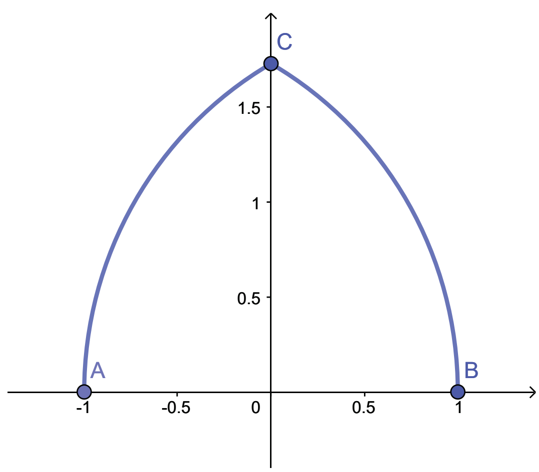
Gotska okna

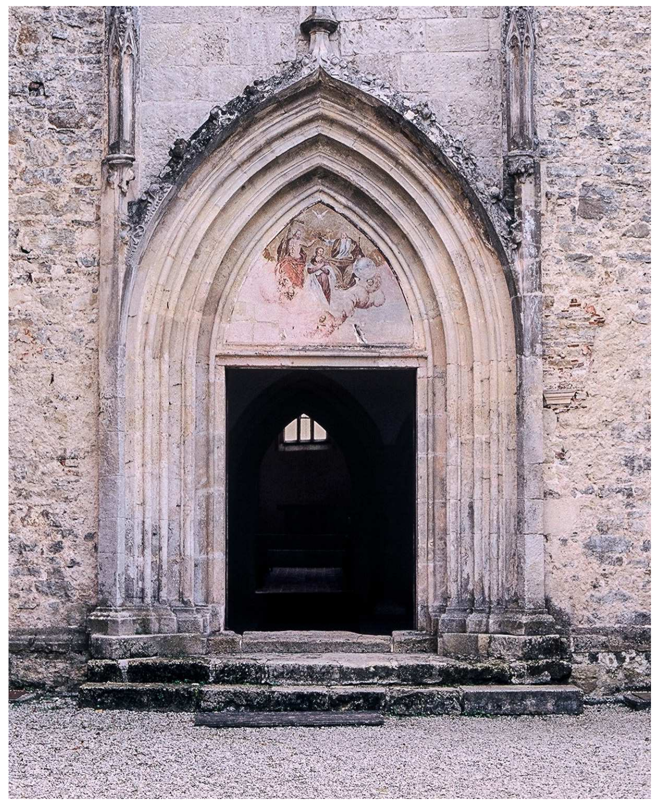
Peter Legiša

Pred leti je avtor tega članka v Obzorniku za matematiko in fiziko objavil kratko poročilo o zanimivi knjigi z naslovom *Geometry Civilized* [1]. Knjigo je napisal ameriški zgodovinar znanosti z dobrim znanjem klasične geometrije, zbiratelj elementarnih geometrijskih problemov. V knjigi imamo ogromno zapisov in ilustracij o uporabi geometrije v različnih civilizacijah in tudi kar nekaj matematike. Avtor poleg množice druge snovi obravnava načrte gotskih oken – idealizirano, kot bi bila sestavljena iz daljic in krožnih lokov.



SLIKA 1.
Enakostranični gotski lok

Eden osnovnih elementov takih oken je na sliki 1. Imamo daljico AB. Narišemo krožni lok s središčem v točki A skozi B in krožni lok s središčem v točki B skozi A. Oba loka se sekata v C. Trikotnik ABC je enakostraničen, zato knjiga sestav lokov AC in BC imenuje *enakostranični gotski lok*. Daljica AB je osnovnica tega loka. Take loke imamo na portalu v Pleterjah (slika 2) iz leta 1420. Portal je preživel požig samostana v turškem vpadu leta 1471.

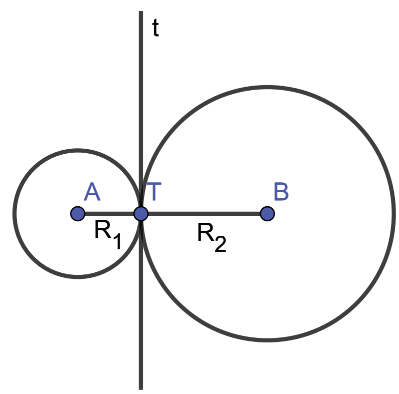


SLIKA 2.
Stara gotska cerkev v Pleterjah

Ta osnovni element lahko zapolnimo s krožnicami, z dodatnimi manjšimi gotskimi loki, ki se dotikajo. Dobimo lahko lepe vzorce in priložnost za razne geometrijske naloge. Te so sestavili in tako ali drugače rešili srednjeveški mojstrski gradbeniki, ki so zlasti v zgodnjem obdobju združevali znanje geometrije, arhitekture, gradbeništva in kamnoseštva. Njihova imena so se praktično vsa izgubila. Ostali so le kamnoseški znaki na elementih katedral – nekakšni podpisi mojstrov. Katedrale so gradile skupine obrtnikov, ki so se večkrat selile z enega gradbišča na drugo, ko je zmanjkalo denarja ali pa je bilo potrebno počakati, da se apnena malta dovolj strdi, da so lahko nadaljevali v višino. Brez velike podpore (in večkrat tudi prostovoljnega dela) prebivalstva pa take množice čudovitih stavb v (menda mračnem) srednjem veku ne bi bilo mogoče uresničiti.

Spomnimo se nekaj dejstev iz geometrije. Dve krožnici s središčema A in B se dotikata v točki T, če imata v T skupno tangento t. Na slikah 3 in 4 imamo dva načina dotikanja. Točka T je potem edina skupna točka obeh krožnic. Ker sta daljici AT in BT obe pravokotni na t, sta kolinearni:

Središči dotikajočih se krožnic in njuno dotikališče ležijo na isti premici.



SLIKA 3.
Razdalja med središčema A in B dotikajočih se krožnic je enaka vsoti polmerov.

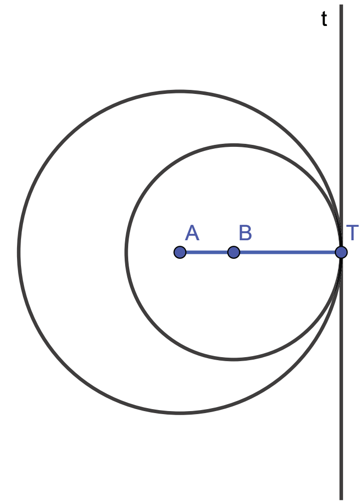
Za nas je posebej pomembno naslednje dejstvo:

Razdalja med središčema dotikajočih se krožnic je enaka: a) vsoti polmerov, če se krožnici dotikata od zunaj in b) razliki polmerov, če se dotikata od znotraj.

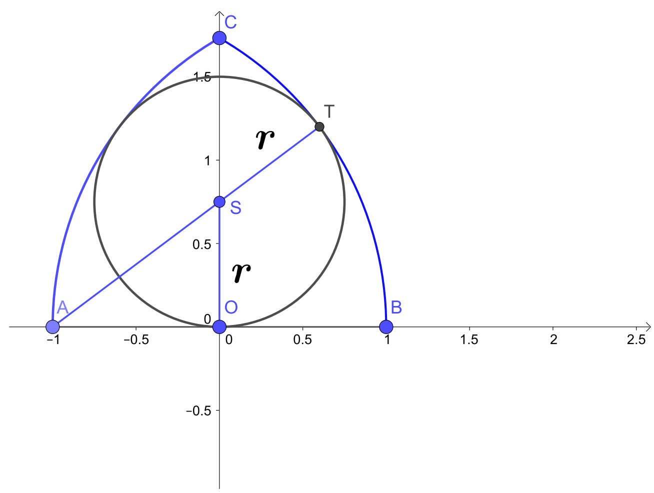
Včrtajmo enakostraničnemu gotskemu loku z dodano osnovnico AB dolžine 2 krožnico s središčem S kot na sliki 5. Kolikšen je njen polmer r? Ker se ta krožnica in krožni lok od B do C (ki ima polmer 2) dotikata, je razdalja središč enaka razliki polmerov, torej $d(A,S) = 2 - r$. Enako vidimo, da je $d(B,S) = 2 - r$. To pomeni, da S leži na simetrali daljice AB. (To je jasno tudi iz simetrijskih razlogov.) Naj bo O središče daljice AB. Trikotnik AOS je pravokoten, zato je po Pitagorovem izreku

- $1 + r^2 = (2-r)^2 = 4 - 4r + r^2.$

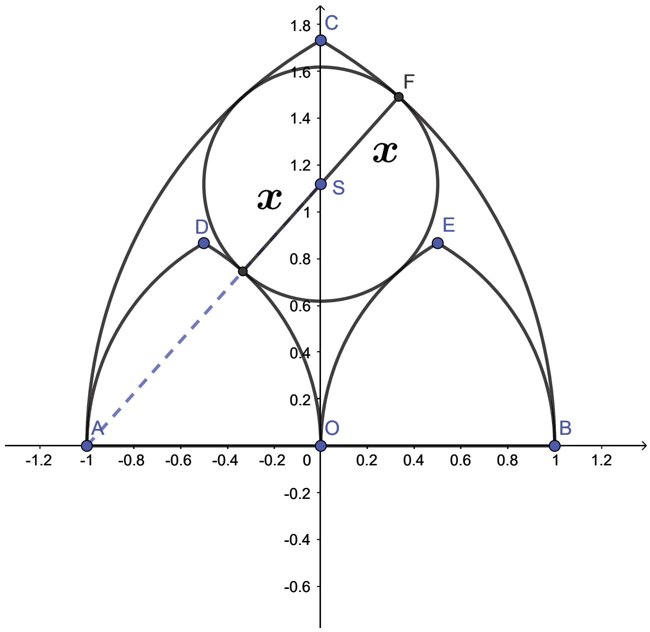
Od tod je $4r = 3$ in $r = 3/4$.



SLIKA 4.
Razdalja med središčema A in B dotikajočih se krožnic je enaka razliki polmerov.



SLIKA 5.



SLIKA 6.

Oglejmo si zdaj malo bolj zapleten primer na sliki 6. Spet je $d(A,B) = 2$. Tu imamo tri enakostranične gotske loke in krožnico K s polmerom x in središčem S. Ker se K in lok BC s središčem A dotikata od znotraj, je $d(A,S) = 2 - x$. Ker se K in lok OD dotikata od zunaj, je $d(A,S) = 1 + x$. Iz $2 - x = 1 + x$ dobimo $x = 1/2$ in $d(A,S) = 3/2$. Naj bo $d(O,S) = y$. Iz pravokotnega trikotnika AOS dobimo $1 + y^2 = 9/4$ in od tod $y = \sqrt{5}/2$. Ta vzorec najdemo v Franciji: v ostankih samostana Saint Jean des Vignes v kraju Soissons in z mnogo dodatnega okrasja v palači Palais Synodal v burgundskem mestu Sens. Tudi slovensko gotsko okno na sliki 7 ima v osnovi ta vzorec.

Še bolj zapleten je primer okna na sliki 8. Tu imamo v enakostraničnem gotskem loku z osnovnico AB dolžine 2 spodaj štiri podobne manjše loke z osnovnico $1/2$. Naša prva naloga je določiti polmer a krožnice, ki se dotika dveh malih gotskih lokov na desni in loka BC.

Vemo: $d(A,S) = 2-a$, $d(B,S) = d(O,S) = \frac{1}{2}+a$. Točka S torej leži na simetrali daljice OB. Označimo z E razpolovišče daljice OB. Označimo $d(E,S) = z$.

SLIKA 7.
Gotsko okno

Iz pravokotnega trikotnika OES ugotovimo:

- $z^2 = (d(O,S))^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 - \frac{1}{4} = a^2 + a.$

Iz pravokotnega trikotnika AES pa sledi

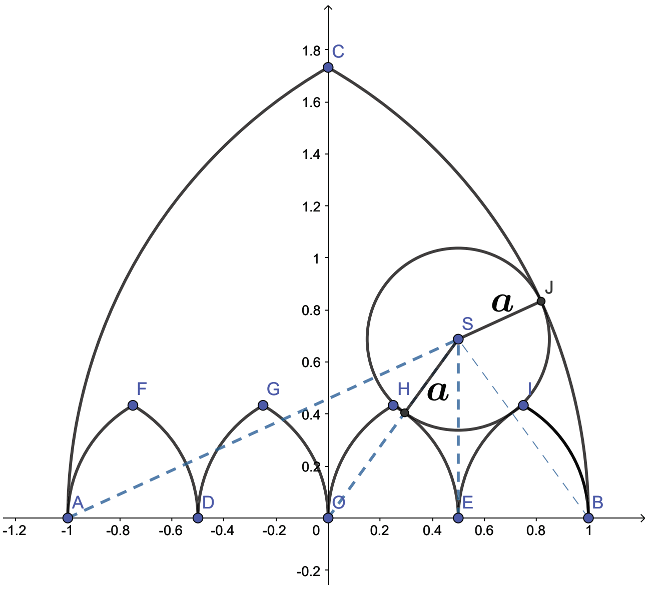
- $z^2 = (2 - a)^2 - \frac{9}{4} = a^2 - 4a + \frac{7}{4}.$

Če oba izraza izenačimo, dobimo $5a = 7/4$ in od tod

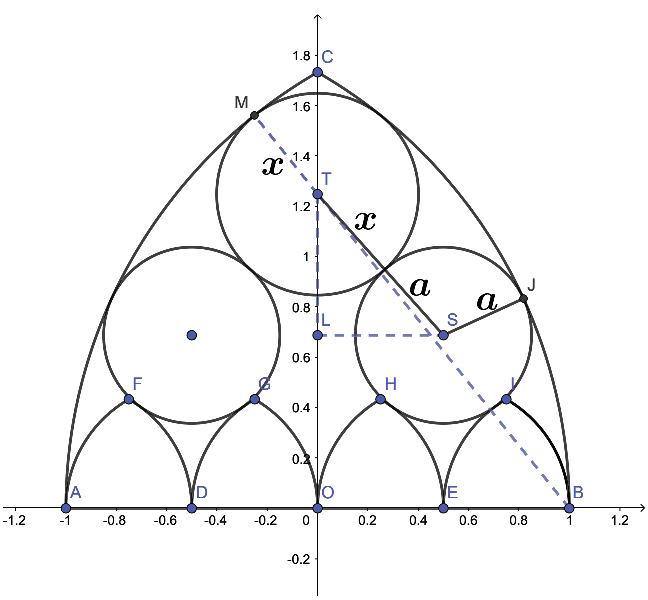
- $a = 7/20 = 0{,}35.$

Izračunamo lahko še

- $d(E,S) = z = \frac{3}{20}\sqrt{21}.$



SLIKA 8.



SLIKA 9.

Prezrcalimo zdaj to krožnico čez simetralo OC okna. Naša nadaljnja naloga je konstruirati krožnico K s polmerom x in s središčem T, ki se dotika obeh ravno dobljenih krožnic in lokov AC ter BC.

S slike 9 je jasno, da bo točka T na OC. Označimo $d(O,T) = y$. Točka L je pravokotna projekcija točke S na daljico OC. V pravokotnem trikotnika SLT je $d(S,T) = a + x = x + 7/20$ in $d(L,T) = y - z$.

Pitagorov izrek da

$$\left(x + \frac{7}{20}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{20}\sqrt{21}\right)^2.$$

Iz pravokotnega trikotnika OBT pa dobimo $1 + y^2 = (2 - x)^2$ ali

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$$

Če to nesemo v prvo enačbo, dobimo

$$\left(x + \frac{7}{20}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \frac{3}{20}\sqrt{21}\right)^2.$$

To ni lepa enačba.

Polmer x zgornjega kroga lahko ocenimo, če upoštevamo, da so točke M, T, S, B skoraj kolinearne. Tako je $2x + 2a + 0{,}5 \approx 2$. Če upoštevamo, da je $a = 0{,}35$, dobimo $x \approx 0{,}4$. Vrednost 0,4 kot rešitev je navedena v knjigi. Študent, ki je ta vzorec predstavil na seminarju, je verjel knjigi in majhni sliki v njej. Avtor tega članka je opazil, da ni razloga, da bi bile te točke kolinearne (kot trdi knjiga). Doma je s svinčnikom in papirjem dobil pravo vrednost

$$x = \frac{81}{202},$$

ki se le minimalno razlikuje od 0,4. Računi so bili sicer elementarni, a zoprni in jih ne bomo navajali. (Znebiti se je bilo treba korenov. Poskusite to narediti sami.) Študent je po opozorilu izpeljal enačbe, jih udobno rešil s programom *Mathematica* za simbolično računanje in dobil pravilni rezultat $x = 81/202$. V Geogebri lahko narišemo funkciji na levi in desni strani »grde« enačbe in poiščemo presečišče grafov, ki je pri $x = 0{,}4009900990\ldots$.

Literatura

[1] J. L. Heilbron *Geometry Civilized, History, Culture,and Technique*, Clarendon Press, Oxford 2000.

× × ×