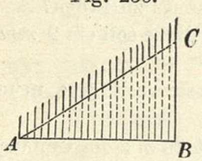
(Feldmessen und Situationszeichnen.)

I. Das Feldmessen.

§ 222. Ein Grundstück aufnehmen heißt, seine horizontale Ausdehnung nach Größe und Gestalt bestimmen. Man denkt sich dabei durch irgend einen Punkt der Figur eine Horizontalebene gelegt und auf diese von allen Grenzpunkten der aufzunehmenden Fläche Senkrechte gefällt; verbindet man die Fußpunkte dieser Senkrechten durch Linien, so ist die dadurch entstehende Figur die Horizontal-Projektion oder der Grundriß der Fläche.

Die Reduzierung der zu messenden Grundstücke auf den Horizont geschieht insbesondere darum, weil die Ertragsfähigkeit eines Grundstückes nicht von seiner wirklichen Größe, sondern von seiner horizontalen Ausdehnung abhängt. Da nämlich alle Pflanzen in lotrechter Richtung wachsen, so können, wenn AC (Fig. 253) den Durchschnitt einer schiefen Fläche und AB den Durchschnitt ihrer horizontalen Ausdehnung vorstellt, auf der schiefen Fläche von A und C nicht mehr Pflanzen stehen als auf der horizontalen Fläche AB.

Fig. 253.



Da eine Figur durch die Länge ihrer Seiten und durch die gegenseitige Lage derselben zueinander, also durch Strecken und Winkel bestimmt ist, so soll hier zuerst gezeigt werden, wie Strecken und Winkel auf dem Felde gemessen werden.

1. Abstecken und Messen der Strecken auf dem Felde.

§ 223. Bei der Messung von Strecken auf dem Felde kommt eine zweifache Tätigkeit vor: Das Bezeichnen ihrer maßgebenden Punkte und das wirkliche Messen.

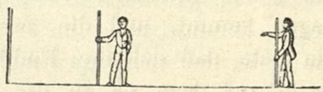
Zur Bezeichnung der Punkte auf dem Felde dienen, wenn dieselben nicht schon von Natur aus kenntlich sind, Pflöcke, Stäbe und Meßfahnen.

Eine Strecke auf dem Felde wird durch ihre Endpunkte bezeichnet. Wenn diese sehr weit voneinander abstehen, so werden mehrere Zwischenpunkte bestimmt, die mit den Endpunkten in gerader Linie liegen. Man nennt das Bestimmen solcher Zwischenpunkte das Abstecken der Geraden und die dazu gebrauchten Stangen Absteckstäbe.

1. Eine Strecke auf dem Felde abzustecken.

Um zwischen zwei Stäben A und B (Fig. 254) einen dritten C in gerade Linie zu bringen, trete man 2 bis 3 Schritte hinter den einen Stab B zurück, lasse durch einen Gehilfen den einzurichtenden Stab zwischen zwei Fingern hoch oben fassen und frei halten und gebe ihm, indem man dabei immer an derselben Seite der Stäbe vorbeivisiert, durch Zeichen mit der Hand zu verstehen, daß er seinen Stab so lange rechts oder links bewege, bis man ihn in der Richtung der beiden Stäbe B und A erblickt; ist dies der Fall, so gibt man dem Gehilfen ein Zeichen, worauf er den Stab frei fallen läßt und in dieser Stellung lotrecht in die Erde steckt. — Beim Abstecken einer langen Strecke werden immer die entfernteren Stäbe früher eingerichtet als die näheren. Beim Visieren (Zielen) soll man nicht zu nahe an dem nächsten Stabe stehen und bloß mit einem Auge sehen.

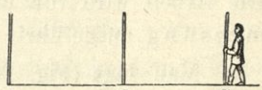
Fig. 254.



2. Eine Strecke auf dem Felde zu verlängern.

Um eine Strecke AB (Fig. 255) auf dem Felde bis zum Punkte C zu verlängern, stelle man sich nach dem Augenmaße in der Gegend dieses Punktes auf, visiere an der Seite des Stabes, den man zwischen zwei Fingern frei hält, nach den beiden Stäben B und A, wodurch die zu verlängernde Gerade bezeichnet ist und bewege sich mit seinem Stabe so lange rechts oder links, bis sich alle drei Stäbe decken; dann wird der einvisierte Stab gehörig in die Erde gesteckt.

Fig. 255.

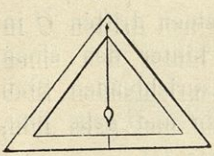


§ 224. Zum wirklichen Messen braucht man Maßstäbe (Meterstab), Meßlatten von $2\frac{1}{2}$ oder 5 m Länge, Rollmeßbänder (Meterband) aus Stahl oder aus mit Stahldraht durchzogenen Leinwandbändern oder eine Meßkette mit zwei Kettenstäben und zehn Kettennägeln. Die Meßkette hat eine Länge von 20 m und besteht aus eisernen Gliedern, die durch Ringe verbunden sind; an beiden Enden befinden sich zwei weitere Ringe, durch welche die Kettenstäbe durchgeschoben werden.

Zur Bestimmung der lotrechten Richtung dient das Senklot oder noch zweckentsprechender der Senkelstock, d. i. ein runder, ungefähr $1\frac{1}{2}$ m hoher Stab von leichtem Holze, dessen unteres Ende mit einer schweren eisernen Spitze versehen ist, welche dem Stabe die lotrechte Richtung gibt und erhält, wenn er oben lose zwischen zwei Fingern gehalten wird.

Zur Bestimmung der wagrechten Richtung dienen die Schrotwage (Fig. 256), die Libelle und die Wasserwage, deren Einrichtung und Gebrauch aus der Naturlehre bekannt sind.

Fig. 256.



1. Eine Strecke auf wagrecht ebenem Boden zu messen.

a) Mit Meßlatten. Man nehme zwei gleich lange Meßlatten (von 5 *m*), lege die eine davon mit der einen Endfläche an den Anfangspunkt der zu messenden Strecke so, daß sie genau in die Richtung der Strecke zu liegen kommt, und die zweite Meßlatte in derselben Richtung so an die erste, daß sich ihre Endflächen berühren; sodann hebe man die erste Latte auf, lege sie an das Ende der zweiten und verfahre so fort bis an das Ende der Strecke. Jede Meßlatte wird, wenn man sie aufhebt, laut gezählt.

b) Mit Rollmeßbändern aus Stahl, die sehr häufig verwendet werden, verfährt man in ähnlicher Weise.

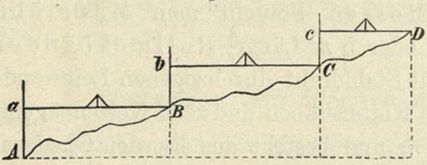
c) Mit der Meßkette zu messen, ist gegenwärtig fast außer Gebrauch gekommen.

2. Eine Strecke auf schiefem Boden zu messen.

Je nachdem die Neigung des Bodens geringer oder größer ist, bedient man sich zur Lösung dieser Aufgabe längerer oder kürzerer Meßlatten und in beiden Fällen des Senkelstockes und der Libelle (Schrotwage). Die Arbeit wird von unten nach oben nach der sogenannten Staffelmessung ausgeführt, die in folgendem besteht:

Man legt (Fig. 257) die eine Meßlatte in der Richtung der abgesteckten Linie und gibt ihr mittels der Libelle (Schrotwage) eine wagrechte Lage, so daß sie mit dem einen Endpunkte *B* auf dem Boden aufruht und mit dem anderen Endpunkte *a* an den Senkelstock ansteht, der lotrecht über den Anfangspunkt *A* der Strecke gehalten wird. Dann legt man diese eine Meßlatte ganz auf den Boden, wobei jedoch zu achten ist, daß sich ihr Endpunkt *B* nicht weiter rückwärts bewegt, begibt sich mit der zweiten Meßlatte in der Richtung der Strecke nach *B* und verwendet dieselbe wie früher die erste Meßlatte. Dieses Verfahren wird bis zu dem Endpunkte *D* der Strecke fortgesetzt. Ist der letzte Abstand kürzer als die Meßlatte, in der obigen Figur der Abstand zwischen *C* und *D*, so läßt man die Meßlatte am Senkelstocke bei *c* vorstehen und zählt an derselben die Länge *c D*.

Fig. 257.

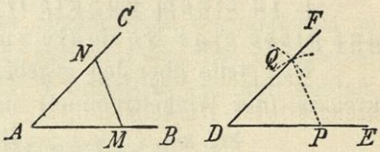


3. Wie die Länge einer Strecke, die nicht nach ihrer ganzen Ausdehnung zugänglich ist und daher nicht unmittelbar gemessen werden kann, mittelbar bestimmt wird, ist bei den praktischen Anwendungen der Ähnlichkeitssätze angeführt worden.

2. Abstecken der Winkel im allgemeinen und der rechten Winkel insbesondere.

§ 225. Ein Winkel auf dem Felde ist als abgesteckt anzusehen, wenn der Scheitelpunkt und irgend zwei in den Schenkeln liegende Punkte bezeichnet sind.

Fig. 258.



Auf einer Geraden DE (Fig. 258) auf dem Felde im Punkte D einen Winkel EDF aufzutragen, der einem gegebenen Winkel BAC gleich ist.

Man trage in dem gegebenen Winkel vom Scheitel A aus auf beiden Schenkeln dieselbe Länge, z. B. 20 *m*, bis M und N auf und messe die Strecke MN; ihre Länge sei 15 *m*. Sodann trage man auf der DE die Strecke $DP = 20\ m$ auf, beschreibe aus D mittels einer gespannten Schnur von 20 *m* Länge einen Kreisbogen, den man in der Gegend von Q mit einem Pflocke oder Nagel aufreißt und durchschneide diesen Bogen durch einen zweiten, den man aus P mittels einer gespannten Schnur von 15 *m* Länge beschreibt; der Durchschnittspunkt Q ist ein Punkt des zweiten Schenkels, des Winkels EDF, welcher dem Winkel BAC gleich ist.

Auf dieselbe Weise kann aus den gemessenen Schenkeln eines Winkels auf dem Felde und aus der gemessenen Entfernung ihrer Endpunkte mit Hilfe eines verjüngten Maßstabes auch auf dem Papier ein Winkel von gleicher Größe aufgetragen werden.

Fig. 259.

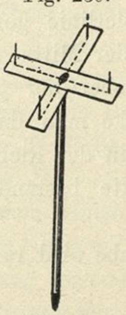
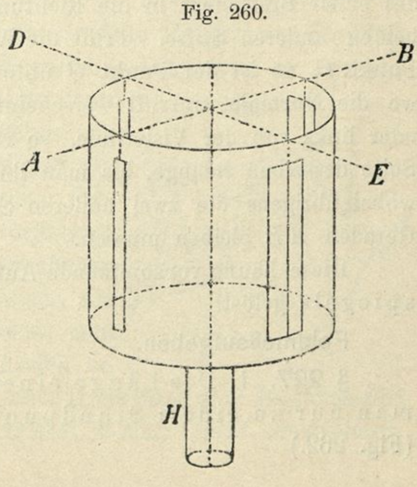


Fig. 260.



§ 226. Um auf dem Felde rechte Winkel abzustecken, d. i. um Normale zu errichten oder zu fällen, bedient man sich des Winkelkreuzes (Fig. 259) und der Winkeltrommel (Fig. 260).

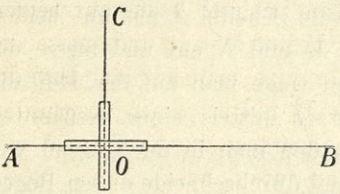
Das Winkelkreuz besteht aus zwei unter rechten Winkeln zusammengefügten Brettchen, die an den Enden mit lotrechten Stiften versehen sind; es wird auf einem Gestell wagrecht befestigt. Statt des Gestelles kann auch der Senkelstock an seinem oberen Ende zur Aufnahme des Winkelkreuzes eingerichtet werden.

Die Winkeltrommel (Fig. 260) ist ein 8 bis 10 *cm* hoher Blechzylinder, dessen Mantel durch zwei feine Schlitze (Okularschlitze) und zwei gegenüberstehende weitere Spalten durchbrochen ist; durch die Mitte der letzteren ist ein Roßhaar gespannt. Die durch zwei gegenüberstehende Schlitze gerichteten Visuren schließen miteinander rechte Winkel ein. Vermittels der Hülse *H* kann der Zylinder auf einen Senkelstock oder ein Stativ gesetzt werden.

1. In einem Punkte *O* einer abgesteckten Geraden *AB* auf diese eine Normale zu errichten (Fig. 261).

Man stelle über den gegebenen Punkt *O* den Mittelpunkt des Winkelkreuzes (der Winkeltrommel) und bringe die beiden Stifte des einen Brettchens (die Visur *AB*) in die Richtung der Geraden; dann visiere man über die beiden anderen Stifte (durch die beiden anderen Schlitze) und lasse in ihrer Richtung einen Stab einsetzen; dieser gibt den Punkt *C* an, durch welchen die gesuchte Normale gehen soll.

Fig. 261.



2. Von einem Punkte *C* außerhalb einer abgesteckten Geraden *AB* auf diese eine Normale zu fällen. (Fig. 261.)

Um den Punkt *O* der Geraden *AB* zu bestimmen, in welchem die von *C* darauf gezogene Normale eintrifft, lasse man in *C* einen Stab einstecken und stelle sich mit dem Winkelkreuze in der Geraden *AB* dort auf, wo beiläufig die Normale hinfallen dürfte; bringe die beiden Stifte des einen Brettchens in die Richtung dieser Geraden und visiere über die beiden anderen Stifte. Trifft die Visierlinie gerade auf den gegebenen Punkt *C*, so ist der Punkt *O* unter der Mitte des Werkzeuges der Ort, wo die Normale eintrifft; erscheint aber der gegebene Punkt *C* rechts oder links von der Visierlinie, so rücke man das Winkelkreuz nach der Seite desselben solange, bis man ihn in der Richtung der Stifte erblickt, wobei übrigens die zwei anderen Stifte beständig in der Richtung der Geraden *AB* bleiben müssen.

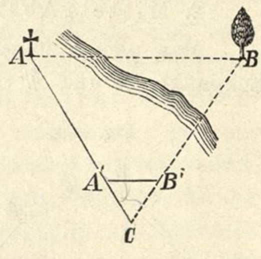
Diese häufig vorkommende Aufgabe wird rasch mittels des Winkelspiegels gelöst.

Feldmeßaufgaben.

§ 227. 1. Die Länge einer Strecke zu bestimmen, wenn man nur zu einem Standpunkte derselben gelangen kann. (Fig. 262.)

Man messe AC und trage von der gefundenen Länge z. B. den 4ten Teil von C bis A' auf. In A' wird ein Winkel $CA'B'$ abgesteckt, der so groß ist wie der Winkel CAB, und in dessen Schenkel $A'B'$ wird derjenige Punkt B' bestimmt, der zugleich in der CB liegt. Mißt man dann die Entfernung $A'B'$, so muß $AB = 4A'B'$ sein. (Begründung!)

Fig. 262.



2. Die Höhe eines unzugänglichen Gegenstandes, z. B. eines Turmes, der jenseits eines Flusses liegt, zu bestimmen. Die Auflösung geschieht auf dieselbe Art wie bei der Bestimmung der Höhe eines zugänglichen Gegenstandes in § 109, 2. *a)*, nur muß die Entfernung EA, weil man sie nicht unmittelbar messen kann, nach der Auflösung in § 227, 1 mittelbar bestimmt werden.

3. Aufnahme kleiner Grundstücke.

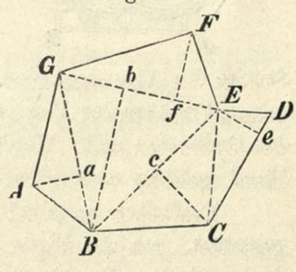
§ 228. Bevor man zur Aufnahme einer Fläche schreitet, geht man um dieselbe an ihrem Umfange herum, schlägt in allen Eck- und Krümmungspunkten Pflöcke ein, die mit fortlaufenden Nummern oder Buchstaben bezeichnet sind, und entwirft sich zugleich von dem Umfange der Figur samt der Bezeichnung der eingeschlagenen Pflöcke nach dem Augenmaße eine Handzeichnung oder Handskizze mit Bleistift, in der dann an jede wirklich gemessene Linie das gefundene Maß eingetragen wird. Nach dieser Handzeichnung fertigt man später zu Hause den Plan an und nimmt die Flächenberechnung vor.

§ 229. Aufnahme einer Figur mit Meßlatten, mit dem Rollmeßband oder mit der Meßkette.

1. Durch Zerlegung in Dreiecke. (Dreiecksmethode.)

Man gehe um die Figur und entwerfe eine Handskizze derselben, zerlege die aufzunehmende Figur durch passende Diagonalen in Dreiecke, von denen je 2 durch eine gemeinsame Seite zusammenhängen und messe alle Dreiecksseiten. Hierauf zeichne man die Dreiecke in der gehörigen Ordnung auf dem Papiere, indem man die gemessenen Seiten nach einem verjüngten Maßstabe aufträgt. Die dadurch erhaltenen Punkte haben dieselbe Lage gegeneinander, wie die entsprechenden Punkte auf dem Felde; man braucht sie nur noch gehörig durch Linien zu verbinden. In Fig. 263 würde man mit dem Dreiecke ABG beginnen und dann folgeweise die Dreiecke BGE, GEF, BEC, CED konstruieren.

Fig. 263.

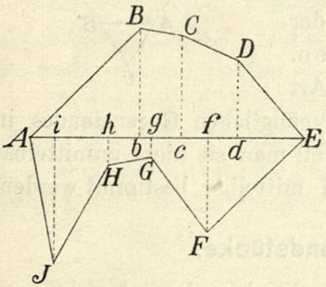


Wegen der Berechnung des Flächeninhaltes der einzelnen Dreiecke muß man in jedem Dreiecke auf dem Felde auch die Höhe ausstecken und messen.

2. Mittels Abszissen und Ordinaten. (Koordinatenmethode.)

Man pflöcke zuerst die Figur aus und stecke durch die entferntesten Eckpunkte A und E (Fig. 264) eine Strecke als Abszissenlinie ab. Auf diese fälle man von allen bezeichneten Umfangspunkten Normale und messe die einzelnen Stücke der Abszissenlinie und alle Ordinaten. Auf dem Papiere trägt man nun an einer Geraden nach einem verjüngten Maßstabe zuerst die Abszissen von A bis $i, h, b, \ldots$ auf; in diesen Punkten errichtet man Normale und trägt darauf die Ordinaten gehörig auf. Endlich braucht man nur zwischen den dadurch erhaltenen Punkten die entsprechenden Linien zu ziehen.

Fig. 264.

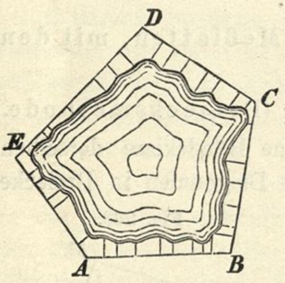


Sodann wird die Flächenberechnung vorgenommen.

3. Durch das Einschließen der Figur.

Wenn sich im Innern der aufzunehmenden Figur Hindernisse der Messung befinden, führt folgendes Verfahren zum Ziele. Es sei z. B. ein Teich (Fig. 265) aufzunehmen. Man umgebe die Figur mit mehreren gegeneinander geneigten Abszissenlinien, die zusammen ein Vieleck $ABCDE$ bilden, und fälle darauf von allen Biegungspunkten Normale; man messe die Abszissenteile und die Ordinaten und nehme zugleich die Winkel, welche die einzelnen Abszissenlinien miteinander bilden, nach § 225 auf. Dann zieht man auf dem Papiere eine Gerade und trägt darauf die Teile der Abszissenlinien AB verjüngt auf; im Endpunkte B konstruiert man einen Winkel, welcher so groß ist als der Winkel B auf dem Felde, und trägt auf den neuen Schenkel die Stücke die Abszissenlinien BC auf usw. Hierauf errichtet man in den einzelnen Punkten der Abszissenlinien Normale und trägt darauf die entsprechenden Ordinaten auf. Werden nun die dadurch erhaltenen Punkte mit freier Hand gehörig verbunden, so hat man die verlangte Zeichnung des Teiches.

Fig. 265.



Einfacher gestaltet sich die Aufnahme, wenn man, wo es der Boden gestattet, um die Figur anstatt eines Vieleckes ein Rechteck aussteckt, dessen Seiten die Abszissenlinien bilden.

II. Grundzüge des Planzeichnens.

1. Der Situationsplan.

§ 230. Wenn man die zu einer Gemeinde gehörigen Liegenschaften: Felder und Wälder, Äcker und Gärten, Häuser, Teiche, Flüsse usw. nach den im vorigen Abschnitte gegebenen Andeutungen ausmißt und im verjüngten Maße darstellt, so erhält man einen Plan (Situationsplan) der Gemeinde, der entweder ein kolorierter oder schwarzer genannt wird, je nachdem die einzelnen Objekte mit Farben behandelt sind oder nicht.

Die Größe des verjüngten Maßstabes hängt von dem Zwecke des Situationsplanes ab. Pläne, welche für den landwirtschaftlichen Gebrauch dienen, werden gewöhnlich nach dem Maßstabe zwischen $\frac{1}{3000} = 1:3000$ $\frac{1}{5000} = 1:5000$ der natürlichen Größe ausgeführt. Es kann für solche Fälle 1 *cm* des verjüngten Maßstabes = 30 bis 50 *m* der wirklichen Länge angenommen werden. Für Übersichtskarten größerer Liegenschaften nimmt man 1 *cm* = 100 bis 400 *m* an ($\frac{1}{10000} = 1:10000$ oder $\frac{1}{40000} = 1:40000$).

Aufgaben.

1. Eine Landstraße von 7 *km* Länge wurde in einem Plane mit dem Maßstabe 1 : 20.000 eingetragen; wie lang erscheint sie?

2. Ein Plan wurde im Maßstabe von 1 : 10.000 gezeichnet; wie weit sind 2 Orte in Wirklichkeit entfernt, deren Entfernung auf dem Plane 18·4 *cm* beträgt?

3. Bestimmung von Längen (Luftlinien) auf einem Plane oder einer Landkarte mit Hilfe von Zirkel und Maßstab! (Z. B. Wien—Prag, Wien—Triest, Wien—Innsbruck.)

In der beifolgenden Figurentafel (Fig. 266) sind die wichtigsten Grundzüge des Planzeichnens nach der jetzt gebräuchlichen Weise zusammengestellt. Es stellt dar:

α) Kulturen:

a) eine Wiese,
b) einen Sumpf,
c) eine Schottergrube,
d) eine Sandgrube,
e) einen Acker,
f) einen Gemüsegarten,
g) einen Ziergarten,
h) einen Obstgarten,
i) einen Laubwald,
j) einen Weingarten,
k) einen Hopfengarten,
l) eine Tabakpflanzung,
m) einen Nadelwald;

β) Baulichkeiten:

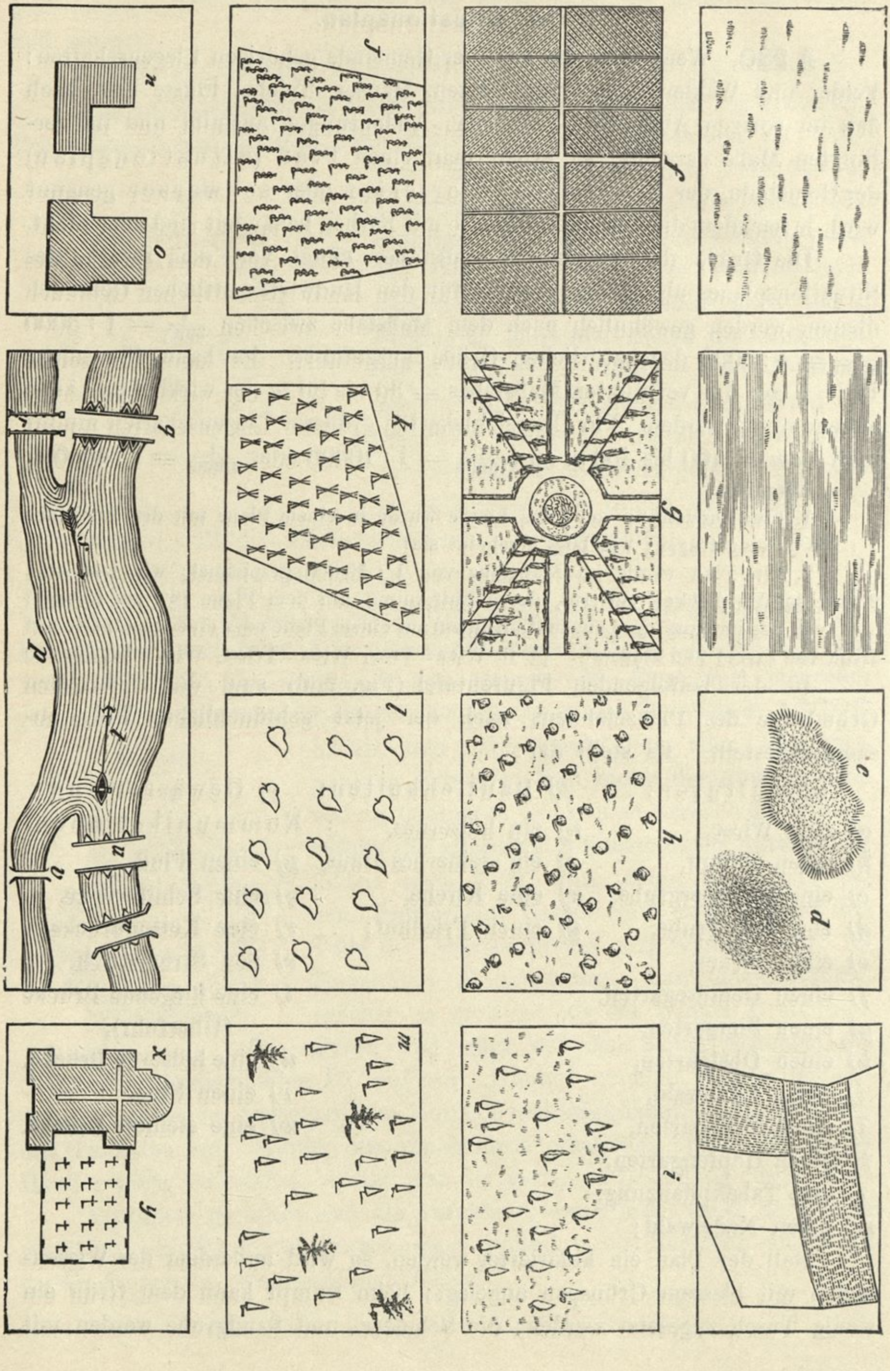
n) ein hölzernes,
o) ein steinernes Haus,
x) eine Kirche,
y) einen Friedhof;

γ) Gewässer und Kommunikationen:

p) einen Fluß,
q) eine Schiffbrücke,
r) eine Kettenbrücke,
s) den Stromstrich,
t) eine fliegende Brücke (Überfuhr),
u) eine hölzerne Brücke,
v) einen Steg,
w) eine steinere Brücke.

Soll der Plan ein kolorierter werden, so wird außerdem der Wiesenboden mit blassem Grünspan angelegt; beim Sumpf kann dem Grün ein wenig Tusch zugesetzt werden; die Schotter- und Sandgrube werden mit

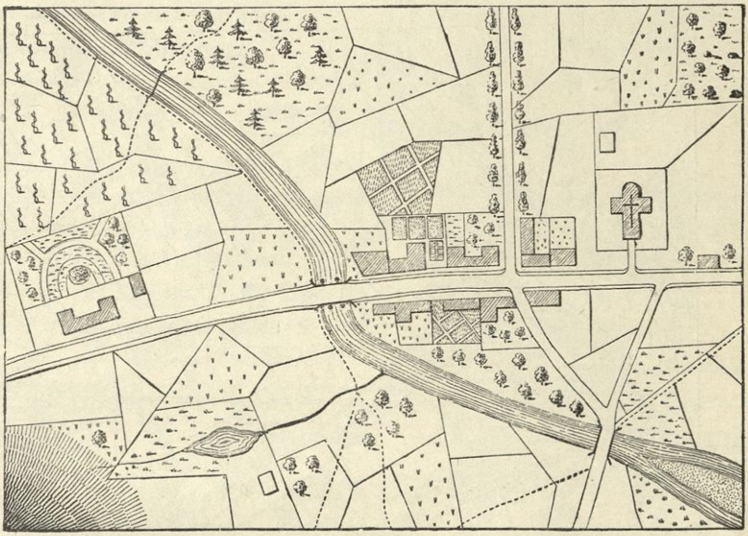
Fig. 266.



blasser Siena behandelt; der Acker, der Wein- und Hopfengarten sowie die Tabakpflanzung werden mit blasser Sepia (auch mit Tabaksaft) angelegt; beim Gemüsegarten wird dem Grün etwas Berlinerblau, beim Obstgarten und Waldboden etwas Tusch zugesetzt; hölzerne Häuser werden mit Gummigutt, steinerne mit Karmin, hervorragende Gebäude mit Zinnober und die fließenden und stehenden Gewässer mit Berlinerblau angelegt. Überdies werden die Bäume, Weinreben und Hopfenpflanzen mit Mitisgrün betupft.

§ **231.** Anwendung. Eine praktische Anwendung der voran stehenden Lehren ersieht man aus dem folgenden Situationsplane (Fig. 267).

Fig. 267.



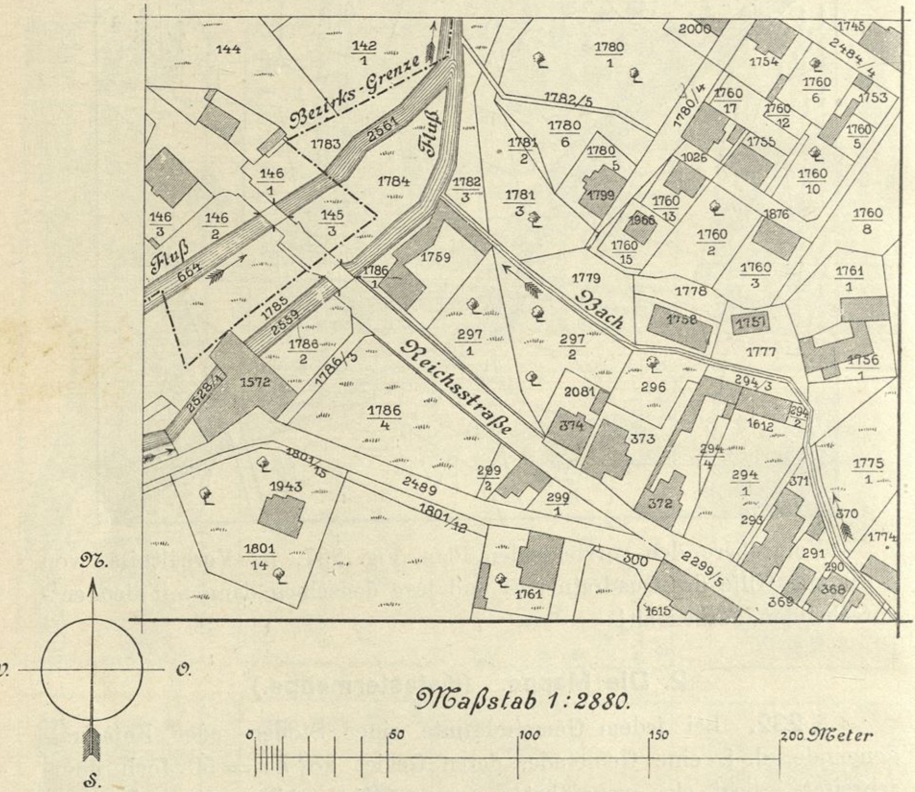
Vergrößere den vorstehenden Plan, Fig. 267, im Verhältnisse von 4 : 9 mit Hilfe des Quadratnetzes und lege denselben dann mit den entsprechenden Farben an!

2. Die Mappe. (Katastermappe.)

§ **232.** Bei jedem Gemeindeamte einer Steuer- oder Katastralgemeinde, d. i. eine Gemeinde, deren Gebiet $28\frac{3}{4}\,ha = 50$ Joch überschreitet, erliegt ein ausgeführter genauer Situationsplan des zum Gemeindegebiete gehörigen Grundbesitzes, aller Baulichkeiten und Kommunikationen. Dieser Plan der Gemeinde (Fig. 268) heißt die **Gemeindemappe** (Lageplan) und ist im verjüngten Maßstabe 1 : 2880, für größere Städte 1 : 1440 (nach dem alten Maße 1 Zoll (verj.) = 2880 Zoll (nat.) = 240 Fuß = 40 Klafter) ausgeführt. In dieser Mappe sind die einzelnen Grund- und Bauparzellen und die betreffenden Parzellennummern genau eingetragen. In einem hiezu gehörigen Parzellenprotokolle sind neben der Größe jeder der verzeichneten Grund- und Bauparzellen auch der Name und Wohnort der Besitzer in chronologischer Reihenfolge sowie die Kulturgattung und der Flächeninhalt der steuerfreien Grundstücke angegeben.

Jeder Grundbesitzer erhält 1. einen Grundbesitzbogen mit Angabe des Flächeninhaltes, der Kulturgattung, der Bodengüte (Bonität) und des reinen Ertrages seines Grundbesitzes; 2. ein Steuerbüchel, nach dem $26\frac{2}{3}\%$ des reinen Ertrages als Grundsteuer an das k. k. Steueramt zu entrichten sind.

Fig. 268.



Für jede Katastralgemeinde besteht ein Grundbuch, das beim k. k. Grundbuchsamte der nächsten Bezirksstadt aufliegt und genauen Aufschluß gibt über die Eigentumsverhältnisse der Grundbesitzer bezüglich der unbeweglichen Güter sowie über die verbuchten Lasten auf den Grundstücken und Baulichkeiten.

Schon unter Kaiserin Maria Theresia und Kaiser Josef II. wurde der Grund und Boden von Österreich-Ungarn vermessen, um das Eigentum der

Grund- und Hausbesitzer zu sichern, Grenzstreitigkeiten zu vermeiden, Verwandlung und Teilung der Grundstücke zu erleichtern und die Steuern nach dem Ertrage bemessen zu können.

Fig. 268 veranschaulicht einen Teil aus der Katastermappe des Stadtbezirkes Reichenberg.

3. Bezirkspläne.

§ 233. Soll eine Bezirkshauptmannschaft, ein Gerichtsbezirk bildlich in einem Plane (einer Karte) dargestellt werden, so können die zu wählenden Zeichen nur das Vorhandensein der dargestellten Objekte, aber nicht deren

Fig. 269.

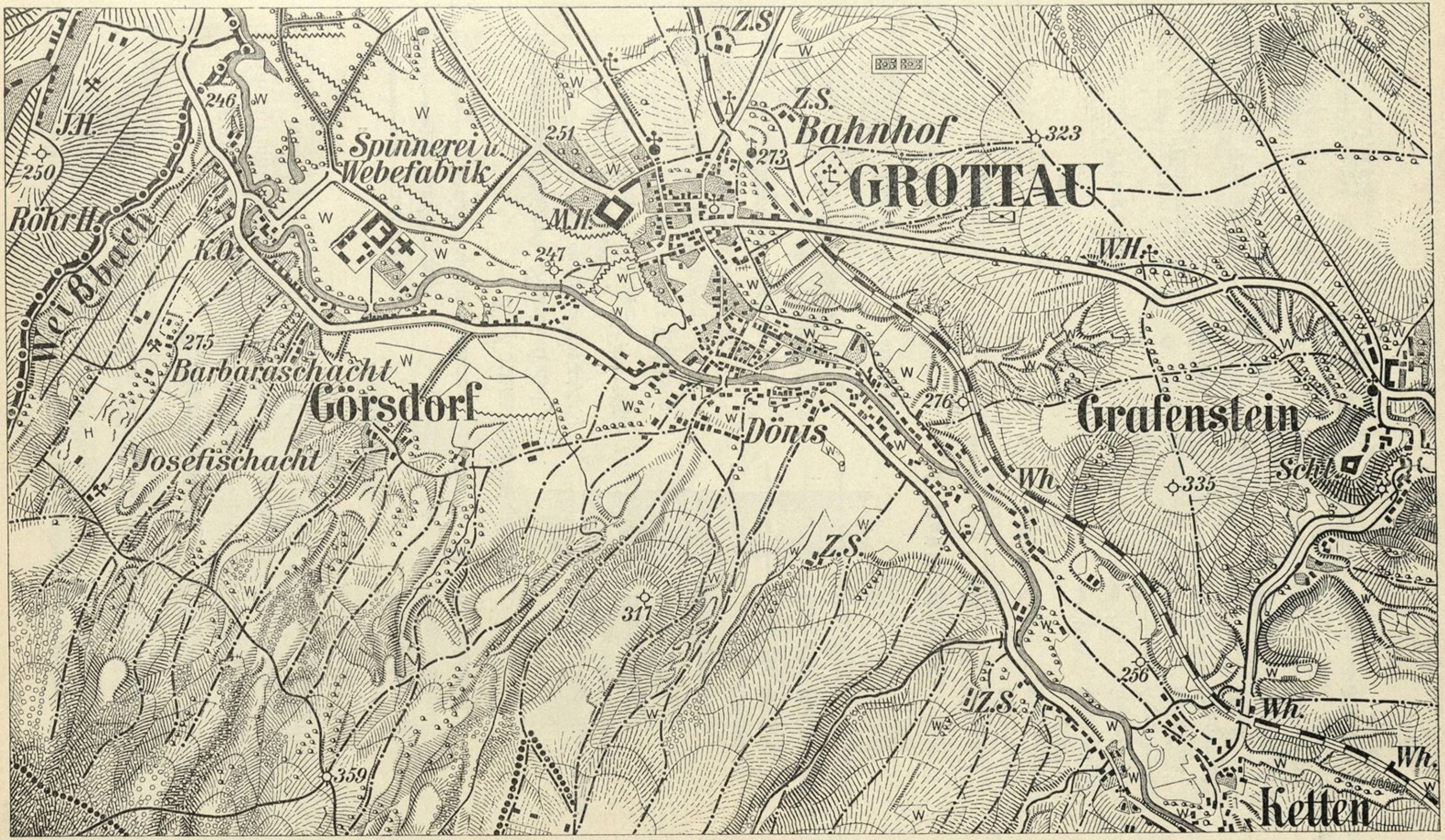


Fig. 270. Veranschaulicht einen Teil eines Bezirksplanes (Bezirkskarte) im Maßstabe **1 : 25.000** mit Anwendung der besprochenen Zeichen.

äußere Form und deren Ausdehnung zeigen. Im Bezirksplane (in der Bezirkskarte) sind in verjüngtem Maßstabe 1 : 25.000 verzeichnet: Die Ortschaften (Dörfer, Märkte, Städte); die Verkehrswege oder Kommunikationen (Wege, Straßen, Eisenbahnen, Kanäle); Wasser und Land; die Kulturen (Feld, Wiese, Wald) u. a.

Der Zeichenschlüssel auf Seite 195 (Fig. 269) enthält die Erklärung der wichtigsten technischen Zeichen des k. k. Militär-geographischen Institutes in Wien.

Fig. 271.

Die Spezialkarte von Österreich-Ungarn ist im Maßstabe 1 : 75.000 angelegt. (1 *mm* = 75 *m*.) Fig. 271 veranschaulicht das Kartenbild in Fig. 270 in diesem Maßstabe 1 : 75.000.

Die Generalstabskarte von Österreich-Ungarn ist im Maßstabe 1 : 300.000 (1 *mm* = 300 *m*) angelegt.

III. Zeichnen einfacher Objekte des Bau- und Maschinenfaches.

a) Elemente des Maschinenzeichnens.

1. Nägel, Klammern und Nieten.

§ 234. Zur Befestigung und bleibenden Verbindung von Holzbestandteilen und anderen Gegenständen bedient man sich der Nägel, Klammern und Nieten.

Die Nägel (Fig. 272) dienen zur Befestigung von Brettern und andern Holzbestandteilen; sie werden aus verschiedenen Metallen geschmiedet.

Fig. 272.

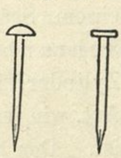
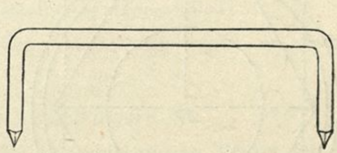


Fig. 273.



Die Klammern (Fig. 273) werden zur Verbindung von Holz mit Holz, Eisen mit Holz, Stein mit Stein usw. angewendet. Sie bestehen aus einem Stabeisenstücke mit rechtwinklig umgebogenen Enden.

Die Nieten (Fig. 274) dienen zur unlösbaren Verbindung von Blechen und Metallplatten. Die Niete besteht aus einem zylindrischen Bolzen und zwei Köpfen; der eine ist kugelförmig (Setzkopf) und wird bereits vor dem Gebrauche ausgearbeitet, während der andere (Schließkopf) gewöhnlich kegelförmig ist und erst beim Zunieten durch Hämmern gebildet wird. Veranschaulichung!

Fig. 274.

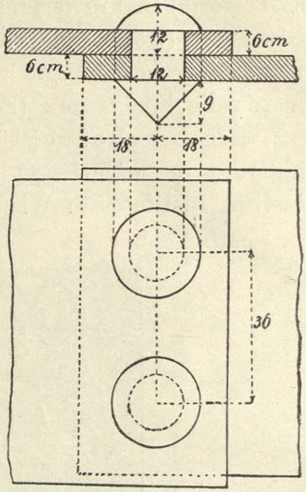
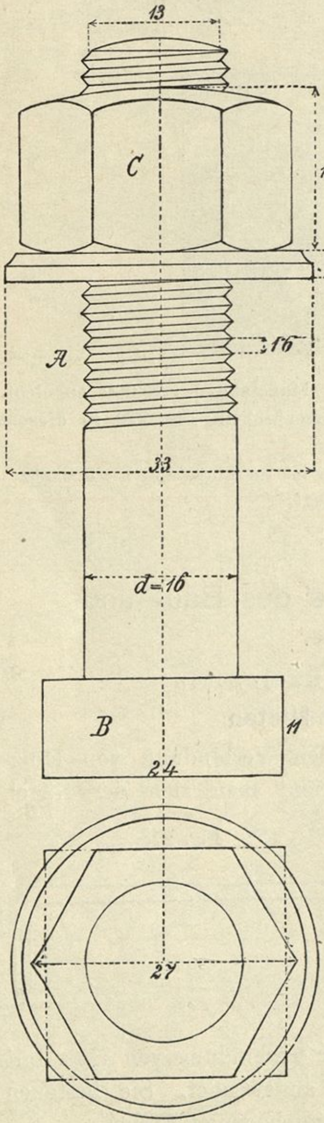


Fig. 275.



Grundriß.

2. Die Schraube.

§ 235. Zur Herstellung lösbarer Verbindungen von Gegenständen dienen die Schrauben.

Die Bestandteile einer Schraube (Fig. 275) sind der Schraubenbolzen oder die Schraubenspindel *A*, d. i. ein zylindrischer Schaft, in dessen Mantelfläche das Schraubengewinde eingeschnitten ist; der Schraubenkopf *B*, der mit dem Bolzen in der Regel aus einem Stücke gearbeitet ist; und die Schraubenmutter *C*, d. i. ein hohler Zylinder, in den ein Gewinde gleicher Art, wie jenes des Bolzens eingeschnitten ist. Der Schraubenkopf ist vierkantig, sechskantig oder auch rund; die äußere Fläche der Schraubenmutter ist meistens vier- oder sechskantig. Nach der Form des Querschnittes des Gewindes unterscheidet man Schrauben mit scharfem und Schrauben mit flachem Gewinde. Veranschaulichung!

Zum Anziehen der Schraubenmutter bedient man sich des Schraubenschlüssels.

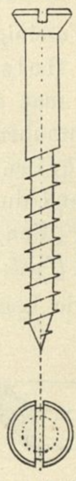
Bei Holzschrauben (Fig. 276) erhält der Kopf einen Einschnitt zum Einsetzen des Schraubenziehers.

Jener Teil eines Schraubengewindes, der einer einmaligen Umdrehung des Bolzens entspricht, wird ein Schraubengang und der Abstand zweier Schraubengänge die Ganghöhe oder Steigung genannt.

Die Entstehung der Schraubenlinie kann mittels eines aus Papier ausgeschnittenen Dreieckes, dessen eine Kathete dem Umfange des Schraubenbolzens und dessen andere der Höhe eines Schraubenganges gleich ist, veranschaulicht werden. Rollt man das Dreieck so auf die Zylinderfläche auf, daß die zweite Kathete zur Achse parallel steht, so bildet die Hypotenuse die Schraubenlinie.

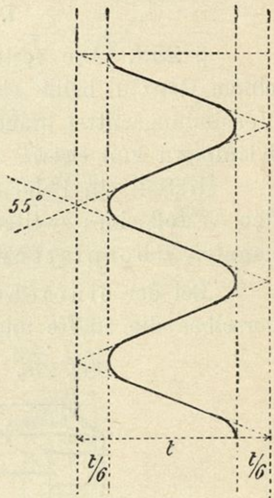
Fig. 276.

Aufriß.



Grundriß.

Fig. 277.



In Werkzeichnungen bedient man sich zur Darstellung des Schraubengewindes gewöhnlich der aus Fig. 277 ersichtlichen Konstruktionsweise.

Die gezeichneten Querschnitte von Maschinenteilen werden mit den nachstehenden Materialfarben angelegt:

Schmiedeeisen: Berlinerblau; Gußeisen: Neutraltinte (Berlinerblau, Tusch und etwas Gummigutt); Stahl: Violett (Berlinerblau und Karmin); Messing, Bronze: Chromgelb Nr. 2; Blei: Berlinerblau und Lichtocker; Gummi: Lichter Tusch.

Im Maschinenzeichnen sind die Maßzahlen (Koten) in Millimetern angegeben.

Übungsaufgaben.

Einfache Modelle des Maschinenzeichnens sind zu kotieren und zu skizzieren und sodann im Grund- und Aufriß (event. auch im Kreuzriß) mit Angabe charakteristischer Schnitte (Anwendung der Materialfarbe) darzustellen!

Veranschaulichung der entsprechenden Darstellungsweisen an approbierten Zeichenvorlagen und Wandtafeln!

b) Elemente des Bauzeichnens.

§ 236. Im bürgerlichen Leben wie in der baugewerblichen Praxis ist das Verständnis für die Darstellung eines **Bauplanes** (Plan eines Hauses, Fig. 316) von Wichtigkeit; dazu ist die Kenntnis der Darstellungsweise der wichtigsten Bestandteile eines Gebäudes und der Materialfarben erforderlich. Die im Bauzeichnen üblichen (konventionellen) Materialfarben sind:

Für Ziegel: Karmin mit etwas Indischgelb gemischt; für Faserholz (Längsschnitt): Indischgelb und etwas Karmin; für Hirnholz (Querschnitt): Indischgelb, Karmin und etwas gebrannte Siena; für Stein: Berlinerblau, Lichtocker und etwas Neutraltinte; für Erde: Sepia; für Schmiedeeisen: Berlinerblau.

1. Die Holzverbindungen.

§ 237. Die feste Vereinigung zweier oder mehrerer Balken zu einem Ganzen heißt eine Holzverbindung. Als Befestigungs- und Verbindungsmittel braucht man dabei starke hölzerne und eiserne Nägel, Klammern und eiserne Schraubenbolzen.

1. Soll ein Balken verlängert werden, so geschieht dies durch den Anstoß eines zweiten und durch Verbindung beider mittels der sogenannten Überplattung. Von dieser gibt es hauptsächlich drei Arten.

Bei der einfachen Überplattung (Fig. 278) beträgt die Höhe derselben die Hälfte und die Länge das 1- bis $1\frac{1}{2}$fache der Balkenhöhe.

Fig. 278.

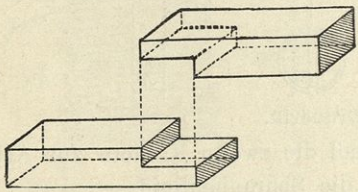
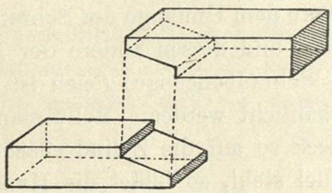


Fig. 279.



Bei der schiefen Überplattung (Fig. 279) ist die Länge wie bei der vorhergehenden; die Höhe der lotrechten Stoßflächen beträgt ungefähr $\frac{1}{4}$ der Balkenhöhe. Bei der verzahnten Überplattung (Fig. 280) beträgt die Höhe des Zahnes gleichfalls ungefähr $\frac{1}{4}$ der Balkenhöhe.

Fig. 280.

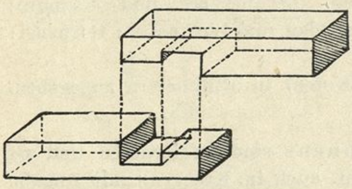
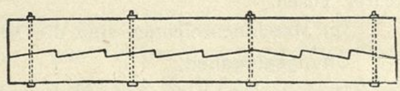


Fig. 281.



2. Um die Tragfähigkeit zu erhöhen, legt man zwei oder mehrere Balken so aufeinander, daß sie mittels Zähnen ineinander greifen und verbindet dieselben durch Schraubenbolzen miteinander. Balken dieser Art nennt man verzahnte Balken (Fig. 281).

3. Wenn zwei Balken unter einem Winkel zusammenstoßen, oder wenn sie sich kreuzen, so kann ihre Verbindung am einfachsten durch eine bündige Überplattung (Fig. 282 und Fig. 283) bewerkstelligt werden.

Wird das eine Ende eines Balkens mit seinem unveränderten Querschnitte oder, nach einer gewissen Form zugeschnitten, in eine ent-

Fig. 282.

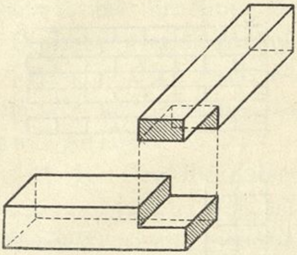
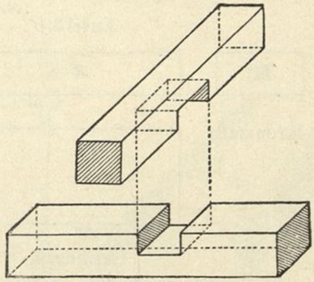


Fig. 283.



sprechende Vertiefung eines anderen Balkens eingelassen, so heißt eine solche Verbindung im ersten Falle eine Einlassung (Fig. 284), im zweiten eine Verzapfung (Fig. 285).

Fig. 284.

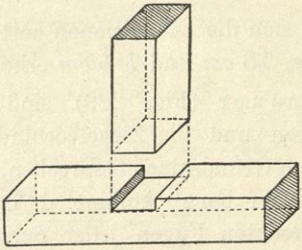


Fig. 285.

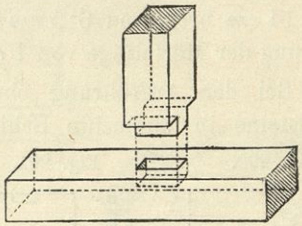


Fig. 286 stellt eine Art von Verzapfung dar, wie solche insbesondere bei Dachkonstruktionen vorkommt; *a* heißt der Zapfen und *b* die Gabel oder Gurgel.

Fig. 286.

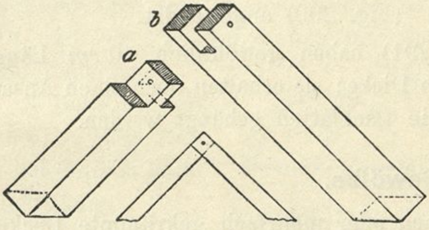
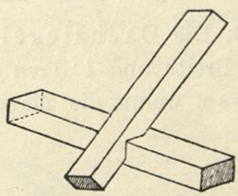


Fig. 287.



Wenn ein schiefliegender Balken auf einem wagrechten aufliegen und durch ihn festgehalten werden soll, wendet man zu ihrer Verbindung die Aufklauung (Fig. 287) an.

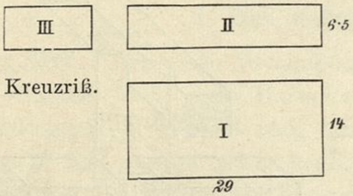
2. Das Mauerwerk.

§ 238. Die **Mauer** besteht aus horizontalen Schichten (Scharen) von Ziegeln, Bruch- und Werksteinen, die durch Mörtel verbunden sind.

Dieser Verband wird erzielt, wenn in den aufeinanderfolgenden Scharen die Binder *a* in Fig. 289 (Ziegel, die ihrer Länge nach in der Mauer-

Fig. 288.

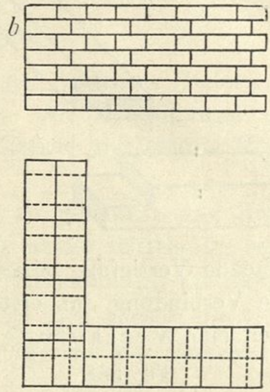
Aufriß.



Kreuzriß.

Grundriß.

Fig. 289.



dicke liegen) und die Läufer *b* (Ziegel, die ihrer Länge nach in der Mauerlänge liegen) abwechseln.

1. Die gewöhnlichen **Mauerziegel** (Fig. 288) sind bei uns in der Regel 29 *cm* lang, 14 *cm* breit und 6·5 *cm* dick, so daß sich die Dimensionen mit Zurechnung der Mörtelfuge von 1 *cm* auf 30 *cm*, 15 *cm* und 7·5 *cm* erhöhen.

Bei der Aufführung einer Ziegelmauer (Fig. 289) sind die Ziegelsteine in wagrechte Schichten zu legen und die Ziegelverbindung muß dem Grundsatze entsprechen, daß „Voll auf Fug" komme, d. i. daß die lotrechten Fugen jeder Schichte durch das volle Mauerwerk der darüber liegenden Schichte gedeckt werden.

Fig. 290.

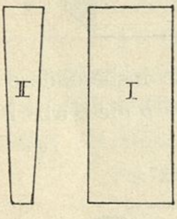
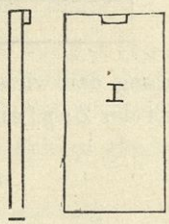


Fig. 291.



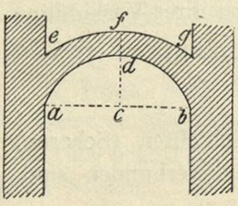
2. Bei Gewölben kleinerer Gattung werden sogenannte Keilziegel (Fig. 290) angewendet.

3. Die Dachziegel (Fig. 291) haben gewöhnlich 40 *cm* Länge, 20 *cm* Breite und 1·5 *cm* bis 2 *cm* Dicke; sie erhalten oben einen Ansatz, die Nase, womit die Ziegel auf die Dachlatten gehängt werden.

3. Gewölbe.

§ 239. Gewölbe sind einfach oder mehrfach gekrümmte Decken, die aus Ziegeln oder Quadersteinen erbaut, auf Mauern oder Pfeilern ruhen.

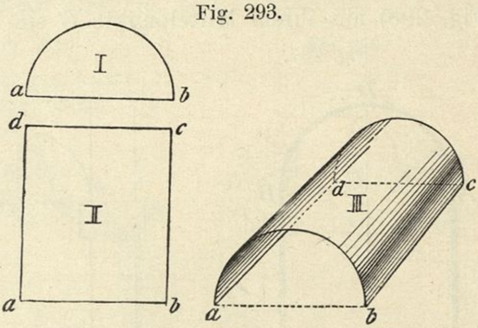
Fig. 292.



Stellt Fig. 292 den Querschnitt oder das Profil eines Gewölbes dar, so heißen die Mauern, auf die sich das Gewölbe stützt, die Widerlager und die Punkte *a* und *b*, in denen das Gewölbe an den Widerlagern beginnt, die Anläufe; den

Abstand ab der Widerlager nennt man die Spannweite, den innern Bogen adb den Unterbogen, den äußern efg den Oberbogen, den höchsten Punkt d den Schluß, die Erhöhung cd des Schlusses über die Anläufe die Pfeilhöhe und die Dicke df am Schlusse die Gewölbdicke.

Fig. 293.



1. Ein Gewölbe, dessen Oberfläche zylindrisch ist, heißt ein Tonnengewölbe. Fig. 293 stellt in I den Querschnitt, in II den Grundriß und in III das Bild eines Tonnengewölbes dar.

2. Aus der Durchdringung zweier Tonnengewölbe von gleicher Höhe und gleicher Spannweite entsteht ein Kreuzgewölbe. In Fig. 294 stellen I und II die Aufrisse der beiden Tonnen, III den Grundriß und IV das Bild des Kreuzgewölbes dar; ab und dc sind die Querschnitte der einen, ad und bc die der andern Tonne. Beide Tonnen durchschneiden sich in den Durchdringungslinien oder Graten aoc und bod. In den Punkten a, b, c und d stützt sich das ganze Gewölbe auf seine Widerlager.

Fig. 294.

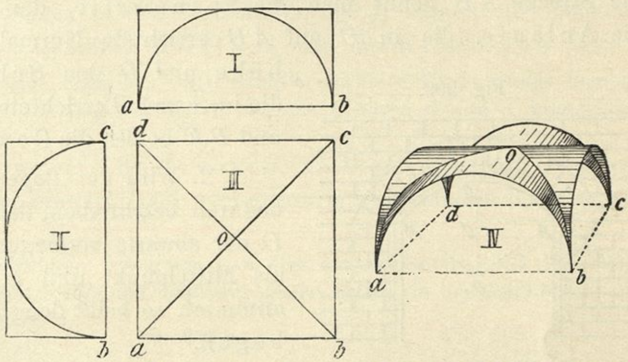


Fig. 295.

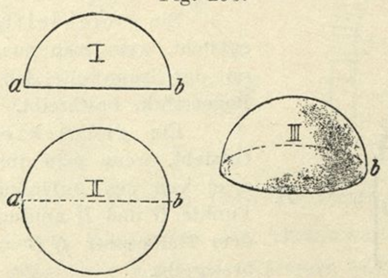
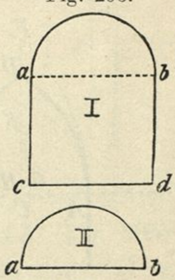


Fig. 296.



3. Das Kuppelgewölbe (Fig. 295) ist gewöhnlich halbkugelförmig.

Wenn man nur die Hälfte einer Kuppel auf einen halben Zylinder als Widerlager stützt, so heißt das Gewölbe ein Chor- oder Nischengewölbe (Fig. 296). Eine Nische wird ein solches Gewölbe dann genannt, wenn es eine kleinere Ausdehnung hat. Chorgewölbe und Nischen werden in Kirchen häufig angewendet.

4. Konstruktion der wichtigsten architektonischen Bogen.

§ 240. 1. Wird über einer gegebenen Strecke AB (Fig. 297 und Fig. 298) aus ihrem Mittelpunkte C ein Halbkreis beschrieben, so heißt

Fig. 297.

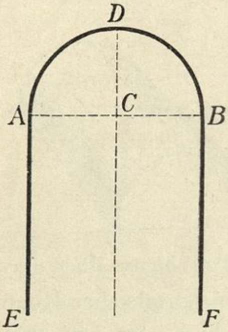
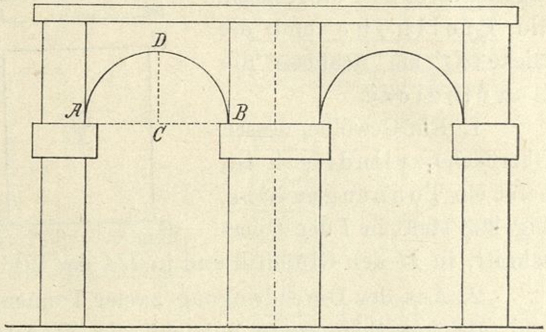
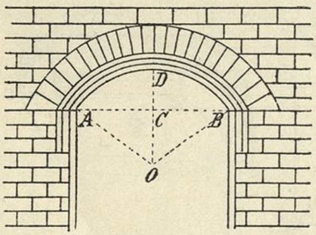


Fig. 298.



dieser ein Rundbogen, voller Bogen oder römischer Bogen; die Strecke AB nennt man die Spannweite, die Punkte A und B die Anläufe, die in C auf AB errichtete Normale CD die Pfeilhöhe und D den Schluß des Bogens; die in A und B errichteten Senkrechten AE und BF heißen die Gewände des Bogens.

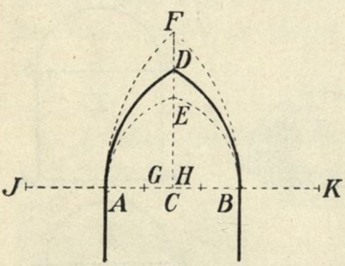
Fig. 299.



2. Wird der Bogen ADB (Fig. 299) dadurch beschrieben, daß man einen Punkt O der abwärts verlängerten Pfeilhöhe DC als Mittelpunkt und OA als Halbmesser annimmt, so heißt derselbe ein Segmentbogen.

3. Ein Spitzbogen oder gotischer Bogen (Fig. 300) ist aus zwei einander schneidenden Kreisbogen zusammengesetzt. Er ist entweder gleichseitig oder gedrückt oder überhöht.

Fig. 300.



Ein gleichseitiger Spitzbogen ADB entsteht, wenn man aus den Anläufen A und B mit der Spannweite AB zwei einander treffende Bogenstücke beschreibt.

Ein gedrückter Spitzbogen AEB entsteht, wenn man innerhalb der Spannweite zwei von den Anläufen gleichweit abstehende Punkte G und H annimmt und aus diesen mit dem Halbmesser $GB = HA$ zwei Kreisbogen beschreibt.

Um einen erhöhten Spitzbogen AFB zu konstruieren, nimmt man in der verlängerten Spannweite in gleichen Abständen von den Anläufen die Punkte J und K an und beschreibt aus diesen mit dem Halbmesser $JB = KA$ zwei Kreisbogen.

Einen verzierten gotischen Bogen zeigt Fig. 301.

4. Einen umgekehrten Spitzbogen ADB (Fig. 302) zu zeichnen. (Die Konstruktion ist aus der Fig. 302 zu ersehen.)

Fig. 301.

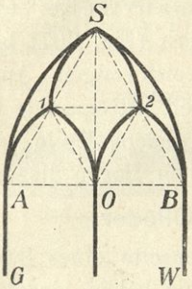


Fig. 302.

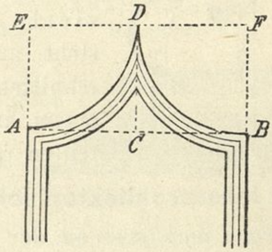
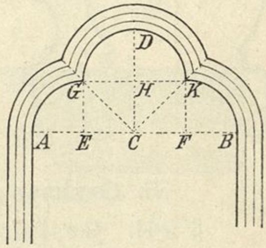


Fig. 303.



5. Teilt man (Fig. 303) die Spannweite in vier gleiche Teile, errichtet in den drei Teilungspunkten ECF Normale und macht $EG = CH = FK = AE$, so bilden die aus E, H und F mit dem Halbmesser AE beschriebenen, in den Punkten G und K zusammenstoßenden drei Kreisbogen die Bogenlinie $AGDKB$, die ein Kleebogen heißt.

Beschreibt man aus denselben Mittelpunkten mehrere konzentrische Bogen, so haben diese ihren Zusammenstoßpunkt in der aus C durch G und K gezogenen Geraden.

6. Der geschweifte Spitzbogen, auch persischer Bogen genannt, ist aus zwei einwärts und zwei auswärts gekrümmten Kreisbogen zusammengesetzt.

Um ihn zu konstruieren, beschreibe man über der Spannweite AB (Fig. 304) das gleichseitige Dreieck ABD und halbiere dessen Seiten in den Punkten C, E und F. Zieht man dann durch D eine Parallele zu AB und errichtet auf AB die Normalen AG und BH, so sind C, G und H die Mittelpunkte der mit dem Halbmesser AC beschriebenen, in E und F zusammenstoßenden vier Bogenstücke, welche den geschweiften Spitzbogen $AEDFB$ bilden.

Fig. 304.

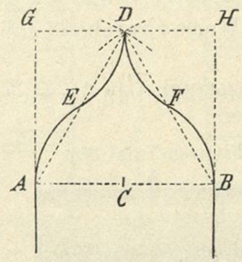
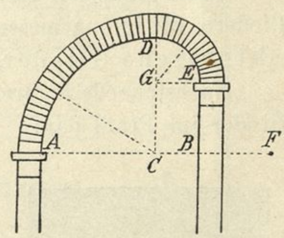


Fig. 305.



7. Einen steigenden Bogen (Schwanenhals) zu konstruieren.

Man errichte in einem Endpunkte der Spannweite AB (Fig. 305) die Normale BE von gegebener Länge, verlängere AB so, daß $BF =$ der gegebenen Höhe BE wird, halbiere AF in C und ziehe $CD \perp AB$. Zieht man noch $EG \parallel BA$ und beschreibt aus C den Viertelkreis AD und aus G den Viertelkreis DE, so ist ADE der verlangte steigende Bogen.

Fig. 306.

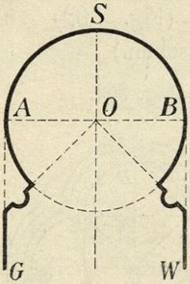
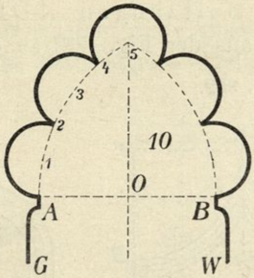


Fig. 307.



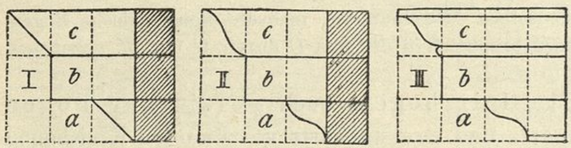
8. Der maurische oder arabische Bogen. Die Konstruktion desselben ist aus Fig. 306 ersichtlich.

9. Der maurische verzierte Bogen (Fig. 307) besteht aus kreisförmigen Ausschnitten, deren Mittelpunkte in einem in 5 gleiche Teile geteilten gotischen Bogen liegen.

5. Gesimse und ihre architektonischen Glieder.

§ 241. Gesimse nennt man jene an der Außenseite eines Baugegenstandes hervortretenden Teile, welche die Bestimmung haben, einzelne Baubestandteile abzuschließen. Man unterscheidet Hauptgesimse, die zur Verzierung und zum Schutze der obersten sowie zur Trennung der mittlereren Teile dienen; Fußgesimse, welche die untersten Teile zu verstärken haben, und Einfaßgesimse, die zur Einfassung und Umrahmung von Fenstern oder Strukturteilen dienen.

Fig. 308.



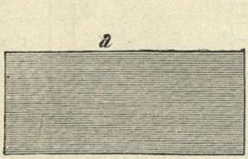
Ein Gesimse hat im allgemeinen drei Hauptteile, wie z. B. in Fig. 308, wo *a* den tragenden, *b* den schützenden und *c* den krönenden Teil darstellt. In Fig. 308, *II* und *III* erscheint das Gesimse in ausgebildeter Form.

Jeder Hauptteil eines Gesimses besteht aus geraden oder gekrümmten Gliedern, die in angemessener Weise abwechseln müssen; sie heißen architektonische Glieder.

Nachstehende Figuren-Tafel 309 stellt die wichtigsten architektonischen Glieder im Profil dar:

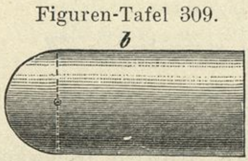
Figuren-Tafel 309.

a



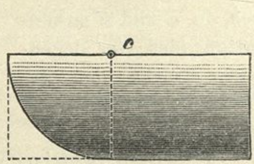
Platte (bei geringer Ausdehnung ein Plättchen).

b



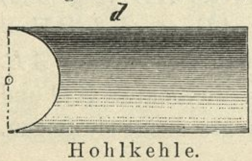
Rundstab (Stäbchen).

c



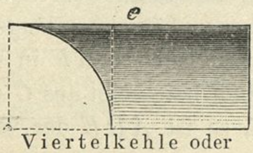
Viertelstab oder Wulst.

d



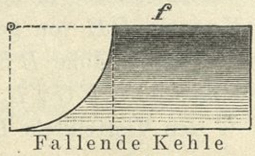
Hohlkehle.

e



Viertelkehle oder Ablauf.

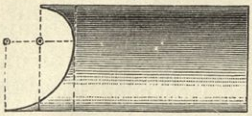
f



Fallende Kehle oder Anlauf.

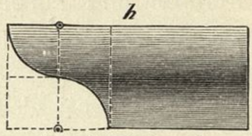
Figuren-Tafel 309.

g



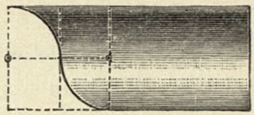
Doppelhohlkehle oder Einziehung, Hohlleiste.

h



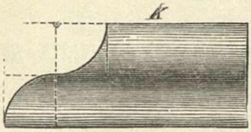
Kehlleiste oder Karnies.

i



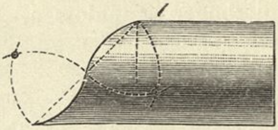
Rinnleiste.

k



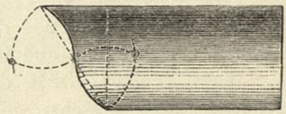
Glockenleiste.

l



Sturzrinne.

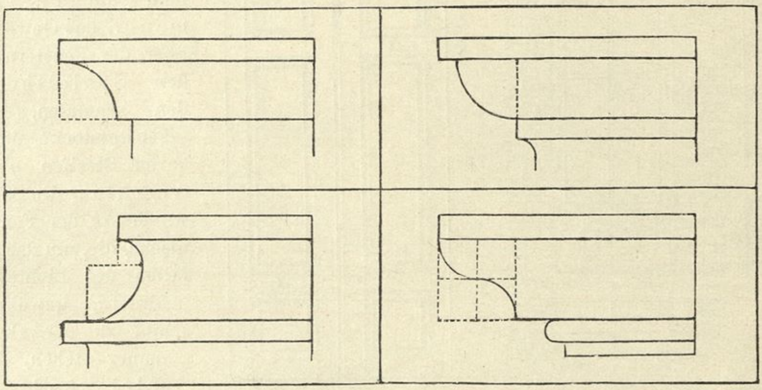
m



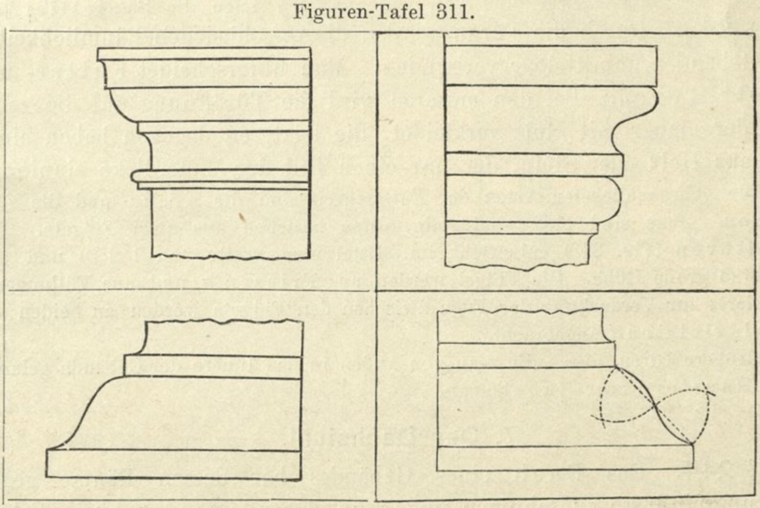
Rinnleiste.

Anwendungen.

Figuren-Tafel 310.



Figuren-Tafel 311.



6. Fenster und Türen.

§ **242.** Die **Fenster** dienen zur Beleuchtung der inneren Räumlichkeiten eines Gebäudes. Sie haben eine Breite von ungefähr 1 *m* und im Mittel eine doppelt so große Höhe; bei niedrigen Gebäuden kann die Fensterhöhe auch weniger als die doppelte Breite betragen. Hinsichtlich der Form sind die Fenster entweder rechteckig oder oben mit einem Halbkreis, Segment oder Spitzbogen geschlossen.

Die allgemeine Anlage eines gewöhnlichen Fensters ist aus Fig. 312 im Aufriß von innen, im Grundriß und im Profil zu ersehen.

Jedes Fenster erhält einen Fensterstock von Stein oder Holz, der aus folgenden Teilen besteht: aus der wagrechten Sohlbank *a*, den beiden Gewänden *b* und dem Sturze *c*. Die Mauer *d* unter dem Fenster nennt man die Parapetmauer, das Gewölbe *f* über der Fensternische den Spalettbogen, den schmalen, vom Fensterstocke sichtbaren Streifen *g* den Anschlag, die Seitenwände *bh* der Fensternische, die, um das Einfallen des Lichtes zu befördern, gewöhnlich schief zu der Hauptmauer stehen, die Spalettwände und die Größe *hr* ihrer Abweichung von der normalen Lage die Spalettierung.

Fig. 312.

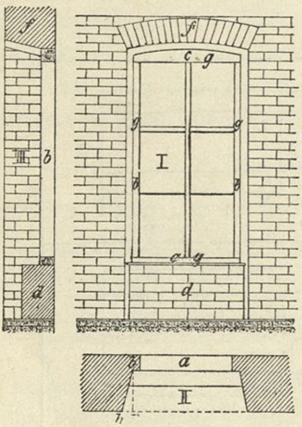
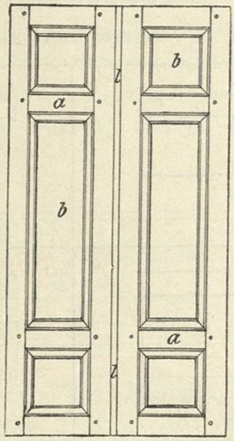


Fig. 313.



§ **243.** Durch die **Türen** werden die verschiedenen Räumlichkeiten eines Gebäudes unmittelbar verbunden. Man unterscheidet Futter- und Spalett-Türen. Bei den ersteren wird die Türöffnung auf die ganze Dicke der Mauer mit Holz verkleidet; die letzteren dagegen haben einen Stock aus Holz oder Stein, der nur einen Teil der Mauerdicke einnimmt.

Die gebräuchlichsten Arten der Futtertüren sind die Kreuz- und die Flügeltüren. Jene sind bloß einflügelig, diese bestehen aus zwei Flügeln. Den Flügeltüren (Fig. 313) entspricht im Mittel eine Breite von 1·2 *m* und eine doppelt so große Höhe. Die Flügel werden aus Friesen *a* und aus Füllungen *b* konstruiert; zur Verdeckung der Fuge zwischen den Flügeln werden an beiden die Anschlagleisten *l* angebracht.

Größere Türen, durch die man von außen in das Innere der Gebäude gelangt, heißen Haustore oder Haustüren.

7. Der Dachstuhl.

§ **244.** Das Dach eines Gebäudes hat dessen Räume gegen Witterungseinflüsse zu schützen und muß daher eine Art wasserdichter

Eindeckung bilden, die von einem Holzgerüste getragen wird. Dieses Gerüst heißt **Dachstuhl.**

In der Zeichnung wird der Dachstuhl durch das Profil (die Stirnansicht) und den Werksatz (Grundriß) dargestellt.

Wir beschränken uns hier auf den deutschen Dachstuhl, und zwar auf den leeren und den stehenden.

Der leere Dachstuhl, von dem Fig. 314 in *I* das Profil und in *II* den Werksatz darstellt, hat folgende Anordnung:

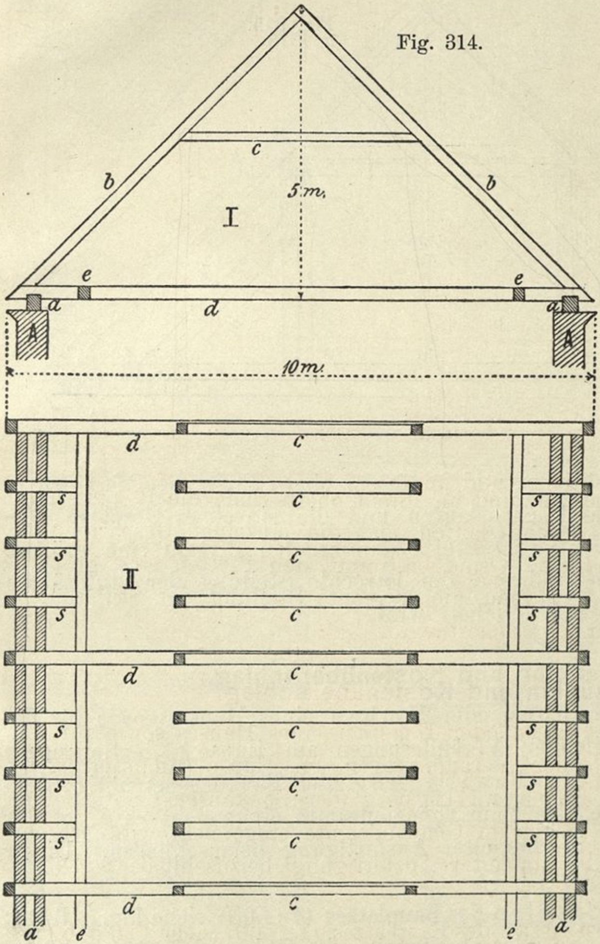


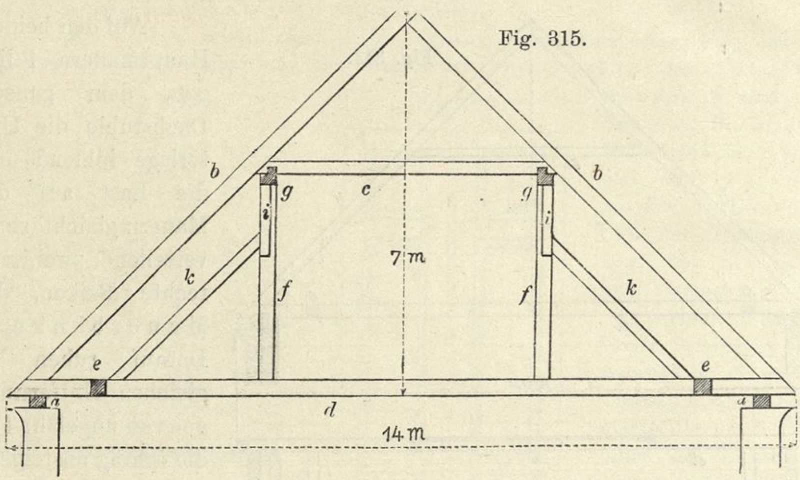
Fig. 314.

Auf den beiden Hauptmauern *A* liegen, dem ganzen Dachstuhle die Unterlage bildend und die Last auf die Mauern gleichförmig verteilend, zwei wagrechte Balken, die Mauerbänke *a*. Darauf ruhen in gleichen Entfernungen von ungefähr 1 *m* die schräg ansteigenden Sparren *b*, welche die Dachneigung bilden und die Dachlatten und die Eindeckung mit Ziegeln oder Schiefer aufzunehmen haben; sie sind am untern Ende aufgeklaut, an den obern Enden mittels Zapfen und Gabel verbunden; außerdem werden die Sparren noch durch die horizontalen Kehlbalken *c* unterstützt. Jedes vierte Paar von Sparren wird unten durch einen Querbalken, den Bundtram *d*, zu einem festen Dreiecke verbunden und heißt dann ein Bundgespärre. Die dazwischen liegenden Sparrenpaare heißen Leergespärre. Von dem Bundtram des einen bis zum Bundtram des nächsten Bundgespärres laufen parallel mit den Mauerbänken die Wechsel *e*, womit kurze Balken, die Stiche *s*, die in den Leergespärren die Stelle der Bundträme vertreten, verbunden sind.

In dem Werksatze werden in der Regel nur die horizontalen Balken gezeichnet.

Für Spannweiten, die 10 *m* überschreiten, wird der stehende Dachstuhl (Fig. 315) angewendet. Er hat die Bestandteile des leeren Dachstuhles und außerdem im Bundgespärre die Stuhlsäulen *f*, die

Fig. 315.



den Kehlbalken unterstützen, und an ihrem obern Ende die Pfetten *g*, die nach der Länge des Daches laufen und die einzelnen Gespärre verbinden. Die Pfettenbüge *i* sind bestimmt, den Pfetten eine größere Tragfähigkeit zu geben, während die lotrechte Stellung der Stuhlsäulen durch die Fußbänder *k* gesichert wird.

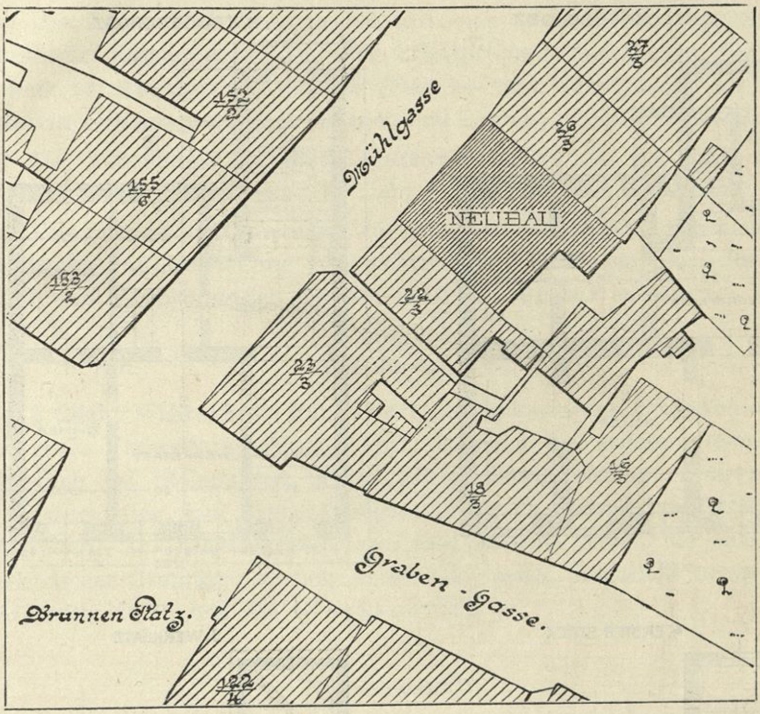
8. Bauplan und Kostenüberschlag.

§ 245. Zum Neubau oder Umbau eines Hauses sowie für die Ausführung durchgreifender Veränderungen am Hause (Adaptierungen) ist die behördliche Baubewilligung (der Baukonsens) nötig; dem Gesuche um dieselbe, das beim Gemeindeamte eingereicht wird, ist der Bauplan (Fig. 316) in doppelter Ausfertigung beizuschließen. Dieser soll enthalten:

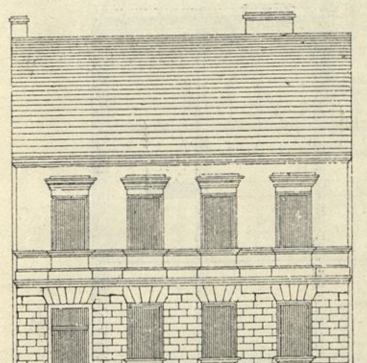
1. den Situationsplan des Bauplatzes (1 : 500) siehe Fig. 316 (1);
2. die Grundrisse aller Stockwerke, des Erd- und Kellergeschosses und den Werksatz (1 : 100); siehe Fig. 316 (2—5);
3. das Profil (1 : 100). Durch das Profil werden die in den einzelnen Stockwerken übereinander befindlichen inneren Teile des Gebäudes ersichtlich gemacht; siehe Fig. 316 (7);

Fig. 316.

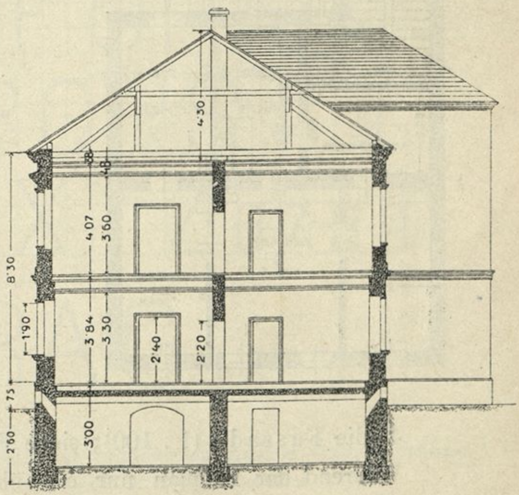
1. SITUATION.



6. ANSICHT.



7. SCHNITT A B



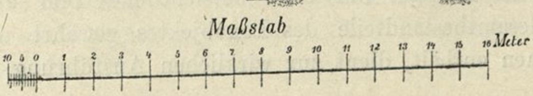
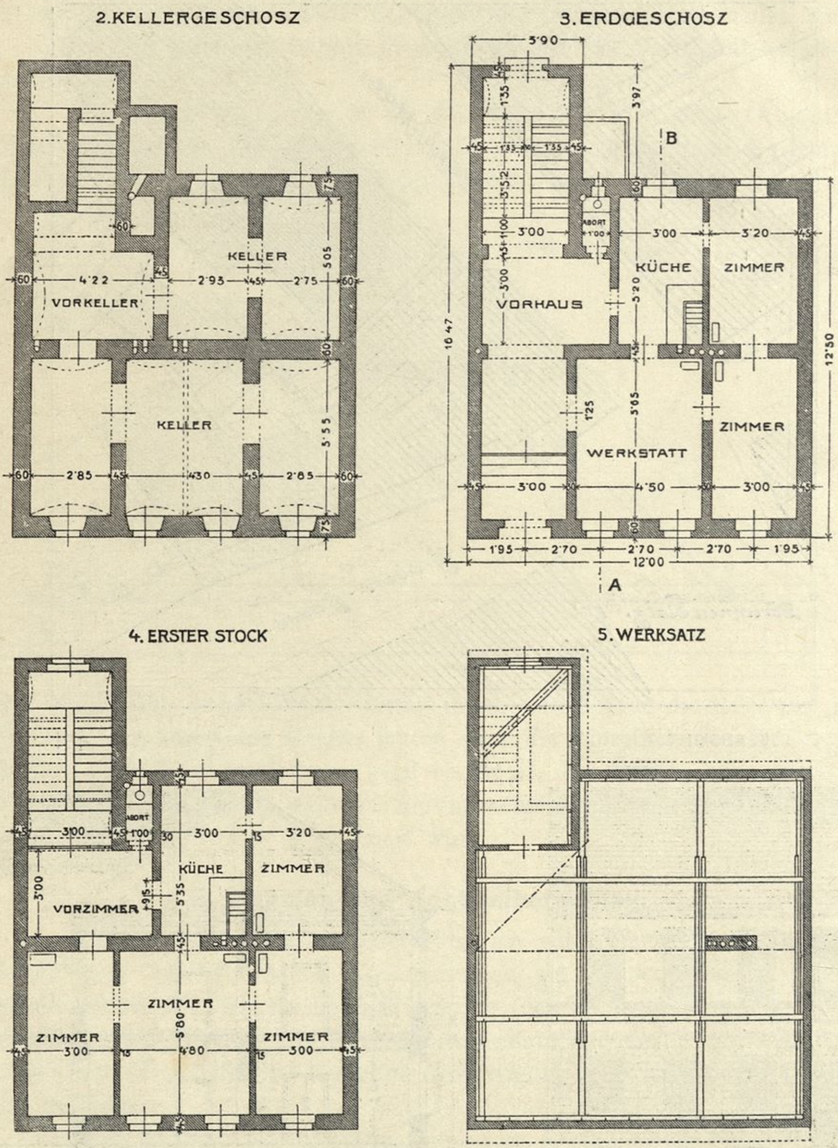


Fig. 316.



4. die Fassade (1 : 100); siehe Fig. 316 (6).

Während der Bauplan nur ein übersichtliches Bild über die Anordnung der Gesamtbestandteile des Bauobjektes gewährt und nur die Hauptdimensionen enthält, dient zur wirklichen Ausführung für die Bauhandwerker der Polierplan (1 : 50). In diesem müssen alle Koten vollständig und deutllch eingetragen sein.

Der Kostenüberschlag enthält eine übersichtliche gegliederte (detaillierte) Zusammenstellung aller Arbeiten und Lieferungen für ein Bauwerk bei Angabe des Ausmaßes (Flächen- und Kubikinhalt), der Einheitspreise (Materialwert, Regieauslagen und Gewinn) und der Geldbeträge.*)

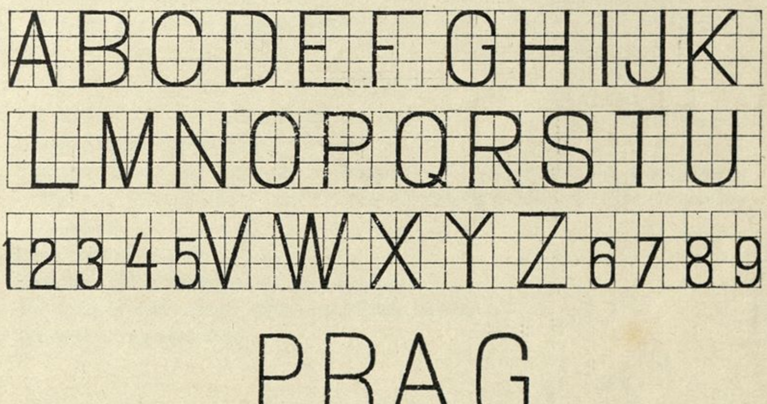
Das Verständnis für einen Kostenvoranschlag ist für jeden Bauhandwerker erforderlich, wenn er nicht zu Schaden kommen will.

Die genauen Bestimmungen für eine gedeihliche und zweckmäßige Ausführung und Herstellung von sicheren und gesunden Baulichkeiten sind in den **Bauordnungen** der einzelnen Länder enthalten.

Schriftarten.

§ **246.** Während die Rundschrift besonders in der kaufmännischen Welt große Verbreitung gefunden hat, kommen bei anderen Gewerben, namentlich bei Steinmetzen, Schriftgießern, Schriftenmalern usw., sowie bei Überschriften und Firmaschildern auch noch andere Schriftarten in Anwendung. Im nachstehenden sind zwei beliebte Arten, die sich auf geometrischer Grundlage bequem entwickeln lassen, dargestellt u. zw. die Steinschrift**) und die Blockschrift.

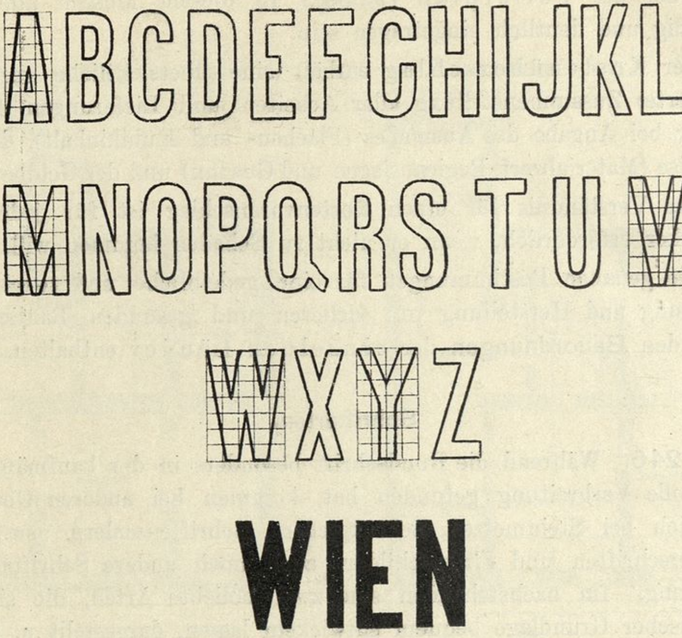
Figuren-Tafel 317.



---

*) Wegen Platzmangels wurde von der gegliederten Angabe eines Kostenvoranschlages für das in Fig. 316 bezeichnete Projekt abgesehen.

**) Wenn man diese Schrift durchaus in Haarstrichen ausführt, nennt man sie auch Nadelschrift.


ABCDEFGHIJKL
MNOPQRSTUV
WXYZ
WIEN

Inhalt.

D.

Anhang.