



deljenje s 5 pa je enakovredno množenju z 2 in nato deljenju z 10, kar tudi ni težko, deljenje z 8 pa je isto kot trikratno zapovrstno deljenje z 2. Dasejev izračun s komentarjem Strassnitzkega je bil objavljen leta 1844 v ugledni nemški matematični reviji Crelles Journal. Revija izhaja še danes, le da pod drugim imenom: Journal für die reine und angewandte Mathematik – Revija za čisto in uporabno matematiko. Dase, ki ni bil posebno dober matematik, je slovel kot izvrsten računar na pamet, s čimer se je preživiljal. Sodeloval je tudi z matematikoma Gaussom (1777–1855) in Jacobijem (1804–1851).

Strassnitzki, po rodu iz Krakova, je od leta 1827 do leta 1834 poučeval matematiko na ljubljanskem liceju. Pot ga je zanesla v Ljubljano, ker bliže doma in Dunaja ni našel službe. Napisal je več matematičnih učbenikov, v Ljubljani je prirejal javna predavanja iz matematike in astronomije, ukvarjal pa se je tudi s kristalografijo. Odlično se je razumel z Matijo Čopom (1797–1835), ki je takrat služboval na isti ustanovi. Strassnitzki je navdušil za študij matematike tudi Franca Močnika (1814–1892), matematičnega pedagoga, šolskega nadzornika in pisca številnih učbenikov za matematiko. Študent Strassnitzkega je bil tudi Mihael Peternel (1808–1884), duhovnik, profesor, naravoslovec, polihistor, politehnik in samouk, ki je na Močnikov predlog postal leta 1852 ravnatelj prve trirazredne ljubljanske realke. Do razpada Avstro-Ogrske monarhije je bil edini Slovenec, ki je na tej šoli opravljal tako pomembno funkcijo.

Znane so podrobnosti, kako je Jurij Vega računal število π . Združeval je po dva in dva člena v vrsti (1), da je lahko računal samo s pozitivnimi členi. Ni pa znano, kako je računal Dase. Zagotovo je člene računal na malo več kot 200 decimalk zaradi nujnega zapisa le končnega števila decimalk, pri čemer nastane napaka na zadnjih decimalkah v končnem rezultatu.

- Preverite formuli (4) in (5) z uporabo enakosti

$$\text{tg}(u + v) = \frac{\text{tg } u + \text{tg } v}{1 - \text{tg } u \text{tg } v}.$$

- Z oceno (2) nastavite za vsak sumand v (5) neenakost za potrebnih 200 točnih decimalk. Ocenite, najmanj koliko členov je moral Dase v ta namen sešteti.

× × ×

Kovinska razmerja



MARKO RAZPET

→ Obravnavali bomo kovinska razmerja, ki so splošitev dobro znanega zlatega razmerja. Pot, ki jo bomo ubrali, bo najprej vodila preko verižnih ulomkov, nato pa bomo podali še geometrijsko razlago. Da pa bomo za to imeli motiv, začnimo pri pisarniških listih, s katerimi imamo opravka skoraj vsak dan.

Pisarniški list papirja formata A4 je pravokotne oblike in ima to lastnost, da po prerezu po njegovi krajši srednjici dobimo dva lista, ki sta podobna začetnemu. Nova lista sta formata A5. Delitev lahko na ta način nadaljujemo in dobimo formate A6, A7 itd. Lahko pa gremo tudi v obratni smeri. Lahko rečemo, da je list formata A4 je nastal z opisano delitvijo lista formata A3, ta z delitvijo lista formata A2, ta z delitvijo lista formata A1. Ker se moramo nekje ustaviti, je začetni format A0 tisti, ki z opisano delitvijo da format A1. Pola papirja formata A0 pa je tako opredeljena, da meri ploščina izbrane strani 1 m^2 . Listi formata A so pripravljeni ravno zato, ker z razpolavljanjem dobimo spet liste formata A. Pri tem ne nastajajo nepotrebni odpadki. Pa tudi pakete, v katerih je po nekaj sto takih listov, lahko lepo zlagamo enega na drugega, ne da bi nastale med paketi velike špranje.

Kolikšne so stranice lista formata A0? Vsi listi formata A so pravokotne oblike. Če ima A0 krajšo stranico dolžine a in daljšo stranico dolžine b , potem ima A1 krajšo stranico dolgo $b/2$, daljšo pa a . Ker si morata biti ustrezna pravokotnika podobna, velja: $b/a = a/(b/2)$. Iz te relacije dobimo enačbo $b^2 = 2a^2$, kar pomeni $b = a\sqrt{2}$. Pri vseh formatih A je torej daljša stranica lista $\sqrt{2}$ -krat daljša od krajše stranice. Pri formatu A0 pa je po opredelitvi ploščina $p = ab = b^2/\sqrt{2} = 1 \text{ m}^2$. Torej ima format A0

stranici

- $a = 1/\sqrt[4]{2} \text{ m} = 841 \text{ mm}$,
 $b = \sqrt[4]{2} \text{ m} = 1189 \text{ mm}$.

Iz tega lahko izračunamo stranici papirja formata A4, ki ga najbolj pogosto uporabljajo po pisarnah in za tiskalnice. Daljša stranica je dolga 297 mm, krajša pa 210 mm. Bralec lahko sam izmeri list, da bo videl, koliko se izračunana podatka ujemata z meritvijo.

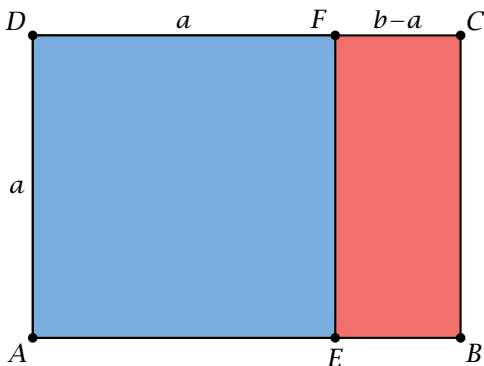
Po vsem tem ni težko ugotoviti, da ima papir formata A_n daljšo stranico dolgo $\sqrt[4]{2}/\sqrt{2^n} \text{ m}$, krajšo pa $\sqrt[4]{2}/\sqrt{2^{n+1}} \text{ m}$ in ploščino $1/2^n \text{ m}^2$.

Zakaj smo pravzaprav obravnavali vse te formate papirja? Zato, ker se v njih skriva zanimivo razmerje oziroma število. Če namreč vzamemo katerikoli pravokotnik $ABCD$ (slika 1), v katerem je razmerje daljše in krajše stranice enako $\sqrt{2}$, in ga razdelimo z daljico EF , ki je vzporedna krajši stranici, na kvadrat $AEFD$ in pravokotnik $EBCF$, potem ima slednji stranici $|EF| = a$ in $|EB| = b - a = a(\sqrt{2} - 1)$ v razmerju

- $\frac{|EF|}{|EB|} = \frac{a}{a(\sqrt{2} - 1)} = 1 + \sqrt{2}$.

Število $\psi = 1 + \sqrt{2}$ imenujemo *srebrno razmerje* ali *srebrno število*. Zakaj *srebrno*, bomo pojasnili v nadaljevanju. Vsak pravokotnik, ki ima za razmerje stranic število ψ , imenujemo *srebrni pravokotnik*. Na sliki 1 je $EBCF$ srebrni pravokotnik.

Število ψ zadošča enačbi $\psi^2 = 2\psi + 1$, o čemer se lahko prepričamo s kratkim računom. Iz nje hitro



SLIKA 1.

Nastanek srebrnega pravokotnika $EBCF$.

dobimo razvoj v verižni ulomek:

- $\psi = 2 + \frac{1}{\psi} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\psi}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}$.

Krajše ga zapišemo kot

- $\psi = [2; 2, 2, 2, \dots]$,

kjer dvojka pred podpičjem pomeni celi del števila ψ . Ker na velikih tekmovanjih v določeni disciplini drugi dobi srebrno odličje, je res smiselno imenovati ψ *srebrno število*.

Zlato razmerje ali *zlato število* ϕ ima temu ustrezno v verižnem ulomku enke:

- $\phi = [1; 1, 1, 1, \dots]$.

Število ϕ zadošča enačbi $\phi = 1 + 1/\phi$ oziroma $\phi^2 = \phi + 1$, iz katere najdemo $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$. Brez zadrege lahko vpeljemo tudi *bronasto razmerje* ali *bronasto število* (tretji najboljši prejme bronasto odličje)

- $\chi = [3; 3, 3, 3, \dots]$,

ki zadošča enačbi $\chi = 3 + 1/\chi$ oziroma $\chi^2 = 3\chi + 1$. Eksplicitno je $\chi = (3 + \sqrt{13})/2$.

Vsak pravokotnik, ki ima za razmerje stranic število ϕ , imenujemo *zlati pravokotnik*. Analogno pa imenujemo vsak pravokotnik, ki ima za razmerje stranic število χ , *bronasti pravokotnik*.

Na dlani je potem vpeljava n -tega *kovinskega razmerja* ali *kovinskega števila* $\kappa_n = [n; n, n, n, \dots]$, ki zadošča enačbi $\kappa_n = n + 1/\kappa_n$ oziroma $\kappa_n^2 = n\kappa_n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Seveda je $\kappa_1 = \phi$, $\kappa_2 = \psi$, $\kappa_3 = \chi$. V splošnem: $\kappa_n = (n + \sqrt{n^2 + 4})/2$. To število bi v športu ustrezalo za osvojeno n -to mesto. Če uporabimo enakost $\kappa_n = \sqrt{1 + n\kappa_n}$, lahko izrazimo tudi z vgnezenimi koreni:

- $\kappa_n = \sqrt{1 + n\kappa_n} = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\kappa_n}} = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + \dots}}}}$

Vsak pravokotnik, ki ima za razmerje stranic število κ_n , imenujemo *kovinski pravokotnik* reda n . Če





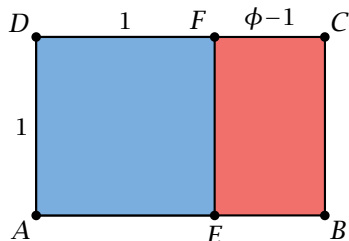
je njegova krajša stranica enaka 1, je daljša enaka κ_n . Tak pravokotnik lahko razdelimo na n skladnih kvadratov s stranico 1 in manjši pravokotnik s krajšo stranico $\kappa_n - n$ ter daljšo stranico 1. Manjši pravokotnik je tudi kovinski pravokotnik reda n , saj je podoben velikemu:

$$\frac{1}{\kappa_n - n} = \frac{\kappa_n}{\kappa_n^2 - n\kappa_n} = \frac{\kappa_n}{1}.$$

Slike 2, 3 in 4 kažejo kovinske pravokotnike $ABCD$ za $n = 1, 2, 3$. To so zlati, srebrni in bronasti pravokotnik. V vseh primerih je pravokotnik $ABCD$ podoben pravokotniku $EBCF$. Brez kakršnekoli škode za splošnost smo vzeli, da je krajša stranica pravokotnika $ABCD$ enaka 1. Tako je na splošno $|AE| = n$ in $|EB| = \kappa_n - n$.

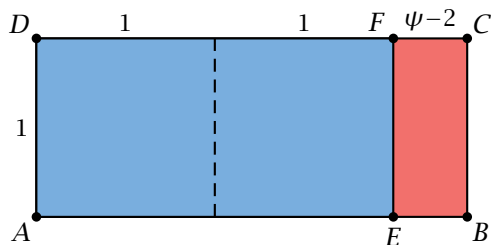
Pravokotnik $EBCF$ bi lahko spet razdelili na kvadrate in na manjši pravokotnik, ki je podoben začetnemu. Očitno to početje lahko nadaljujemo v nedogled.

Kovinska števila κ_n , imenovana tudi *kovinske sredine*, je vpeljala argentinska matematičarka Vera Martha Winitzky de Spinadel (1929–2017) konec pre-



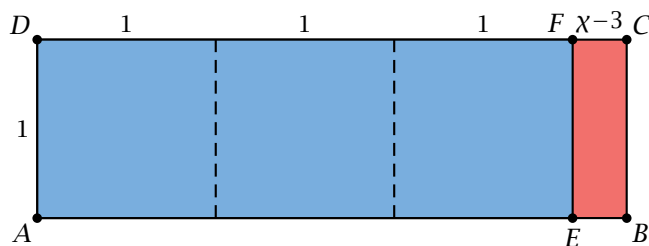
SLIKA 2.

Zlati pravokotnik je kovinski pravokotnik reda 1.



SLIKA 3.

Srebrni pravokotnik je kovinski pravokotnik reda 2.



SLIKA 4.

Bronasti pravokotnik je kovinski pravokotnik reda 3.

teklega tisočletja. Beseda *sredina* je uporabljena zato, ker velja $n < \kappa_n < n + 1$, kar ni težko dokazati.

Za konec še naloge. V veliko pomoč vam bodo primerne skice.

- Srebrnemu pravokotniku načrtajte diagonalo in nato skozi njeni krajišči daljico, ki oklepata s stranicami pravokotnika kot 45° . Preverite, da ste s tem razdelili pravokotnik na štiri trikotnike, in sicer dva skladna pravokotna enakokraka trikotnika in dva skladna topokotna enakokraka trikotnika. Nato poiščite kot med diagonalo in daljšo stranico pravokotnika, nazadnje pa še kot med diagonalama.
- Poiščite razmerje med stranico in njej vzporedno diagonalo v pravilnem osemkotniku. Pomagajte si s prejšnjo nalogo. Preverite, da pravilen osemkotnik lahko pokrijemo s štirimi skladnimi srebrnimi pravokotniki, ki imajo skupno središče v središču pravilnega osemkotnika. Pri tem krajše stranice srebrnih pravokotnikov sovpadajo s stranicami, daljše pa s srednje dolgimi diagonalami pravilnega osemkotnika.
- Poiščite razmerje med diagonalo in stranico pravilnega petkotnika. V njem načrtajte diagonali, ki se sekata v notranjosti petkotnika, nato njuni krajišči povežite še s tretjo diagonalo. Do iskanega razmerja pridete nato z nastalima podobnima enakokrakima trikotnikoma.

Literatura

- [1] V. M. W. de Spinadel, *From the Golden Mean to Chaos*, Nueva Libreria, Buenos Aires 1998.

× × ×