Predstavitev nove knjige: **Iteracije in fraktali**

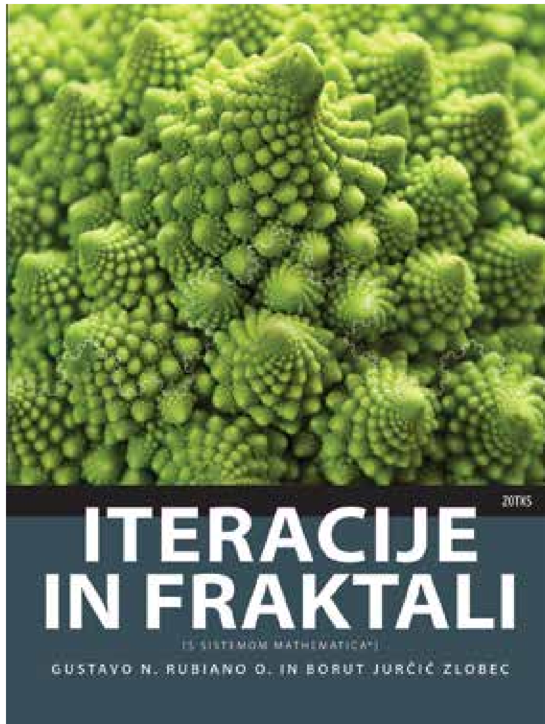
Gustavo N. Rubiano O. in Borut Jurčič Zlobec

Zveza za tehnično kulturo Slovenije

Ljubljana, 2016

210 strani

Cena: 25,00 EUR



V založništvu Zveze za tehnično kulturo Slovenije je izšla matematična monografija z naslovom Iteracije in fraktali [s sistemom Mathematica], katere avtorja sta Gustavo N. Rubiano O. in Borut Jurčič Zlobec. Delo obravnava zelo privlačno strukturo, ki se imenuje fraktal. Fraktal je sebi podobna množica, katere posamezni sestavni deli so podobni celoti. Sebipodobnost omogoča, da z dokaj enostavnim opisom sestavljamo vedno bolj zapletene strukture. Omenjeno lastnost s pridom uporablja narava, kjer lahko najdemo veliko sebi podobnih struktur (snežinka, vrtnina rimski brokoli, drevesni sistem vej, listi praproti, vaskularni sistem pljuč). V matematiki se fraktali pojavijo zelo pozno. Prvič so nanje naleteli proti koncu 19. stoletja, ko so konstruirali zvezne, a nikjer odvedljive funkcije. Matematična definicija fraktala je bila postavljena leta 1975 in razcvet sodobne fraktalne geometrije je dejansko omogočilo šele računalništvo. Osnovni postopek, s pomočjo katerega avtorja konstruirata in predstavljata fraktale, je iteracija. Sama vizualizacija fraktalov je opravljena s programskim orodjem Mathematica. Knjiga je napisana zelo skrbno, postopno in matematično korektno ter vsebuje veliko vsebin, ki so še posebej zanimive za mlade raziskovalce v srednji šoli in njihove mentorje. Zato odločitev za njeno predstavitev v reviji Matematika v šoli.

Vsebina. Uvodoma avtorja opišeta fraktal in predstavita klasične primere fraktalov: Cantorjevo množico, Kochovo snežinko, trikotnik Sierpinskega. Vpeljana je fraktalna dimenzija, ki omogoča matematično definicijo fraktala. Drugo poglavje obravnava iteracije, s pomočjo katerih so v množici kompleksnih števil (ravnini) konstruirani različni fraktali. Pri tem je uporabljena znana Newtonova tangentna metoda. V tretjem poglavju preko dinamike razvoja populacij spoznamo osnove dinamičnega procesa, ki se lahko vede predvidljivo ali kaotično. Ker naravna rast (eksponentna funkcija) seveda ne more trajati v nedogled, se v praksi za modeliranje omejene rasti populacij uporablja logistična enačba. Preko modificirane logistične enačbe pridemo do Mandelbrotove množice, za katero se je ustvarilo mnenje, da je najbolj zapleten fraktalni objekt v ravnini. V četrtem poglavju je natančno opisana anatomija te množice in v petem poglavju so predstavljene Juliajeve množice. Posebej velja izpostaviti, da omenjeni poglavji krasijo galerije čudovitih slik. Omenimo, da avtorja vse fraktalne objekte prikažeta v črno-beli tehniki. Pri tem je posebej razvidna bogata struktura Juliajevih množic. Morda v delu pogrešamo kakšno barvno sliko. Sledita poglavji, kjer sta predstavljena še dva druga pristopa k fraktalni geometriji: Lindenmayerjevi sistemi in iterativni funkcijski sistemi afinih preslikav. Lindenmayerjevi sistemi, poimenovani po biologu, ki jih je prvi uporabil za modeliranje rastlin, so del računalniške grafike in omogočajo lepe konstrukcije fraktalov iz narave (predvsem drevesa in praproti). Tukaj na primer spoznamo krivulji (zmajeva in Gosperjeva krivulja) s fraktalno dimenzijo 2, čudni krivulji, ki zapolnita prostor v ravnini. Zaključno osmo poglavje je namenjeno filotaksi. Filotaksa nam na primer pojasnjuje razporeditve listov pri rastlinah, razporeditve cvetov (popkov, semen) pri socvetjih in razporeditve lusk pri storžih. Zakaj pri filotaksi naletimo na Fibonaccijevo in Lucasovo zaporedje? Zakaj se cvetovi (semena) v socvetjih razporejajo v obliki različnih spiral? Kje se pri vsem tem skrivajo verižni ulomki in znamenito razmerje zlatega reza? Se narava podreja nekakšnemu mističnemu načelu, da se stvari tako čudovito matematično ujemajo? Avtorja utemeljita, da resnična lepota razmerja zlatega reza v naravi nastopi iz praktičnih razlogov.

Uporabnost z vidika učitelja matematike. Kot strokovno literaturo dano delo priporočam v branje učiteljem matematike v srednji šoli in tudi v višjih razredih osnovne šole. Pri tem bi posebej izpostavil tri vidike uporabe.

Avtorja k predstavitvi vsebine pristopita na raziskovalen način, ker imata v mislih mlade raziskovalce in njihove mentorje, za katere je knjiga lahko uporaben vir pri izbiri tem za raziskovalne naloge. Zato za razumevanje večine tematike zadošča že srednješolska matematika. Skoraj vse slike in fraktali v knjigi so opremljeni s programsko kodo, ki je zapisana s programom Mathematica, da lahko bralec tudi sam preiskuje in ustvarja nove fraktale. V knjigi so tudi vsebine, primerne za raziskovalne naloge v osnovni šoli.

Določene zanimive lastnosti so lahko tematika ali iztočnica za matematične krožke in matematične delavnice. Poleg samih fraktalnih struktur izpostavimo še tematiko zlatega reza, verižnih ulomkov in Evklidovega algoritma, modulsko poštevanko, tri vrzeli in Fibonaccijevo zaporedje ter Fordove krožnice. Zelo zanimivi so Fareyevi nizi ulomkov, ki imajo lepo geometrijsko konstrukcijo in kopico nenavadnih lastnosti. Tako osmislijo seštevanje ulomkov, kjer iz ulomkov $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ dobimo ulomek $\frac{a+c}{b+d}$. Omenimo, da Fareyev niz $F(n)$, kjer je n naravno število, tvorijo okrajšani ulomki z intervala $[0,1]$, katerih imenovalec ne presega n. Na primer niz $F(4)$ sestavljajo števila $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1$. Računalniško podkovani učitelji se lahko pri krožkih in delavnicah lotijo tudi vizualizacije fraktalov, še posebej fraktalnih krivulj z uporabo t. i. želvje grafike.

Zadnji vidik je vključevanje fraktalnih struktur in drugih primerov iz knjige pri pouku matematike kot motivacijskih primerov, zanimivosti ali primerov uporabe pri utrjevanju snovi. Skratka za popestritev raznih matematičnih vsebin pri pouku. Fraktali se lahko naravno vključijo k vsebinam, ki obravnavajo vzorce in zaporedja. Začetne konstrukcije fraktalov, kot sta Kochova snežinka ali trikotnik Sierpinskega, se lahko predstavijo pri vsebinah o geometrijskih likih, tematiki preštevanja objektov, računanju ploščin, ugotavljanju potenčnih povezav. V srednji šoli jih lahko naravno uporabimo pri obravnavi geometrijske vrste. Sama iteracija je kot zanimiv primer lahko uporabljena pri obravnavi odvoda in enačbe tangente.

Zanimivost. Ste vedeli, da je zaporedje 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 … (rekurzivno podano kot $a_0 = a_1 = 1$ in $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ za $n \geq 2$) z imenom Fibonaccijevo zaporedje poimenoval francoski matematik Lucas v 19. stoletju? Če v rekurziji za Fibonaccijevo zaporedje spremenimo začetno vrednost $a_0 = 2$, dobimo Lucasovo zaporedje 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, … Analiza pri štetju parov spiral pri borovih storžih je pokazala, da so v 95 % v Fibonaccijevem zaporedju, v 4 % v Lucasovem zaporedju in 1 % je neopredeljenih. Ne samo matematika, tudi narava očitno pozna statistične stopnje značilnosti! ■

Dominik Benkovič,
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2016

Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Uvod

V letu 2016 je potekalo že 50. državno srečanje mladih raziskovalcev v Murski Soboti. Na končnem izboru za srebrna in zlata priznanja je bilo pred komisijo predstavljenih 10 raziskovalnih nalog. Komisijo so sestavljali Polona Repolusk, Mateja Grašič, Dominik Benkovič in Borut Jurčič Zlobec. Komisija je izbrala šest nalog za srebrno priznanje, štiri naloge pa so dobile zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo zanimivih nalog. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda jim bomo s tem dali kakšno idejo ali pa jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

Predstavljene so bile štiri naloge iz teorije števil, tri geometrijske, dve iz diskretne matematike, ena iz kombinatorike.

Poleg zmagovitih nalog omenimo tudi nalogo, ki ni dosegla najvišjega priznanja, ki pa bi ga lahko, če bi mentor skrbneje usmerjal učence k matematičnemu razmišljanju.

Kako lahko raziskovalne naloge še izboljšamo

Tu bomo omenili nalogo z naslovom *Oddaljenosti in krivulje v ravnini*. Naloga govori o geometrijskem mestu točk, katerih vsota ali razlika razdalj od dveh danih točk je konstantna. V nalogi so problem posplošili tudi za primere, ko je eno od točk nadomestila premica oziroma krožnica. Pri tem so naleteli na krivulje drugega reda, elipso, hiperbolo in parabolo.

Naloga je bila skrbno narejena. Učenci so pokazali, da obvladajo programsko orodje Geogebra. Motilo je edino to, da niso opazili, da je mogoče en problem prevesti na drugega tako, da ni treba vedno znova ponavljati celotnega izračuna. Na primer, geometrijsko mesto točk, ki so enako oddaljene od krožnice in točke lahko prevedemo na geometrijsko mesto točk, katerih razlika razdalj od dane točke in središča krožnice je enaka polmeru krožnice, če točka leži zunaj krožnice, in katerih vsota razdalj je enaka polmeru krožnice, ko se točka nahaja znotraj krožnice.

Podobno bi lahko pojem razlike razdalj od točke in premice prevedli na enako oddaljenost od točke in primerno izbrane njej vzporedne premice.

Naloge, ki so dosegle zlata priznanja

Najvišja priznanja so dosegle štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski.

1. Paposova veriga v arbelosu
   Avtorica: Tijana Gajanović
   Mentor: Vesna Harej
   Šola: OŠ Dravlje, Ljubljana