5

Anfangsgründe

der

allgemeinen auf Erscheinungen und Versuche gebauten

Naturlehre,

zusammengetragen

von

Anton Ambschell,

der Weltw. Dokt., der Ackerbauesgesellschaft in Krain Mitgl., und k. k. öff. und ord. Prof. der Naturl. und Mech. an der hohen Schule zu Wien.

Zweyte Abhandlung

von

der Bewegung.

Wien,

gedruckt mit Schmidtischen Schriften 1792.

Inhalt.

Sie:

Vor=

Vorbericht.

1.

Daß die Bewegung ein Gegenstand der allgemeinen Naturlehre sey, ist in dem Vorberichte zu dieser Naturlehre §. 15 erwiesen worden. Der Grund, auf welchem dieser Beweiß ruhet, fordert auch, daß die Lehre der Bewegung nach der Bestimmung der allgemeinsten Eigenschaften zuerst vorgetragen werde.

2.

Bey jeder Bewegung entdecken wir Bestimmungen, deren einige in dem Begriffe der Bewegung selbst eingeschlossen sind, ohne welche keine Bewegung seyn kann, andere, welche von den äußeren Umständen des Körpers abhängen, erst erwähnte Bestimmungen der Bewegung zwar ändern, doch ohne diese zu heben, wegbleiben können. Ich glaube daher, daß ich die Bestimmungen der Bewegung, deren Kenntniß zur allgemeinen Lehre von der Bewegung gehöret, nicht ohne Grund in wesentliche, und nicht wesentliche, sondern zufällige, im allgemeinen Vorberichte §. 22 eingetheilet habe.

Weil bey jeder Bewegung die wesentlichen Bestimmungen eintreffen müssen, die zufälligen aber nur in besondern Umständen; so kann man jene auch die allgemeinen, diese aber die besonderen Bestimmungen der Bewegung nennen. Die Betrachtung der ersteren wird diesemnach die allgemeine, die Erwegung der anderen aber, die besondere Lehre der Bewegung geben.

3.

Bestimmungen, welche der Bewegung von der Zahl der wirkenden Kräfte, ohne Beziehung auf derselben Art, von der Geschwindigkeit und Richtung, ohne Beziehung auf die besonderen Umstände, durch welche eine, oder beyde verändert werden, zufließen, sind allgemein oder wesentlich. Alle übrige Veränderungen der Richtung oder Geschwindigkeit, oder beyder zugleich, welche von besonderen Umständen der Körper und der wirkenden Kräfte abhängen können, wechslen, ohne daß die Bewegung aufhöre Bewegung zu seyn, sind daher nur besondere und zufällige Bestimmungen derselben. Diese Abänderungen finden wir: Bey dem freyen Falle und Steigen, beym Herab- oder Hinaufgehen über eine schiefe Fläche, bey Pendulen, beym Wurfe, bey Be-

wegung

wegungen durch Centralkräfte, und im Stoße der Körper.

4.

Bey Betrachtungen und Berechnungen der Bewegung wird der Raum, welchen der Körper durchlauft, ungeachtet daß er drey Ausdehnungen wie der Körper hat, durch eine Linie ausgedrückt, bey welcher nur eine Ausdehnung in die Länge vorhanden ist, und welche zugleich die wirkende Kraft des Körpers vorstellen muß; der sich bewegende Körper wird daher immer als ein Punkt betrachtet, in welchem seine ganze Masse versammelt sey. Zu dieser Betrachtung sind wir nur durch die Eigenschaften des Schwerpunktes berechtiget. Ueberhaupt beurtheilen wir die Bewegungen der Körper mit Beziehung auf ihren Schwerpunkt. Es müssen also dessen Bestimmungen und Eigenschaften, zu deren Behandlung nur der richtige Begriff der Bewegung und seiner Folgen erfordert wird, vor den übrigen Bestimmungen der Bewegung abgehandelt werden.

5.

Gegenwärtige Abhandlung von der Bewegung kann füglich in 10 Kapitel eingetheilt werden: 1) Von dem Begriffe der Bewegung, dessen Folgen und Merkmalen. 2) Vom Schwerpunkte der Köper. 3) Von der einfachen und zusammengesetzten. 4) Von der gleich-und ungleichförmigen. 5) Von der gerad-und krummlinigten Bewegung. 6) Vom freyen Falle und Steigen, dann Herab- und Hinaufgehen über eine schiefe Fläche. 7) Von Pendulen. 8) Vom Wurf. 9) Von Zentralkräften. 10) Vom Stoße der Körper.

Erstes Kapitel.

Von

dem Begriffe der Bewegung, seinen Folgen und Merkmalen.

6.

Die Bewegung ist eine beständige und wirkende Veränderung des Ortes. Der in dem nähmlichen Orte harrende Körper hat keine Bewegung, sondern ruhet. Wechselt er zwar den Ort, enthält aber den hinlänglichen Grund dieses Wechsels nicht in sich, so wird er nur von einem andern bewegt.

Keine Wirkung ist ohne Ursache. Jede Bewegung setzt daher eine Ursache, die wirkende Kraft voraus.

7.

Nach dem Gesetze der Stätigkeit kann der Körper von einem Orte in den anderen entfernten nur durch alle mittlere kommen. Der sich bewegende Körper durchläuft eine ununterbrochene Reihe der Orte, welche Raum genannt wird.

Zu-

Zugleich kann der Körper natürlicher Weise in mehr als einem Orte nicht seyn; aus einem Orte in den anderen in einem Augenblicke nicht übergehen. Der sich bewegende Körper braucht so viel unendlich kleine aufeinander ununterbrochen folgende Zeitchen, als er Orte durchgehet. Die ununterbrochen aufeinander folgenden unendlich kleinen Zeitchen geben eine bestimmte Zeit. Jeder sich bewegende Körper muß in einer bestimmten Zeit, einen bestimmten Raum zurücklegen.

8.

Jeder sich bewegende Körper muß, so lang die Bewegung dauert, nach einem bestimmten Ziel streben. In der Bewegung gehet der Körper von einem Orte in den anderen über; entfernet sich daher von einem Punkte, und nähert sich dem andern.

9.

Geschwindigkeit bedeutet eine Bestimmung der Bewegung, durch welche der sich bewegende Körper in bestimmter Zeit einen bestimmten Raum durchläuft. Schnell ist die Bewegung, wenn der Körper in bestimmter Zeit einen grösseren Raum zurückleget, als gewöhnlich durchstrichen wird. Ist der beschriebene Raum kleiner als gewöhnlich, so wird die Bewegung des Körpers langsam genannt. Hievon überzeuget uns die Untersuchung des Grundes, aus welchem wir die Bewegung schnell oder langsam nennen.

Diese mit §. 7 zusammengehaltene Erklärung der Geschwindigkeit zeiget, daß jeder sich bewegende Körper eine bestimmte Geschwindigkeit haben müsse, und das diese eine wesentliche Bestimmung der Bewegung sey.

10.

Wenn die Geschwindigkeiten der Körper miteinander verglichen werden, so halten wir jene für grösser, mit welcher in gleicher Zeit ein grösserer, oder in kürzerer Zeit ein gleicher Raum beschrieben wird. Ueberhaupt messen wir die Größe der Geschwindigkeit nach der Größe des beschriebenen Raumes, und der Kürze der dazu angewandten Zeit. Durch das geometrische Verhältniß der Zeit zum Raume, in welchem dieser mit jener in der Betrachtung unbedingter Größen dividiret wird, ist die Größe des beschriebenen Raumes, und der Kürze der Zeit zugleich bestimmt. Dieß nämliche Verhältniß dienet auch zur Bestimmung der Geschwindigkeit.

Der Gewohnheit gemäß sey Geschwindigkeit $= G$, Raum $= R$, Zeit $= Z$, und für einen zweyten Körper jede dieser Größen durch die nämlichen aber kleinere Buchstaben ausgedrückt, so ist:

$$G : g :: \frac{R}{Z} : \frac{r}{z} :: Rz : rZ. \quad R : r :: GZ : gz.$$

Wenn $R = r$ ist $G : g :: z : Z$

$Z = z$ — $G : g :: R : r$

$G = g$: — $Rz = rZ$ und

$R : r :: Z : z.$

11.

Jeder Theil des sich bewegenden Körpers muß sich zugleich mit demselben bewegen, sonst würden sich die Theile trennen, und nicht der ganze Körper in Bewegung seyn. Jeder Theil des in Bewegung gesetzten Körpers muß eine bestimmte Geschwindigkeit haben §. 8, welche im geometrischen Verhältnisse der Zeit zum Raume ist. §. 10. Bey jedem sich bewegenden Körper sind daher so viel Geschwindigkeiten, als Theile vorhanden.

12.

Die Geschwindigkeit eines jeden Theiles ist die Wirkung seiner bewegenden Kraft, und mit dieser, als ihrer Ursache, jederzeit verhältnißmässig. Die **Menge der bewegenden Kräfte**, oder die mit dieser verhältnißmässige **Quantität der Bewegung**, welche auch **Vermögen** des Körpers genannt wird, ist durch die Summe aller Geschwindigkeiten der Theile des sich bewegenden Körpers bestimmt.

13.

Weil der sich schneller bewegende in gleicher Zeit einen grösseren Raum durchlaufen muß, als der langsamere §. 9 und 10, so würden die Theile des in der Bewegung begriffenen Körpers sich trennen, wenn ihre Geschwindigkeiten nicht gleich wären. Die Geschwindigkeiten der Theile sind daher in jedem sich bewegenden Körper untereinander gleich, und man erhält die Summe derselben, wenn eine mit der Zahl der Theile des Körpers multipliziret wird.

Wenn die Bewegung des Körpers krummlinigt ist, so beschreiben dessen Theile in gleichen Zeiten zwar nicht gleiche, sondern nur verhältnißmässige Räume, haben folglich auch in der That nicht gleiche, sondern verhältnißmässige Geschwindigkeiten. Allein eben des Verhältnisses wegen, in welchem die Geschwindigkeiten der Theile in solchem Falle untereinander stehen, kann man ohne Bedenken die mittlere Geschwindigkeit annehmen, und diese so betrachten, als hätten sie gleiche Geschwindigkeiten; besonders, da man, wie wir bald sehen werden, den ganzen Körper in seinem Schwerpunkte versammelt betrachten kann, dessen Geschwindigkeit nur eine einzige ist.

14.

Diesemnach wird die **Menge der bewegenden Kräfte** oder **Quantität der Bewegung** und das **Vermögen** des Körpers durch das Produkt aus der Geschwindigkeit eines Theiles und der Summe derselben, das ist, der Masse des Körpers mit allem Rechte ausgedrückt.

Die Quantität der Bewegung sey $= Q$ die Masse $= M$, die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der Theile $= G$; für den zweyten Körper aber die nämlichen Größen q, m und g, so ist:

$$Q : q :: MG : mg,$$ und

Wenn $M = m$, $Q : q :: G : g$

$G = g$ — $Q : q :: M : m$

$Q = q$, — $MG = mg$, und

$M : m :: g : G$, und umgekehrt.

15.

Findet die bewegende Kraft oder Ursache ein zureichendes Hinderniß, so kann sie keine Bewegung erzeugen, und ihre ganze Wirkung bestehet nur in einem verhältnißmässigen Bestreben zur Bewegung. Dieses Bestreben wird der Druck genannt, und gehet in die Bewegung über, sobald das Hinderniß gehoben ist. Geschwindigkeit und Druck haben daher in- und für sich selbst eine, und die nähmliche Ursache, und sind im nähmlichen Verhältniße.

16.

Dieser, und die §§. 11, 12, 13 angeführten Gründe zeigen, daß jeder Theil des Körpers, dessen wirkende Kraft zureichend gehindert ist, drücke, die Summe dieser Drücke den Druck des ganzen Körpers, oder die Quantität des Druckes gebe, und, weil der Druck in allen Theilen gleich ist, oder wenigstens gleich gesetzet werden kann, der Druck des ganzen Körpers, oder sein Vermögen, Moment, durch das Produkt aus seiner Masse in den gemeinschaftlichen Druck der Theile bestimmt werde; in diesem Produkte endlich, statt des gemeinschaftlichen Druckes der Theile, die Geschwindigkeit genommen werden könne, welche entstehen würde, wenn kein Hinderniß vorhanden wäre, folglich der Druck des Körpers, oder sein drückendes Vermögen, Moment, eben so, wie die Quantität der Bewegung im zusammengesetzten Verhältniße der Massen und Geschwindigkeiten sey.

Weil wir in der 1. Abhandlung § 69 die Dichte der Körper durch D und d ausgedrückt haben, und eben dieser der Anfangsbuchstabe des Wortes Druck ist, so nehmen wir zur Bezeichnung der Drücke zweyer Körper Pressionum P und p; und die Proportion: P : p :: MG : mg mit allen bedingten Abänderungen, welche wir bey der Quantität der Bewegung §. 14 angeführt haben, gilt auch für den Druck der Körper.

17.

Kräfte, deren Wirkung in der Bewegung bestehet, werden lebendige, iene aber, deren Wirkung nur ein Bestreben zur Bewegung, ein Druck ist, todte genannt, oder: Kräfte, von welchen die Wirkung ungehindert geleistet wird, sind lebendige, deren eigentliche Wirkung aber gehindert wird, todte Kräfte. In und für sich selbst betrachtet, sind die lebendigen und todten Kräfte die nähmlichen, also auch in dem nähmlichen §§. 14 und 16 bestimmten Verhältniße, und derselben Unterschied entbehrlich.

18.

Jene Bestimmung der Bewegung, vermög welcher der Körper nach einem bestimmten Ziele strebet, nennen wir Richtung. Wir entnehmen diese jederzeit von der Lage des beschriebenen Weges, welche von dem Verhältniße abhängt, das die durchgelaufenen Orte zu festgesetzten Punkten haben.

Da jeder sich bewegender Körper nach einem bestimmten Ziele strebet §. 8, so muß auch jede Bewegung eine bestimmte Richtung haben, und diese ist nicht minder wesentlich, als die Geschwindigkeit.

19.

Bey jeder ohne Beziehung auf äußere Umstände in sich selbst betrachteten Bewegung, unterscheiden wir nichts, als eine, oder mehr bewegende Kräfte, Geschwindigkeit und Richtung. §§ 6, 9 und 18. Beyde, Geschwindigkeit und Richtung zugleich, oder eine wenigstens wird durch die Mehrheit der Kräfte verändert. Hierin liegt der Grund, warum die Bewegung vor allen in Beziehung auf die Zahl der Kräfte, Geschwindigkeit und Richtung zu betrachten sey.

20.

Um die verschiedenen Bewegungen und derselben Verhältnisse, welche von der Veränderung der Geschwindigkeit und Richtung abhängen, leichter und faßlicher zu erklären und zu erweisen setzen wir die Zeit jeder Bewegung in unendlich

klei=

kleine und gleiche, ununterbrochen aufeinander folgende Zeitchen, getheilet, und bestimmen die Bewegung der ganzen Zeit aus den Bewegungen dieser unendlich kleinen Zeitchen.

21.

Endliche Kräfte können in unendlich kleinen Zeitchen nur unendlich kleine Wirkungen leisten. Sicher ist es, daß die Wirkung jederzeit desto größer sey, je stärker die Kraft ist, und je länger sie wirkt; die Wirkung daher jederzeit im geraden Verhältnisse der Kraft und Zeit sey. Diesem Verhältniß gemäß ist $V :: \frac{K}{\infty}$, wenn nämlich die Wirkung $= V$, die endliche Kraft $= K$, und die unendlich kleine Zeit $= \frac{1}{\infty}$ gesetzt wird.

Der in unendlich kleiner Zeit zurückgelegte Raum, und die mit diesem verhältnißmässige Geschwindigkeit ist daher auch unendlich klein.

22.

Da in der Bewegung selbst nichts als die Geschwindigkeit und Richtung unterschieden wird; §§ 9, 18 so können in der Bewegung auch keine anderen Veränderungen bewirkt werden, als welche die Geschwindigkeit oder Richtung, oder beyde zugleich treffen. Alle Veränderungen daher, welche in der Geschwindigkeit und Richtung von einer natürlichen Kraft in unendlich kleinen Zeitchen bewirkt werden, sind unendlich klein. Jeder in solchen Zeitchen erzeugte Wachsthum, jede Abnahme der Geschwindigkeit, jeder Wechsel der Richtung kann so, wie unendlich kleine in Beziehung auf endliche Größen, ohne Bedenken ausser Acht gelassen, und die Geschwindigkeit nicht minder, als die Richtung in jedem unendlich kleinen für sich genommenen Zeitchen, für unverändert erhalten werden.

23.

Jeder Körper nimmt einen Theil des Raumes ein, in welchem die Körperwelt existiret, und dieser ist sein absoluter wirklicher Ort. Wird die Masse in seinem Schwerpunkte gesammelt, der Körper folglich, als ein Punkt betrachtet, so ist dieser Ort der Punkt gedachten Raumes, in welchem der Schwerpunkt des Körpers sich befindet. Diesen Ort würde der Körper besetzen, wenn er auch ganz allein existirte. Er ist daher unbedingt, absolut. Nebst diesem Orte hat jeder Körper eine bestimmte Beziehung, eine bestimmte Art, in der Sammlung und Verbindung der übrigen Körper zu stehen, welche von seiner Stellung gegen diese abhängt, und durch seine Verhältniße zu diesen bestimmt wird. Diese Beziehung hat der Körper nur, weil er mit den übrigen in der Sammlung begriffen ist. Diese wird daher sein bedingter, verhältnißmässiger oder relativer Ort genannt, und als ein Theil des ganzen relativen Raumes betrachtet.

Die ununterbrochene Reihe der absoluten Orte ist der absolute, jene der relativen aber der relative Raum.

24.

Diesemnach wird auch die Bewegung, als die beständige und wirkende Veränderung des Ortes § 6 in die absolute und relative eingetheilet. Jene bestehet in der beständigen und wirkenden Veränderung des absoluten, diese des relativen Ortes.

25.

Die Geschwindigkeit wird eben so in die absolute und relative getheilet. Die absolute wird durch den in bestimmter Zeit belaufenen absoluten, die relative durch den relativen Raum bestimmt. Da der Körper durch die Beschreibung des relativen Raumes um dessen ganze Strecke zu einem andern Köper jederzeit näher kömmt, oder von diesem sich entfernet, so kann man auch sagen, daß jene die relative Geschwindigkeit sey, mit welcher die Körper einander sich nähern, oder von einander sich entfernen.

26.

Aus den §§ 23, 24 gegebenen Erklärungen erhellet, daß ein Körper sich absolut bewegen, und relativ ruhen, absolut ruhen und relativ bewegen, oder auch absolut und relativ zugleich bewegen könne. Wie aber, und in welchen Fällen dieses oder jenes eintreffe, wird einleuchtend klar, wenn man gedachte Erklärungen auf die

Be-

Bewegung der in einem fahrenden Schiffe sich befindenden Körper anwendet, oder auch die Bewegungen der irdischen Körper überhaupt genauer, und mit Beziehung auf die gegebenen Erklärungen und Bewegungen betrachtet.

27.

Gleichwie die absolute Geschwindigkeit nach dem absoluten in bestimmter Zeit zurückgelegten Raum beurtheilet wird, § 10 eben so schätzt man auch die relative Geschwindigkeit nach der Grösse des beschriebenen relativen Raumes. Um das Verhältniß der relativen zur absoluten Geschwindigkeit zu bestimmen, wird der relative mit dem absoluten Raum verglichen. Das zwischen diesen bestehende Verhältniß ist auch das Verhältniß der Geschwindigkeiten. Durch diesen Vergleich findet man, daß die relative Geschwindigkeit der absoluten, und wenn sich zwey Körper in der nähmlichen, oder in entgegengesetzter Richtung bewegen, die relative Geschwindigkeit der Differenz oder der Summe der absoluten gleiche. Bey der schiefen Bewegung zweyer Körper, welche jederzeit wie aus zweyen Bewegungen zusammengesetzt zu betrachten ist, findet man die relative Geschwindigkeit in einer Richtung wie die Summe in der andern, wie die Differenz der absoluten. Die Bestimmung der absoluten und relativen Räume, welche in verschiedenen Fällen beschrieben werden, überzeugen uns hievon.

28.

Jede aus Erscheinungen und Versuchen bekannte Richtschnur, nach welcher sich die Natur in allen ihren Wirkungen von einer und der nähmlichen Art hält, wird von den Naturforschern Gesetz der Natur genannt. Ein Gesetz der Bewegung daher ist jede in allen ähnlichen Fällen der Bewegung in der Natur befolgte Richtschnur.

Die allgemeinsten dieser Gesetze sind drey:

1) Der ruhende Körper muß seine Ruhe, der sich bewegende aber die schon erhaltene Geschwindigkeit und Richtung unverändert so lang beybehalten, bis er von einer äusserlichen Ursache zur Bewegung, und, wenn er sich schon beweget, zur Abänderung der Geschwindigkeit, oder Richtung, oder beyder zugleich bestimmt wird.

2) Wirkung und Gegenwirkung sind jederzeit entgegengesetzt und gleich, so oft ein Körper auf den andern wirket.

3) Der von mehr als einer Kraft zugleich angetriebene Körper, setzet die Bewegungen in eine so zusammen, daß er jeder seiner Bestimmungen, so viel möglich ist, folge.

Das erste dieser Gesetze ist in der 1. Abh. §. 43 erwiesen worden, und wird durch die Betrachtung der Bewegung noch einleuchtender.

Das

Das zweyte wird im nächstfolgenden, und das dritte im dritten Kapitel, jedes an seinem Orte im Zusammenhange erwiesen werden.

Zweytes Kapitel.

Vom

Schwerpunkte und seinen Eigenschaften.

20.

Schwerpunkt nenne ich jenen Punkt in jedem, oder in der Verbindung mehrerer Körper, dessen Lage so bestellet ist, daß die Theile dieß und jenseits der Fläche, welche durch ihn gezogen wird, von dieser gleiche Summen der Abstände haben.

Da der Zwischenräume mehr, als Theile in jedem Körper sind, so ist es wahrscheinlicher, daß der Schwerpunkt, wenn einer vorhanden ist, auf einen Punkt der Zwischenräume falle.

30.

Eine Fläche von gleichen Abständen, ist jene: welche durch den Körper, oder eine Sammlung derselben so gezogen ist oder so gezogen betrachtet wird, daß die Theile dieß- und jenseits dieser Fläche gleiche Summe der Abstände von derselben haben.

Jede durch den Schwerpunkt gezogene, ist eine Fläche von gleichen Abständen. Beyde, sowohl die durch den Schwerpunkt gezogene, als die Fläche von gleichen Abständen theilen den Körper, durch welchen sie gezogen sind, in zwey kleinere Körper, oder Theile des ganzen.

31.

Weil die ersten physischen Bestandtheile einfach sind, 1. Abh. §. 81, so ist ein solcher Bestandtheil jederzeit in der Fläche, welche man durch ihn gezogen setzt. Seine Theile stehen weder Dieß-noch Jenseits der Fläche. Die Summe der Abstände ist beyderseits keine, folglich gleich, und jeder erste physische Bestandtheil der Körper ist selbst sein Schwerpunkt. §. 29.

32.

Jede zwey aufeinander wirkende, oder mit einander verbundene erste physische Bestandtheile haben einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt.

Setzen wir zwey solche Bestandtheile A und
Fig. 1. B Fig. 1 durch die gerade Linie AB verbunden, und diese in C im verkehrten Verhältniße der Bestandtheile, das ist so getheilet, daß AC: BC :: B:A, so ist C ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt. Die durch C gezogene Fläche DE, und aus A und B auf diese herabgelassenen senkrechten AD, und BE bilden mit der Linie AB zwey ähnliche Dreyecke ACD, und BCE; folglich ist: AD:BE :: AC:BC, und auch

AD:

AD : BE : : B : A, daher AD × A — BE × B. Die Summe der Abstände Dieß- und Jenseits der durch C gezogenen Fläche gleich, §. 29.

33.

Die Summe der Abstände, welche zwey aufeinander wirkende, oder miteinander verbundene Bestandtheile von was immer für einer ausser ihnen und ihrem Schwerpunkt gelegenen Fläche haben, ist dem mit der Zahl der Theile multiplizirten Abstande des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von der nähmlichen Fläche gleich.

Die Fläche außer den Bestandtheilen A und B, und ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt C Fig. 1 sey FH. Die auf diese aus A, B, und C gezogenen senkrechten AF, BH und CG sind alsdann die Abstände gedachter drey Punkte von der angenommenen Fläche; und es ist zu beweisen, daß CG (A + B) = AF × A + BH × B. Zu diesem Ende werde durch C eine mit FH gleichlaufende Fläche IK gezogen, und AF verlängert, bis sie mit der Fläche wo in I zusammenläufe. Der Durchschnitspunkt derselben und der Linie BH sey K. Wegen Aehnlichkeit der Dreyecke ACI und BCK ist : AC : BC : : AI : BK, und, weil AC : BC : : B : A. §. 32, ist auch AI : BK : : B : A, und AI × A = BK × B. Weil IK und FH gleichlaufend sind, so ist : CG = IF = KH, und gleiches mit gleichen multipliziret : CG (A + B) = IF (A + B) = Fig. 1.

$IF \times A + IF \times B = IF \times A + KH \times B$. Setzt man einer Größe eben so viel zu als von derselben abgezogen ist worden, so bleibt die Größe unverändert, daher ist auch $CG\,(A + B) = IF \times A - IA \times A + KH \times B + BK \times B = (IF - IA)\,A + (KH + BK)\,B = AF \times A + BH \times B$.

34.

Statt der Summe der Abstände zweyer Bestandtheile von einer außer ihnen und ihrem Schwerpunkte liegenden Fläche, kann man daher ohne Anstand das Produkt aus dem Abstande ihres Schwerpunktes von der nähmlichen Fläche in die Zahl der Bestandtheile nehmen, welcher in diesem Falle nur verdoppelt wird. In Beziehung auf die Abstände von einer so bestimmten Fläche ist es gleich viel, die zwey Bestandtheile mögen sich, jeder in seinem Orte, oder beyde im gemeinschaftlichen Schwerpunkte befinden. In Ansehung der Abstände kann man mit allem Rechte beyde im Schwerpunkte versammelt, das ist, wie einen doppelten, oder zwey in einander liegende Punkte betrachten.

35.

Jede drey auf einander wirkende, oder miteinander verbundene Bestandtheile der Körper, haben einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt.

Wenn

Wenn Fig. 2. die Bestandtheile A und B durch die Linie AB verbunden sind, und diese in C im verkehrten Verhältniße geschnitten, so ist C der Schwerpunkt des A und B, §. 32. Verbindet man diesen mit dem dritten Bestandtheil D durch die gerade CD, und theilet selbe in L im verkehrten Verhältnisse der Bestandtheile, das ist so, daß: CL : DL : : D : A + B, so ist L der gemeinschaftliche Schwerpunkt des A, B, und D. Dieses zu erweisen sey durch L eine Fläche, und zu dieser aus C und D die senkrechten CG und DN gezogen, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke CLG, und DLN, : CL : DL : : CG : DN; und, weil CL : DL : : D : A + B, auch : CG : DN : : D : A + B, folglich : CG (A + B) = DN × D. CG (A + B) = AF × A + BH × B. §. 33, also ist auch AF × A + BH × B = DN × D. Wodurch der Schwerpunkt bestimmt wird §. 29. Fig. 2.

36.

Die Summe der Abstände, in welchen drey aufeinander wirkende, oder miteinander verbundene Bestandtheile gegen eine ausser ihnen gelegenen Fläche stehen, ist dem Produkte aus dem Abstande ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes von der nähmlichen Fläche in die Zahl der Bestandtheile gleich

Außer den drey Bestandtheilen A, B, D, und ihrem Schwerpunkte L Fig. 2 werde die Fläche MP angenommen, und zu dieser die senkrechten CM, LO, und DP gezogen, durch welche die Abstände der Punkte C, L und D gemessen werden. Um die Abstände des A und B von der nähmlichen Fläche zu bestimmen, ziehe man endlich auch die senkrechten AS und BT. Diesemnach ist zu beweisen, daß: $AS \times A + BT \times B + DP \times D = LO (A + B + D)$, das ist: weil $CM (A + B) = AS \times A + BT \times B$. §. 33, $LO (A + B + D) = CM (A + B) + DP \times D$ sey. Des Beweises wegen sey die mit SP gleichlaufend durch L gezogene Fläche RQ, von welcher CM in R geschnitten wird, und welche mit der verlängerten DP in Q zusammenläuft. CLR und QLD sind ähnliche Dreyecke, folglich $CL : DL :: CR : DQ$, und, weil $CL : DL :: D : A + B$, §. 35. $CR : DQ :: D : A + B$, also $CR (A + B) = DQ \times D$. Weil senkrechte zwischen gleichlaufenden Linien gleich sind, so ist: $LO = RM = QP$ und $LO (A + B + D) = RM (A + B + D) = RM (A + B) + RM \times D. = RM (A + B) + QP \times D. = RM (A + B) + CR (A + B) + QP \times D - DQ \times D = (RM + CR) (A + B) + (QP - DQ) D. = CM (A + B) + DP \times D.$

37.

37.

Erst angeführtem Beweise gemäß erhält man bey drey miteinander verbundenen, oder auf einander wirkenden Bestandtheilen, die Summe der Abstände, welche sie von einer außer sich und ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt liegenden Fläche haben, durch das Produkt aus dem Abstande des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von der nähmlichen Fläche in die Zahl der Bestandtheile. Die Summe der Abstände solcher drey Bestandtheile ist eben dieselbe, welche seyn würde, wenn alle drey in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte vereiniget wären, und es können diese drey Bestandtheile, wie ein, aber dreyfacher Punkt betrachtet werden.

38.

Jeder Körper hat einen Schwerpunkt.

Nachdem iede zwey und drey miteinander verbundene, oder aufeinander wirkende Bestandtheile einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt haben, §§. 32, 35, und iu diesem versammelt, folglich wie ein Punkt betrachtet werden können, §§. 34, 37, so muß auch jede Zahl miteinander verbundener, oder aufeinander wirkender Bestandtheile einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt haben, welcher der Schwerpunkt des Körpers ist, der durch diese Zahl der verbundenen Bestandtheile bestellet wird. Denn vermög erst erwähnter Sätze können vier, fünf und auch sechs miteinander verbundene Bestandtheile wie zwey Punkte, folglich auch wie in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte versammelt, wie ein Punkt betrachtet werden, und eben dieses läßt sich auf jede Zahl miteinander verbundener Bestandtheile ausdehnen.

39.

Die Summe der Abstände, in welchen die Theile des Körpers von einer außer ihm genommenen Fläche stehen, ist dem Produkte aus dem Abstande seines Schwerpunktes von der nähmlichen Fläche in die Zahl seiner Bestandtheile, oder in seine Masse gleich.

Was §. 33 von zwey und §. 36 von drey Bestandtheilen erwiesen ist worden, kann auf eben dieselbe Art von was immer für einer Zahl miteinander verbundener Bestandtheile, folglich von jedem Körper erwiesen werden. Uebrigens bedürfen wir dieses Beweises nicht, weil aus §§. 34, 37 von selbsten folgt, daß jede Zahl mehrerer miteinander verbundenen Bestandtheile, das ist jeder Körper wie zwey Punkte betrachtet werden kann, deren Summe der Abstände durch das Produkt, aus dem Abstande ihres Schwerpunktes in die Zahl der Theile bestimmt ist. §. 33.

Drücken wir die Summe gedachter Abstände des Körpers durch S, den Abstand seines Schwerpunktes durch D, seine Masse endlich durch M aus, so ist überhaupt $S = D \times M$.

40.

40.

Wenn überhaupt und allgemein $S = D \times M$, so muß es auch nach der Bewegung des Körpers zu, oder von der Fläche richtig seyn. Beweget sich der Körper gegen die Fläche, oder nähert er sich dieser, so werden die Abstände aller seiner Theile, sammt dem Abstande des Schwerpunktes, um die von iedem beschriebene Strecke kleiner. Entfernet sich der Körper von der außer ihm angenommenen Fläche, so wird der Abstand eines jeden seiner Theile so, wie der Abstand des Schwerpunktes größer. Die Summe aller im angenommenen Falle von den Theilen des Körpers zurückgelegten Strecken oder Räumen können wir s, den vom Schwerpunkte aber beschriebenen d nennen, so ist $S - s$ die Summe der Abstände nach dem Zugang, $S + s$ aber nach der Entfernung von der Fläche, und $D - d$ für jenen, $D + d$ aber für diesen Fall der Abstand des Schwerpunktes nach der Bewegung des Körpers, und $S \mp s = (D \mp d) M = D \times M \mp d \times M$. Wenn von dieser die vor der Bewegung gewesene Gleichung $S = D \times M$ abgezogen wird, so bleibt $\mp s = \mp d \times M$. Der vom Schwerpunkte b schriebene Raum mit der Masse des Körpers multipliziret, ist der Summe aller Räume gleich, welche von den einzelnen Theilen des Körpers in der nähmlichen Bewegung beschrieben werden, Diese Summe der Räume wird durch das Produkt aus dem Raume des Schwerpunktes in die Masse des Körpers bestimmt.

41.

Da $S = D \times M$ so ist die Summe der Abstände, in welchen die Theile des Körpers von einer außer ihm genommenen Fläche stehen, eben dieselbe, welche seyn würde, wenn alle seine Theile im Schwerpunkte versammelt wären. Es kann daher jeder Körper in Beziehung auf die Abstände von Flächen außer ihm, wie ein, aber so vielfacher Punkt, als er Theile hat, betrachtee werden, und die von §. 32 bis 38 für zwey und drey Bistandtheile gegebene Beweise, gelten auch für zwey, drey und mehr miteinander verbundene, oder aufeinander wirkende Körper, wenn A, B, D, u. s. w. nicht mehr einfache Bestandtheile, sondern Schwerpunkte der Körper sind, deren Massen in selben versammelt betrachtet werden.

42.

Ohne Anstand können wir uns jeden Körper aus gleichlaufenden und sehr nahe aneinander gestellten Flächen zusammengesetzt denken, in welchen seine Bestandtheile sich befinden. In dieser Voraussetzung verhält sich jeder Körper in Beziehung auf seine Abstände von jeder Fläche des anderen, als wenn alle Theile des ersteren in seinem Schwerpunkte versammelt wären. §. 41 Es muß sich daher jeder Körper auch in Bezie-

hung

hung auf seine Abstände von allen zusammengenommenen Flächen eines zweyten Körpers, das ist, von diesem Ganzen eben so verhalten, als wenn alle Theile des ersten in seinem Schwerpunkte vereiniget wären. Die Summe der Abstände des erstern vom zweyten, muß dem Produkte aus dem Abstande seines Schwerpunktes in seine Massa gleich seyn, und, weil das nähmliche bey dem zweyten in Beziehung auf den ersten Körper eintrift, so ist der Abstand zweyer Körper von dem Abstande ihrer Schwerpunkte zu entnehmen. Die Summe der Abstände zweyer Körper von einander, sind dem Produkte gleich, welches man aus dem gemeinschaftlichen mit jeder Masse insbesondere multiplizirten Abstande ihrer Schwerpunkte erhält.

43.

Die Körper haben jeder nur einen Schwerpunkt.

Jeden Körper kann man aus zwey Theilen, oder kleineren Körpern zusammengesetzt betrachten, und jeder dieser Theile hat seinen Schwerpunkt, §. 38, kann daher auch als ein Punkt betrachtet werden §. 41. Die durch die gerade Linie AB verbundenen Punkte A und B Fig. 3 stellen die zwey Schwerpunkte der Theile des Körpers vor. Ihre im Schwerpunkte gesammelte betrachtete Massen, wollen wir von diesen auch A und B benennen. Wenn es möglich ist, habe der Körper zwey Schwerpunkte C und D. Se- Fig. 3.

zen

zen wir, daß durch diese Punkte zwey gleichlaufende Flächen gezogen, und von A und B die senkrechten AGL, und BEF auf die Flächen herabgelassen sind worden. Weil beyde C und D, vermög Bedingniß, Schwerpunkte des Körpers sind, so ist $AG \times A = BF \times B$, und $AL \times A = BE \times B$, folglich auch: $(AG + GL) A = (BF - EF) B$, oder $AG \times A + GL \times A = BF \times B - EF \times B$, und wenn die erste Gleichung von dieser letzten abgezogen wird, $+ GL \times A = - EF \times B$. Senkrechte zwischen gleichlaufenden sind gleich, $GL = EF$, und Gleiches mit Gleichem dividiret, giebt gleiche Quotienten. Wenn daher beyde C und D Schwerpunkte des Körpers wären, müßte $+ A = - B$ seyn. Welches ungeräumt ist.

44.

Was von zwey Körpern als Theilen eines Ganzen eben erwiesen ist worden, gilt auch von zwey Körpern wovon jeder ein Ganzes für sich ist, und einer auf den anderen wirkt, oder mit dem anderen verbunden ist, und kann nach dem, was bisher erwiesen ist worden, auch auf mehr als zwey Körper ausgedehnet werden. Auch jede Sammlung, jedes System mehrerer aufeinander wirkenden, oder miteinander verbundenen Körper, hat nur einen einzigen gemeinschaftlichen Schwerpunkt.

45.

Jede Fläche von gleichen Abständen muß durch den Schwerpunkt gehen.

A und B Fig. 3 sollen, wie §. 43 die Schwerpunkte zweyer Theile eines, oder zweyer Körper seyn, deren Masse eben daher auch A und B genannt werden. C sey der gemeinschaftliche, oder der Schwerpunkt des ganzen, EL aber eine Fläche von gleichen Abständen, welche durch den Schwerpunkt C nicht gehe. Dieser Bedingniß zu Folge muß $AL \times A = BE \times B$. §. 33, und, wenn durch C eine mit EL gleichlaufende Fläche gezogen wird $AG \times A = BF \times B$ seyn. Diese zwey eben so, wie §. 43 geschehen ist, gegeneinander gehaltene Gleichungen geben das Ungereimte $+ A = - B$. Fig. 3.

Sogleich, als von einer Fläche erwiesen wird, daß die Summe der Abstände Dieß- und Jenseits derselben stehenden Theilen gleich sey, ist es auch zuverlässig, daß sie durch den Schwerpunkt gehe. Jede Fläche von gleichen Abständen gehet durch den Schwerpunkt, wie jede durch diesen gezogene Fläche von gleichen Abständen ist. §. 30.

46.

Der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweyer miteinander verbundenen, oder aufeinander wirkenden Körper ist jederzeit in der geraden Linie, welche durch die Lage der einzelnen Schwerpunkte bestimmt wird.

Die

Die zwey einzelnen Schwerpunkte A und B
Fig. 4. Fig. 4, von welchen auch die Massen der Körper benennet werden, verbinde man durch die gerade Linie AB. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt sey, wenn es möglich ist, außer AB irgendwo in D. Durch diesen sey die Fläche EG, und zu dieser aus A und B den senkrechten AE und BG, dann durch den Punkt C, in welchem AB von GE geschnitten wird, eine zweyte Fläche FL unter was immer für einem Winkel, und zu dieser senkrecht AF, und BL gezogen. Wenn D der Schwerpunkt ist, so ist auch $AE \times A = BG \times B$ und $AE : BG :: B : A$. Wegen Aehnlichkeit der Dreyecke ACE und BCG ist: $AC : BC :: AE : BG$, folglich auch: $AC : BC :: A : B$. Die Dreyecke ACF, und BCL sind auch ähnlich. $AC : BC :: AF : BL$, und auch $AF : BL :: B : A$, folglich $AF \times A = BL \times B$. Wenn also der Schwerpunkt in D wäre, so müßte FL, eine Fläche von gleichen Abständen, §. 39, welche durch den Schwerpunkt nicht gehet, oder C der Durchschnitspunkt, ein zweyter gemeinschaftlicher Schwerpunkt seyn. Welches wider die §§. 43 und 45 gegebene Beweise ist. Es ist daher C der beyden Flächen und der Linie AB gemeinschaftliche Punkt, auch der Schwerpunkt.

47.

Die Abstände des gemeinschaftlichen von dem einzelnen Schwerpunkte zweyer Körper sind im verkehrten Verhältnisse ihrer Massen.

Der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweyer Körper, deren Massen von ihren einzelnen Schwerpunkten A und B genannt werden Fig. 4 sey C. Fig. 4.
Wenn durch diesen die Fläche GE, mit den von A und B auf sie senkrechten, AE und BG gezogen wird, so ist: $AE \times A = BG \times B$ §. 29, und $AG : BG :: B : A$. ACE, und BCG sind ähnliche Dreyecke. Es ist also: $AC : BC :: AE : BG$, und auch $AC : BC :: B : A$. AC und BC als gerade zwischen A und C, dann B und C begriffene Linien sind die Abstände des gemeinschaftlichen C von den einzelnen Schwerpunkten A und B.

Wenn diese Abstände durch A und a, die Massen durch M und m ausgedrückt werden, so ist überhaupt: $A : a :: m : M$, oder $M : m :: a : A$.

48.

Durch die wechselseitigen Kräfte der Bestandtheile wird die Lage und Stellung des Schwerpunktes im Körper nicht verändert. Die Lage des Schwerpunktes hängt von der Stellung der Theile des Körpers ab, und wird durch diese bestimmt, §§. 32, 35 und 38. So lang die Stellung der Theile im Körper die nähmliche ist, bleibt auch die Lage des Schwerpunktes unverändert. Durch die wechselseitigen Kräfte der

Be=

Bestandtheile aber wird der Zusammenhang*, und mit diesem die Stellung der Theile des Körpers bestimmt und erhalten.

49.

Da die Lage des Schwerpunktes durch die wechselseitigen Kräfte der Bestandtheile im Körper nicht verändert wird, so sind diese in Beziehung auf den Schwerpunkt eben so zu betrachten, als wenn sie gar nicht vorhanden wären. Nur die von einer äußeren Kraft dem Körper zukommende Bestimmung, wirkt auf den Schwerpunkt, wie auf jeden Theil des Körpers. Sogleich, als dieser sich bewegt, muß sich auch der Schwerpunkt bewegen, und die erhaltene Geschwindigkeit und Richtung so lang beybehalten, bis der Körper von einer äußeren Ursache zur Veränderung der einen oder der anderen, oder beyder bestimmt wird. Ist der Körper aber in der Ruhe, so muß auch sein Schwerpunkt ruhen, und zwar, bis der Körper in Bewegung gesetzt wird.

50.

Der vom Schwerpunkte, und die von den Theilen des sich bewegenden Körpers durchgelaufenen Räume sind gleichzeitig, folglich wie die Geschwindigkeiten §. 10. Der vom Schwerpunkte beschriebene Raum, mit der Masse des Körpers multipliziret, ist der Summe der Räume gleich, welche von den Theilen des Körpers in der

nähm-

nähmlichen Bewegung beschrieben werden $\overline{+}\, s = \overline{+}\, d \times M$ §. 40. Statt der Summe dieser Räume kann man die Summe der Geschwindigkeiten oder die Quantität der Bewegung $= MG$ §. 14. statt des vom Schwerpunkte beschriebenen Raumes seine Geschwindigkeit setzen, welche wir zum Unterschiede durch den Anfangsbuchstaben der lateinischen Benennung Celeritas, C ausdrücken. Hiemit ist $C \times M = MG = Q$. Das Produkt aus der Geschwindigkeit des Schwerpunktes in die Masse des sich bewegenden Körpers, der Menge seiner bewegenden Kräfte gleich.

51.

In Beziehung auf die Abstände verhält sich der Körper gegen jede außer ihm sich befindende Fläche eben so, als wenn alle seine Theile in seinem Schwerpunkte vereiniget wären, §. 41. Die Bestimmungen der Bewegungskraft sind in einem Verhältniße der Abstände, ob wir schon jedes dieser Verhältniße nicht bestimmen können 1. Abh. §§. 50, 51, 52. Der Körper verhält sich daher auch in Ansehung seiner wirkenden Kräfte gegen jede außer ihm genommene Fläche, auf welche er wirkt, eben so, als wenn alle seine Theile im Schwerpunkte vereiniget wären.

52.

Da der Abstand zweyer Körper von ihren Schwerpunkten zu nehmen kömmt, §. 42. Da

Da der Körper auf iede in seinem Wirkungskreise außer ihm sich befindende Fläche eben so wirkt, als wenn alle seine Theile im Schwerpunkte vereiniget wirkten §. 51; so müssen auch jede zwey, oder mehr auf einander wirkende Körper so wirken, als wenn jeder alle seine Theile in seinem Schwerpunkte vereiniget hätte. Der sich bewegende Körper sowohl als der ruhende, kann wie ein Punkt betrachtet, und der beschriebene Raum durch eine Linie ausgedrückt werden.

Alle Versuche, welche uns überzeugen, daß der Körper, deßen Schwerpunkt aufgehalten ist, ruhe, die Wirkung seiner Schwerbestimmung, der Fall gegen die Erde gehindert sey, überführen uns auch davon, daß in Beziehung auf seine Schwere, welche vorzüglich betrachtet wird, jeder Körper so wirke, als wenn alle seine Theile in seinem Schwerpunkte vereiniget wären.

53.

Vermöge dieser Eigenschaft des Schwerpunktes muß die Gegenwirkung der Wirkung gleich seyn, so oft zwey Körper aufeinander wirken. Welches wir §. 28 für das zweyte Gesetz der Bewegung angenommen haben.

Damit wir uns deutlicher erklären, nehmen
Fig. 5. wir Fig. 5. zwey aufeinander wirkende Körper A und E an, welche von ihrem Schwerpunkte so benennt werden. Auch ihre Massen drücken wir indeßen durch A und E aus. Wenn A und E aufeinander wirken, so wirken sie so, als wenn

alle

alle Theile A im Schwerpunkte A, und alle Theile E im Schwerpunkte E vereiniget wären. §. 52. Man kann dahero die Wirkung eines jeden Theiles in A auf jeden Theil in E, und umgekehret, wie die Wirkungen der zwey Schwerpunkte A und E betrachten. Diese Wirkungen sind untereinander gleich, weil die Schwerpunkte A und E, zwischen welchen nur eine einzige gerade Linie gezogen werden kann, nur einen, und den nähmlichen Abstand AE haben, und die Bestimmungen der Kräfte vom Abstande abhängen. 1. Abh. §. 50, 51, 52. Auch jede zwey einzelne Wirkungen der Theile A auf die Theile E, und umgekehrt sind also für gleich anzusehen, und, damit die Wirkung des ganzen A auf den ganzen Körpen E bestimmt werde, ist nur die Zahl der Wirkungen, welche ein jeder Theil in A, und jeder in E empfindet, so oft zu nehmen, als Theile in A und in E vorhanden sind. Da jeder Theil in A auf jeden Theil des E, und jeder Theil in E auf jeden Theil des A wirkt, so empfindet jeder Theil des E so viel für gleich zu haltende Wirkungen, als Theile in der Masse A, und jeder Theil des A so viel, als Theile in der Masse E sind. Die Wirkung, welche jeder Theil des A empfindet, ist wie die Masse E, und in jedem Theile des E, wie die Masse A. Wenn die Wirkung, welche jeder Theil des Körpers empfindet, so oft genommen wird, als Theile sind, das ist mit der Zahl der Theile, mit der Masse multipliziret, so erhält man die Wirkung, welche von allen Theilen zusammen, das ist, vom ganzen Körper empfunden wird. Die Wirkung, welche der ganze Körper A empfindet = E × A, und die Wirkung im ganzen Körper E ist = A × E. Wer siehet aber nicht, daß diese zwey Produkte, wovon eines die Wirkung, das andere die Gegenwirkung ausdrückt, gleich sind.

Wird statt des besonderen Ausdruckes der Massen durch A und E, der allgemeine durch M und m genommen, so haben wir M × m = m × M und können diese zwey Produkte für jene der äußeren und mitleren Glieder der geometrischen Proportion, M : m : : M : m ansehen, in welcher statt des zweyten Verhältnißes M : m, das Verkehrte der Abstände der einzelnen Schwerpunkte vom gemeinschaftlichen a : A gesetzt werden kann, nachdem §. 47 erwiesen wurde, daß M : m : : a A sey. Auch die zwey gleichen Produkte M × A = m × a drücken die Wirkung und Gegenwirkung zwischen zwey aufeinander wirkenden Körpern aus, und in jedem dieser Fälle ist. M : m : : a : A.

54.

Daß der Schwerpunkt einer mathematischen Sphäre auf den Mittelpunkt ihrer Ausdehnung falle, beweiset die Mathematik, und ist nach der §. 29 gegebenen Erklärung auf die nähmliche Art, welche wir angenommen haben, leicht zu

erwei=

erweisen. Wenn der Planet den wir bewohnen, und Erde nennen, eine Sphäre wäre, und durch seine ganze Ausdehnung gleichartige Masse hätte, folglich wie ein mathematischer Körper behandelt werden könnte, so wäre der Schwerpunkt der Erde in dem Mittelpunkte ihrer Ausdehnung. Der Erklärung wegen, nehmen wir dieses indessen an. Die Sphäre, dessen Mittelpunkt E Fig 5, sey die Erde, und ihr Schwerpunkt falle eben auch auf E. Ein irdischer Körper an der Oberfläche der Erde sey A, von seinem Schwerpunkte so genannt. Weil die Körper so aufeinander wirken, als wenn die Theile eines jeden in seinem Schwerpunkte vereiniget wären §. 52, so muß der Körper A auf die Erde, und diese auf jenen so, als wenn sie in den Punkten A und E, jeder in seinem Schwerpunkte versammelt wären, in der nähmlichen Richtung, in welcher die Schwerpunkte A und E aufeinander wirken. Die Richtung dieser Wirkung ist in der geraden Linie AE, welche von einem Schwerpunkte zu dem andern gezogen werden kann. Der Körper A und die Erde E, müssen daher durch die Bestimmung der Schwere angetrieben, in der Linie AE sich gegeneinander bewegen, und wenn die Bewegung gehindert ist, zur Bewegung streben. So oft zwey Körper aufeinander wirken, ist die Wirkung und Gegenwirkung gleich §. 53. Die Menge der bewegenden oder drückenden Kräfte A im Körper A, und der Erde

E sind daher jederzeit gleich. $MG = mg$ und $M : m :: g : G$. §. 14. Gleichwie die Masse des irdischen Körpers gegen jene der Erde unmerklich ist, so ist es auch die Geschwindigkeit der Erde gegen die Geschwindigkeit des irdischen gegen sie angetriebenen Körpers. Die Geschwindigkeit der Erde ist über dieses in jedem Falle, allen auf ihrer Oberfläche stehenden Körper gemeinschaftlich, folglich aus diesem Grunde für uns schon unmerklich, wenn sie auch in und für sich selbst nicht unmerklich wäre. Aus diesen Gründen betrachten wir bey der Wirkung der Schwerbestimmung blos den Körper A. Dieser muß, wenn er fällt, in der Linie AE fallen, und, wenn er zu fallen gehindert wird, sich bestreben in der Richtung AC auf die Erde zu gelangen. AE ist der verlängerte Halbmesser der Sphäre E, folglich auf dessen Oberfläche senkrecht. Wenn die Erde daher eine vollkommene Sphäre wäre, und gleichhartige Masse hätte, müßte jeder irdische Körper, von der Schwere angetrieben, in der That senkrecht auf die Erde herabfallen, im Verhinderungsfalle aber senkrecht gegen die Erde streben.

Allein die gegen den Aequator ab, und gegen die Pole zunehmenden Schwerbestimmungen, und gerade des Mittagskreises überzeugen uns, daß die Erde an den Polen zusammengedrückt, am Aequator hervorragend, folglich keine Sphäre sey. Die Verschiedenheit der Erdeschichten und ihrer Pro-

dukte

dukte, welche wir bey derselben Untersuchung auf der Oberfläche, und in dem Eingeweide der Erde ohne viele Mühe finden, überführet uns, daß die Masse unseres Planetens nicht gleichartig sey. Wir können daher nicht annehmen, daß der Schwerpunkt der Erde gerade auf den Mittelpunkt E ihrer Ausdehnung, sondern höchstens nur sehr nahe an diesem wo in B falle. Die Linie folglich, nach welcher die irdischen Körper gegen die Erde fallen, oder zu fallen sich bestreben, ist in der That nicht AE, sondern AB. Sie ist zur Oberfläche der Erde nicht in der That, sondern nur dem Scheine nach senkrecht; weil dessen zu belaufender, oder belaufener Theil AD von der senkrechten AC wenig abweichet, und nur mit einem sehr kleinen und daher flach scheinenden Theile der Erdeoberfläche verglichen wird.

Die aus dem Schwerpunkte des Körpers gezogene gerade Linie, nach welcher der Körper von der Schwere angetrieben, gegen die Erde fällt, oder zu fallen sich bestrebet, wird die **Richtungslinie der Schwere** genannt. Die Richtungslinie der Schwere ist daher zur Oberfläche der Erde dem Scheine nach senkrecht.

55.

Setzen wir den Körper A in der nähmlichen Fig. 5 an dem Faden AF, der im Punkte F befestiget ist, hangend, so muß der Faden AF durch den Zusammenhang seiner Theile die Schwerbestimmung des Körpers erlöschen, welche zur Trennung der Theile des Fadens wirkt. Der Fig. 5.

Faden muß daher jederzeit dem Bestreben der Schwere entgegengesetzt, gespannt werden, und AF die Verlängerung der Linie AB oder AD geben. Die Punkte F, der Aufhangs- A und B die Schwerpunkte müssen in der nähmlichen geraden Linie liegen. AB, oder dessen Theil AD ist die Richtungslinie, und zur Oberfläche der Erde dem Scheine nach senkrecht. §. 54. Auch AF also die Richtung des gespannten Fadens ist zur Oberfläche der Erde dem Scheine nach senkrecht, und die vom Aufhangspunkte des Körpers zur Oberfläche der Erde senkrecht gezogene Linie gehet jederzeit durch den Schwerpunkt des hangenden Körpers.

Hierauf gründet sich die Bleywage und ihr Gebrauch. Die Richtung des durch das daran hangende Gewicht gespannten Fadens, ist zur Oberfläche der Erde dem Scheine nach senkrecht. Nach dieser kann man also zur Oberfläche der Erde eine so genau, als es in den meisten Fällen erfodert wird, senkrechte Linie ziehen und beurtheilen, ob eine Fläche zum Gesichtskreise gleichlaufend sey.

Auf eben diese Wahrheit ist gegründet die Art den Schwerpunkt wenigstens nicht sehr unregelmässiger Körper in der Ausübung zu bestimmen. Eine Bleywage wird mit dem Körper so aufgehangen, daß der Faden eine Oberfläche desselben streife, hiemit ist in dieser eine zur Oberfläche der Erde, dem Scheine nach senkrechte bestimmt.

Die-

Diese gezeichnet bestimmt in dem Körper eine Durchschnittsfläche, in welcher der Schwerpunkt sich befindet. Dieses Verfahren wiederholet man noch zweymal, aber so, daß die im Körper zuerst bestimmte Fläche von der zweyten, und diese beyde von der dritten durchgeschnitten werden. Da in jeder dieser Flächen der Schwerpunkt des Körpers seyn muß, und alle drey nur einen einzigen gemeinschaftlichen Punkt haben, in welchem sie sich kreuzen, so muß dieser der Schwerpunkt des Körpers seyn. Daß diese ausübende Art den Schwerpunkt des Körpers zu bestimmen, nur bey solchen Körpern ohne Beschwerde anwendbar sey, welche mit Flächen bekreuzt sind, erhellet von selbsten.

56.

Da die Körper überhaupt, und jeder irdische Körper insbesondere so wirken, als wenn ihre Theile im Schwerpunkte vereiniget wären, §. 52, so sind alle Theile des Körpers eben so gut, als unterstützt, so lang der Schwerpunkt unterstützt ist, und nicht unterstützt, wenn der Schwerpunkt nicht unterstützt ist. Die unterstützten Theile können nicht, und die ohne Unterlage sind, müssen fallen. So lang der Schwerpunkt daher unterstützt ist, kann der Körper nicht fallen, er muß aber fallen, so bald der Schwerpunkt keine Unterlage hat.

Hierin liegt die Ursache, warum auch schwere auf den feinsten Spitzen, und überhaupt kleinsten Unterlagen künstlich gestellte, und auch sich bewegende Körper nicht fallen, warum lebende und leblose Körper in dieser oder jener Stellung fester, in anderen schwächer stehen, und um sich ohne Gefahr zu fallen in der Bewegung zu erhalten, diese und keine andere Stellung haben müssen. Warum viele zum Fallen sehr geneigt scheinende Körper doch nicht fallen.

Die Art durch Unterstützung des Körpers seinen Schwerpunkt ausübend zu bestimmen, ist eben auch von diesem Grundsatze hergeleitet worden. Wenn der Körper auf einer Schneide oder auf einen gespitzten Körperwinkel so gestellt oder gelegt ist, daß er nicht falle sondern ruhe, so ist sein Schwerpunkt sicher unterstützet, folglich in der Durchschnittsfläche des Körpers, welche senkrecht auf der Schneide stehet, und durch die an der Oberfläche von Berührung der Schneide angezeigten Linie bestimmt wird. Werden nun auf diese Art drey sich so kreuzende Durchschnitte des Körpers bestimmt, daß sie nur einen einzigen gemeinschaftlichen Punkt haben, so ist in diesem auch der Schwerpunkt des Körpers bestimmt.

57.

Ob der Schwerpunkt des Körpers unterstützt sey oder nicht, muß die Richtungslinie bestimmen. Fällt diese innerhalb der Grundfläche des Körpers, so ist jeder unter dem Schwerpunkte senkrecht liegende Theil des Körpers, folglich auch der auf diesem stehende Schwerpunkt, welcher in der nähmlichen senkrechten herabdrückt, unterstützt. So bald die Richtungslinie außer die Grundfläche des Körpers fällt, ist der Schwerpunkt nicht mehr unterstützt, und der Körper muß fallen. Aus diesem folgt von selbsten, daß der Körper desto fester stehe, der Gefahr zu fallen desto weniger ausgesetzt sey, je tiefer in die Grundfläche die Richtungslinie seiner Schwere fällt. Bey hangenden Körpern ist der Schwerpunkt nur alsdann unterstützet, wenn die Richtung des Fadens, an welchem er hängt, senkrecht zum Gesichtskreis, folglich der Richtungslinie gerade entgegengesetzt ist.

Um den Körper, dessen Richtungslinie nicht tief genug in die Grundfläche fällt, vom Falle zu sichern, wird seine Grundfläche durch Zusatz einer Stütze vergrößeret, oder durch Verbindung des zum Falle geneigten Körpers mit einem anderen mit Vergrößerung verändert. Die durch Schlüssen vermehrte Verbindung der Mauren eines Gebäudes ist ein Beyspiel der zweyten, die Verstärkung der Grundmauren der ersten Art vom Falle zu sichern.

Drit-

Drittes Kapitel.

Von der einfachen und zusammengesetzten Bewegung.

58.

In Beziehung auf die Zahl der bewegenden, oder zur Bewegung wirkenden Kräfte ist die Bewegung einfach oder zusammengesetzt. Einfach, wenn sie von einer einzigen; zusammengesetzt, wenn sie von mehr als einer Kraft hervorgebracht wird.

59.

Von der einfachen Bewegung, welche nach der Richtung, und mit einer der wirkenden Kraft verhältnißmässigen Geschwindigkeit geschiehet, ist in Beziehung auf die Zahl der Kräfte keine Aenderung vorhanden, in dieser Beziehung folglich ins besondere nichts zu bemerken. Was im ersten Kapitel von der Bewegung überhaupt, und in dem nächstfolgenden in Beziehung auf die Geschwindigkeit ins besondere erwiesen wird, ist verhältnißmässig auch auf die einfache Bewegung anzuwenden. Der Gegenstand dieses Kapitels ist vorzüglich die zusammengesetzte Bewegung.

Je mehr auf den Körper wirkende Kräfte zugleich in die Betrachtung gezogen werden, desto zusammengesetzter und verwickelter ist diese, und was von zwey Kräften gut begriffen ist worden, läßt sich alsdann leicht auch auf mehrere verwenden. Wir wollen daher nur zwey auf den Körper zugleich wirkende Kräfte betrachten, und am Ende eine Anwendung auf mehrere zeigen.

Weil der sich bewegende nicht minder als der ruhende Körpers wie ein Punkt betrachtet, §. 52, der von ihm belaufene Raum daher durch eine Linie ausgedrückt werden kann, dieser Raum mit der bewegenden Kraft, als der Ursache jederzeit im Verhältniße stehet, und ihrer Bestimmung nach durchgelaufen wird, so können wir auch die Stärke der Kraft durch die Länge, ihre Richtung aber durch die Lage einer geraden Linie andeuten, und die Richtungen zweyer auf den Körper zugleich wirkenden Kräfte müssen sich gegeneinander eben so verhalten, wie die Lagen zweyer aus dem nähmlichen Punkte gezogenen geraden Linien. Die Richtungen solcher zwey Kräfte müssen gleichlaufend, das ist die nähmlichen, oder gerade entgegengesetzt, oder endlich so seyn, daß sie einen Winkel einschließen, und in diesem sind alle Fälle der zusammengesetzten Bewegung begriffen.

60.

60.

Wenn die Richtungen der auf den Körper zugleich wirkenden Kräfte die nähmlichen, oder gleichlaufend sind, so ist die Geschwindigkeit, wie die Summe der Kräfte. Der Körper bewegt sich mit der Summe der Kräfte in der geraden Linie, welche durch ihre Lage die gemeinschaftliche Richtung andeutet.

Alle Erscheinungen, alle hierüber angestellte Versuche beweisen, daß der beschriebene Raum, und überhaupt jede Wirkung desto größer sey, jemehr Kräfte hierin übereinkommen. Die natürliche Ursach dieser allgemeinen Erscheinung der Natur dieses Gesetzes der Bewegung ist so einleuchtend, und so einfach, daß sie durch eine weitläuftigere Erklärung bey nahe verdunkelt würde. Die Betrachtung dieses Falles und seiner Folgen überzeugen uns hievon. Wenn der Körper A Fig. 6 von zwey in gleichlaufender, oder in der nähmlichen Richtung AD wirkenden Kräften wie AB und AC zugleich angetrieben wird, so muß er in der Zeit, in welcher er von der Kraft wie AB allein angetrieben, den Raum AB beschrieben hätte, eben so viel Raum zurücklegen, als er beschreiben würde, wenn die zwey Kräfte eine nach der anderen auf ihn wirkten, nachdem die Kraft AC zum nähmlichen Ziele strebt, und A eben dadurch zu gleicher Zeit um AC mehr Trieb empfindet. Es würde sonst

Fig. 6.

AC

A C wirken, vermög Bedingniß, und zugleich nicht wirkend seyn, weil keine Wirkung erfolgt. Wird AB bis in D so verlängert, daß BD = AC, und nach dem A von AB angetrieben den Raum AB beschrieben hat, die Kraft AC angewandt, so muß der Körper noch den Raum BD = AC durchlaufen, und der mit den zwey nach einander wirkenden Kräften AB und AC beschriebene Raum, AB + BD = AB + AC seyn. Wirken also diese beyden Kräfte zugleich auf den Körper A, so muß in der nähmlichen Zeit, in welcher der Körper mit einer einzigen Kraft AB, oder AC allein beschrieben hätte, ein Raum wie AB + AC die Summe der Kräfte beschrieben werden, folglich die Geschwindigkeit eben auch wie AB + AC seyn. §. 10. Der Körper A muß sich mit der Summe dieser Kräfte bewegen.

Die Richtungen der Kräfte AB und AC sind vermög Bedingniß gleichlaufend; oder genauer zu reden, die Richtung dieser zwey Kräfte ist die nähmliche AD. Es ist also keine Ursache vorhanden, welche den Körper von dieser Richtung abzubringen suchte, und ohne diese kann der Körper die Richtung nicht ändern. 1. Abh. §. 44. Der von gleichlaufenden oder in der Richtung übereinstimmenden, und auf ihn zugleich wirkenden Kräften umgetriebene Körper, muß in der geraden Linie sich bewegen, an welchem die gemeinschaftliche Richtung der Kräfte bestimmt ist, und

und in welcher er sich mit jeder seiner Kräfte, wenn diese einzeln auf ihn gewirkt hätten, bewegt haben würde. Von Kräften angetrieben, welche in der Richtung übereinstimmen, kann der Körper keine andere, als eine gerade Linie beschreiben.

Wenn der Körper A statt der zwey gleichlaufenden AB und AC eine einzige Kraft, $AD = AB + AC$ empfunden hätte, so wäre der von ihm beschriebene Raum auch $AD = AB + AC$, wie die Summe der Kräfte gewesen, und die Bewegung doch einfach. Die von gleichlaufenden zugleich auf den Körper wirkenden Kräften erzeugte Bewegung ist daher wie eine einfache zu betrachten, welche von einer der Summe der Kräfte gleichen Kraft hervorgebracht wird.

61.

Die Geschwindigkeit der Körper, welche von zwey oder mehr gerade entgegengesetzt auf sie zugleich wirkenden Kräften angetrieben werden, ist wie die Differenz der Kräfte. Sie bewegen sich mit der Uebermacht der Kräfte nach der Richtung der stärkeren, und in der nähmlichen geraden Linie, in welcher sie sich von einer dieser Kräfte allein angetrieben bewegt hätten.

Auch

Auch dieses Gesetz der Bewegung beweisen alle Erscheinungen und Versuche, in welchen der gesetzte Fall eintrift. Zur Erklärung kann abermal die Betrachtung der Folgen dieser Bedingniß dienen. Wenn der Körper A Fig. 7 von zwey Kräften wie AB, und AC gerade entgegengesetzt, zugleich angetrieben wird, so muß er in der nähmlichen Zeit, in welcher jede dieser Kräfte allein gewirkt hätte, sich von A eben so viel entfernen, als er entfernet seyn würde, wenn gedachte zwey Kräfte eine nach der anderen auf ihn gewirkt hätten. Die Kraft AC hält den Körper, der mit der Kraft AB nach B gelangen sollte, eben so viel zurück, als er von B gegen A zurückgehen würde, wenn AC alsdann erst auf ihn wirkte, nachdem er von AB allein angetrieben den Raum AB beschrieben hat, und jede der zwey wirkenden Kräfte muß eben dessenwegen, weil sie wirkend ist, ihre Wirkung leisten. Nachdem der Körper A von AB allein angetrieben, den Raum AB belaufen hat, gehet er um den Theil BD = AC gegen A zurück, wenn alsdann die Kraft AC auf ihn wirkt. Am Ende dieser zwey Bewegungen ist der Körper in D, und verhält sich von A seinem ersten Orte um AD entfernet eben so, als wenn er nur den Raum AD beschrieben hätte. Von AB und AC zugleich angetrieben, muß er daher auch den Raum AD = AB — BD = AB — AC, der Differenz der Kräfte belaufen. Seine Fig. 7.

Geschwindigkeit, welche wie der gleichzeitige Raum ist, §. 10, muß wie diese Differenz seyn, und der Körper mit der Differenzkräfte sich bewegen.

Die Differenz der Kräfte AB — AC = AD ist der Theil des Triebes, um welchen A von AB stärker gegen B, als von AC gegen C, oder von A getrieben wird. Der Raum AD also muß in AB der Richtung der stärkeren Kraft beschrieben werden.

Wenn die Kräfte gleich sind, ist keine Differenz vorhanden. Es wird kein Raum beschrieben. Der Körper bleibt, wo er war. Zwey gleiche und gerade entgegengesetzt auf den Körper zugleich wirkende Kräfte erhalten ihn in der Ruhe, indem eine die Wirkung der anderen hebt.

Die Richtungen der Kräfte AB und AC, und jede zwey gerade entgegengesetzte Richtungen müssen immer in der nähmlichen geraden Linie seyn. Wenn der Körper daher von gerade entgegengesetzt wirkenden Kräften angetrieben wird, ist keine Ursach vorhanden, welche ihn von der geraden Linie abwendete, in welcher er von einer seiner Kräfte allein angetrieben, sich bewegt hätte, und er muß sich jederzeit in dieser geraden Linie bewegen, 1. Abh. §. 44, folglich eine gerade Linie beschreiben.

Wäre der Körper A von einer einzigen Kraft AD = AB — AC angetrieben worden, so hätte er eben so den Raum AD beschrieben, wie er

sel=

selben durchläuft, da er von zwey gerade entgegengesetzt wirkenden Kräften AB und AC zugleich angetrieben wird. Jene Bewegung wäre einfach; auch diese also ist wie eine einfache von einer der Differenz der Kräfte gleichen Kraft erzeugte Bewegung zu betrachten.

62.

Wenn die Richtungen der zwey auf den Körper gleichförmig, und zugleich wirkenden Kräfte einen Winkel einschließen, so beschreibt er die Diagonal- oder Winkellinie des Parallelogrammes, dessen Seiten durch ihre Längen die Stärken, und durch ihre Lagen die Richtungen der Kräfte ausdrücken.

Der Zirkel ABED Fig. 8 stellet die Oberfläche eines Tischleins vor. Sein Umkreis ist in 3 gleiche Theile AB = AD = BD, und dieser letzte in zwey BE = ED getheilet. An jedem Theilungspunkte ist eine Rolle befestiget. Wenn der Körper, an welchem 4 Schnüre angebracht sind, so auf den Mittelpunkt C gestellet wird, daß sein Schwerpunkt auf C falle, drey seiner Schnüre über die Rollen A, B und D geschlagen, und mit drey gleichen Gewichten beschweret werden, so ruhet der Körper in C. Nimmt man die zwey Gewichte B und D ab, schlägt den vierten Faden über die Rolle E, und beschweret selben mit einem der abgenommenen Gewichte, so ruhet der Körper abermal in C. Fig. 8.

Dieser Versuch beweiset, daß die Kräfte CB und CD, welche unter dem Winkel BCD auf den Körper C wirken, und die Kraft CA gleiche und gerade entgegengesetzte Wirkung eben so haben, wie die Kräfte CA und CE, welche nach den vorhergehenden auf C wirkten. CE folglich und die unter dem Winkel BCD auf C wirkende Kräfte CB und CD zusammen, haben nicht nur allein gleiche, sondern auch die nähmliche Wirkung. Da also der von CE allein angetriebene Körper CE belaufen würde, so muß er auch von CB und CD unter dem Winkel BCD zugleich angetrieben die Linie CE belaufen. Ziehet man die geraden Linien BE und DE, so ist leicht zu erweisen, daß CE die Diagonal, oder Winkellinie des Parallelogrammes sey, dessen Seiten CB und CD durch ihre Lagen die Richtungen, durch ihre Längen aber die Stärken der Kräfte ausdrücken.

AB = AD = BD = 180° BE = ED = 60°, folglich CB = CD = BE = DE = CE, und jeder der 6 Winkeln hat 60°. Die in dem Viereck BCDE entgegengesetzten Seiten sind nicht nur allein gleich, sondern auch gleichlaufend. Dieß Viereck ist ein Parallelogramm, wird durch CE in zwey gleiche Dreyecke getheilet, folglich ist CE die Diagonale.

Der angeführte Versuch, welcher mit ungleichen Kräften, wenn die Eintheilung des Cirkels verhältnißmässig genommen wird, den nähmlichen

lichen Erfolg hat, beweiset die Richtigkeit des angeführten Satzes. Der Beweiß wird dadurch bestättiget, daß der Körper C auch in der That die Hälfte CF, bis sich nähmlich CB und CD gerade entgegengesetzt werden, durchlaufe, so bald CA die dritte Kraft bey dem ersten Versuche gehoben wird. Auf welche Art und warum die Bewegung des Körpers so seyn müsse, wenn er von zwey unter einem Winkel auf ihn wirkenden Kräften zugleich angetrieben wird, erhellet aus der Betrachtung der wirkenden Kräfte, und ihrer Wirkungen.

Ueberhaupt zeigen die Versuche, daß der Körper, welcher von zwey unter einem Winkel zugleich auf ihn wirkenden Kräften gezogen oder gestossen wird, die Diagonale des Parallelogrammes beschreibe, dessen Seiten die Richtungen, und die Stärke der zwey Kräfte ausdrücken.

In jedem unendlich kleinen Theilchen der Zeit muß der, wie hier gesetzt wird, angetriebene Körper eine unendlich kleine dem Körper angemessene Diagonale belaufen. Die in einem unendlich kleinem Zeitchen, unendlich kleine Wirkungen leistenden §. 21, und unter dem Winkel GAD auf den Körper dessen Schwerpunkt A zugleich wirkenden Kräfte, werden Fig. 9 durch die geraden Linien AG, und AE ausgedrückt. Durch die Ergänzung des Parallelogrammes, dessen Seiten AG und AE sind, ist die Diagonale Fig. 9.

D 3 nale

nale AI bestimmt, welche beschrieben werden soll. Der Erklärung wegen sey AG von A bis X und AE, von A bis Y verlängert. Wenn der Körper A von der Kraft AG allein abgetrieben würde, so würde er den Raum AG belaufen, in G gelangen, und von der Fläche XE den Abstand bekommen, welcher durch die aus G auf YE senkrecht gezogene Linie gemessen wird. Die Wirkung der Kraft AG ist, den Körper A von YE um die Strecke erst gedachter Senkrechten zu entfernen. Aus eben diesen Gründen bestehet die Wirkung der Kraft AE auf A eigentlich in dem, daß A von der Fläche XG um die Strecke der aus E auf XG gezogenen Senkrechten entfernt werde. Diese zwey Wirkungen sind einander nicht entgegengesetzt und lassen sich vereinigen, nachdem der die Diagonale AI beschreibende Körper in jedem Punkte dieses Weges von den zwey durch die Richtungen der Kräfte bestimmten Flächen eben die Abstände zugleich hat, welche er in verhältnißmässigen Punkten der Räume AG und AE einzeln haben würde, und am Ende seiner Bewegung in I von YG und XE die nähmlichen zwey Abstände zugleich hat, deren einen er in G, nach der Bewegung AG, den anderen in E nach der Bewegung AE hätte; indem G und I in der nähmlichen mit AE, E und I aber in der mit AG gleichlaufenden Linie liegen. Der von AG und AE unter dem Winkel GAE in einem

un=

unendlich kleinen Zeitchen zugleich angetriebene Körper muß immer in einem Punkte der Diagonale AI, und am Ende in I seyn, folglich diese unendlich kleine Diagonale zurücklegen. Setzen wir daß die nähmlichen Kräfte unverändert auf den sich nun in I befindenden Körper fortwirken, so muß es in jedem folgenden unendlich kleinen und gleichen Zeitchen, eine mit AI gleiche Diagonale beschreiben, welche, wie wir an seinem Orte sehen werden, eine gerade Linie geben.

Wenn der Körper von mehr, als zwey unter Winkeln auf ihn zugleich wirkenden Kräften angetrieben wird, deren keine der anderen gerade entgegengesetzt ist, kann die aus allen zusammengesetzte Kraft und Bewegung dadurch bestimmt werden, daß man zwey und zwey in eine durch die Diagonale des Parallelogrammes ausgedrückte Kraft zusammensetze. Diese alsdann wiederum zu zwey in eine, und so weiter bis man eine einzige Kraft erhält, welche alsdann aus allen zusammengesetzt seyn wird. Daß bey dieser Zusammensetzung zwey und zwey Kräfte als Seiten eines Parallelogrammes angesehen, dieses ergänzet, und so die Diagonale bestimmt werden müsse, durch welche die aus zweyen zusammengesetzte Kraft ausgedrückt wird, diese erhaltenen Kräfte aber auf die nähmliche Art durch die Ergänzung des Parallelogrammes, dessen Seiten sie sind, die noch mehr zusammengesetzte

Kraft geben, wird durch die Anwendung auf einen bestimmten Fall einleuchtend.

63.

Wenn auf den Körper A nachdem er von AG angetrieben den Raum AG beschrieben die Kraft AE wirkt, so würde er den Raum GI belaufen, und am Ende dieser zwey auf einander folgenden Bewegungen in I seyn, wohin er mit beyden unter dem Winkel GAE zugleich wirkenden Kräften über die Diagonale AI gelangt ist. Den nähmlichen Erfolg haben erst gedachte Kräfte, wenn zuerst AE, und dann AG auf A wirkt. Der von zwey unter einem Winkel auf ihn zugleich wirkenden Kräften angetriebene Körper gelanget also eben dahin, wohin er gekommen wäre, wenn die nähmlichen Kräfte eine nach der anderen auf ihn gewirkt hätten, ungeachtet, daß der in diesem Falle belaufene Raum AG + AE, oder AE + AG größer ist als AI.

64.

Der von mehr als einer Kraft zugleich angetriebene Körper setzt die Bewegungen in einem so zusammen, daß er jeder seiner Bestimmungen so viel möglich ist, folge.

Fig. 9. Indem der von AG und AE Fig. 9 unter dem Winkel GAE zugleich angetriebene Körper A die Diagonale AI §. 62 belaufet, entfernet er sich unter einem von AE so viel als ihn die Kraft AG allein, und von AG so viel, als ihn AE allein

ent=

entfernet hätte. Er gelangt auch am Ende seiner Bewegung in I eben dahin, wohin er gekommen wäre, wenn die zwey Kräfte eine nach der anderen auf ihn wirkten, §. 63. In seiner Bewegung über AI, welche eine einzige ist, sind die Wirkungen beyder Kräfte vereinigt geleistet worden.

65.

Die Bewegung in der Diagonale AI ist aus den zwey Bewegungen AG und AE zusammengesetzt, §. 64. Auch die Kraft also, mit welcher der Körper AI durchläuft, muß aus den zwey unter dem Winkel GAE zugleich wirkenden Kräften AG und AE zusammengesetzt betrachtet werden, nachdem durch diese Linie die zurückgelegten Raum, durch die Räume aber die Kräfte ausgedrückt werden. §. 52. AI, AG und AE sind daher die zusammengesetzten, und zusammensetzenden Kräfte, und weil statt AE, die Kraft GI, statt AG, aber EI als gleich und gleichlaufend genommen werden kann, AI, AE und EI, oder AI, AG und GI zusammen die Dreyecke AEI und AGI geben, deren Jedes die Hälfte des Parallelogrammes AEIG ist, so können wir die zusammengesetzten, und zwey zusammensetzenden, oder unter einem Winkel zugleich wirkenden Kräfte, durch die Seiten des Dreyeckes ausdrücken, welches die Hälfte des Parallelogrammes ist, dessen Seiten durch ihre Lagen die Richtungen, und durch ihre Längen die Stärken der Kräfte bestimmen, und wir bedürfen des ganzen Parallelogrammes nicht, um diese 3 Kräfte anzudeuten.

66.

Durch die Diagonal des Parallelogrammes wird eine zusammengesetzte Kraft ausgedrückt. §. 65. Jede Kraft kann durch eine gerade Linie angezeigt werden, und auf jeder Linie läst sich ein Parallelogramm bauen. Es kann daher auch mit allem Rechte jede Kraft, wie aus zwey anderen zusammengesetzt betrachtet werden, deren Stärken und Richtungen durch die Seiten jenes Parallelogrammes bestimmt sind, dessen Diagonal die als zusammengesetzt betrachtete Kraft ausdrückt.

67.

Was mit Recht als zusammengesetzt betrachtet wird, kann auch aufgelöset werden. Jede Kraft also kann in zwey andere aufgelöset werden, welche durch die Seiten des Parallelogrammes bestimmt sind, dessen Diagonale die aufzulösende Kraft andeutet, oder welche mit der aufzulösenden das Dreyeck bestimmen, welches die Hälfte des gedachten Parallelogrammes ist.

Die Natur wirkt nie durch die Auflösung, wohl aber durch die Zusammensetzung der Kräfte. Die Erklärung dieser Wirkungen muß durch die Auflösung der Kräfte gegeben werden, nachdem das Zusammengesetzte durch die Auflösung auf das deutlichste dargethan wird.

68.

Die Kräfte werden von der Beziehung, welche ihre Richtungen zur Richtung der Wirkung haben, in schief und gerade angewandte, oder auch ohne Zusatz in schiefe und gerade Kräfte eingetheilet. Ist die Richtung der Kraft mit der Richtung der Wirkung gleichlaufend, oder die nähmliche, so ist die Kraft gerade angewandt, und in Beziehung auf die Wirkung so zu betrachten, wie eine gleichlaufend wirkende Kraft. §. 60. Schliesset die Richtung der Kraft mit jener der Wirkung einen schiefen Winkel ein, das ist, von einer Seite einen gespitzten, von der anderen einen stumpfen, so wird sie schief genannt. Die so angewandte Kraft ist ein Mittelding zwischen gleichlaufend, und gerade entgegengesetzt wirkenden Kräften, kann daher weder ganz wirken, noch ganz getilget werden, sondern theils wirken, theils aber verlohren gehen. Um beyde diese Theile, folglich auch die eigentliche Wirkung der schiefen Kraft zu bestimmen, wird diese aufgelöset.

Hieraus erhellet, daß für den Winkel der Schiefe der gespitzte zu nehmen sey, welcher zwischen der Richtung der Kraft und der Wirkung eingeschlossen ist, und um diesen, und die Schiefe einer Kraft zu bestimmen, nebst der Richtung der Kraft auch jene der Wirkung bekannt seyn, folglich vor allem bestimmt werden müsse. Die nähmliche Kraft hat in Beziehung auf verschie-

dene

dene Wirkungen auch verschiedene Schiefe, folglich auch verschiedene Folgen.

69.

Weil nur die in der Richtung der Wirkung, oder mit dieser gleichlaufend wirkende Kraft zu derselben beyträgt, und die zur Richtung der Wirkung senkrechte gar nichts wirkt, so pflegen wir die schiefe Kraft, wenn es möglich ist, in eine zur Richtung der Wirkung gleichlaufende, die andere aber senkrechte aufzulösen. Jene wird die übrigende, diese die erloschene genannt. Die Richtung der gesuchten Wirkung muß bestimmen, welche von beyden die übrige, oder erloschene sey.

Fig. 10. Wenn Fig. 10 auf die Fläche GK, mit einer Kraft wie AC ein Körper geworfen wird, damit dieser auf der nähmlichen Fläche über CK fortlaufe, so ist die Richtung der Wirkung GC, der schiefe Winkel folglich ACG und wenn AC in eine gleichlaufende AE oder DC, und eine senkrechte Kraft AD oder EC aufgelöset wird, so ist jene die übrige oder wirkende, weil sie in der Richtung der Wirkung ist, diese aber die erloschene, indem von dieser der Körper an die Fläche GK nur angedrückt, folglich ganz was anderes als die gesuchte Bewegung über CK bewirkt wird, und eben daher die zur Richtung der Wirkung senkrechte Kraft neben dieser so zu sagen, vorübergehet. Wird durch den Anwurf

des

des Körpers mit der Kraft AC nicht seine Bewegung über CK, sondern der Durchbruch der Fläche in C gesucht, so ist die Richtung FC, ACF der schiefe Winkel, AD oder EC die übrige und wirkende, AE oder DC aber die erloschene, und nichts wirkende Kraft.

Wenn man bey der ersten Auflösung der schiefen Kraft keine erlangt, welche mit der Richtung der Wirkung gleichlaufend wäre, so ist jene unter den zwey durch die Auflösung erhaltenen, welche einer zur Wirkung gleichlaufenden näher kömmt, noch einmal aufzulösen, und dieß so lang, bis eine gleichlaufende erhalten wird.

70.

Die in der Richtung GC im ersten, oder in FC im zweyten Falle angewandte Kraft AC, würde mit ihrer ganzen Stärke wirken, eine Wirkung wie AC leisten. §. 68. In der Richtung AC angebracht, giebt sie die Wirkung wie AE oder DC im ersten, und AD oder EC im zweyten Falle. Jede dieser Wirkungen ist kleiner, als eine wie AC. Dieß wird durch das Verhältniß der Seiten AC, AD und DC des rechtwinklichten Dreyeckes ACD erwiesen. Eine Kraft kann also nur mit Verlust schief angewandt werden, und ist nur alsdann so anzuwenden, wenn es die Umstände nicht anders gestatten, oder die Kraft nicht anderes vermindert werden könnte, und doch zu schwächen wäre.

71.

Um die Frage, ob bey der Zusammensetzung der Kräfte von diesen etwas verlohren gehe oder nicht? deutlich zu beantworten, betrachten
Fig. 9. wir Fig. 9 die zusammengesetzte AI, und die 2 unter dem Winkel GAE wirkende AE und AG aus welchen AI zusammengesetzt wird. In Beziehung auf die Bewegung in AI, ist AE und AG schief. Jede kann daher aufgelöset werden AE in AU und UE, AG aber in AS und SG. §. 69. UE und SG sind gleich, und gerade entgegengesetzt, heben sich also auf §. 61, und sind ohnehin nicht in der Richtung der Wirkung, sondern senkrecht zu dieser nur die Kräfte AS und AU sind in der Richtung AI. Nur diese zwey Theile der unter dem Winkel GAE wirkenden Kräfte tragen zur Bewegung in AI bey, sind im eigentlichen Verstande die zusammensetzenden Kräfte, und, weil die Geometrie beweiset, daß $AS + AU = AI$, so gehet bey der Zusammensetzung der Kräfte von den eigentlichen zusammensetzenden nichts verlohren. Nimmt man aber im eigentlichen Verstande die ganzen unter dem Winkel GAE wirkenden Kräfte AE und AG für die zusammensetzenden, so müssen von diesen die zwey Theile SG und UE verlohren gehen, nachdem $AE + AG$ jederzeit größer seyn muß, als AI.

72.

Daß die Diagonale des Parallelogrammes desto grösser, je kleiner, und desto kleiner seyn müsse, je grösser die gegenüber stehenden Winkel sind, zwischen welchen selbe begriffen wird, erweiset die Geometrie. Auch die aus zweyen unter einem Winkel zugleich wirkenden Kräften zusammensetzte, und durch die Diagonale des Parallelogrammes ausgedrückte Kraft §. 65. muß desto grösser, je kleiner, und desto kleiner seyn, je grösser der Winkel ist, unter welchem die zwey Kräfte wirken. Wenn die Kräfte einen stumpfen Winkel von 180° einschliessen, ihre Richtungen folglich in eine gerade Linie fallen, sind sie gerade entgegengesetzt, und es wirkt nur ihre Differenz. §. 61. Ist aber der begriffene Winkel unendlich klein, dergleichen wir uns auch zwischen zwey gleichlaufenden Linien eingeschlossen denken können, so sind die Richtungen der Kräfte gleichlaufend, und die Wirkung wie die Summe derselben. §. 60. Die Wirkung zweyer zugleich wirkenden Kräfte ist die kleinste, wenn sie wie die Differenz, die größte, wenn sie wie die Summe der Kräfte ist. Je grösser der Winkel ist, unter welchem die Kräfte wirken, desto mehr sind sie entgegengesetzt, desto näher der kleinsten aller möglichen Wirkungen. Je kleiner der Winkel, den die Richtungen der Kräfte einschliessen, desto weniger mangelt ihnen, um gleichlaufend

zu

zu seyn, und die größte aller durch sie möglichen Wirkungen zu leisten.

Die Auflösung der unter einem Winkel zu-
Fig. 9. gleich wirkenden Kräfte, welche Fig. 9 bey den Kräften AE und AG gemacht wurde, zeiget, daß die zwey gleichen Kräfte SG und UG, welche sich heben, folglich zur Zusammensetzung nichts beytragen, §. 71, desto größer sind, je größer der Winkel GAD ist, den ganzen Kräften AE und AG gleich werden, sobald GAE ein stumpfer Winkel 180°, das ist, eine gerade Linie wird, ganz aber verschwinden, oder unendlich klein werden, so bald GAU ein unendlich kleiner Winkel ist.

Viertes Kapitel.

Von

der gleich- und ungleichförmigen Bewegung.

73.

In Rücksicht auf die Geschwindigkeit ist die Bewegung gleich- oder ungleichförmig. Denn die Geschwindigkeit der Bewegung muß unverändert bleiben, oder verändert werden; der Körper folglich in gleichen Zeiten gleiche, oder ungleiche Räume zurücklegen §. 10.

74.

Die Veränderung, welche an der Geschwindigkeit ununterbrochen vorkömmt, kann nur Wachsthum oder Abnahme seyn. Die ungleichförmige Bewegung ist daher zu- oder abnehmend. Der in gleichen Zeitchen die Geschwindigkeit treffende Wachsthum nicht minder, als die Abnahme ist gleich oder ungleich. Aus diesem Grunde wird die zu- und abnehmende Bewegung in gleich- und ungleichförmig, zu- und abnehmend eingetheilet.

Wenn in einem Theile der Bewegungszeit die Geschwindigkeit unverändert bleibt, in dem anderen durch Wachsthum oder Abnahme verändert wird, so ist die Bewegung der ganzen Zeit nicht von einer und der nähmlichen Art, sondern es sind zwey oder drey aufeinander ununterbrochene, folgende Bewegungen verschiedener Art vorhanden.

75.

Von der gleichförmigen Bewegung ist in Rücksicht ihrer Geschwindigkeit, weil diese durch die ganze Bewegungszeit die nähmliche bleibt, nichts zu bemerken, als was § 10 von der Geschwindigkeit im allgemeinen erwiesen ist worden. Da also in diesem Kapitel die Bewegung blos in Beziehung auf die Geschwindigkeit betrachtet wird, kömmt nur die ungleichförmige, zu- und abnehmende Bewegung zu untersuchen, und das Verhältniß, welches die Geschwindigkeiten, Räume und Zeiten dieser Bewegungen untereinander haben, zu bestimmen.

76.

Jeder mit zunehmender Bewegung in der ganzen Zeit beschriebene Raum, ist wie die Summe aller Geschwindigkeiten, welche der Körper währender Bewegung hatte.

Die ununterbrochen wachsende Geschwindigkeit macht, daß die Bewegung zunehmend sey. §. 74. Der in unendlich kleinen Zeitchen die Geschwindigkeit treffende Wachsthum ist unendlich klein, und die Bewegung kann in jedem dieser Zeitchen für gleichförmig, oder unverändert angesehen werden. §. 21. Bey jeder zunehmenden Bewegung sind daher so viel aufeinander ununterbrochen folgende verschiedene Geschwindigkeiten zu betrachten, als unendlich kleine, und ununterbrochen aufeinander folgenden Zeitchen in der ganzen Bewegungszeit enthalten werden, und jede dieser Geschwindigkeiten ist durch die Dauer ihres unendlich kleinen Zeitchens für unverändert, die Bewegung folglich für gleichförmig anzusehen. §. 73. Diese unendlich kleinen Zeitchen sind gleich, jede dieser Geschwindigkeiten wie der in dem nähmlichen Zeitchen zurückgelegte Raum. §. 10. Hiemit sind bey jeder zunehmenden Bewegung zwey ununterbrochene Reihen, eine der wachsenden Geschwindigkeit, die andere der zunehmenden Räume vorhanden, in welchem jede zwey der Ordnung nach gleich stehende Glieder verhältnißmässig sind. Auch die zwey Summen dieser Reihen müssen daher verhältnißmässig seyn. Die Summe dieser Räume ist nichts anders, als der aus diesen Theilen bestehende in der ganzen Bewegungszeit beschriebene Raum. Dieser ist also, wie die Summe gedachter Geschwindigkeiten.

Drücken wir den Raum durch den Anfangsbuchstaben R, die Summe der Geschwindigkeiten durch SG aus, so ist für jede zunehmende Bewegung R : : SG.

Kann die Reihe der zunehmenden Geschwindigkeiten summiret werden, so kann durch diese Summe auch das Verhältniß des in zunehmender Bewegung zurückgelegten Raumes bestimmt werden. Mit alleiniger Beyhilfe der Anfangsgründe der Mathematik, oder mit Beyhilfe der Elementarmathematik, kann nur die Reihe der Geschwindigkeiten einer gleichförmig zunehmenden Bewegung summiret werden. Es ist daher auch nur diese zunehmende Bewegung der Gegenstand unserer Betrachtungen.

77.

Die letzte, oder Endgeschwindigkeit der gleichförmig zunehmenden Bewegung, ist wie das Produkt aus der beschleunigenden Kraft in die ganze Bewegungszeit.

Letzte, oder die Endgeschwindigkeit ist überhaupt jene, welche der sich bewegende Körper in dem letzten unendlich kleinen Zeitchen seiner Bewegung hat. Da es keinen Sprung in der Natur giebt, so muß die erste Geschwindigkeit einer jeden, folglich auch gleichförmig zunehmenden Bewegung unendlich klein seyn, und durch die in den folgenden unendlich kleinen Zeitchen erhaltenen Wachsthüme, zu der bestimmten Größe gelangen, welche sie am Ende der Bewegung hat. Die letzte Geschwindigkeit jeder gleichförmig zunehmenden Bewegung ist daher nichts anderes, als eine Summe aller der Wachsthüme, welche die Geschwindigkeit in den unendlich kleinen ununterbrochen aufeinander folgenden Zeitchen, deren Summe die ganze Bewegungszeit ist, erhalten hat. Diese Summe der Wachsthüme ist desto größer, je größer ein jeder der untereinander gleichen Wachsthüme ist, und jemehr diese sind. Die Größe dieser gleichen Wachsthüme ist, wie ihre Ursache, die beschleunigende oder den Wachsthum bewirkende Kraft. Die Zahl dieser Wachsthüme ist desto größer, je größer die Zahl der unendlich kleinen Zeitchen ist, welche zusammengenommen die ganze Bewegungszeit ausmachen, je größer oder länger diese Zeit ist. Die letzte Geschwindigkeit jeder gleichförmig zunehmenden Bewegung wird daher durch die Stärke der wirkenden beschleunigenden Kraft, und Länge oder Dauer der Bewegungszeit, das ist: durch das

Pro-

Produkt aus der beschleunigenden Kraft in die Bewegungszeit bestimmt.

Die letzte, oder Endgeschwindigkeit sey G, die beschleunigende Kraft = K, die Bewegungszeit = Z, so haben wir G::KZ, das Verhältniß der letzten Geschwindigkeit einer gleichförmig zunehmenden Bewegung allgebraisch ausgedrückt.

78.

Der mit gleichförmig zunehmender Bewegung in der ganzen Zeit zurückgelegte Raum ist: wie das halbe Produkt aus der letzten Geschwindigkeit in die ganze Bewegungszeit, wie dieses ganze Produkt, wie das Quadrat der Endgeschwindigkeit, wie das Quadrat der Bewegungszeit, und endlich wie das Produkt aus der beschleunigenden Kraft in das Quadrat der Zeit.

In gleichförmig zunehmender Bewegung wächst die Geschwindigkeit beständig und gleich. §. 74. Die vergangenen Zeiten wachsen auch beständig und gleich, und zwar in der Reihe der natürlichen Zahlen: 1. 2. 3. 4. 5. u. s. w. Auch die Geschwindigkeiten der gleichförmig zunehmenden Bewegung wachsen in dieser Reihe der natürlichen Zahlen, und ihre Summe ist wie die Summe dieser Reihe. Die Reihe der natürlichen Zahlen ist arithmetisch, ihre Summe daher dem halben Produkte aus der Summe der äußersten in die Anzahl der Glieder gleich;

$s = \frac{(a \times o)\,n}{2}$. Die Summe der Geschwindigkeiten der gleichförmig zunehmenden Bewegung also ist auch dem halben Produkte aus der Summe der ersten und letzten, in die Anzahl der Geschwindigkeiten gleich. Die erste Geschwindigkeit ist unendlich klein, weil es keinen Sprung in der Natur giebt, verschwindet also in Vergleich der letzten. Die Anzahl der Geschwindigkeiten ist die ganze Bewegungszeit, weil bey jeder zunehmenden Bewegung so viel verschiedene immer größere, und größere Geschwindigkeiten vorkommen, als unendlich kleine, und gleiche ununterbrochen aufeinander folgende Zeitchen in der ganzen Bewegungszeit enthalten sind. Die Summe aller Geschwindigkeiten einer gleichförmig zunehmenden Bewegung also ist dem halben Produkte aus der letzten Geschwindigkeit in die Zeit gleich. Die Summe der Geschwindigkeiten haben wir §. 76. für jede zunehmende Bewegung überhaupt durch SG ausgedrückt. Die letzte Geschwindigkeit sey G, die Bewegungszeit Z. Es ist also in jeder gleichförmig zunehmenden Bewegung $SG = \frac{GZ}{2}$.

Die halben Produkte sind wie die ganzen, also ist auch: SG : : GZ.

In der Reihe der natürlichen Zahlen, in welcher die Geschwindigkeiten der gleichförmig zunehmenden Bewegung wachsen, ist das letzte

Glied jederzeit zugleich die Anzahl der Glieder, kann daher statt der Anzahl der Glieder, und diese statt jenem genommen werden. Die letzte Geschwindigkeit in der gleichförmig zunehmenden Bewegung ist der Summe aller gleichen Wachsthüme gleich, welche die Geschwindigkeit dieser Bewegung in der ganzen Zeit erhalten hat. Die letzte Geschwindigkeit drückt daher die Anzahl aller gewesenen Geschwindigkeiten eben so, wie die Zeit aus, und kann im Verhältniße statt dieser, und diese statt jener gesetzt werden. Diesemnach wird $SG :: GG :: G^2 :: ZZ :: Z^2$ seyn.

Endlich ist $G :: KZ$. §. 77. KZ, daher im zweyten Verhältniße statt G gesetzt, ist auch $SG :: KZ^2$.

$SG :: R$. §. 76, es ist also auch $R :: \frac{GZ}{2}$; $GZ :: G^2 : Z^2 :: KZ^2$.

79.

Wenn im Verhältniße $R :: GZ$, der Werth des G ausgedückt wird, so ist $G :: \frac{R}{Z}$, die letzte, und weil jede als die letzte betrachtet werden kann, auch jede Geschwindigkeit einer gleichförmig zunehmenden Bewegung in geometrischem Verhältniße der Zeit zum Raum.

Werden die Räume zweyer sich gleichförmig zunehmend bewegender Körper verglichen, so müssen die §. 78 in Verhältnissen stehenden Größen für den zweyten Körper durch kleine

Buchstaben ausgedrückt, und so in eine Proportion zusammengesetzt werden, welche unter verschiedenen Bedingnißen auch verschiedene Aenderungen leidet. Z. B. kann dienen: $R:r::\frac{GZ}{2}:\frac{gz}{2}::GZ:gz$ wenn die Zeiten gleich gesetzt werden, $Z=z$ so ist: $R:r::G:g$. Die Räume wie die letzten Geschwindigkeiten.

Nehmen wir den Raum, welcher mit der letzten Geschwindigkeit in einem dem letzten gleichen Zeitchen beschrieben würde, für das Maß der letzten Geschwindigkeit an, so ist nicht nur allein $R::GZ$ sondern auch $R=\frac{GZ}{2}$.

80.

Die mit gleichförmig zunehmender Bewegung in ganzen Zeiten beschriebenen Räume wachsen in der Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen.

Diese Räume sind wie die Quadrate der vergangenen Zeiten. §. 78. Die Quadrate der Zeiten sind in der Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen: 1. 4. 9. 16. 25. u. s. w., nachdem die Zeiten in der Reihe der natürlichen Zahlen wachsen. Auch die in ganzen Zeiten mit gleichförmig zunehmender Bewegung beschriebenen Räume wachsen wie die Quadrate der natürlichen Zahlen.

81.

Von Mechanikern wird angenommen, und aus den Schwankungen der Pendule erwiesen, daß der frey gegen die Erde fallendn Körper, dessen Bewegung, wie wir bald sehen werden, gleichförmig zunehmend ist, wenn die Hinderniße beseitiget wären, in einer Sekunde nächstens 15 Schuh durchlaufe. Der Raum, welcher in einer Sekunde mit gleichförmig zunehmender Bewegung zurückgelegt wird, ist daher jederzeit bekannt, und wenn eine bestimmte Zeit gegeben ist, dessen Raum gesucht wird, so sind in der Proportion die Quadrate der Zeiten wie die Räume §. 79, drey Glieder; zwey Quadrate der Zeiten nähmlich, und der Raum einer Sekunde bekannt, und das vierte Glied, der gesuchte Raum, kann ohne weiterem durch die Auflösung d. aus den Produkten der äußersten und mitteren erhaltenen Gleichung bestimmt werden. Wird der in bestimmter Zeit mit gleichförmig zunehmender Bewegung beschriebene Raum gegeben, und die dazu angewandte Zeit gefodert, so sind abermal drey Glieder gedachter Proportion bekannt, und das vierte in dem Quadrate der gesuchten Zeit bestehende Glied kann leicht gefunden werden, dessen Quadratwurzel die bestimmte Zeit ist. Z. B. Wenn der in 1′ beschriebene Raum gesucht würde, so wäre dieser aus der Proportion $1''^2 : (60'')^2 :: 15 ; x = 54000$

zu bestimmen. Würde dieser Raum gegeben, und die dazu erforderliche Zeit gesucht, so wäre diese aus folgender Proportion $15 : 54000 :: 1^2 : x^2$ zu finden.

82.

Räume, welche mit gleichförmig zunehmender Bewegung in einzelnen Zeiten beschrieben werden, wachsen in der Reihe der natürlichen ungeraden Zahlen $\div$ 1. 3. 5. 7. 9. u. s. w.

Wenn man von dem Raume, welcher in einer bestimmten ganzen, und aus gleichen Zeitchen als Theilen zusammengesetzt betrachteten Zeit beschrieben wird, den Raum abziehet, der in einer um einen solchen Theil kürzeren Zeit zurückgelegt ist worden, so ist in dieser Differenz der Raum bestimmt, welcher in dem letzten für sich genommenen gleichen Theile der längeren Zeit beschrieben ist worden. Die in ganzen immer um einen gleichen Theil wachsenden Zeiten mit gleichförmig zunehmender Bewegung zurückgelegten Räume wachsen wie die Quadrate der natürlichen Zahlen: 1. 4. 9. 16. 25 u. s. w. §. 79. Ziehet man also in dieser Reihe jedes vorhergehende Glied von seinem nächst folgenden ab, so müssen die Reste: 1. 3. 5. 7. 9. u. s. w. welche die natürlichen aufeinander folgenden ungeraden Zahlen sind, die in einzelnen Zeiten beschriebenen Räume der gleichförmig zunehmenden Bewegung ausdrücken.

83.

Da 15. Sh. der Raum 1″, welche als die erste einzelne Zeit betrachtet werden kann, bekannt sind, so haben wir drey Glieder einer geometrischen Proportion, so bald bestimmt wird welcher einzelnen Zeit Raum gesucht werde, und können diesen aus der Proportion finden, in welcher das erste Glied 1, als das erste Glied in der Reihe der natürlichen ungeraden Zahlen, das zweyte jenes Glied in dieser Reihe, welches durch die gegebene Zeit bestimmt wird, das dritte aber 15 Sh. der in der ersten Sekunde beschriebene Raum ist. Z. B. Wenn der in der fünften Sekunde beschriebene Raum gesucht würde, so müßte die Proportion also angenommen werden, $1 : 9 :: 15 : x = 135$. Wenn die Aufgabe umgekehrt und gesucht wird, in der wievielten Sekunde 135 Sh. beschrieben werden, so giebt die Proportion $15 : 135 :: 1 : x$ dieses $= 9$ das fünfte Glied in der Reihe der natürlichen ungeraden Zahlen, wodurch die fünfte Sekunde für den gegebenen Raum bestimmt ist.

84.

Der mit abnehmender Bewegung in der ganzen Zeit beschriebene Raum ist wie die Summe der Geschwindigkeiten dieser Bewegung.

Dieß folgt aus eben den Gründen, aus welchen §. 76. gefolgert ist worden, daß der mit

zu=

zunehmender Bewegung in der ganzen Zeit zurückgelegte Raum, wie die Summe der Geschwindigkeiten dieser Bewegung sey. Der ganze Unterschied, welcher bey der Anwendung gedachter Gründe hier zu beobachten kömmt, folget daraus, daß die Geschwindigkeit bey der abnehmenden Bewegung abnehme, mithin die erste die größte sey, da bey der zunehmenden es die letzte ist. Die Bemerkung dieses Unterschiedes ist zu leicht, als daß dieserwegen die Gründe hier wiederholet werden sollten.

Wenn also die Summe der Geschwindigkeit SG und der Raum R genennt wird, ist auch bey jeder abnehmenden Bewegung R : : SG.

85.

Bey der gleichförmig abnehmenden Bewegung ist der in der ganzen Zeit beschriebene Raum wie das halbe Produkt aus der ersten Geschwindigkeit in die Zeit der Bewegung, wie dieses ganze Produkt, wie das Quadrat der ersten Geschwindigkeit, wie das Quadrat der Zeit.

Da in der gleichförmig abnehmenden Bewegung die Geschwindigkeit beständig und gleich abnimmt §. 74, wie die künftigen Zeiten, welche in der Reihe der natürlichen Zahlen ÷ 6. 5. 4. 3. 2. 1 abnehmen, so wird mit dieser verhältnißmässigen Veränderung auf die nähmliche §. 78 angewandte Art erwiesen, daß:

SG

$SG :: \frac{GZ}{2} :: GZ : G^2 :: Z^2$ sey, wenn G die erste Geschwindigkeit, Z aber die Zeit der gleichförmig abnehmenden Bewegung ausdrückt.

Weil alsdann auch bey jeder abnehmenden Bewegung $R :: SG$ ist. §. 84, so muß auch bey jeder gleichförmig abnehmenden Bewegung $R :: \frac{GZ}{2} :: GZ :: G^2 :: Z^2$ seyn.

86.

Weil jede Geschwindigkeit der gleichförmig abnehmenden Bewegung für die erste angesehen werden kann, und $R :: GZ$, wenn der Werth des G ausgedrückt wird, $G :: \frac{R}{Z}$ das geometrische Verhältniß der Zeit zum Raume giebt, so ist auch jede Geschwindigkeit der gleichförmig abnehmenden Bewegung in diesem Verhältniße.

Eben dieser Gründe wegen sind auch von den Räumen der gleichförmig abnehmenden Bewegung die übrigen Bemerkungen verhältnißmäßig zu nehmen, welche wir §. 79 angeführet haben.

87.

Mit gleichförmig abnehmender Bewegung in ganzen Zeiten beschriebene Räume nehmen, wie die Quadrate der natürlichen Zahlen z. B. 36. 25. 16. 9. 4. 1, ab.

Die

Die in ganzen Zeiten mit gleichförmig abnehmender Bewegung durchgelaufenen Räume sind wie die Quadrate der Zeiten. §. 85. Diese, als künftige betrachtet, nehmen wie die Quadrate der natürlichen Zahlen ab. Auch die in ganzen Zeiten mit gleichförmig abnehmender Bewegung zurückgelegten Räume müssen daher wie diese Quadrate abnehmen.

88.

Die in einzelnen Zeiten dieser Bewegung beschriebenen Räume nehmen in der Reihe der ungeraden natürlichen Zahlen, z. B. 11. 9. 7. 5. 3. 1. ab.

Um den in was immer für einer einzelnen Zeit, oder viel mehr Theile der Zeit beschriebenen Raum bey einer gleichförmig abnehmenden Bewegung zu bestimmen, muß von dem in der ganzen mit Inbegriff des bestimmten Theiles genommenen Zeit zurückgelegten, jener Raum abgezogen werden, welcher in. einer um gedachten Theil kürzeren Zeit beschrieben wird. Diese Räume werden durch die Quadrate der natürlichen Zahlen ausgedrückt. §. 87. Wenn daher in der abnehmenden Reihe dieser Quadrate jedes folgende Glied von seinem vorhergehenden abgezogen wird, so geben die Differenzen die Räume der einzelnen Zeiten einer gleichförmig abnehmenden Bewegung in der abnehmenden Reihe der natürlichen ungeraden Zahlen.

Wenn

89.

Wenn sich der Körper mit der letzten Geschwindigkeit einer gleichförmig zunehmenden Bewegung gleichförmig abnehmend bewegt, beschreibet er in gleicher Zeit eben so viel Raum, als er mit gleichförmig zunehmender Bewegung beschrieben hat.

In der gleichförmig zunehmenden Bewegung ist $R = \frac{GZ}{2}$, wenn G die letzte Geschwindigkeit bedeutet. §. 78. Bey der gleichförmig abnehmenden Bewegung drückt G die erste Geschwindigkeit aus, und es ist $R = \frac{GZ}{2}$. §. 85. Die letzte Geschwindigkeit der gleichförmig zunehmenden ist vermög Bedingniß auch die erste der gleichförmig abnehmenden Bewegung, und die Zeiten sind gleich. Die halben Produkte aus der letzten und aus der ersten Geschwindigkeit in die Zeit, sind daher Produkte der nähmlichen, oder gleicher Faktoren, folglich unter einander gleich.

90.

In der gleichförmigen Bewegung beschreibt der Körper mit der letzten Geschwindigkeit einer gleichförmig zunehmenden Bewegung in gleicher Zeit zweymal so viel Raum, als er in der gleichförmig zunehmenden Bewegung zurückgelegt hat.

Für

Für die gleichförmige Bewegung ist $R :: GZ$. §. 10, und wenn der in einer bestimmten Zeit beschriebene Raum für das Maß der Geschwindigkeit bestimmt wird, auch $R = GZ$. Für die gleichförmig zunehmenden $R = \frac{GZ}{2}$. §. 79.

Wenn die Geschwindigkeit der gleichförmigen mit der letzten Geschwindigkeit der gleichförmig zunehmenden Bewegung die nähmliche ist, und die Zeiten gleich sind, so ist $GZ = \frac{2\,GZ}{2}$ folglich auch der mit gleichförmiger Bewegung durchgelaufene gleichzeitige Raum zweymal so groß, als jener der gleichförmig zunehmenden.

Fünftes Kapitel.

Von

der geraden- und krummlinigten Bewegung.

91.

Die Richtung der Bewegung muß so, wie die Geschwindigkeit unverändert bleiben, oder stäts verändert werden. Mit unveränderter Richtung durchläuft der Körper eine gerade Linie, als den Weg des mit unveränderter Richtung sich bewegenden Punktes, und eben daher wird diese Bewegung in Beziehung auf ihre Richtung geradelinigt genannt. Aendert der sich bewegende Körper seine Richtung beständig, so beschreibet er, wie ein eben so sich bewegender Punkt, eine krumme Linie, und seine Bewegung ist krummlinigt.

92.

Da der sich bewegende Körper die erhaltene Richtung so lange beybehalten muß bis er zur Aenderung derselben bestimmt wird, und nach erhaltener dieser Bestimmung selbe ändern muß; 1. Abh. §. 44, so ist von der gradlinigten Bewegung in Beziehung auf ihre Richtung nichts zu bemerken. Sie bleibt in dieser Beziehung unverändert, nur muß auf die Zahl der wirkenden Kräfte und ihre Geschwindigkeit der Bedacht genommen werden, welchen wir in den vorhergehenden zwey Kapiteln erkläret haben.

Wenn der Körper durch einen Theil seiner Bewegungszeit eine unveränderte Richtung hält, in dem anderen Theil der Zeit selbe stäts ändert, so ist seine Bewegung nicht von einer Art, sondern er hat zwey aufeinander folgende Bewegungen von verschiedener Art. Erstere ist gerad, die zweyte aber krummlinigt. Von jener ist in Beziehung auf die Richtung, was Anfangs dieses §. bemerkt wurde, von dieser, was im folgenden erwiesen wird, in Acht zu nehmen.

93.

Durch die Wirkung einer einzigen Kraft kann keine krummlinigte Bewegung erzeugt werden. Die Wirkungen zweyer Kräfte wenigstens werden dazu erfordert.

Dieß scheinet dadurch erwiesen, daß eine Kraft, durch ihre Stärke und Richtung bestimmt, diese, und keine andere Kraft sey, eine einzige Kraft daher nur eine einzige Richtung habe, zur krummlinigten Bewegung aber so viel verschiedene Richtungen erfordert werden, als der Körper in dieser Bewegung Veränderungen seiner Richtung erhält.

94.

Von gleichlaufend oder gerade entgegengesetzt wirkenden Kräften zugleich angetrieben, kann der Körper keine krumme Linie beschreiben.

Wenn

Wenn der Körper von zwey gleichlaufend, oder gerade entgegengesetzt auf ihn zugleich wirkenden Kräften angetrieben wird, bleibt er immer in der geraden Linie, in welcher er sich von einer einzigen seiner Kräfte angetrieben bewegt hatte. §§. 60, 61. In beyden dieser Fälle hat er folglich eine geradlinigte Bewegung.

95.

Die Richtungen der Kräfte müssen einen Winkel einschließen, wenn der von denselben angetriebene Körper eine krummlinigte Bewegung haben soll.

Zur krummlinigten Bewegung des Körpers wird nebst dem, daß wenigstens zwey Kräfte auf ihn wirken müssen, auch erfordert, daß diese Kräfte weder gleichlaufend, noch gerade entgegengesetzt wirken. Die Richtungen der Kräfte, welche, da sie zugleich auf den nähmlichen Körper wirken, weder gleichlaufend noch gerade entgegengesetzt sind, schliessen einen Winkel ein, der größer oder kleiner ist, je nachdem die Richtungen gerade entgegengesetzten, oder gleichlaufenden näher kommen.

96.

Wenn die zugleich wirkenden Kräfte, deren Richtungen einen Winkel einschliessen, gleichförmig, das ist, in gleichen Zeiten gleich wirkend sind, oder im nähmlichen Verhält-

niße wirken, ist die Bewegung des Körpers nicht krumm, sondern geradlinigt. Der zurückgelegte Raum ist eine gerade Linie.

Fig. 9. Der von zwey gleichförmigen Kräften AB und AD unter dem Winkel BAD zugleich angetriebene Körper, sey A Fig. 9. Die Eintheilung der Kräfte sey so, wie ihre gleichzeitige Wirkungen dreyer ununterbrochen aufeinander folgenden unendlich kleinen Zeitchen, AE = EF = FB und AG = GM = MD. Durch die gleichlaufenden DC und BC, werde das Parallelogramm ABCD ergänzt, aus E und F gleichlaufend mit AD, EQ und FR, aus G und M aber gleichlaufend zu AB, die Linien GL und MP gezogen. In der ersten unendlich kleinen Zeit beschreibt A die Diagonale AI, und gelanget in I. §. 62. In dem zweyten gleichen Zeitchen von EF, GM, oder eigentlich von IK und IN unter gleichen Winkel angetrieben, legt der Körper IO zurück, und ist am Ende dieses Zeitchens in O. Eben so durchläuft er in dem dritten unendlich kleinen und gleichen Zeitchen OC, und ist am Ende in C. Liegen die drey unendlich kleinen §. 21. Diagonalen in der nähmlichen geraden Linie, so hat A, von zwey gleichförmigen unter dem Winkel BAD auf ihn zugleich wirkenden Kräften AB und AD angetrieben, eine gerade Linie beschrieben. Die Bewegung folglich unter diesen Umständen ist gerad, und nicht krummlinigt.

Ver-

Vermög Bedingniß ist AE = EF = FB, und AG = GM = MD, nähmlich so, wie die gleichzeitigen Wirkungen der gleichförmigen Kräfte AB und AD sind. Es ist daher ÷ AE : AG :: EF : GM :: FB : : DM, und weil AE = GI = MN, EF = NO = QR, und FB = RC, ist auch GI : AG :: NO : GM :: RC : MD. Die Summe der vorhergehenden ist zur Summe der folgenden, wie jedes Glied zu seinem folgenden, folglich. GI : AG :: GI oder MN + NO : AG + GM :: GI oder DQ + QR + RC : AG + GM + MD, das ist GI : AG :: MO : AM :: DC : AD. Die Winkel AGI AMO und ADC, sind der gleichlaufenden durch die nähmliche AD geschnittenen Linien wegen gleich, und Dreyecke deren einen gleichen Winkel begreifende Seiten im Verhältniße stehen, sind ähnlich. Die Dreyecke GAI, MAO und DAC sind ähnlich. Sie könnten es aber nicht seyn, wenn AI, IO und OC nicht in der nähmlichen geraden Linie lägen, weil alsdann der Winkel DAC nicht gemeinschaftlich, und die Winkel AGI, AOM und ACD nicht gleich wären.

Wenn die Kräfte AB und AD nicht gleichförmig, sondern nur verhältnißmäßig wirken, folglich nicht in drey gleiche, sondern nur im nähmlichen Verhältniße untereinander stehende Theile getheilet werden, daß AE : AG :: EF : GM :: FB : AD sey, so wird auf die nähmliche

Art erwiesen, daß die Diagonalen AI, IO und OC, in einer und der nähmlichen geraden Linie liegen, und die Bewegung des Körpers geradlinigt sey.

Daß die Bewegung unter den gesetzten Bedingnißen nicht anders, als geradlinigt seyn könne, ist daraus klar, daß der von Kräften wie AB und AD unter dem Winkel BAD zugleich angetriebene Körper die ganze Bewegungszeit hindurch in dem nähmlichen Verhältniße von den Flächen AB und AD sich entferne, so bald die Kräfte gleichförmig, oder auch nur im nähmlichen Verhältniße wirken, indem in diesen Umständen die Lage jedes Punktes in AI sowohl, als IO und OC durch das Verhältniß AE : AG bestimmt wird, die Lage aller Punkte dieser Diagonalen also in Beziehung auf die Flächen AB und AD die nähmliche ist. Welches nur in einer und der nähmlichen geraden Linie seyn kann.

97.

Der von zwey unter einem Winkel zugleich, und nicht im nähmlichen Verhältniße auf ihn wirkenden Kräften angetriebene Körper, beschreibt eine krumme Linie. Seine Bewegung ist daher krummlinigt.

Fig. 11. Der Körper A Fig. 11 werde von zwey Kräften wie AB und AD, das ist, mit welchen er, wenn jede besonders wirkte, die Räume

me AB und AD beschrieb, unter dem Winkel BAD zugleich angetrieben, welche nicht im nähmlichen Verhältniße wirket. Jede dieser zwey Kräfte sey im nähmlichen Verhältniße getheilet, in welchem sie wirket. Der Bestimmung wegen AB wie eine gleichförmige in AE = EF = FB, AD aber als eine gleichförmig zunehmende in AG, GM MD, wie 1, 3, 5, die Räume der einzelnen Zeiten einer gleichförmig zunehmenden Bewegung. §. 82. Das Parallelogramm werde ergänzt, und aus den Eintheilungspunkten die gleichlaufenden, wie in der vorhergehenden Figur gezogen. In der ersten unendlich kleinen Zeit wird der Körper die Diagonale AI, in der zweyten IO, in der dritten OC beschreiben, §. 62, deren jede, wie eine mit gleichförmigen Kräfte zurückgelegte ist §. 21.

Daß diese drey Linien nicht einer und der nähmlichen geraden Linien Theile sind, ist aus dem erwiesen, daß die Dreyecke GAI, MAO und DAC wegen gleichlaufenden GI, MO und DC ähnlich seyn müßten, wenn AIOC eine gerade Linie wäre, folglich AG : GI :: AM : MO :: AD : DC und AG : GI :: AM — AG : MO — GI :: AD — AM : DC — MO. Das ist : AG : AE :: AM — AG : — AF : AE :: AD — AM AB — AE, oder AG : AE :: GM : EF :: MD : FB. Welches wider die gesetzte Bedingniß der in verschiedenem Verhältniße wirkenden Kräfte ist.

Daß aber AIOC eine krumme Linie sey ist leicht zu erweisen. AI, IO und OC in unendlich kleinen ununterbrochen aufeinander folgenden Zeitchen, vom Körper beschriebene Diagonalen sind unendlich klein, und unendlich wenig gegen einander geneigt, weil in unendlich kleiner Zeit nur ein unendlich kleiner Raum beschrieben werden, und der Körper von seiner Richtung nur unendlich wenig abweichen kann. §. 21. Die Linie AIOC also ist der Anfang eines aus unendlich kleinen und unendlich vielen unter unendlich kleinen Winkeln zusammenlaufenden Seiten, zusammengesetzten Vieleckes, das ist, einer krummen Linie, und diese beschreibt der Körper A unter gesetzten Bedingnißen.

98.

Daß die Krümmung der Linie AIOC von dem Verhältniße der Kräfte gegen einander, und von dem Winkel, unter welchem sie wirken, abhänge, ist daraus schon einleuchtend, daß durch den Winkel, auch eben dieses Verhältniß jenes der Abßzissen und Ordinaten bestimmt werde. Die krummen unter gesetzten Bedingnissen beschriebenen Linien sind daher nach Verschiedenheit der Winkel, und nach Verschiedenheit des Verhältnißes, in welchem die Kräfte wirken, verschieden.

Die Bewegungen der irdischen Körper sind in der That alle krummlinig, weil selbe aus ihrer

rer mit der Erde gemeinschaftlichen absoluten, und ihren relativen Bewegungen zusammengesetzt sind. Da wir aber nur diese relativen Bewegungen bemerken, so scheinet die Bewegung der irdischen Körper öfters geradlinigt zu seyn.

Sechstes Kapitel.

Vom

freyen Falle und Steigen der Körper auf der Erde, dann vom Herab- und Hinaufgehen über eine schiefe Fläche.

99.

Frey im genauesten Verstande würde nur der Körper fallen, welcher ohne die mindesten Hinderniße fiel. Auf der Oberfläche der Erde, welche mit Luft umgeben ist, hat der gegen die Erde herabfallende Körper zwar den Widerstand der Luft zu überwinden, doch halten wir seinen Fall für frey, und den eben so von der Erde sich erhebenden für einen frey steigenden Körper. Läuft der Körper über eine zur Oberfläche der Erde geneigte Fläche eines festen Körpers herab, so gehet er über eine schiefe Fläche herab; hinauf gehet er, wenn er sich an dieser Fläche erhebet. Um die Betrachtung dieser Bewegungen einfacher zu machen, setzen wir alle Hinderniße derselben beseitiget.

100.

Der freye Fall ist die Wirkung der Schwerbestimmung. Diese wirkt beständig, und auf der Erde dem Scheine nach auch gleich 1 Abh. §§. 53, 57. Im freyen Falle daher wächst die Geschwindigkeit beständig und gleich. Der freye Fall ist eine gleichförmig zunehmende Bewegung §. 74. und was von dieser im 4. Kapitel erwiesen ist worden, ist auch auf denselben auszudehnen.

Wenn die Geschwindigkeit des frey fallenden Körpers durch die Wirkung der Schwere ununterbrochene und gleiche Zuwächse erhält, so muß die Geschwindigkeit des frey steigenden Körpers durch eben diese Wirkung der Schwere, welche alsdann gerade entgegengesetzt ist, beständige und gleiche Abnahme leiden, und eine gleichförmig abnehmende Bewegung seyn. §. 74. Was also im 4ten Kap. von der gleichförmig abnehmenden Bewegung erwiesen ist, gilt auch von dem freyen Steigen der Körper.

Diesemnach müßte der Körper, welcher mit der letzten Geschwindigkeit des freyen Falles frey zu steigen anfängt, wenn alle äußerlichen Hinderniße beseitiget wären, in einer mit jener des freyen Falles gleichen Zeit eben so hoch steigen, als er herabgefallen ist. §. 89. Die äußeren

Hin-

Hinderniße bewirken, daß ein solcher Körper in der That nicht gerade so hoch steige, als er gefallen war.

101.

Die in und für sich selbst betrachtete Bestimmung der Schwere, durch deren Trieb der Körper frey fällt, oder zu fallen sich bestrebet, nennen wir die unbedingte oder *absolute*. Jene aber, oder viel mehr jener Theil der absoluten, mit welchem ein Körper über die schiefe Fläche herabgehet, ist die *relative* Schwere. Diese erhält man durch die Auflösung der absoluten Schwerbestimmung, wie wir gleich sehen werden.

102.

Die relative Schwere wirkt eben so, wie die absolute, beständig und gleich.

AC Fig. 12, welche mit dem Horizont den schiefen Winkel ACB einschließt, sich folglich gegen jenen an einer Seite mehr als an der anderen neigt, ist eine schiefe Fläche. AC als Linie betrachtet ist die *Länge*, AB die von dem höchsten Punkte der Länge zum Horizont herabgelassene senkrechte die *Höhe*, und BC, die zwischen der Höhe und dem Berührungspunkte begriffene Strecke des Horizontes; oder einer anderen mit dieser gleichlaufenden Fläche, die Grundlinie der schiefen Fläche. Der auf dieser Grundlinie Fläche aufliegende, und als ein Punkt betrachtete Kör- Fig. 12.

per

per D wird von der Schwerbestimmung in DEF senkrecht zur Oberfläche der Erde angetrieben, §. 54 und diese seine Bestimmung kann durch DE ausgedrückt werden. DE ist in Beziehung auf AC schief, folglich in eine zu AC senkrechte DG, und eine parallele GE aufzulösen § 69. Die senkrechte Kraft DG wirkt zum Durchbruch der Fläche AC, wird daher von dessen Zusammenhange aufgehoben, und trägt zum Herabgehen über AC nichts bey. GE allein ist in der Richtung dieser Wirkung. Jener Theil der absoluten Schwere, mit welchem der Körper D über die schiefe Fläche herabgehet, oder die relative Schwere ist GE.

Weil nun die Dreyecke DGE, EFC und ACB ähnlich sind, so ist DE : GE : : AC : AB. Die absolute ist zur relativen Schwerbestimmung, wie die Länge zur Höhe der schiefen Fläche. Dieß Verhältniß ist an einer und der nähmlichen schiefen Fläche beständig. Auch das Verhältniß der absoluten zur relativen Schwere also ist bey der nähmlichen schiefen Fläche beständig, und die relative Schwere wirkt eben so, wie die absolute §§. 53, 57, beständig und gleich.

Drücken wir die absolute Schwere durch A, die relative durch R aus, die Länge und Höhe der schiefen Fläche aber durch L und H, so haben wir die allgemeine Proportion: A . R : : L : H,

103.

Von der relativen Schwere angetrieben gehet der Körper über die schiefe Fläche herab. Da also diese beständig und gleich wirkt §. 10 so muß die Geschwindigkeit des über die schiefe Fläche herabgehenden Körpers beständig und gleich zunehmend, diese Bewegung gleichförmig zunehmend seyn, und bey derselben alles eintreffen, was im 4ten Kapitel von der gleichförmig zunehmenden Bewegung erwiesen ist worden.

Gleichwie das Hinabgehen über eine schiefe Fläche, eine gleichförmig zunehmende Bewegung ist, eben so muß das Hinaufgehen, wegen der gerade entgegengesetzten Wirkung der relativen Schwere, eine gleichförmig abnehmende Bewegung seyn.

Wenn daher ein Körper mit der letzten nach dem Herabgehen über die schiefe Fläche erhaltenen Geschwindigkeit, an einer andern schiefen Fläche hinaufgehet, so müßte er an dieser eben so hoch hinaufgehen, als er an der andern herabgelaufen ist. §. 89. Die in der Ausübung unvermeidlichen Hinderniße bewirken, daß sich ein solcher Körper nicht gerade so hoch erhebe, als er herabgelaufen ist.

104.

Nachdem es erwiesen ist, das Herabgehen über die schiefe Fläche sey eine gleichförmig zunehmende Bewegung §. 103, so können die an dieser beschriebenen Räume zur Bestättigung dienen

nen, daß bey der gleichförmig zunehmenden Bewegung die in ganzen Zeiten beschriebenen Räume wie die Quadrate der natürlichen Zahlen, die in einzelnen Zeiten zurückgelegten aber in der Reihe der natürlichen ungeraden Zahlen wachsen.

Wenn die Länge einer schiefen Fläche in dem Verhältniße der natürlichen ungeraden Zahlen eingetheilet, und bey jeder Eintheilung ein Hebel angebracht ist, dessen kürzerer flacher Arm bey der Eintheilung anfängt, der längere aber mit einem Hammer versehen ist, welcher an eine an der Seite der schiefen Fläche angebrachte Schelle schlägt, indem der erstere Arm von dem auf der schiefen Fläche herablaufenden Körper niedergedrückt wird, so sind die zwischen jeden zwey Schällen begriffenen Zeiträume so gleich, daß man keinen Unterschied bemerkt. Die Zeiten folglich, in welchen die in dem Verhältniße der natürlichen ungeraden Zahlen wachsenden Räume auf der schiefen Fläche durchgelaufen werden, sind auch in der Ausübung, bey welcher die Hinderniße nicht ganz beseitiget werden können, so gleich, daß kein Unterschied merklich ist. Diese in einzelnen ununterbrochen aufeinander folgenden Zeitchen beschriebenen Räume sind, wenn mehrere derselben in eine Summe addiret werden, jederzeit wie die Quadrate der durch natürliche Zahlen ausgedrückten ganzen Zeiten, durch welche die Zahlen der zusammenaddirten Räume ausgedrückt werden.

105.

105.

Um den freyen Fall mit dem Herabgehen über die schiefe Fläche zu vergleichen, müssen die von der gleichförmig zunehmenden Bewegung überhaupt erwiesenen Bestimmungen unter diesen besondern Umständen betrachtet, und gegen einander gehalten werden. §§. 100, 103. Aus dieser Betrachtung wird das Verhältniß der Räume, Zeiten und Geschwindigkeiten gedachter zwey durch die Umständen besonderen Bewegungen bestimmt.

106.

Gleichzeitige Geschwindigkeiten, wie auch gleichzeitige Räume des freyen Falles und Herabgehens über eine schiefe Fläche sind in dem Verhältniße der Länge zur Höhe der schiefen Fläche. G : g :: L : H :: R : r.

Um diese zwey Bewegungen miteinander zu vergleichen, betrachten wir zwey in den übrigen Umständen gleiche Körper, deren einer an der Höhe frey herabfällt, der andere über die schiefe Fläche herabgehet. Die Geschwindigkeiten des frey fallenden, und über die schiefe Fläche herabgehenden Körpers, sind Wirkungen der absoluten und relativen Schwere, und wenn die Zeiten gleich sind, sind die Wirkungen wie die Kräfte oder Ursachen. A : R :: L : H. §. 102. Wenn also die gleichzeitigen Geschwindigkeiten gedachter

zwey

zwey Bewegungen G und g sind, ist auch G:g::L:H.

Auch bey der gleichförmig zunehmenden Bewegung sind die Räume wie die letzten Geschwindigkeiten, wenn die Zeiten gleich sind, R::G §. 79, folglich weil jede gleichzeitige Geschwindigkeiten, als die letzten betrachtet werden können, sind auch die gleichzeitigen Räume wie die gleichzeitigen Geschwindigkeiten, und wenn die gleichzeitigen Räume des freyfallenden, und des über eine schiefe Fläche herabgehenden Körpers R und r sind, so ist R:r::G:g::L:H.

107.

Aus diesem Verhältniß der gleichzeitigen Räume wird der Raum bestimmt, welchen der Körper an der schiefen Fläche in der nähmlichen Zeit beschreibt, in welcher er über die Höhe derselben
Fig. 12. frey herabfiel. Die Fig. 12 aus dem rechten Winkel B zur Länge der schiefen Fläche senkrecht gezogene Linie BL bestimmt diesen Theil an der schiefen Fläche. AL, der zwischen erst benannten senkrechten, und dem Scheitel A begriffene Theil, ist gedachter Raum.

Wenn im rechtwinklichten Dreyecke aus dem rechten Winkel eine zur Hypothenuse senkrechte Linie gezogen wird, ist ∺ AC:AB::AL, AC:AB::AB:AL. L:H::AB:AL. Da also R:r::L:H, §. 106, ist auch R:r::AB:AL. R=AB vermög Bedigniß, folglich auch r=AL.

Statt

Statt der Zeit des freyen Falles über AB die Höhe kann die Zeit des Herabgehens über AL genommen werden.

108.

Wenn auf AB als Durchmessern ein Halbzirkel beschrieben wird, so muß dieser das auf den Enden des Durchmessers aufstehenden rechten Winkels ALB wegen durch L gehen, AL daher eine Sehne des Zirkels seyn, dessen Durchmesser AB die Höhe der schiefen Fläche ist. AL wird in der Zeit beschrieben, in welcher der Körper frey über die Höhe AB herabfiel, §. 107, und eben dieses gilt von jeder Sehne des Zirkels in Beziehung auf seinen Durchmesser. Der Körper beschreibt daher in der nähmlichen Zeit jede Sehne des Zirkels, in welcher er über den Durchmesser frey herabfiel.

109.

Die Zeit des freyen Falles über die Höhe ist zur Zeit des Herabgehens über die ganze Länge der schiefen Fläche, wie die Höhe zur Länge derselben. $Z : z :: H : L$.

In der nähmlichen Fig. 12 ist wegen der senkrechten BL, $\div$ AC AB :: AL, folglich $AC : AL :: AC^2 : AB^2 : L^2 : H^2$. Beyde Bewegungen sind gleichförmig zunehmend, §§. 100 und 103, und in jeder gleichförmig zunehmenden Bewegung ist: $R :: Z^2$. §. 78. Wenn also AC und AL für zwey an der schiefen Flächen Fig. 12.

beschriebene Räume angenommen werden, und die Zeit um AL zu beschreiben, z. B. Z ist, weil diese mit Z, der Zeit des freyen Falles gleich ist, §. 107, so ist: $AC:AL::z^2:Z^2$ folglich auch: $z^2:Z^2::L^2:H^2$, und $z:Z::L:H$, oder $Z:z::H:L$.

110.

Da bey jeder gleichförmig zunehmenden Bewegung $R::GZ$, §. 78, folglich, $R:r::GZ:gz$, so ist $R:r::Z:z$, nur in dem Falle, in welchem $G = g$, die letzten Geschwindigkeiten gleich sind. Wenn der Körper über die Höhe der schiefen Fläche frey herabfällt, so ist diese Höhe sein Raum, wenn er aber über die Länge herabläuft, so ist diese sein Raum. Die Proportion $Z:z::H:L$, welche zwischen der Zeit des freyen Falles über die Höhe, und jener des Herabgehens über die Länge der schiefen Fläche, §. 109. erwiesen ist worden, kann mit folgenden verwechselt werden: $Z:z$ $R:r$ und $G=g$. Die letzten Geschwindigkeiten, welche der über die Höhe frey fallende, und der über die schiefe Fläche herabgehende Körper, am Ende ihre Bewegung haben, müssen gleich seyn.

111.

Wenn eine einzige oder mehr so miteinander verbundene schiefe Flächen, daß der von einer auf den andern übergehende Körper keinen merklichen

lichen Theil seiner Geschwindigkeit verliere, die nähmliche oder gleiche Höhe haben, so sind die Geschwindigkeiten des über die Flächen herabgehenden Körpers am Ende seiner Bewegungen allezeit jener gleich, welche er durch den freyen Fall über die Höhe erhalten hätte, §. 110. da also diese Geschwindigkeit immer die nähmliche ist, so muß die letzte Geschwindigkeit des Körpers, die über eine einzige schiefe Fläche herabgegangen ist, jener gleich seyn, die er am Ende seiner Bewegung über mehrere so verbundene erhält, daß er im Uebergange von einer schiefen Fläche auf die andere keinen merklichen Theil seiner Geschwindigkeit verliere, wenn diese Reihe der schiefen Fläche, mit der einzigen gleiche Höhe hat.

112.

Damit der Körper in dem Uibergange von einer schiefen Fläche auf die andere mit jener verbundene, keinen in der Bewegung merklichen Theil seiner Geschwindigkeit verliere, müssen die schiefen Flächen unter einem unendlich kleinen Winkel miteinander verbunden seyn. Betrachten wir AC und CB Fig. 13, und setzen die Verbindungswinkel ACD unendlich klein. Die Kraft, mit welcher der Körper nach seiner Bewegung über AC auf CB kömmt, kann durch AC, welche in Beziehung auf CB schief ist, folglich zur Erklärung in eine zu CB senkrechte, und Fig. 13.

eine gleichlaufende aufgelöset werden muß §. 69. AC sey diesemnach in AD und DC aufgelöset. Letzte ist in der Richtung der Bewegung über CB, mit dieser also läuft der Körper über CB fort; AD aber wird getilget. Allein, da der in C sich befindende Körper, beyde Flächen AC und CB drückt, so wird AD von beyden zusammen getilget, und muß noch einmal aufgelöset werden, damit dessen von AC und CB erloschene Theile abgesondert dargestellet werden. Zu diesem Ende kann AD in eine zu AC senkrechte ED, welche von AC, und die andern zu AC gleichlaufende AE, welche in der Richtung des von AC auf CB anlaufenden Körpers ist, von CB folglich gehoben wird, aufgelöset werden, und es ist nur noch zu beweisen, daß AE ein so kleiner Theil sey, der in jedem Falle ohne Bedenken ausser Acht gelassen werden kann. Dieß wird folgender Massen dargethan.

Wegen der aus dem rechten Winkel D zur Hypothenuse gezogenen Senkrechten ist $\div$ AC : AD : AE. Statt AC als einer endlichen Kraft 1, statt AD aber als die Bogenhöhe des unendlich kleinen Winkels ACD, $\frac{1}{\infty}$ gesetzet, ist $\div 1 : \frac{1}{\infty} : AE$, folglich $AE = \frac{1}{\infty^2}$. Welche Größe unendlich klein bleibt, wenn sie auch unendlichemal genommen wird.

113.

So, wie jede krumme Linie aus unendlich kleinen unter unendlich kleinen Winkeln zusammenlaufenden geraden Linien zusammengesetzet betrachtet wird, ist auch eine Oberfläche, deren Durchschnitt eine krumme Linie ist, wie aus unendlich kleinen, unter unendlich kleinen Winkeln miteinander verbundenen schiefen Flächen zusammengesetzt zu betrachten, und, da der über eine solche Reihe mehrerer schiefen Flächen herabgehende Körper keinen merklichen Theil seiner Geschwindigkeit verlieret, §. 112, so hat der Körper eine gleiche Endgeschwindigkeit, wenn er über eine einzige schiefe Fläche, oder über eine krumme Oberfläche herabgelaufen ist, sobald beyde gleiche, oder die nähmliche Höhe haben.

Wenn der Körper auf einer nach der Krümmung des Zirkuls, oder einer andern krummen Linie ausgeschnittenen Oberfläche an einer Seite, oder an einen Faden hängend, eine krumme Linie herabgelaufen ist, so muß er auf der entgegengesetzten Seite eine gleiche Krümmung hinauf beschreiben, und sich eben so hoch erheben, als er herabgelaufen ist. Wie dieses von einer schiefen Fläche §. 1 3 angemerkt ist worden.

Siebentes Kapitel.

von

Pendulen.

114.

Den an einen Faden hängenden, und sammt diesen um den befestigten Punkt des Fadens beweglichen Körper nennen wir ein Pendul, und betrachten den Körper wie einen schweren Punkt. Der feste Punkt des Fadens ist der Aufhangspunkt.

115.

Fig. 14. Wenn Fig. 14 B der wie ein Punkt betrachtete Körper, AB der Faden, und A der Aufhangspunkt ist, so haben wir an AB ein Pendul. Die natürliche Richtung dieses Pendules ist dem Scheine nach zur Oberfläche der Erde senkrecht, AB daher senkrecht zum Horizont. §. 55. Die senkrecht zur Oberfläche der Erde wirkende Schwerbestimmung, erhält das Pendul in der angeführten Stellung. Wird der Körper B bis in C erhoben, so kann er in C nicht stehen bleiben, denn die Wirkung seiner Schwere CD, welche gleichlaufend zu AB ist, wird durch den Zusammenhang des in Beziehung auf AB schief gespannten Fadens AC nicht ganz getilget, nachdem AC und CD schief gegeneinander sind. §. 68.

Der Körper wird von C nach B herabgetrieben, die Richtung seiner Bewegung ist daher immer die Tangente CE des Punktes, in welchem der Körper sich befindet, indem er den Cirkelbogen CB beschreibet, und, um die Kraft zu bestimmen, mit welcher er über diesen Bogen herabgegehet, muß CD seine absolute Schwere in eine zu CE gleichlaufende CE und eine senkrechte Kraft ED aufgelöset werden. §. 69. ED ist den in der Richtung CA wirkenden Zusammenhangs-Kräften des Fadens gerade entgegengesetzt, spannt den Faden AC und wird durch dessen Zusammenhang getilget. CE aber ist jederzeit in der Richtung der Bewegung über CB, folglich die übrige Kraft, und hier die relative Schwere, wie bey der schiefen Fläche §§. 101, 102. Der Körper B muß daher von C über BC bis B herablaufen. In jedem Punkte des beschriebenen Bogens CB hat er eine neue Bestimmung von der relativen Schwere erhalten, 1. Abh. §. 53. Die einzige Ursache welche den Körper hindern könnte, seine Bewegung weiter fortzusetzen, nachdem er in B gelangt ist, wäre seine absolute Schwere; allein diese wird durch den Zusammenhang des in der Stellung AB gerade entgegengesetzt gespannten Fadens getilget. §. 54, 61. Der Körper B muß also nach seiner Bewegung über CB sich so, wie §. 113 gefolgert ist worden, und der entgegengesesetzten Seite sich über einen mit CB gleichen Bogen BF erheben, bis seine im Herabgehen über CB immer vermehrte Bestimmung durch die bey der Erhebung über BF gerade entgegengesetzt wirkende relative Schwere ganz getilgt wird. 1. Abh. §. 44. Nachdem seine im Herabgehen über CB erhaltene Bestimmung gehoben ist, wirkt die relative Schwere noch immer fort. 1. Abh. §. 53. Der Körper muß also von F über FB bis B wieder herabgehen, und dann von B bis C steigen, und so fort, bis seine Bestimmung von einer äußeren Ursach ganz gehoben, und keine neue mehr erzeugt wird. 1. Abh. §. 44.

Die Reibung im Aufhangspunkte A, und der Widerstand des Mittelkörpers, in welchem sich das Pendul beweget, heben einen Theil seiner von der Schwere erhaltenen Bestimmungen. Nachdem das Pendul in B gelangt ist, steiget es daher nicht gerade bis F so, daß CB=BF, sondern BF ist verhältnißmässig kleiner als CB, und so werden die beschriebenen Räume immer kleiner, bis der Körper in B wiederum stehen bleibt. Es ist also von selbsten einleuchtend, daß wir die oben angegebene Erklärung mit Beziehung auf die Beseitigung aller Hinderniße gegeben haben.

Daß der von Penduln unter diesen Umständen beschriebene Raum CBF ein Cirkelbogen sey, ist ohne weiteres einleuchtend.

116.

Die Bewegung des Penduls in dem Bogen CBF, oder das Herabgehen von einer, und die Erhebung auf der andern Seite zusammen genommen wird ein Penduls = Schlag, Schwankung oder Schwingung, und die Zeit, welche das Pendul zu dieser Bewegung braucht, die Schlag=oder Schwankungszeit genannt. Das Herabgehen oder die Erhebung, daher ist eine halbe Schwankung, und die hierzu angewandte Zeit die halbe Schwankungs = oder Schlagzeit.

Pendulsschläge oder Schwankungen, welche in gleichen Zeiten vollbracht werden, sind gleichzeitig, und Penduln, deren Schwankungen so sind, nennet man gleichzeitige.

117.

Die Penduln theilet man in einfache und zusammengesetzte. Einfache wären, welche in einem einzigen schweren an einem Faden ohne Gewicht hängenden, und um den Aufhangspunkt beweglichen Punkte bestünden. Zusammengesetzte, welche mehr als einen schweren Punkt haben.

Da wir weder einen Faden haben, dessen Theile kein Gewicht hätten, noch einen einzigen ersten physischen Bestandtheil, welcher ein Punkt ist, 1. Abh. §. 82 allein anbringen können, wenn wir auch das Gewicht des Fa=

dens außer Acht lassen wollten, so sind alle unsere Produkte zusammengesetzt.

118.

Was von den Schwankungszeiten und Zahlen der Penduln erwiesen wird, erweiset man ohne Beziehung auf die Mehrheit der schweren Punkte, welche in jedem unserer Penduln vorkommen. Es ist daher in dem **Schwankungsmittelpunkte** eine Bestimmung erfunden worden, mit welcher das zusammengesetzte Pendul wie einfach betrachtet, und die von einfachen erwiesenen Sätze auf die zusammengesetzten angewandt werden.

Schwankungsmittelpunkt ist jener Punkt des zusammengesetzten Penduls, in welchem die Gewichte aller Theile vereiniget seyn müßten, damit das hiemit bestellte einfache Pendul, mit dem zusammengesetzten gleichzeitig würde. Dieser Punkt wird als der einzige schwere Punkt eines einfachen Penduls betrachtet.

Um die durch Erwegung von Pendulen erwiesenen Sätze in der Ausübung durch Versuche zu bestättigen, pflegt man zu Pendulen Körper von solchem Gewichte zu nehmen, gegen welches das Gewicht des Fadens, oder des statt diesen gebrauchten Stängleins sehr gering ist.

119.

119.

Die gerade Linie, welche zwischen dem Aufhangs- und dem schweren Punkt begriffen wird, den wir den einzigen bey dem einfachen Pendul betrachten, ist die Länge des Penduls. Bey unseren und jeden zusammengesetzten Penduln daher ist jene gerade Linie für dessen Länge zu nehmen, welche durch den Abstand des Schwankungsmittelpunktes von dem Aufhangspunkte bestimmt wird.

120.

Wenn die Betrachtung der Penduln weiter, als es die Anfangsgründe der allgemeinen Naturlehre unentbehrlich machen, und es bey dieser gewöhnlich ist, fortgesetzt werden sollte, so müßten noch einige Bestimmungen des Penduls erkläret werden. Z. B. welcher der **Pendulswinkel**, welche die **Winkel**, und welche die **Pendulsgeschwindigkeit** sey, damit auch diese beyde im Pendul bestimmt, und miteinander verglichen werden können. Zu unseren Bestimmungen bedürfen wir dieser Erklärungen nicht, doch setze ich sie hier an, damit der Schüler wisse, was diese Benennungen bedeuten.

Der Winkel, welcher zwischen der senkrechten, oder natürlichen Stellung des Penduls, und jener des erhobenen im Steigen oder Herabgehen, eingeschschlossen wird, ist der **Pendulswinkel**. So ist BAC oder BAF der Pendulswinkel, Fig. 14.

winkel,

winkel, wenn das Pendul in AC oder AF sich befindet. Woraus dann erhellet, daß der Pendulswinkel desto größer ist, je höher das Pendul in seinen Schwankungen sich erhebet.

Winkelgeschwindigkeit des Penduls wird die genannt, mit welcher sich das Pendul bey seinem Aufhangspunkte bewegt, bey welchem die Pendulswinkel gebildet werden.

Pendulsgeschwindigkeit ist jene, welche der einzige schwere Punkt im einfachen Pendul hätte, in zusammengesetzten Penduln aber der Schwingungsmittelpunkt hat, da er im tiefesten oder untersten Punkte des Bogens ist, den er mit seiner Schwankung beschreibt. Wenn AB
Fig. 14. Fig. 14 als ein einfaches Pendul betrachtet wird, oder B der Schwankungsmittelpunkt in zusammengesetzten Pendule ist, so wird die Geschwindigkeit, welche dieser Punkt, da er in B ist, hat, für die Pendulsgeschwindigkeit gehalten.

121.

Wenn die doppelte Achse einer Cycloide, oder Radlinie zum Halbmesser genommen, und aus dem einem Ende dieser geraden Linie als dem Mittelpunkte ein aus dem Scheitel der Radlinie ausgehender Cirkel beschrieben wird, so ist es augenscheinlich, daß ein sehr kleiner bey dem Scheitel der Cycloide genommener Bogen des Cirkels, von dem Radliniebogen beynahe nicht zu unterscheiden sey. Der Unterschied ist äußerst

klein;

klein; kann daher ohne Bedenken außer Acht gelassen, und ein in sehr kleinen Cirkelbogen sich bewegender Körper eben so betrachtet werden, wie der in Cicloidbögen sich bewegende. Alles, was die Mechaniker von den Schwankungen der Penduln in Cycloiden genau erweisen, muß auch bey den Schwankungen in sehr kleinen Cirkelbögen, so genau als es die Ausübung fordert, eintreffen, und die Schwankungen des Pendules in sehr kleinen Cirkelbögen können gleichzeitig gesetzt werden, wie sie es in der Cycloide sind.

122.

Die Schwankungszeiten der Penduln, welche in sehr kleinen Cirkelbögen sich schwingen, sind im zusammengesetzten Verhältnisse aus dem geraden der Quadratwurzeln der Pendulslängen, und verkehrtem der Schwerbestimmungen. Wenn die Schwankungszeiten Z und z, die Pendulslängen L und l die Schwerbestimmungen aber S und s genannt werden, so ist $Z : z :: \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{S}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{s}} :: \sqrt{Ls} : \sqrt{Sl}$.

Daß die Schwankunszeiten der in Cycloidbögen sich schwingenden Penduln in diesem angegebenen Verhältniße sind, erweisen die Mechaniker aus den Eigenschafte ver Radlinie. Dieß kann also hier ohne Anstand angenommen werden.

den. Bey Pendulen, welche in sehr kleinen Cirkelbögen sich schwingen, muß das von Schwankungen in Cycloidbögen erwiesene so genau eintreffen, als es die Ausübung fodert. §. 121. Auch die Schwankungszeiten in sehr kleinen Cirkelbögen sind daher im angegebenen Verhältniß.

$$Z : z :: \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{S}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{s}} :: \sqrt{Ls} : \sqrt{lS}.$$

Wenn $L = l$ so ist $Z : z :: \sqrt{s} : \sqrt{S}$

— — $S = s$ — $Z : z :: \sqrt{L} : \sqrt{l}$

— — $Z = z$ — $\sqrt{Ls} = \sqrt{lS}$, u. $\sqrt{L} : \sqrt{l} :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$.

123.

Die Zahlen der Schwankungen, welche von solchen Pendulen in bestimmter Zeit vollbracht werden, sind gerade wie die Quadratwurzeln der Schwerbestimmungen, und verkehrt wie jene ihrer Längen. Wenn diese Zahlen N und n benennt werden, ist: $N : n :: \sqrt{Sl} : \sqrt{sL}$.

Je länger die Zeit einer Schwankung ist, welche auch in sehr kleinen Cirkelbögen gleichzeitig gesetzt werden können, §. 121 desto weniger, und je kürzer diese Zeit ist, desto mehr Schwankungen muß das Pendul in der nähmlichen bestimmten Zeit vollbringen. Die Zahlen der Schwankungen, welche von Pendulen in der nähmlichen Zeitvollendet werden, sind verkehrt wie die

Schwan-

Schwankungszeiten. Diese sind: $Z : z :: \sqrt{Ls} : \sqrt{lS}$ §. 122. Die Zahlen sind also im angegebenen Verhältniße, und:

Wenn $S = s$ — $N : n :: \sqrt{l} : \sqrt{L}$.
—— $L = l$ — $N : n :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$.
—— $N : n$ — $\sqrt{S} : \sqrt{s} :: \sqrt{L} : \sqrt{l}$.

Wenn Z und z, dann N und n zum Quadrate erhoben worden, so erhellet von selbsten, daß in dem Verhältniße ihrer Proportionen, das Wurzelzeichen weggelassen werden könne, weil hiemit die Größen, welche unter dem Zeichen standen, auch zum Quadrate erhoben sind.

Mit Pendulen, deren Faden so fein sind, daß derselben Gewicht in Vergleich des Gewichtes der Penduln selbst außer Acht gelassen werden kann, angestellte Versuche bestättigen das erwiesene Verhältniß der Schwankungszahlen, folglich auch der Zeiten. Wenn z. B. die Länge eines solchen Pendules = 4, des anderen = 1, so wird dieses zwey Schwankungen vollenden, indeß das erstere einmal schlägt, die Schwankungszahlen werden daher verkehrt, und die Zeiten gerade wie die Quadratwurzeln der Längen seyn, nachdem die Schwerbestimmung in beyden, als in der nähmlichen Gegend sich befindenden Pendulen gleich ist.

124.

In der 1. Abhandlung §. 57 am Ende ist erwähnet worden, daß der wirkliche Unter-

schied

schied der in verschiedenen Abständen von der Erde in der nähmlichen Gegend eintreffenden, und gleichscheinenden Schwerbestimmungen, nur durch die Schwankungen der Penduln bestimmt werden kann. Die in verschiedenen Gegenden der Erde, verschiedenen gegendie Pole nähmlich zu — gegen den Aequator abnehmenden Wirkungen der Schwere sind aber auch durch die Schwankungen der Penduln festgesetzt worden. Richer, als er auf dem heißen Erdgürtel in der Insel Cajena im Jahre 1672 astronomischen Beobachtungen oblag, bemerkte am Pendul seiner Uhr, welches zu Paris Sekunden schlug, daß es zu jeder seiner Schwankungen mehr Zeit verwende, und auf dieser Insel täglich um 148 Schwankungen weniger gebe, als in Paris. Richer folgerte hieraus, daß die Wirkung der Schwere zu Paris stärker, als auf gedachter Insel seyn müsse; bestimmte durch wiederholte genaue Versuche die Länge des einfachen Penduls, dessen Schwankungszeit auf dieser Insel eine Sekunde wäre. In Paris fand er hernach durch die genauesten Versuche, daß ein Pendul, welches auf der Insel Cajena Sekunden schlägt, um ein, und eine viertel Linie verlängert werden müsse, wenn es auch zu Paris Sekunden schlagen soll. Dieß bestättigte seinen Schluß. Nachdem diese richtige Entdeckung durch Versuche, welche von anderen Pariser Akademikern in verschiedenen Gegenden der Erde gemacht wurden, ganz außer Zweifel gesetzt

war,

war, erwieß Neuton, daß die Länge des aus der Insel Cajena nach Paris überbrachten Pendules durch die Kälte nicht mehr, als um ein Sextellinie verkürzt werden könne, die Verlängerung des aus der Insel übertragenen Pendules, daher um ein und ein Viertelslinie, damit es zu Paris gleichzeitig verbleibe, von der gegen die Polen zunehmenden Schwerbestimmung herzuleiten sey. Aus der gegen die Polen zu — gegen den Aequator aber abnehmenden Schwere wurde die an den Polen zusammengedrückte, am Aequator aber hervorragende, oder Eliptische Gestalt der Erde gefolgert, welche hernach durch die Abmessung der Meridians-Grade bestimmt wurde. Aus diesem allem erhellet, daß die Schwankungen der Penduln zur Bestimmung der Ungleichheit der Schwere gebraucht wurden, welche sich auf keine andere Art so genau bestimmen läßt. Wir müssen daher den Grund dieser Bestimmung auch betrachten:

Wenn $L = l$, ist $N : n :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$, das ist: bey gleicher Länge vollbringt jenes Pendul mehr Schwankungen, dessen Schwerbestimmung stärker ist, und zwar desto mehr, je größer die Quadratwurzel derselben ist. §. 123. Sobald also das an einem Orte an einem anderen übersetzte Pendul in diesem in gleicher Zeit mehr, oder weniger Schwankungen vollbringt, muß seine Schwere stärker oder schwächer seyn. Geben die Theilchen der Zeit, um welche jede Schwankung des Penduls in einem Orte längere oder kürzere Dauer hat als in dem anderen, eine ganze Schwankungszeit, so macht das Pendul im ersten Orte um eine Schwankung weniger oder mehr, als in den zweyten. Diese nach jeder bestimmten Zahl der Schwankungen manglenden, oder zuwachsenden Schwankungen geben in einer bestimmten Zeit die Zahl jener Schwankungen, um welche in einem Orte weniger oder mehr, als in dem anderen von nehmlichen Penduln vollbracht werden. Hiemit werden durch die ununterbrochen aufeinander folgenden Pendulsschläge, auch die so kleinen Differenzen der Schwerbestimmungen, daß sie auf keine andere Art merklich sind, so zu sagen, gesammelt, und in der Menge merklich.

Weil die Pendulsschläge auch in sehr kleinen Cirkelbögen gleichzeitig sind, so genau nämlich als es die Ausübung fordert, §. 121. so sind die Pendulsschläge in Beziehung auf die Dauer gleichförmig, und die Pendule können bey Uhren, deren Gang wegen ungleichförmiger Wirkung ihrer Bewegungskraft, ungleichförmig wäre, zur Ausgleichung angebracht werden. Eine zweite Anwendung der Penduln geschiehet daher bey Uhren, um derselben Gang gleichförmig, wie es der Lauf der Zeit ist, zu machen.

Nachdem alle Körper von der Wärme ausgedehnet, von der Kälte zusammengezogen werden, wie es bey der Wärme bewiesen wird, so

muß

muß auch der Faden oder das Stanglein des Pendules diese Veränderungen leiden, sobald die Wärme vermehret oder vermindert wird, und weil die Schwankungszeiten und Zahlen von der Länge des Pendules abhängen, welche mit dem Faden oder Stänglein jederzeit abgeändert wird, so müssen die Schwankungszeiten der Penduln, folglich auch die Zahlen sich änderen, wenn die Wärme hiezu hinlänglich verändert ist. Um daher aus den veränderten Schwankungszeiten und Zahlen nicht voreilig auf die Verschiedenheit der Schwerbestimmungen zu schließen, muß jederzeit die aus dem abgeänderten Grade der Wärme allenfals erfolgte Veränderung der Länge genau bestimmt, und derselben Einfluß auf die Schwankungen des Pendules berechnet werden. Man hat zwar durch Verbindung verschiedener Körper deren Ausdehnungen einander heben sollen, der Veränderung, welche von der Wärme entspringet, vorzubeugen gesucht. Allein es ist zuverläßlicher, diese Veränderung in jedem Falle genau zu bestimmen, als darauf, daß keine Aenderung an der Länge des Pendules erfolgen könne, ohne zuverläßlichen Grund zu bauen.

Achtes Kapitel.

Von

Wurfe der Körper.

125.

Jeder irdische Körper ist, wenn er geworfen wird, von zwey Kräften angetrieben, von der Schwere nähmlich, 1. Abh. §. 48, und von der Kraft mit welcher er geworfen wird, welche wir Wurfskraft nennen. Die Bewegung des geworfenen Körpers ist jederzeit zusammengesetzt, und um selbe zu bestimmen, müssen die Richtungen gedachter Kräfte sowohl, als die Verhältnisse, in welchem sie wirken, gegeneinander gehalten werden. §§. 59. 97.

126.

Die Richtung der Schwere ist zum Gesichtskreis dem Scheine nach senkrecht. §. 54. Um also zu besttmmen, wie sich die Richtung der Wurfskraft zu jener der Schwere verhalte, muß jene mit dem Gesichtskreise verglichen werden.

In Beziehung auf dem Gesichtskreis kann die Richtung der Wurfskraft senkrecht, gleichlaufend oder schief seyn. Die zum Gesichtskreise senkrechte und schiefe Wurfskraft, kann ferner hinauf oder herab gerichtet werden. Wirkt die Wurfskraft senkrecht herab, so ist sie mit der

Schwer-

Schwerbestimmung gleichlaufend. Ist die Wirkung der Wurfskraft senkrecht hinauf, so wirkt sie der Schwere gerade entgegengesetzt. Eben so ist die schief herabwirkende Wurfskraft mit der Schwerbestimmung zum Theile gleichlaufend, und die schief hinaufwirkende der Schwere zum Theile entgegengesetzt. §. 68. In beyden diesen Fällen, wie auch, wenn die Wurfskraft gleichlaufend zum Gesichtskreise angebracht wird, wirken die zwey Kräfte des geworfenen Körpers unter einem Winkel; welcher der dritte und vorzüglichste Fall der zusammengesetzten Bewegung ist.

127.

Daß die Bestimmung der Schwere ununterbrochen in allen Körpern, und auch in verschiedenen Abständen dem Scheine nach gleich wirke, ist schon in der 1. Abh. §§. 53, 54 und 57 erwiesen worden. Hieraus aber ist §. 100 gefolgert worden, daß der freye Fall eine gleichförmig zunehmende Bewegung dem Scheine nach sey. Die Schwerbestimmung muß daher dem Scheine nach eine gleichförmig beschleunigende Kraft seyn. Die Wurfsbestimmung erhält weder eine Vermehrung, nachdem der werfende Körper auf dem geworfenen zu wirken aufhöret, noch eine Verminderung, wenn wir die Hindernisse der Bewegung des geworfenen Körpers beseitiget setzen. Die Wurfsbestimmung muß daher in und für sich selbst betrachtet, wie die

Wirkung einer gleichförmigen, das ist: in gleichen Zeiten gleich wirkenden Kraft angesehen werden, und der geworfene Körper ist jederzeit wie von zwey in verschiedenen Verhältnissen wirkenden Kräften angetrieben. Diese Verschiedenheit der Verhältnisse, in welchen die Wirkungen der Kräfte des geworfenen Körpers, mit den Beziehungen der Richtungen verbunden betrachtet, bestimmt die Bewegungen der geworfenen Körper.

Die schief zum Gesichtskreise angebrachte Wurfskraft ist wie aus zweyen zusammengesetzt, deren eine senkrecht, die andere gleichlaufend zum Gesichtskreis genommen wird. §. 69. Jene giebt mit der Schwere des Körpers eine Summe, oder Differenz, je nachdem selbe mit dieser gleichlaufend, oder gerade entgegengesetzt wirkt. §§ 60, 61. Der schief zum Gesichtskreis geworfene Körper kann daher so betrachtet werden, als wenn er von einer erstgedachten Summe oder Differenz gleichen, und zum Gesichtskreis senkrechten und einer gleichlaufenden Kraft angetrieben wäre, wie es der zum Gesichtskreis gleichlaufend geworfene Körper ist; die Bewegungen der schief und gleichlaufend zum Gesichtskreis geworfenen Körper also können unter einem betrachtet werden.

128.

Wenn der Körper senkrecht herabgeworfen wird, so ist die Wurfskraft in der nähmlichen Richtung angebracht, in welcher seine Schwer-

bestim-

bestimmung wirkt. Der Körper muß sich daher mit der Summe dieser Kräfte in der Richtung seiner Schwerbestimmung bewegen, §. 60, und in kürzerer Zeit zur Erde gelangen, als er mit jeder dieser Kräfte, wenn selbe allein gewirket hätte, gekommen wäre. Der Raum, den ein so geworfener Körper beschreibt, ist die Höhe, oder Entfernung von der Oberfläche der Erde, in welcher er herabgeworfen wird.

129.

Der senkrecht hinaufgeworfene Körper erhebt sich nur zur Hälfte jener Höhe, zu welcher er in gleicher Zeit steigen würde, wenn er keine Schwerbestimmung hätte, folglich von der Wurfskraft allein angetrieben würde.

Fig. 15 AB sey die Höhe, zu welcher sich der senkrecht hinaufgeworfene Körper erheben würde, wenn er keine Schwerbestimmung hätte. AB als der zu beschreibende Raum, drückt daher auch die Richtung und Stärke der gleichförmig §. 127 wirkenden Wurfskraft aus. §. 52. AC sey die halbe Höhe, über welche der nähmliche Körper ohne aller Wurfskraft von der Schwere allein angetrieben, folglich frey fallend betrachtet wird; so erhielt der Körper am Ende seines Falles über CA durch die Wirkung seiner Schwere eine Bestimmung, mit welcher er in gleichförmiger Bewegung in einer mit der Fallszeit glei- Fig. 15.

chen Zeit den Raum = 2CA = AB beschreiben würde. §. 90. Die senkrecht hinauf wirkende Wurfskraft ist daher jederzeit der Bestimmung gleich, welcher der Körper im freyen Falle über die halbe Höhe, zu welcher er sich ohne Schwere in gleicher Zeit erheben würde, am Ende seiner Bewegung erhielt. Mit einer senkrecht hinauf wirkenden Wurfskraft muß der Körper so hoch steigen, als er mit der im freyen Falle über die Hälfte gedachter Höhe erhaltenen Bestimmung in gleicher Zeit seiner Schwere wegen steigen kann. Mit dieser letzten Bestimmung kann sich der Körper nur zu der Höhe in gleicher Zeit erheben, von welcher er herabgefallen ist. §. 100. Der senkrecht hinaufgeworfene Körper kann sich also in der ganzen Zeit nur zur Hälfte jener Höhe erheben, zu welcher er ohne Schwere mit der Wurfskraft allein gestiegen wäre.

Wenn sich der Körper mit der Wurfskraft, oder Bestimmung des Wurfes; welche die ganze Zeit wirkt, nur zur Hälfte jener Höhe erhebet, zu welcher er sich mit dieser ohne Schwere erhoben hätte, so muß er mit der in gedachter halben Zeit wirkenden Wurfsbestimmung nur zum vierten Theil jener Höhe steigen.

130.

Ein gleichlaufend oder schief zum Gesichtskreise geworfener Körper beschreibet dem Scheine nach eine Parabel.

Der zum Gesichtskreise schief gewesene Körper kann mit den gleichlaufend geworfenen unter einem betrachtet werden. §. 127. Es sey daher Fig. 11 der Körper A gleichlaufend zum Gesichtskreise geworfen. Die Wirkung seiner Wurfskraft sey AB in der nähmlichen Zeit, in welcher die Wirkung seiner Schwere wie AD ist. Die Zeit betrachten wir wie gewöhnlich in unendlich kleine und gleiche Theile getheilet. Für drey dieser ununterbrochen aufeinander folgenden Zeitchen sollen drey Wirkungen der Wurfskraft AE = EF = FB, die drey Wirkungen der Schwere aber AG, GM, und MD wie 1, 3, 5 seyn §. 100 so beschreibt der Körper A die krumme Linie AIOC §. 97, und es ist nur noch zu beweisen, daß sie eine Parabel, und zwar in der That selbst nur dem Scheine nach sey. Fig. 11.

Vermög gleichzeitigen Wirkungen der Schwer- und Wurfskraft, nach welchem die Eintheilungen geschehen sind, ist $AG : AM :: GI^2 : MO^2$, $AM : AD :: MO^2 : DC^2$. Wenn daher der Ursprung der Abszissen in A genommen wird, sind die Abszissen dieser krummen Linie wie die Quadrate der Halbordinaten, durch welches Verhältniß die Parabel bestimmt ist.

In der That beschreibet der so gewesene Körper nicht AIOC. sondern, weichet in jedem unendlich kleinen Zeitchen von AI, IO, OC, u. s. w. unendlich wenig zwar, doch etwas gegen D ab, weil die Wirkungen der Schwere AG, IN, OR

u. s. w. nicht gleichlaufend, wie es beym Beweise gesetzt wurde, sondern in dem Schwerpunkte der Erde zusammenlaufend sind. Diese unendlich kleinen Abweichungen geben in einen bestimmten endlichen Bogen des beschriebenen Weges eine merkliche Abweichung von der Parabel. Der mit einem Körper, welche die zum Wurfe erforderliche Bestimmung im Herabgehen über schiefe Flächen erhalten hat, angestellte Versuch zeiget, daß der Körper von der an einer Seitentafel gezeichneter Parabel in der That so abweiche, wie erst angezeigt ist worden.

Da die Mathematiker erweisen, daß die krumme Linie eine Elipse sey, welche der Körper beschreibt, wenn er von einer gleichförmigen, wie die Wurfskraft ist, und von einer im verkehrten quadralischen Verhältnisse der Abstände zum Mittelpunkt strebenden zugleich, und unter einem Winkel angetrieben wird, und da die Schwerbestimmung auch auf der Erde in diesem verkehrten quadratischen Verhältnisse wirkt, so muß die von geworfenen Körpern beschriebene krumme Linie eigentlich ein eliptischer Bogen seyn, welcher, da er sehr klein, und von einer stark exzentrischen Elipse ist, von einem Parabolischen unmerklich abweichet.

131.

Unter den drey uns bekannten Bestimmungen der Bewegungskraft I Abh. §. 49, ist jene

der

der Schwere die einzige, dessen Verhältniß wir genau kennen. Daß diese auf der Erde nicht nur allein beständig, sondern auch dem Scheine nach gleich wirke, haben wir in der 1. Abh. §§. 53, 57 gezeiget, daß sie im verkehrten quadratischen Verhältnisse der Abstände sey, wird in der Sternkunde erwiesen. Die durch die Schwere erzeugten Bewegungen und Bestimmungen der irdischen Körper, lassen sich daher genau berechnen. Die Verhältnisse, in welchen die abstossenden und anziehenden Bestimmungen in kleinsten Abständen wirken, sind uns nicht bekannt. Aus diesen können wir die von denselben erzeugenden Bewegungen nicht berechnen, wenn wir solche mit jenen nicht vergleichen, welche durch die Schwere erzeugt werden.

Hierin liegt der Grund, warum wir die von der Schwere erzeugten Bewegungen und Bestimmungen der Körper zur Abmessung der übrigen annehmen. Diesemnach wird auch die den Körper im Wurfe ertheilte Bestimmung oder so genannte Wurfskraft mit jener verglichen, welche der Körper im freyen Falle erhalten würde, und durch die Höhe ausgedrückt, über welche er von der Schwere angetrieben, frey fallen müßte, um eine der Wurfskraft gleiche Bestimmung zu erlangen, mit welcher er nähmlich in gleichförmiger Bewegung und gleicher Zeit einen der doppelten Höhe gleichen Raum beschreiben kann.

Was

Was durch Wurfsweite und Höhe, dann durch den Erhöhungswinkel verstanden werde, ist leicht einzusehen. Die gerade Linie, welche zwischen den Punkt, aus welchem der geworfene Körper ausgehet, und jenen, auf welchen er fällt, begriffen wird, ist die Wurfsweite. Durch die Wurfshöhe bedeutet man die größte jener Entfernungen von dem Gesichtskreise, welche der geworfene Körper in seiner Bewegung hat. Erhöhungswinkel ist jener, den die Richtung des Wurfes mit dem Gesichtskreise einschließet.

Ein gleichlaufend zum Gesichtskreise oder schief herabgeworfener Körper beschreibet nur einen Theil des Bogens, welcher von dem schief hinaufgeworfenen, beschrieben wird, weil dieser einen Bogen im Hinaufsteigen, und den zweyten ähnlichen, und beynahe gleichen im Herabfallen beschreibet. Die Wurfsweite ist daher, wenn die übrigen Umstände gleich sind, jederzeit größer, wenn der Körper schief hinauf geworfen wird. Wenn also der Körper größere Entfernungen erreichen soll, so muß er schief hinauf, und nicht gleichlaufend zum Gesichtskreise, oder gar schief herabgeworfen werden.

132.

Wenn zwey durch ihre Schwerbestimmungen auf einander wirkende Körper gleichlaufende, und im verkehrten Verhältnisse ihrer Massen stehende Wurfsbestimmungen

mungen erhalten, so beschreiben sie um ihren unbewegten gemeinschaftlichen Schwerpunkt in jeder angenommenen Zeit ähnliche krumme Linien.

Die einzelnen Schwerpunkte zweyer Körper sollen Fig. 16 A und B seyn, so ist ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt in AB §. 46, und zwar in C, wo sich AC : BC : : B : A verhält, §. 47, wenn wir die Massen dieser zwey Körper von ihren Schwerpunkten benennen. Die Wirkung der Schwere in jedem Theile das A ist wie die Massa B, und in jedem Theile B, wie die Massa A, §. 53; wenn daher AL und BM die Stärke und Richtungen der Schwerbestimmungen für eine unendlich kleine Zeit ausdrücken, so ist AL : BM : : B : A. Die gleichlaufenden, und im verkehrten Verhältnisse der Massen stehenden Wurfsbestimmungen sollen AF und BD seyn, folglich AF : BD : : B : A. Von diesen Bestimmungen angetrieben, werden die Körper A und B in jeder unendlich kleinen Zeit Diagonalen, wie AG und BE beschrieben, §. 62. Wenn also gezeigt wird, daß ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt weder durch ihre einfachen Bewegungen AL und BM, oder AF und BD, noch durch die zusammengesetzten AG und BE aus C gebracht wird, sondern immer in C bleibe, so ist es erwiesen, daß zwey Körper unter gedachten Bedingnissen um ihren unbewegten, oder ruhenden gemeinschaftlichen Schwerpunkt sich bewegen. Fig. 16.

Durch

Durch die Bewegungen AL und BM gelangen die Körper A und B in L und M. Ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt muß in LM bleiben, §. 46, und weil vor der Bewegung der Schwerpunkt in C war, folglich AC : BC :: B : A §. 47, und AL : BM :: B : A, §. 53, so ist auch AC — AL : BC — BM :: B : A, das ist LC : MC :: B : A, und der gemeinschaftliche Schwerpunkt auch nach gedachter Bewegung der Körper in C, folglich in der Ruhe geblieben, nachdem die gleichzeitigen Fortschritte der Körper in AL und BM immer in dem nähmlichen Verhältnisse :: B : A sind.

Nach den Bewegungen AF und BD sind die Körper in F und D. Ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt ist in der geraden FD, und weil AF und BD gleichlaufend sind, die Winkeln FAC und DBC folglich gleich, und weil AC : BC :: B : A, AF : BD :: B : A, folglich auch AC : BC :: AF : BD, sind die Dreyecke ACF und BCD ähnlich, und FC : DC :: AC : BC :: B : A. Der Schwerpunkt ist also in C geblieben.

Am Ende der zusammengesetzten Bewegungen AG und BE, sind die Körper in G und E, ihr Schwerpunkt aber ist in der geraden Linie GE. Da wegen den gleichlaufenden AF und BD die Winkel FAC und DBC gleich sind, müssen auch die übrigen Winkeln der Parallelogramme AFGL BDEM gleich, die Parallelogramme

gramme selbst, und auch ihre Halbscheiden GAL und MBE ähnlich, folglich die Winkeln GAC und EBC gleich seyn. Diesemnach muß auch AG : BE :: AL : BM, folglich :: B : A seyn. Die Dreyecke ACG und BCE, deren zwey gleiche Winkel GAC und EBC zwischen verhältnißmäßigen Seiten: AC : BC :: AG : BE :: B : A eingeschlossen sind, müssen ähnlich, und ihre gleichgestellte Seiten verhältnißmäßig seyn: GC : EC :: AC : BC :: B : A. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt ist daher auch durch diese Bewegungen aus C nicht gebracht worden, und die zwey Körper A und B bewegen sich unter den gesetzten Bedingnissen um ihren ruhenden, oder unbewegten gemeinschaftlichen Schwerpunkt.

Da die Schwerbestimmungen zunehmend, jene des Wurfes aber gleichförmig sind, so müssen die Körper A und B in gesetzten Umständen krumme Linien beschreiben §. 97. AG und BE die in der ersten unendlich kleinen Zeit beschriebenen Räume sind unendlich kleine krumme Linien, §. 21, welche für gerade angesehen werden können. Diese Linien sind, wie erst gezeigt ist worden, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke ACG und BCE verhältnißmäßig, es ist AG : BE : : AC : BC :: B : A, und weil das nähmliche auf eben diese Art von den Räumen jeder folgenden unendlich kleinen Zeit erweisen wird, so ist auch die Summe aller Räume das A zur Summe aller Räume das B wie AC : BC :: B : A. Diese Summen

men

men der Räume sind die krummen von A und B um den unbeweglichen gemeinschaftlichen Schwerpunkt C beschriebenen Linien. Sie sind also verhältnißmäßig diese Linien, und weil nur ähnliche krumme Linien verhältnißmäßig seyn können, so sind sie auch ähnlich.

Was von zwey Körpern erwiesen ist, kann eben so für die nähmlichen Umstände von mehr Körpern erwiesen werden. Wie viel immer also durch ihre Schwere aufeinander wirkende Körper beschreiben, um ihren ruhenden gemeinschaftlichen Schwerpunkt ähnliche krumme Linien, wenn sie zu ihren Schwerbestimmungen gleichlaufende entgegengesetzte, und im verkehrten Verhältnisse der Massen stehende Wurfsbestimmungen erhalten.

133.

Auch, wenn die Wurfsbestimmungen der zwey Körper weder gleichlaufend, noch im verkehrten Verhältnisse ihrer Massen, sondern nur in entgegengesetzte Gegenden gerichtet sind, beschreiben die Körper ähnliche krumme Linien um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, allein dieser beweget sich in gerader Linie gleichförmig fort.

Fig. 17. Die Körper deren Schwerpunkte Fig. 17 A und B sind, von welchen wir auch die Benennung der Massen nehmen, sollen die Wurfsbestimmungen AD und BG in entgegengesetzte Gegenden weder gleichlaufend, noch im verkehr-

ten Verhältnisse ihrer Massen haben. Ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt wird in der geraden Linie AB §. 46, und zwar in C so seyn, daß sich AC : BC : : B : A verhalte §. 47. Nachdem wir aus dem ersten Theil des §. 132. gegebenen Beweises wissen, daß durch die wechselseitigen Schwerbestimmungen dieser zwey Körper die Lage ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes nicht verändert werde, und diese jederzeit die nähmlichen Richtungen haben, so sind hier nur die Wurfsbestimmungen AD und BG zu betrachten. Mit diesen Bestimmungen gelangen die Körper in D und G. Ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt ist alsdann in DG §. 46, und zwar in F, wenn DF : FG : : B : A ist. Da die Wurfsbestimmungen AD und BG nicht gleichlaufend, sondern schief gegeneinander sind, so müssen solche zur Bestimmung ihrer eigentlichen Wirkungen aufgelöset werden. §. 69. Um diese Auflösung zu bestimmen, werde durch C eine mit DG gleichlaufende und gleiche Linie EK so gezogen, daß EC = DF, unt CK = FG sey. Dann ziehe man die geraden Linien AE und ED, wie auch BK und KG, so ist AD aus AE und ED, BG aber aus BK und KG zusammengesetzt zu betrachten. §. 66.

Da EK und DG gleiche und gleichlaufende gerade Linien sind, so müssen es auch ED und KG seyn. Durch welche der ersteren äußerste Ende verbunden werden. Die in den Wurfs-

 bestim-

bestimmungen AD und BG begriffenen Bestimmungen ED und KG sind gleich, und gleichlaufend in die nähmliche Gegend gerichtet. Mit diesem müssen die Körper A und B sich so bewegen, daß ihre Verbindungslinie sich selbst immer gleichlaufend bleibe, der Schwerpunkt C folglich, welcher am Ende der Bewegung in F kömmt, den Raum CF beschreibe. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt der zwey Körper muß sich daher vermög den im Wurfe erhaltenen Bestimmungen ED und KG in gerader Linie bewegen, und da die Schwerbestimmungen der Körper den Schwerpunkt nicht veränderen, die Wurfsbestimmungen aber gleichförmig wirkende Kräfte sind, so ist die Bewegung des Schwerpunktes CF auch gleichförmig.

Die zwey in den Wurfsbestimmungen AD und BG, der Körper A und B begriffenen Bestimmungen AE und BK setzen mit ihren Schwerbestimmungen die krummlinigten Bewegungen zusammen §. 97, von welchen zu beweisen ist, daß sie in ähnlichen krummen Linien vollbracht werden. Vermög Bestimmung ist AC : BC : : B : A, und EC : KC : : B : A, folglich auch AC : BC : : EC : KC. Die Winkel ACE und BCK als Scheitelwinkel sind gleich. Die Dreyecke ECA und KCB sind daher ähnlich, die Winkel EAC und KBC gleich, die Linien AE und BK gleichlaufend, und AE : BK : : AC : BC : : B : A. Mit den in ihren Wurfsbestimmungen

AD

AD und BG begriffenen Bestimmungen AE und BK als gleichlaufenden und im verkehrten Verhältnisse der Massen stehenden §. 132, müssen die Körper A und B ähnliche krumme Linien um ihren geradelinigt und gleichförmig sich bewegenden gemeinschaftlichen Schwerpunkt beschreiben.

Wenn dieser Satz auf ähnliche Art, auf mehr ineinander schwere Körper angewandt wird, so erhellet, daß auch mehr als zwey und wie viel immer mit ihrer Schwerbestimmung auf einander wirkende Körper, um ihren gerade und gleichförmig sich bewegenden Schwerpunkt ähnliche krumme Linie beschreiben, wenn sie weder gleichlaufende noch im verkehrten Verhältnisse ihrer Massen stehende, sondern blos in entgegengesetzte Gegenden gerichtete Wurfsbestimmungen erhalten.

Neuntes Kapitel.

von

Central-Kräften.

134.

Kräfte oder Bestimmungen, von welchem der Körper angetrieben, sich um einen unbeweglichen oder als unbeweglich betrachteten Punkt beweget,

weget, werden **Central- oder Mittelpunkts-kräfte**, der Punkt aber, um welchen die Bewegung vollbracht wird, **Mittelpunkt der Kräfte**, oderauch **der Bewegung** genannt. Wenn der Körper A um den Mittelpunkt C Fig. 18 einen
Fig. 18. Cirkelumkreis, dessen Hälfte ADQ beschreibet, so ist C der **Mittelpunkt der Kräfte**, und die Kräfte durch deren gleichzeitige Wirkung die Bewegung in ADQ erzeugt wird, sind die **Centralkräfte**. In einer geradlinigten Bewegung entfernet sich der Körper von dem angenommenen Punkte jederzeit desto mehr, je länger und schneller er in der geraden Linie fortläuft. Die Bewegung um einen als **Mittelpunkt** betrachteten Punkt muß daher immer krummlinigt seyn, folglich von zwey unter einem Winkel, und zwar in verschiedenen Verhältniße wirkenden Bestimmungen erzeugt werden. §. 97. Um diese Bestimmungen oder so genannten Kräfte, jede ins besondere zu zeigen, nehmen wir einen unendlich kleinen, folglich in unendlich kurzen Zeit von A beschriebenen Bogen AB an, den wir eben dieserwegen wie eine gerade Linie, und die Diagonale des Parallelogrammes ansehen können, dessen Seiten durch ihre Lage die Richtungen, und durch ihre Länge die Stärke der Kräfte ausdrücken. §. 66. Wenn aus A eine Tangente des Cirkul AE unbestimmt, aus B eine mit dieser gleichlaufende, zu AC folglich senkrechte BG und

end-

endlich BF mit AG gleichlaufend gezogen wird, so ist AB als zusammengesetzt aus AF und AG zu betrachten, §§. 66, 67, und diese zwey Bestimmungen sind die Centralkräfte. AG, welche in der Richtung des Halbmessers AC den Körper A gegen den Mittelpunkt C hält, nennen wir die **Centripetal-oder zum Mittelpunkt strebende**, AF aber die **Wurfskraft**. Da AF in der Richtung der Tangente ist, mit dieser der Körper sich von dem Mittelpunkte immer mehr und mehr entfernen würde, wenn ihn die zum Mittelpunkt strebende nicht zurückhielt, so nennen wir AF die Wurfskraft, auch **Tangentialkraft**.

Die zwischen den Schwerpunkt des Körpers, und dem Mittelpunkt der Kräfte begriffene gerade Linie, wie AC, BC, u. d. wird **Radius-Vektor oder führender, auch streifender Halbmesser** genannt, und so betrachtet, als ob er sich mit dem Körper bewegte, folglich die Fläche der vom Körper beschriebenen krummen Linie durch-oder bestrieche. Dieser Betrachtung gemäß ist ACB die Fläche, welche von den streifenden Halbmesser AC in der unendlich kleinen Zeit, in welcher der Körper AB beschreibt, bestrichen wird.

Wenn die Tangential-oder Wurfskraft aufgelöset wird, so erhalten wir wie Fig. 9 aus der Auflösung der Kräfte AE und AG §. 71, zwey Kräfte, deren eine in die Richtung AB fällt, die andere BF ist. Dieser letzte Theil der Wurfskraft AF strebt zur Entfernung des Körpers A von dem Mittelpunkte der Kräfte C, wird daher von einigen unter der Benennung Centrifugal-oder weichende Centralkraft als die dritte Centralkraft zur Erklärung dieser Bewegungen angenommen. Allein, diese letzte Centralbestimmung ist immer in jener der Tangentialkraft enthalten, mit welcher der Körper ohne die zum Mittelpunkt strebende, sich von diesem jederzeit entfernen würde. Von der zum Mittelpunkt strebenden Bestimmung, muß daher das Streben der Tangentialkraft den Körper zu entfernen jederzeit so getilgt, und die übrigenden Bestimmungen in der Richtung AB in eine zusammengesetzt werden, wie es §. 71 bey AE und AG, von UE und SG, dann AU und AS gezeigt ist worden.

135.

Der Körper beschreibt um den Mittelpunkt der Kräfte, eine ununterbrochene krumme Linie, wenn er von einer Tangential-der anderen zum Mittelpunkt strebenden und ununterbrochen wirkenden Kraft, unter einem Winkel angetrieben wird.

Der nach den gesetzten Bedingnissen bestimmte Körper sey A. Fig. 19. Um seine Bewegung in unendlich kleinen und gleichen aufeinander folgenden Zeitchen zu betrachten sey AD die Tan-

Fig. 19.

gential,

gential, AB die zum Mittelpunkt C strebende Bestimmung der ersten unendlich kleinen Zeit. Mit diesem muß der Körper A die durch Ergänzung des Parallelogrammes ABED, dessen Seiten AD und AB sind, bestimmte Diagonale AE beschreiben. §. 62. Wenn diesemnach die zum Mittelpunkt C strebende Kraft nicht mehr wirkte, so würde der Körper mit der in AE erhaltenen Bestimmung in der geraden Linie AE gleichförmig fortschreiten, 1. Abh. §. 44, folglich in gleicher Zeit einen mit AE gleichen Raum EF beschreiben. Er hat daher für die nächstfolgende Zeit die Tangentialbestimmung EF, und weil die zum Mittelpunkt strebende ununterbrochen wirkt, vermög Bedingniß, so muß der Körper in der zweyten unendlich kleinen Zeit die Diagonale EK durchlaufen, und so weiter. Der so durchgelaufene Weg, dessen Anfang AEK ist eine krumme Linie; denn die Seiten AE, EK, u. s. w. sind unendlich klein, und weichen von einander unendlich wenig ab §. 21, sind folglich unter unendlich kleinen Winkeln miteinander verbunden. Auch ist die Krümmung dieser Linie AEK gegen den Mittelpunkt C gewendet, weil der Körper durch die zum Mittelpunkt C strebenden Bestimmungen wie AB, EG in jeder unendlich kleinen Zeit zwar unendlich wenig, doch immer von der Tangente, wie EF ist, gegen C abgewandt wird.

Daß die ganze so beschriebene Linie in der nähmlichen Fläche sey, in welcher die erste Tangentialbestimmung, und der Mittelpunkt der Kräfte sich befinden, ist leicht einzusehen. AE als die Diagonale des Parallelogrammes ABED muß mit AD und AB, folglich auch AC in der nähmlichen Fläche liegen. Aus der nähmlichen Ursache muß EK mit EF, der verlängerten AE und EG in einer Fläche, folglich in der nähmlichen mit AD und AC seyn, und eben so alle übrige unendlich kleine, und unter unendlich kleinen Winkeln miteinander verbundene Diagonalen, welche verlängert immer die Tangente des Punktes in der krummen Linie geben, in welchem sich der Körper befand, als er die nähmliche unendlich kleine Diagonale beschrieb.

136.

Bey der Bewegung des Körpers, der von einer zum nähmlichen Mittelpunkte ununterbrochen strebenden, und einer Tangentialkraft angetrieben, eine ununterbrochene krumme Linie um den Mittelpunkt beschreibt, bestreicht der streifende Halbmesser-Flächen, welche mit den Zeiten im Verhältnisse stehen.

Fig. 19. Indeß der Körper A, Fig. 19 AE und EK durchläuft, durchstreicht der Halbmesser AC, die zwey Flächen AEC und ECK. Aus F sey die gerade Linie FC gezogen. Die Dreyecke

ACE

ACE und ECF haben einen gemeinschaftlichen Scheitel in C, folglich gleiche Höhen. Ihre Grundlinien AE und EF sind gleich, und in der nähmlichen geraden Linie wie §. 135 im Beweise gezeigt ist worden. Die halben Produkte aus ihren Grundlien in die Höhen, und ihre in diesen Produkten ausgedrückte Flächeninhalte sind daher gleich. Die Dreyecke ECF und ECK, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie EC, und ihre Scheitel F und K zwischen der nähmlichen zur Grundlinie gleichlaufenden FK, folglich gleiche Höhen haben, sind aus der nähmlichen Ursache von gleichen Flächeninhalte. Diesemnach muß auch in den Dreyecken ACE und ECK der Flächeninhalt gleich seyn. Gleichwie AE und EK vom Körper A in gleichen unendlich kleine Zeitchen beschrieben werden, so müssen auch die gleichen Flächen ACE und ECK vom streifenden Halbmesser in gleichen unendlich kleinen Zeitchen durchgestreifet werden, und die Summen dieser unendlich kleinen Flächen §. 21, das ist, die in einer bestimmten endlichen Zeit bestrichenen Flächen desto größer seyn, je größer die Zahl der unendlich kleinen und gleichen dazu angewandten Zeitchen, oder die ganze bestimmte Zeit ist. Die in jeder bestimmten Zeit bestrichene Flächen müssen mit dieser im Verhältnisse stehen.

137.

In verschiedenen Punkten seiner Laufbahne sind die Geschwindigkeiten des durch gedachte Centralkräfte in Bewegung gesetzten Körpers im verkehrten Verhältnisse der Senkrechten, welche aus dem Mittelpunkte der Kräfte auf die Tangenten der betrachteten Punkte gezogen werden.

Fig. 19. AE und EK Fig. 19, die zwey unendlich kleinen folglich wie Punkte zu betrachtende Seiten, wenn sie verlängert werden, sind selbst die Tangenten jener Punkte, in welchem der Körper A zu betrachten ist, da er sich in AE und EK beweget. Die aus C zu AE und EK senkrecht gezogenen Linien CI und CL sind daher die aus dem Mittelpunkte der Kräfte auf die Tangenten der zwey in Betrachtung zu nehmenden Punkten gezogenen, und wenn die Geschwindigkeit des Körpers A in AE und EK, G und g genannt werden, so ist zu beweisen, daß: G:g::CL:CI sey, dieß folget aus dem §. 136. Vermög diesem sind die Flächeninhalte in ACE und ECK gleich, folglich, wenn AE und EK für die Grundlinien angenommen werden, $\frac{AE \times CI}{2} = \frac{EK \times CL}{2}$ und auch $AE \times CI = EK \times CL$. Diese zwey Produkte geben: AE:EK::CL:CI. AE und EK sind gleichzeitige Räume des Kör=

Körpers A; wie es aus den §§. 135, 136 gegebenen Beweisen erhellet, und gleichzeitige Räume sind wie die Geschwindigkeiten, §. 10, folglich: AE:EK::G:g, und auch G:g:: CL:CI.

Wenn die Senkrechten, um den Ausdruck allgemein zu machen S und s genannt werden, so ist überhaupt in jeder durch die Wirkung der Centralkräfte vom Körper beschriebenen Laufbahne G:g::s:S.

Im Cirkul sind die zu was immer für einem Punkte des Umkreises gezogenen Halbmesser zur Tangente des nähmlichen Punktes senkrecht. Müssen daher statt gedachten Senkrechten in der Proportion gesetzt werden, und wenn H und h zwey zu verschiedenen Punkten des nähmlichen Cirkulumkreises aus seinem Mittelpunkte gezogene Halbmesser allgemein ausdrücken, ist in jeder cirkulförmigen Bewegung: G:g::h:H. Woraus überzeugend dargethan ist, daß die Geschwindigkeit des im Cirkulumkreise sich bewegenden Körpers; sich selbst stets gleich bleibe, wie alle Halbmesser des nähmlichen Cirkuls untereinander gleich sind. Wenn daher der Mittelpunkt der Kräfte auf dem Mittelpunkt des Umkreises fällt, ist jede Centralbewegung im Cirkul eine gleichförmige Bewegung. §. 73.

138.

Wenn der Winkel, den die Richtungen der Wurfskraft, und zum Mittelpunkt strebenden einschließen gespitzt ist, so wächst die Wurfskraft. Unter einem stumpfen Winkel nimmt sie ab, unter einem rechten Winkel nimmt die Wurfs-oder Tangentialkraft weder zu noch ab.

Die Wurfskraft wird auch Tangentialkraft genannt, weil sie in der Richtung ver Tangente ist. §. 134. Die zum Mittelpunkte strebende ist jederzeit in der Richtung des streifenden Halbmessers. §§. 51, 134. Der Winkel daher, den die Richtungen gedachter Kräfte einschließen, ist ebenderselbe, unter welchem die Tagente des Punktes mit dem streifenden Halbmesser zusammenläuft, und dieser kann in diesem Satze statt jenem ohne Veränderung gebraucht werden.

Fig. 20. Diesemnach sey Fig. 20 des Körpers A Tangentialkraft AD. Der Mittelpunkt der Kräfte C, und die in der Richtung des streifenden Halbmessers AC unter dem gespitzten Winkel BAD mit AD zugleich wirkende Centripetalkraft AB. Diese als schief gegen AD wirkende, ist wie aus einer senkrechten AF, oder EB und einer zu AD gleichlaufenden AE zusammengesetzt zu betrachten. §. 69. Jene hält den Körper von der Tangente gegen dem Mittelpunkt. Diese ist in der Richtung der Tangeute, muß daher die Tangentialkraft,

kraft, oder die Geschwindigkeit des Körpers in seiner Laufbahne vermehren. §. 60.

Wenn Fig. 21 AB und AD einen stumpfen Winkel einschließen, so ist AE der Tangentialkraft gerade entgegengesetzt. Dessen der Differenz der Kräfte gleiche Wirkung, §. 61, muß daher kleiner als AD seyn. Die Wurfskraft oder die Geschwindigkeit in der Laufbahne vermindert werden. Fig. 21.

Ist der Winkel CAF unter welchem AG und AF Fig. 18 auf dem Körper A wirken, ein rechter Winkel, so ist AG ganz und allein dahin verwendet, daß der Körper A von der Tangente AF zum Mittelpunkte der Kräfte C gehalten werde, und es ist keine Kraft vorhanden, welche mit AF übereinstimmte, oder derselben entgegengesetzt wäre. Die Tangentialkraft oder Geschwindigkeit in der Laufbahne kann weder vergrößert noch verkleinert werden, sondern muß unverändert bleiben. Fig. 18.

Da jede Tangente des Cirkuls mit dem zum Berührungspunkte gezogenen Halbmesser einen rechten Winkel einschließt, die Kräfte folglich im Cirkul immer unter einem rechten Winkel wirken, so ist es auch hiemit erwiesen, daß die Bewegung im Cirkulumkreise; wie es §. 137 gefolgert wurde, gleichförmig sey.

139.

Bey jeder durch Centralkräfte im Cirkulumkreise erzeugten Bewegung sind die zum Mittelpunkte strebenden Kräfte, oder Bestimmungen, gerade wie die Quadrate der Geschwindigkeiten in der Laufbahne, oder Tangentialkräfte, und verkehrt wie die Halbmesser. Wenn die Centripetalkräfte in verschiedenen Punkten der Laufbahne durch K und k, die Geschwindigkeiten durch G und g ausgedrückt werden, und die Halbmesser H und h sind, so ist $K : k :: \frac{G^2}{H} : \frac{g^2}{h}$.

Fig. 18. Zum Beweiß habe der Körper A Fig. 18. in einer unendlich kleinen Zeit den eben daher §. 21 unendlich kleinen Cirkulbögen AB beschrieben. Wenn auf A die Tangente AF, aus B die mit AF gleichlaufende, folglich zu AQ senkrechte BG, und die mit AG gleichlaufende BF gezogen wird, so ist AB, der als unendlich klein für eine gerade Linie anzusehende Bogen und beschriebene Raum des Körpers, welcher folglich seine Tangentialkraft oder Geschwindigkeit in der Laufbahne ausdrückt, als die Diagonale des Parallelogrammes AFBG, und aus AF und AG zusammengesetzt zu betrachten. §. 66. AG mit FB gleich und gleichlaufend drückt die Strecke aus, um welche der Körper A, da er AB beschreibt, von der Tangente AF gegen dem Mittelpunkt

telpunkte C abgewichen ist, folglich die zum Mittelpunkte strebende Kraft, welche ihn von der Tangente abgewendet hat. AG ist K. AB als der beschriebene Raum ist wie die Geschwindigkeit G in der Laufbahne. Weil nun AB als ein unendlich kleiner Bogen auch mit seiner Sehne übereinstimmend, betrachtet werden kann, so ist nach gezogener Sehne BQ der auf den Durchmesser AQ aufstehende Winkel ABQ ein rechter Winkel, und BG eine aus dem rechten Winkel zur Hypothenuse gezogene Senkrechte, folglich: $\div$ AQ : AB : AG. AQ ist $= 2H$, dem doppelten Halbmesser. Es ist also auch $\div\ 2H : G : K$, und $K = \frac{G^2}{2H}$, :: $\frac{G^2}{H}$, und für einen anderen Körper : $k = \frac{g^2}{h}$, folglich: $K : k :: \frac{G^2}{H} : \frac{g^2}{h}$.

140.

Die Tangentialkraft, oder die Geschwindigkeit im Cirkulumkreise ist wie die Quadratwurzel des Produktes aus dem doppelten Halbmesser in die zum Mittelpunkt strebende Kraft, oder das Quadrat der Geschwindigkeit ist wie dieses Produkt. $G = \sqrt{2HK}$ oder $G^2 = 2\,HK$.

Nachdem eben erwiesen ist worden, daß $\div\!\div\, 2H : G : K$, so folgt von selbsten, daß $G^2 = 2HK$, und $G = \sqrt{2HK}$.

Die Halbmesser des nähmlichen Cirkuls sind untereinander gleich. Diese sind zugleich die Abstände des im Cirkul sich bewegenden Körpers von dem Mittelpunkte der Kräfte. Auch die zum Mittelpunkt strebende Kraft muß daher im nähmlichen Cirkul immer gleich bleiben, und das Produkt aus dem doppelten Halbmesser in die zum Mittelpunkte strebende Kraft, ist in jedem Cirkul eine unveränderliche Größe. Die Geschwindigkeit bleibt unverändert, und der Körper hat eine gleichförmige Bewegung. Welches auch §§. 137 und 138 erwiesen ist worden.

141.

Des Körpers, der von Centralkräften angetrieben, einem Cirkul beschreibt, Tangentialkraft oder Geschwindigkeit in der Laufbahne ist jener Bestimmung gleich, welche er am Ende des freyen Falles über dem vierten Theil des nähmlichen Cirkuldurchmessers von seiner Schwere erhalten würde.

Der vierte Theil des Durchmessers ist die Hälfte des Halbmessers also $= \frac{H.}{2}$ Der durch die Schwere des Körpers erzeugte freye Fall ist eine gleichförmig zunehmende Bewegung. §. 100.

Die

Die in dem freyen Falle enthaltene letzte Geschwindigkeit oder Bestimmung muß daher aus den Verhältnissen gefolgert werden, welche wir § 78 für die gleichförmig zunehmende Bewegung erwiesen haben. Wenn der in bestimmter Zeit beschriebene Raum für die Masse der Geschwindigkeit angenommen wird, so ist nicht nur $R :: \frac{GZ}{2}$ sondern auch $R = \frac{GZ}{2}$.

§. 79. Wird der durch den Trieb der Kraft vom Körper durchgelaufene Raum, als die Masse der Bestimmung des Körpers angesehen, so ist nicht nur allein, wie es §. 78 erwiesen wurde $R :: KZ^2$ sondern auf $R = KZ^2$. Wenn folglich K die Schwerbestimmung des vermög Bedingniß über $\frac{H}{2}$ frey fallenden Körper ist, in welcher die in dem Planeten Systeme zum Mittelpunkte strebende Kraft eigentlich bestehet, und G die letzte Geschwindigkeit des gesetzten freyen Falles, Z aber die Zeit, so ist: $\frac{H}{2} = \frac{GZ}{2}$ und $\frac{H}{2} = KZ^2$, folglich $\frac{GZ}{2} = KZ^2$. $\frac{G}{2} = KZ$ und $Z = \frac{G}{2K}$, folglich $Z^2 = \frac{G^2}{4K^2}$. Dieses statt Z^2 in der zweyten Gleichung gesetzt, ist: $\frac{H}{2} = \frac{KG^2}{4K^2} = \frac{G^2}{4K}$, und $H = \frac{G^2}{2K}$. Wird nun der Werth des G^2 ausgedrückt, so ist $G^2 = 2HK$ und $G = \sqrt{2HK}$. Welche Gleichung die §. 140 bestimmte ist.

142.

Weil die Tangentialkraft im Cirkul jener Bestimmung gleichet, welche der Körper zu Ende des freyen Falles über den vierten Theil des Cirkuldurchmessers, den er beschreibt, von seiner Schwere erhalten würde, so ist zur Beschreibung eines Cirkuls nebst der Wirkung der Kräfte unter einem rechten Winkel, auch eine erst gedachter Bestimmung gleiche Tangential- oder Wurfskraft nothwendig, und der Körper, dem eines dieser zwey Erfordernisse mangelt, kann keinen Cirkul beschreiben.

143.

Bey Körpern, welche in so genannten Centralmaschienen, oder auf eine andere Art, wie z. B. in einer Schleider mit einem Punkte verbunden, um diesen Cirkul-Umkreise beschreiben, werden die zum Mittelpunkt strebenden Kräfte durch den Zusammenhang des Bindekörpers ersetzt, von welchem selbe im Umkreise erhalten werden.

Bey

Bey diesen Körpern pflegen wir daher nicht die zum Mittelpunkt strebenden, welche sie in der That nicht haben, sondern die weichende Centralkraft, mit welcher sie sich vom Mittelpunkt zu entfernen suchen, in Betrachtung zu ziehen. Diese muß aber immer in dem nähmlichen Verhältnisse seyn, in welchem jene wäre, und welches wir § 139 erwiesen haben.

Um hierin mehr Deutlichkeit zu erlangen, betrachten wir einen Punkt A Fig. 18, welcher vermittels des Fadens AC an C gehalten den Cirkulumkreis ADQ beschreibet. Da er den ersten unendlich kleinen Bogen AB beschreibt, hat er die Bestimmung der Tangente dieses Bogens in AF, nachdem wir solche unendlich kleine Bögen, wie unendlich kleine Seiten betrachten können, welche verlängert die Tangente des betrachteten unendlich kleinen Bogens geben. Die Bestimmung, welche der Körper A in A erhält ist AF, welche aus AB und BF zusammengesetzt betrachtet werden kann. §. 66. Mit AB bewegt sich der Körper in der Laufbahne ADQ. BF aber ist zur Entfernung des Körpers vom Mittelpunkte C gerichtet, und muß durch den Zusammenhang des Bindekörpers AC getilget werden, damit der Körper AB beschreibe BF also, welche für die weichende Centralkraft angesehen wird, muß in gesetzten Bewegungen den Bindekörper spannen, und dessen Widerstande gleich seyn §. 53, und da dieser Widerstand die Stelle Fig. 18.

der zum Mittelpunkt strebenden Kräfte vertritt, so muß BF auch in dem Verhältnisse seyn, welches §. 139 von der zum Mittelpunkt strebenden Kraft erwiesen ist worden. Mit dieser Voraussetzung können wir für jeden Bestandtheil des in einer Centralmaschine sich bewegenden Körpers, den nähmlichen §. 139 gebrauchten Ausdruck $K :: \frac{G^2}{H}$ annehmen. Die weichenden Centralkräfte der Bestandtheile zweyer mit Centralmaschinen in Cirkulkreisen herumgetriebenen Körper, geben die nähmliche Proportion. $K : k :: \frac{G^2}{H} : \frac{g^2}{h}$.

144.

Wenn die Massen der Körper, welche in Centralmaschinen umgetrieben werden, M und m, die Halbmesser der beschriebenen Cirkulumkreise H und h, die Umlaufszeiten Z und z sind, so sind die erklärten Centralkräfte der ganzen Körper $K : k :: \frac{MH}{Z^2} : \frac{mh}{z^2}$, im geraden Verhältnisse der Massen und Halbmesser oder Abstände vom Mittelpunkte, und verkehrten quadratischen der Umlaufszeiten.

Die erklärte Centralkraft eines jeden Bestandtheiles in diesen Körpern ist wie $\frac{G^2}{H}$ und daher

$K : k ::$

$K:k::\frac{G^2}{H}:\frac{g^2}{h}$ §. 143. Um die Kräfte der ganzen Körper, oder die Summe der Kräfte auszudrücken, muß das Verhältniß mit der Zahl der Theile, die wir Massa nennen, multipliziret werden. Für die ganzen Körper, oder alle Theile derselben zusammen genommen, ist also $K:k::\frac{MG^2}{H}:\frac{mg^2}{h}$. Die Bewegung in Cirkulumkreisen ist gleichförmig §§. 137, 138, 140. die Geschwindigkeiten sind folglich im geometrischen Verhältnisse der Zeit zum Raume §. 10. $G:g::\frac{R}{Z}:\frac{r}{z}$. Die Räume sind in dem betrachteten Falle die beschriebenen Cirkulumkreise, und diese sind wie ihre Halbmesser. In dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten können daher in angenommenen Umständen die Halbmesser gesetzt werden. $G:g::\frac{H}{Z}:\frac{h}{g}$, und $G^2:g^2::\frac{H^2}{Z^2}:\frac{h^2}{z^2}$. Wird dieses letzte Verhältniß statt der Quadraten der Geschwindigkeiten in dem Verhältnisse der Centralkräfte gesetzt, so ist $K:k::\frac{MH^2}{HZ^2}:\frac{mh^2}{hz^2}::\frac{MH}{Z^2}:\frac{mh}{z^2}$.

Da die Halbmesser im Cirkul die Abstände der Punkte des Umkreises vom Mittelpunkte ausdrücken, so kann man im erst erwiesenen Verhältnisse statt der Halbmesser H und h, auch die Abstände A und a vom Mittelpunkte setzen. Womit $K:k::\frac{MA}{Z^2}:\frac{ma}{z^2}$. ist.

Die in Centralmaschinen mit Körpern von verschiedenen Massen, Abständen von Mittelpunkte, und verschiedenen Umlaufzeiten angestellten Versuche bestättigen dieses erwiesene Verhältniß der Centralkräfte, und haben zuglich ihre Erklärung aus demselben.

145.

Um das Verhältniß der Centralkräfte in der Elipse zu bestimmen, wird es mir erlaubt seyn, die von der Mathematik erwiesenen Eigenschaften der Elipse vorauszusetzen, und mich mit der Erinnerung derselben hier zu begnügen.

Die Elipse ist eine eyförmige in sich selbst zurückkehrende Linie. Der Umkreis des Durchschnittes, welcher erhalten wird, wenn der Kegel so schief zur Achse geschnitten ist, daß der Durchschnitt durch beyde Seitenwände gehe, zeigt die Gestalt der Elipse. Sie hat zwey Scheitel, bey diesem ist ihre Krümmung die stärkste. Die gerade zwischen den zwey Scheiteln begriffene Linie wird die erste oder größere Achse, und dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Elipse genannt. Die von einer Seite der Elipse zu der anderen durch den Mittelpunkt

punkt senkrecht zur größeren Achse gezogene gerade Linie ist die zweyte oder kleinere Achse. Von beyden wird die Elipse in zwey untereinander gleiche Theile getheilet, und jede dieser Achsen ist zur Tangente senkrecht, welche in ihren äußersten Enden auf die Elipse gezogen werden. Die Krümmung ist bey jeden zwey gerade entgegengestellten Punkten die nähmliche, und jede zwey vom Mittelpunkte gleich abstehende Ordinaten sind untereinander gleich.

Jeder Abstand des Brennpunktes von einem der äußersten Punkte der kleineren Achse ist die Hälfte der größeren Achse, zwey folglich sind der ganzen gleich. Die Summe der Abstände jeden Punktes in der Elipse von beyden Brennpunkten ist der größeren Achse gleich. Die Brennpunkte haben sowohl von dem Mittelpunkte, als von dem Scheitel der Elipse gleiche Abstände. Der Abstand des Brennpunktes von dem Mittelpunkte der Elipse wird Excentricität genannt, und ist desto größer, je mehr, desto kleiner, je weniger die Elipse zusammengedrückt, oder je mehr und je weniger Unterschied zwischen den zwey Achsen ist.

Wenn der Mittelpunkt der Kräfte auf einen der zwey Brennpunkte fällt, so ist der in der Elipse sich bewegende Körper in dem kleinsten Abstande von gedachtem Mittelpunkte, wenn er in dem zum angenommenen Brennpunkte nächsten, im größten Abstande aber, wenn er in dem anderen Scheitel sich befindet. An den zwey äußersten Punkten der kleineren Achse ist er in mitteren Abständen.

146.

In der Elipse, wenn der Mittelpunkt der Kräfte auf einen der Brennpunkte fällt, sind die zum Mittelpunkt strebenden Kräfte im vekrehrten quadratischen Verhältnisse der Abstände von eben dem Brennpunkte. $K :: \frac{1}{A^2}$.

In der Elipse, deren größere Achse AD. Tab. 2. Fig. 25. Tab 2 Fig. 25, Scheitel A und D, Brennpunkte f und F, dann der Mittelpunkt C, bewege sich der Körper, und habe den unendlich kleinen Bogen BL beschrieben. Zu diesem werden die Tangente RBO, aus F und f die zur Tangente senkrechten FRQ, und fOP unbestimmt, dann durch B, FBP und fBQ gezogen, und verlängert, bis sie mit den unbestimmten Senkrechten zur Tangente in P und Q zusammenlaufen. Aus dem Mittelpunkte C sey die gerade Linie CB, und mit der Tangente RO gleichlaufende CE, aus L die mit der Tangente gleichlaufende, und BF in M schneidende LN, dann bis zur Tangende LS mit BC und LT mit BF

BF gleichlaufend, LI aber zu BC, und LK zu BF senkrecht gezogen. Die Punkte I und K verbinde man durch die gerade Linie IK, L und C durch LC, und ziehe aus f bis zur BF die mit der Tangente RO gleichlaufende fG.

FQ und fP sind zur nähmlichen dritten RO senkrecht, folglich untereinander gleichlaufend. Die Dreyecke FBQ und fBP der Wechselwinkeln bey Q und f, dann bey P und F, und Scheitelwinkeln bey B wegen ähnlich. Die Winkel FBQ und fBP durch RO in zwey gleiche Theile getheilet, und FB = PQ, fB = BP, wie FR = RQ und fO = OP. Wegen den gleichlaufenden BO, und fG ist erstens der Winkel PBO = BGf, dann OBf = BfG, und weil PBO = OBf, auch BGf = BfG. Das Dreyeck GBf ist ein gleichschenkliches Dreyeck, und BG = Bf. CE und fG sind beyde mit der Tangente RO gleichlaufend, also auch miteinander die Dreyecke FEC und FGf ähnlich, und Ff : FC : : FG : : FE. Vermög der Elipsegenschaften §. 145, FC = fC, folglich $FC = \frac{Ff}{2}$ also auch $FE = EG = \frac{FG}{2}$. In jeder Elipse ist FB + Bf = AD der größeren Achse §. 145. FB = FG + BG. Weil also BG = Bf, so ist auch FG + BG + BG = AD, und $\frac{FG}{2}$ +

$\frac{BG + BG}{2} = \frac{AD}{2}$, das ist EG + BG = BE = AC der halben grösseren Achse, und kann statt dieser gesetzt werden.

BL als ein unendlich kleiner Bogen, kann für eine gerade Linie angesehen werden. LI ist auf BC; und LK auf BF senkrecht gezogen, und die Winkel BIL, BKL sind rechte auf BL aufstehende Winkel. Wenn auf BL als Durchmesser ein Cirkul beschrieben würde, so müßte dieser durch I und K gehen. Die Winkel KLI, und KBI würden ihre Scheiteln L und B im Umkreise haben, und mit ihren Schenkeln auf dem nähmlichen Bogen IK aufstehen, folglich dessen Hälfte zur Masse haben. Also ist der Winkel KLI = KBI. Aus ähnlichen Ursachen wegen ihrer Scheitel im Umkreise, und den nähmlichen zwischen Schenkeln begriffenen Bogen, dessen Sehne LK ist der Winkel LIK = LBK, und weil BL als ein unendlich kleiner Bogen mit der Tangente RO übereinfallend gesetzt werden kann, folglich LBK und BGf eben so, wie SBK und BGf als Wechselwinkel zwischen gleichlaufenden gleich sind, so ist auch LIK = BGf, = BEC, da fG und CE mit der nähmlichen dritten RO, folglich auch mit einander gleichlaufend sind. Die Dreyecke KLI und EBC welche daher zwey ähnlich gestellte Winkel gleich haben: KLI = KBI = EBC und LIK = BEC, sind ähn-

ähnlich, und LK : LI :: BC : BE = AC, also auch LK : LI :: BC : AC.

Die Dreyecke BMN und BEC sind der gleichlaufenden Grundlinien MN und CE wegen ähnlich, folglich BN : BM :: BC : BE oder AC. Weil gleichlaufende zwischen gleichlaufenden gleich sind, ist BN = LS und BM = LT. Also ist auch LS : LT :: BC : AC und LT :: AC. LT ist die Strecke, um welche der Körper von der Tangente gegen den Mittelpunkt der Kräfte F abgewichen ist, da er BL beschrieb, folglich ist LT die Wirkung der zum Mittelpunkt strebenden Kraft, und diese wie AC ::

Wenn die zum Mittelpunkt strebende Kraft, oder Bestimmung auf ruhende Körper eben so, wie auf die sich bewegenden, und auf alle ihre Theile gleich wirkt, so kann sie in jeder äußerst kleinen Zeit wie eine gleichförmig zunehmend wirkende betrachtet werden. Die zum Mittelpunkt strebende Kraft, welche wir in der Natur finden, ist die Schwerbestimmung, und diese wirkt auf die in der Ruhe und Bewegung stehenden Körper, und auf alle ihre Theile in nähmlichen Umständen gleich. Wir können auch daher die zum Mittelpunkt strebende Bestimmung in der Elipse in jeder äußerst kleinen Zeit für gleichförmig zunehmend ansehen, und R :: KZ² annehmen. Diesemnach ist LT :: KZ, wenn K die zum Mittelpunkte strebende Kraft, und Z die Zeit ausdrückt, in welcher der Körper von dieser Kraft angetrieben, die Strecke LT beschreibt.

Da die von streifenden Halbmessern bestrichenen Flächen mit den Zeiten im Verhältnisse stehen, §. 136, kann statt der Zeit die bestrichene Fläche gesetzt werden. Diese ist im gesetzten Falle $LFB = \frac{FB \times LK}{2}$. Setzen wir nun, daß ein anderer gleicher Körper, welcher den nähmlichen Bogen BL beschreibe, seinen Mittelpunkt der Kräfte in C habe, so ist seine bestrichene Fläche $BCL = \frac{BC \times LI}{2}$, folglich, $LFB : BCL :: FB \times LK : BC \times LI$, und weil $LK : LI :: BC : AC$, dieses Verhältniß statt jenen gesetzt, $LFB : BCL :: FB \times BC : BC \times AC$. Beyde letzte Glieder mit BC dividiret: $LFB : BCL :: FB : AC$, also $FLB :: FB :: Z$, und $Z^2 :: FB^2$. Dieses in dem Verhältnisse $LT :: KZ^2$. gesetzt, ist $LT :: K \times FB^2$, und weil $LT :: AC$, auch $AC :: K \times FB^2$, und $K :: \frac{AC}{FB^2}$. AC als eine in der nähmlichen Elipse beständigen Größe, verändert das Verhältniß nicht, kann also weggelassen werden. Es ist daher $K :: \frac{1}{FB^2}$, und wenn FB der Abstand allgemein durch A ausgedrückt wird: $K :: \frac{1}{A^2}$.

Wenn

Wenn für einem zweyten Körper das nähmliche, durch kleine Buchstaben ausgedrückt wird:

$$K : k :: \frac{1}{A^2} : \frac{1}{a^2} :: a^2 : A^2.$$

147.

Wenn in krummen in sich zurückkehrenden Linien die zum Mittelpunkt strebenden Bestimmungen im verkehrten quadratischen Verhältnisse der Abstände wirken, so sind die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Würfel, der Cubi oder mittleren Abstände.
$Z^2 : z^2 :: A^3 : a^3$.

Wir können uns die ganze Elipse in dreyeckigte Flächen, wie BFL Tab. 2. Fig. 25 getheilet vorstellen, deren Flächeninhalt gleich ist, die Höhen folglich im verkehrten Verhältnisse der Grundlinien sind, welche in gleichen unendlich kleinen Zeitchen bestrichen werden. §. 136. Die Summe dieser Zeitchen giebt die ganze Umlaufszeit, und ist desto größer, je größer jedes der einzelnen Zeitchen ist. Die Zahl dieser bestrichenen Flächen kann in zwey krummen Linien ohne Anstand gleich angenommen werden. Auch die Umlaufszeiten in zwey verschiedenen Elipsen sind daher wie die unendlich kleinen Zeitchen, welche zur Durchstreichung der einzelnen Flächen verwendet werden, und wenn das Verhältniß Z : z der einzelnen Zeitchen ist, so können wir auch das

Tab. 2. Fig. 25.

das Verhältniß der ganzen Umlaufszeiten durch eben dieses ausdrücken.

Vermög Bedingniß ist: $K:k::\frac{1}{A^2}:\frac{1}{a^2}$.
Dieß Verhältniß muß bleiben, wenn A und a die mittleren Abstände ausdrücken. In dem §. 146 gegebenen Beweise hatten wir LT :: AC und LT :: KZ^2 gefunden, und daraus gefolgert, daß: AC :: KZ^2 sey. Es ist daher auch $K::\frac{AC}{Z^2}$, und weil AC die Hälfte der größeren Achse der mittlere Abstand vermög der Elipseigenschaften ist, so haben wir auch $K::\frac{A}{Z^2}$

und $K:k::\frac{A}{Z^2}:\frac{a}{z^2}$, in welchem Verhältnisse Z : z vermög eben angeführten Grundes das Verhältniß der ganzen Umlaufszeiten ausdrückt. Unter der gesetzten Bedingniß haben wir also zwey mit dem nähmlichen dritten, folglich auch untereinander gleiche Verhältnisse: $\frac{A}{Z^2}:\frac{a}{z^2}::\frac{1}{A^2}:\frac{1}{a^2}$, und nach gehobenen Divisionen: $A^3:a^3::Z^2:z^2$.

Das nähmliche kann auf ähnliche Art vom Cirkul erwiesen werden, Wenn im Cirkul $K:k::\frac{1}{A^2}:\frac{1}{a^2}$, so sind die mittleren Abstände

selbst

selbst die Halbmesser, und in der §. 139 erwiesenen Proportion $K : k :: \frac{G^2}{H} : \frac{g^2}{h}$ kann statt $G^2 : g^2$ nicht nur allein $\frac{H^2}{Z^2} : \frac{h^2}{z^2}$ wie es im Beweise §. 144 geschehen, sondern auch statt $H : h$, $A : a$ gesetzt werden. Diesemnach ist $K : k :: \frac{A}{Z^2} : \frac{a}{z^2}$, folglich unter der gesetzten Bedingniß auch $\frac{1}{A^2} : \frac{1}{a^2} :: \frac{A}{Z^2} : \frac{a}{z^2}$, und nach gehobenen Divisionen. $Z^2 : z^2 :: A^3 : a^3$.

148.

Sind die Quadrate der Umlaufszeiten der um den nähmlichen Mittelpunkt der Kräfte sich bewegenden Körper wie die Würfel der Cubi oder mittleren Abstände: $Z^2 : z^2 :: A^3 : a^3$, so wirken die zum Mittelpunkt strebenden Kräfte im verkehrten quadratischen Verhältnisse der Abstände. Es ist: $K : k :: \frac{1}{A^2} : \frac{1}{a^2} :: a^2 : A^2$.

Ohne Anstand können wir annehmen: $A : a :: A : a$, wenn A und a die nähmlichen mittleren Abstände in beyden Verhältnissen ausdrücken. Ist nun $Z^2 : z^2 :: A^3 : a^3$, so ist auch

$\frac{A}{Z^2}$

$\frac{A}{Z^2} : \frac{a}{z^2} :: \frac{A}{A^3} : \frac{a}{a^3}$. Nach geschehener Ausgleichung $\frac{A}{Z^2} : \frac{a}{z^2} :: \frac{1}{A^2} : \frac{1}{a^2} :: a^2 : A^2$

Es ist aber vermög des §. 146 gegebenen Beweise $K : k :: \frac{A}{Z^2} : \frac{a}{z^2}$, also auch $K : k :: \frac{1}{A^2} : \frac{1}{a^2} :: a^2 : A^2$.

Der nähmliche Beweis dienet auch für die Bewegungen in Cirkulumkreisen, wenn A und a die mittleren Abstände für die Halbmesser angesehen werden.

Zehntes Kapitel.

Vom

Stoße der Körper.

149.

Der Stoß bestehet in dem Bestreben der Körper ineinander einzudrigen. Wenn sich die Körper zwar berühren, sich aber nicht bestreben einander aus dem Raume hinauszudrücken, welchen sie einnehmen, stossen sie nicht aufeinander. Zum Stosse der Körper ist daher die Berührung nicht hinlänglich, sondern es wird auch

das

das Bestreben in einander einzudringen erfordert. Damit ein Körper in den anderen dringe, muß wenigstens einer der zwey Körper eine Bestimmung zur Bewegung haben, welcher der andern im Wege stehet. Von den stossenden Körpern muß daher wenigstens einer in Bewegung seyn, und an den andern anlaufen. Den anlaufenden pflegen wir den Stoßenden, den anderen aber den Gestoßenen zu nennen, und wenn sich beyde bewegen, so wird insgemein der für den stoßenden gehalten, dessen Bewegung stärker ist.

Die auf die gerade Linie, in welcher der Stoß vollbracht wird, im Berührungspunkte der stoßenden Körper senkrecht aufstehende Fläche, wird die **Fläche des Stoßes** genannt.

150.

Da die Folgen des Stoßes bey elastischen, und nicht elastischen Körpern verschieden sind, wie wir bald sehen werden, folglich der Stoß derselben abgesondert, zu betrachten kömmt, so theilet man den Stoß in Beziehung auf die Gattung der stoßenden Körper in den **Stoß der Nichtelastischen**, und jenen der **Elastischen**.

Da wir keinen Körper in der Natur kennen, der sich gar nicht zusammendrücken ließe, folglich hart wäre, und eben daher die festen Körper in weiche und elastische eintheilen, so pflegt man den Stoß in weichen und elastischen Körpern zu betrachten, und die Bestimmungen, welche für den Stoß der weichen gemacht werden, würden auch für jenen der harten dienen, nachdem diese gar nicht zusammengedrückt werden, folglich sich nicht wieder herstellen könnten, und hiemit ihr Stoß eben so, wie jener der weichen in einem einzigen Zeitpunkt vollbracht würde.

Nachdem nicht alle weiche und elastische Körper es in gleichem Grade sind, und der Stoß durch den verschiedenen Grad der Weiche, und Elasticität jederzeit Aenderung leidet, so würde die Betrachtung des Stoßes zu mannigfaltig, und zu sehr zusammengesetzt werden, wenn bey denselben kein bestimmter Grad der Weiche und Elasticität angenommen würde. Aus diesem Grunde setzen wir, daß die im Stoße betrachteten Körper vollkommen weich, oder elastisch sind, wenigstens in verhältnißmäßigen Abständen vom Berührungspunkte gleichartige Massen haben, und lassen in der Ausübung von der durch die Erwegung bestimmten Genauigkeit so viel ab, als die Weiche oder Elasticität der Körper von der Vollkommenheit abweicht.

151.

In Beziehung auf die Richtung des Stoßes ist dieser gerade oder schief. Wenn die Körper in der geraden Linie, welche zwischen ihren Schwerpunkten bestimmt ist, in einander dringen, so stoßen sie gerade aufeinander. Ist aber die Linie, in welcher sie zusammenlaufen, zu erst ge-

dachter

dachter die Schwerpunkte verbindenden schief, so ist auch ihr Stoß ein schiefer Stoß. So, wie die Wirkung der Kraft nicht die nähmliche ist, wenn sie gerade und wenn sie schief angebracht wird, § 68, so kann auch der gerade und schiefe Stoß nicht einerley Wirkung leisten.

152.

Der von einem einzigen gestoßene Körper verhält sich, wie der von einer einzigen Kraft angetriebene. Von mehr als einem Körper zugleich gestoßen, hat der Körper mehr als eine auf ihn in der nähmlichen Zeit wirkende Kräfte. Die Wirkung dieses Stoßes muß daher zusammengesetzt seyn. §. 64. Hierin liegt der Grund, aus welchem der Stoß in den einfachen und vielfachen getheilet wird.

153.

Der Stoß der Körper geschieht mit ihrer relativen Geschwindigkeit.

Der Stoß besteht in dem wechselseitigen Bestreben der sich berührenden Körper in eina nder einzudringen §. 149. Die Berührung sowohl, als das Eindringen der Körper in einander ist eine Wirkung der Annäherung. Die Körper stoßen daher mit eben der Geschwindigkeit aufeinander, mit welcher sie sich einander nähern. §. 25.

Wenn diese Geschwindigkeit gleich ist, muß auch die Stärke des Stoßes gleich seyn.

154.

Wenn sich von zwey miteinander verglichenen Körpern nur einer beweget, so ist die relative Geschwindigkeit der absoluten, wenn sich aber beyde bewegen, der Differenz, oder der Summe der absoluten gleich. §. 27. Der Differenz nähmlich, wenn sie sich in die nähmlichen, der Summe aber, wenn sie sich in entgegengesetzte Gegenden bewegen. Die Körper müssen daher jederzeit mit der absoluten Geschwindigkeit des sich bewegenden, wenn einer ruht, oder wenn beyde sich bewegen, mit der Differenz, oder Summe der absoluten Geschwindigkeiten stoßen. §. 153. Mit jener stoßen sie sich, wenn der eine langsamer gerade voraus geht als der andere folget; mit dieser, wenn sie in gerade entgegengesetzten Richtungen zusammenlaufen.

155.

Beym schiefen Stoß der Körper trägt nicht die ganze Kraft der Körper, sondern nur jener Theil derselben zum Stoße bey, welcher in der Richtung des Stoßes, das ist, in der im Stoße die Schwerpunkte der Körper verbindenden geraden Linie ist. §. 69. Da also in dieser Richtung die relative Geschwindigkeit eben auch wie die absolute, oder wie die Differenz oder endlich die

Sum-

Summe der absoluten ist, so geschieht auch der schiefe Stoß mit der, aber in erst gedachter Richtung genommenen absoluten, mit der Differenz oder Summe der absoluten Geschwindigkeiten.

156.

Wenn zwey Körper aufeinander stoßen, so werden die bewegenden Kräfte eines jeden zwar verändert, doch bleibt die Summe dieser Kräfte in beyden zusammen die nähmliche.

Des deutlicheren Ausdruckes wegen sollen die stoßenden Körper A und B heissen. A sey der stoßende. Dieser, wenn er auf den anderen stößet, dringt in B so lang, bis B aus seinem Orte weicht, oder wenn dieses nicht seyn kann, wenigstens so lang, als B dem A zum Hindernisse der Bewegung ist. Wäre B durchdringlich, so würde A ungehindert durch B durchgehen. Da die Körper aber undurchdringlich sind, 1. Abh. §. 32 so schließt einer den anderen aus dem Orte aus; in welchem er ist, und weichen nicht, wenn das Eindringen so lang anhält, bis die Bestimmung zur Bewegung hinreichend ist. Das Eindringen des Körpers A wirkt also zur Bewegung des B. Durch seine abstoßende Bestimmung hindert B des Körpers A Eindringen, und weil dieses von seinen bewegenden Kräften bestimmt wird, widerstehet B der Bewegung des A. Wenn daher A und B zusammenstoßen, wird B von A zur Bewegung bestimmt, und A von B in seiner Bewegung gehindert, und die Bestimmung zur Bewegung des B ist dem Hindernisse der Bewegung A gleich. §. 53. Durch die Bestimmung zur Bewegung erhält der Körper bewegende Kräfte, und durch das Hinderniß der Bewegung verliert er einen verhältnißmäßigen Theil derselben. Wenn also A auf B stoßt, so verlieret A von seinen bewegenden Kräften so viel, als B erlangt oder gewinnt. Beyde stoßenden Körper zusammengenommen haben daher nach dem Stoße, eben die Summe der bewegenden Kräfte, welche vor dem Stoße war, ungeachtet daß die Menge der bewegenden Kräfte eines jeden ins besondere verändert wird.

Wenn daher MG und mg, die zwey Quantitäten der Bewegung, folglich MG + mg die Summe derselben vor dem Stoße ist, so muß die Summe der bewegenden Kräfte nach dem Stoße = MG + mg seyn.

157.

Wenn die Körper in gerade entgegengesetzten Richtungen zusammenstoßen, so trägt nur die Differenz der Kräfte zur eigentlichen Folge oder Wirkung des Stoßes bey.

Da die Wirkung gerade entgegengesetzter Kräfte nur wie die Differenz derselben ist, §. 61 indem die zwey gleichen Theile der Kräfte, welche sich wechselseitig aufheben, diesemnach keine an-

dere

dere Wirkung mehr leisten können, so kann die kleinere Menge der bewegenden Kräfte der zwey stoßenden keine andere Veränderung in dem Stoße bewirken, als die Tilgung eines gleichen Theiles der größeren Menge der bewegenden Kräfte, und dieser gleiche Theil kann nur die Tilgung der kleineren Quantität der Bewegung bewirken. Womit zur Erzeugung der eigentlichen Folge oder Wirkung des Stoßes nur die Differenz der in dem stoßenden Körper vorhandenen Menge der bewegenden Kräfte übrig bleit, so oft die Körper in gerade entgegengesetzter Richtung zusammenstoßen.

Wenn daher MG und mg die zwey Mengen der bewegenden Kräfte sind, und mg die kleinere, so ist für diesen Fall MG — mg die im Stoße eigentlich zu betrachtende Summe der bewegenden Kräfe, und auch diese ist nach dem Stoße die nähmliche §. 156.

158.

Die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der stoßenden Körper, bleibt im Stoße unverändert.

Die Menge der bewegenden Kräfte ist jederzeit dem Produkte aus der Geschwinbigkeit des Schwerpunktes in die Masse gleich: $MG = C \times M$ §. 50. Es ist also, wenn C die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der stoßenden Körper ausdrückt, auch MG + mg

$= C(M + m)$ und $MG - mg = C(M + m)$ für den §. 157 angeführten Fall, folglich unter einem Ausdrucke: $MG \pm mg = (M + m) C$ sowohl vor als nach dem Stoße. Die Summe $MG \pm mg$ bleibt nach dem Stoße die nähmliche §§. 156, 157. Es bleibt also auch $(M + m)C$ im Stoße unverändert, und weil die Massen M und m im Stoße nicht verändert werden, muß auch C, die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes unverändert bleiben.

Die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes nach dem Stoße $C = \frac{MG \pm mg}{M + m}$.

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes wird durch den in gesetzter Zeit beschriebenen Raum bestimmt. §. 10. Dieser von dem gememeinschaftlichen Schwerpunkte in gleicher Zeit durchgelaufene Raum, muß daher vor und nach dem Stoße durch den vor dem Stoß beschriebenen Raum bestimmt werden. Hat der gemeinschaftliche Schwerpunkt vor dem Stoße geruhet, so ruhet er auch nach dem Stoße.

159.

Die Stärke des Stoßes ist dem getilgten Theil der bewegenden Kräfte des Stoßenden gleich.

Die Wirkung des Stoßes bestimmt dessen Stärke. Diese Wirkung bestehet in der dem

Ge-

Gestossenen gegebenen Bestimmung zur Bewegung. Diese Bestimmung ist dem im Stoße getilgten Theil der bewegenden Kräfte des Stoßenden gleich §§. 53, 156.

In Fällen, in welchen der gehobene Theil der bewegenden Kräfte der nähmliche oder gleich ist, muß auch die Stärke des Stoßes gleich seyn.

160.

Wenn beyde Stossende vor dem Stoße sich bewegen, so ist der Stoß jenem gleich, welcher seyn würde, wenn sich nur einer der zwey Stoßenden mit der Differenz, oder Summe der in beyden vor dem Stoße gewesenen Kräfte beweget, der andere aber geruhet hätte.

Wenn beyde Stoßende sich vor dem Stoße bewegen, so muß diese Bewegung in die nähmliche, oder entgegensetzte Gegend gerichtet seyn.

Ist die Bewegung der Stoßenden vor dem Stoße in die nähmliche Gegend gerichtet, so stoßen sie mit der Differenz ihrer absoluten Geschwindigkeiten, mit ihrer relativen nähmlich zusammen. §. 153. Ruhet hingegen einer, und beweget sich der andere nur mit der Differenz der Kräfte, so stoßen sie eben auch mit der Differenz ihrer gewesenen absoluten Geschwindigkeiten zusammen. Ihre relative Geschwindigkeit ist die nähmliche §. 27, und der Stoß gleich §. 153.

Stoßen zwey sich bewegende Körper in entgegengesetzten Richtungen zusammen, so ist ihre relative Geschwindigkeit, mit welcher sie zusammenstoßen, §. 153, wie die Summe der absoluten. §. 27. Hätte der eine geruhet, der andere aber mit der Summe der Kräfte sich bewegt, so wäre ihre relative Geschwindigkeit eben auch wie die Summe der absoluten gewesen, der Stoß folglich der nähmliche §. 153.

Die Wirkung des Stoßes ist der auf die stoßenden Körper gemachte Eindruck, und die durch diesen in denselben erzeugte Bestimmung. Der Eindruck daher, welchen die stoßenden Körper empfinden, und die ihnen gegebene Bestimmung müssen eben so seyn, als wenn sich nur einer der Stoßenden, und zwar im ersteren Falle nur mit der Differenz, im zweyten aber mit der Summe der Kräfte bewegt hätte.

161.

Im Zeitpunkte des Stoßes ist der gemeinschaftliche Schwerpunkt der stoßenden Körper in jedem Falle zwischen denselben.

Der gemeinschaftliche muß jederzeit in der durch die einzelnen Schwerpunkte bestimmten geraden Linie seyn §. 46.

162.

Weiche Körper bewegen sich nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit, welche ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt vor dem Stoße hatte, oder sie ruhen samt dem Schwerpunkte.

Der stoßende Körper dringt in den gestoßenen so lang, als dieser ihm zum Hindernisse der Bewegung ist. Da im Stoße der weichen, ihrer Art wegen, die Körper zwar zusammengedrückt werden, ihre Gestalt aber nicht wieder herstellen, so ist im Stoße der weichen, der gestoßene dem stoßenden so lang zum Hindernisse, bis beyde ruhen, oder mit gleicher Geschwindigkeit in die nähmliche Gegend sich fortbewegen. Stoßende weiche Körper müssen daher nach dem Stoße beyde ruhen, oder gleiche Geschwindigkeit haben, und in diesem letzteren Falle unzertrennt sich fortbewegen. Im Zeitpunkt des Stosses ist ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt zwischen ihnen §. 161. Er muß es also auch nach dem Stoße bleiben, und die stoßenden weichen Körper müssen nach dem Stoße gleiche Geschwindigkeit mit ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt haben, oder samt diesem ruhen. Die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der stoßenden Körper bleibt im Stoße unverändert, §. 158, ruhet er aber, so bleibt er auch nach dem Stoße in der Ruhe. Weiche stoßende Kör-

per

per bewegen sich daher nach dem Stoße mit der vor dem Stoße gewesenen Geschwindigkeit ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes, oder sie ruhen samt diesem.

Der Raum, durch welchen §. 158 die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes vor dem Stoße bestimmt wird, giebt auch die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der stoßenden weichen Körper nach dem Stoße. Die Gleichung, aus welcher die Geschwindigkeit des gemeinschaftlichen Schwerpunktes vor dem Stoße gefunden wird, drückt auch die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der stoßenden weichen nach dem Stoße aus.

163.

Nach dem Stoße der weichen ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der stoßenden dem Quotienten gleich, welchen die mit der Summe der Massen dividirte Summe oder Differenz, der in beyden stoßenden vor dem Stoße gewesenen bewegenden Kräfte giebt.

$$C = \frac{MG \pm mg}{M + m.}$$

Diese gemeinschaftliche Geschwindigkeit ist eben dieselbe, welche der gemeinschaftliche Schwerpunkt der stoßenden weichen vor dem Stoße hat, und wird aus der nähmlichen Gleichung mit dieser bestimmt, §. 162. Des Schwerpunktes

Ge=

Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße $C = \frac{MG \pm mg}{M + m}$. §. 158. Auch die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der stoßenden weichen Körper also ist nach dem Stoße diesem Quotienten gleich.

164.

Diesemnach kömmt es leicht zu bestimmen, wie viel der Stoßende im Stoße der Weichen verlohren, und der Gestoßene gewonnen habe. Wird von der vor dem Stoße gewesenen Geschwindigkeit des ersteren, die gemeinschaftliche nach dem Stoße abgezogen, so giebt diese Differenz den Verlust des Stoßenden. Zieht man aber die vor dem Stoße gewesene Geschwindigkeit des Gestoßenen von der gemeinschaftlichen nach dem Stoße ab, so hat man in dieser Differenz den Gewinn des Gestoßenen.

Für den Fall, in welchem der Gestoßene ruhet oder langsamer vorausgehet, ist $C = \frac{MG + mg}{M + m}$. §. 163. Der Verlust also $G - \left(\frac{MG + mg}{M + m}\right) = \frac{MG + mG - MG - mg}{M + m}$ $= \frac{mG - mg}{M + m} = \frac{m(G - g)}{M = m}$. Der Gewinn ist $\frac{MG + mg}{M + m} - g = \frac{MG + mg - Mg - mg}{M + m}$ $= \frac{MG - Mg}{M + m} = \frac{M(G - g)}{M + m}$.

Für

Für den Fall der in entgegengesetzten Richtungen zusammenlaufenden weichen Körper ist §. 163. $C = \frac{MG - mg}{M + m.}$ Der Verlust also:

$$G - \left(\frac{MG - mg}{M + m}\right) = \frac{MG + mG - MG + mg}{M + m}$$

$$= \frac{mG + mg}{M + m} = \frac{m(G + g)}{M + m.}$$ Weil die Geschwindigkeit des Gestoßenen in diesem Falle jener des Stoßenden gerade entgegengesetzt ist, so ist sie in Vergleich dieser negativ, und bey der Subtraktion mit dem entgegengesetzten Zeichen zu nehmen, folglich mit + zu setzen. Der Gewinn also: $= \frac{MG - mg}{M + m} + g =$

$$\frac{MG - mg + Mg + mg}{M + m} = \frac{MG + Mg}{M + m}$$

$$= \frac{M(G + g)}{M + m.}$$

Da wir keine vollkommen weiche Körper, wie solche in dieser Erwegung gesetzt werden, in der Natur kennen, so können zum Versuche auch nur unvollkommen weiche, z. B. Thonkugeln gebraucht werden. Die mit solchen Körpern angestellten Versuchen bestättigen doch alle erwiesene Formeln.

165.

Wenn der gestoßene Körper unbeweglich ist, so kann seine Masse unendlich groß $= \infty$ gesetzt werden, weil es in Beziehung auf den Stoß einerley ist, von was immer für einer Ursache die Unbeweglichkeit herkomme, und eine unendliche Masse den gestoßenen Körper für jede natürliche Kraft des Stoßenden unbeweglich macht. Für den Fall also, in welchem der Gestoßene unbeweglich ist, oder der Stoßende an ein unbewegliches Hinderniß anläuft, kann in der Formel $m = \infty$ gesetzt werden, und g ist $=$ Null. Der Verlust des Stoßenden $= \frac{m(G-g)}{M+m}$ ist in diesem Falle $= \frac{mG}{M+m}$ $\frac{\infty G}{M+\infty} = \frac{\infty G}{\infty} = G$, seiner vor dem Stoße gewesenen Geschwindigkeit. Der an ein unbewegliches Hinderniß anlaufende weiche Körper, ruht daher nach dem Stoße.

Auch diese Folge der erwiesenen Formul, wird durch Versuche bestättiget.

166.

Der schiefe Stoß der Körper ist mit Hindansetzung jener Bestimmungen der Stoßenden, welche zum Stoße nichts beytragen, überhaupt wie der gerade zu betrachten.

Die Betrachtung der schief aufeinander stoßenden Körper überzeugt uns hievon. DCE
Fig. 22. Fig. 22 sey ein unbewegliches Hinderniß, an welches der Körper A in AC folglich schief anläuft. Seine Bestimmung AC ist aus zweyen AD und DC zusammengesetzt zu betrachten, §. 66, deren eine AD senkrecht, die andere CD aber zu DCE gleichlaufend ist. §. 69. Mit der Bestimmung DC, mit welcher er neben DCE in einer unveränderter Entfernung vorübergehen würde, dringt der Körper nicht in DCE, sondern nur mit AD, welche in der Richtung dieser Wirkung ist. Der mit der Bestimmung AC anlaufende Körper stößt also eben so auf DCE, als wenn er mit der Bestimmung AD allein angelaufen wäre, und der in der Richtung AC schiefe Stoß ist wie der gerade mit der Bestimmung AD.

Fig. 23. Wenn Fig. 23 zwey Körper A und B in AC und BC, folglich schief zusammenlaufen, und sich, indem ihre Mittelpunkte in a und b gelangt sind, stoßen, so sind ihre Bestimmungen Aa und Bb, mit welchen sie zusammenlaufen, aus AG und Ga dann Mb und BM zusammengesetzt zu betrachten. §§. 66, 69. Mit AG und Mb als zur Fläche des Stosses LK gleichlaufenden, dringen die zwey Körper nicht in einander, weil sie dieser Bestimmungen wegen immer in dem nähmlichen Abstande von einander bleiben. Diese zwey Bestimmungen tragen zum Stoße nichts bey. A und B stoßen also im gesetzten Falle so zusammen, als wenn sie die Bestimmungen

gen Ga und BM allein gehabt hätten; B mit der Bestimmung BM vorausgegangen, A aber mit Ga gefolgt wäre. A und B stossen so zusammen, als wenn sie sich von dem Stoße beyde in der Linie Gb in die nähmliche Gegend bewegt hätten. In welchem Falle ihr Stoß ein gerader Stoß wäre. Auf die nähmliche Art findet man, daß zwey in entgegengesetzten Richtungen schief zusammenstoßende Körper eben so, wie zwey in gerade entgegengesetzten Richtungen, in der nähmlichen ihre Schwerpunkte verbindenden geraden Linie zusammenlaufende, aufeinander stoßen, wenn die Theile ihrer schiefen Bestimmungen beseitiget werden, welche zum Stoße nichts beytragen. Mit Hindansetzung dieser Bestimmungen kann daher jeder schiefe Stoß der Körper, wie ein gerader betrachtet werden, und was vom geraden Stoße erwiesen ist und noch erwiesen wird werden, gilt auch für den schiefen Stoß mit Beschränkung auf jene Bestimmung der Stoßenden, welche zum Stoße beytragen.

167.

Wenn ein weicher Körper auf ein unbewegliches Hinderniß schief stoßt, hat er nach dem Stoße in der Richtung der Fläche, auf welche er gestoßen hat, eine Geschwindigkeit, oder Bestimmung, welche sich zu seiner schiefen Bestimmung vor dem Stoße, wie die Bogenhöhe (Sinus) des schiefen Winkels

zur ganzen Bogenhöhe oder dem Halbmesser verhält.

Fig. 22. Der weiche Körper A laufe, wie oben Fig. 22, mit einer Bestimmung AC auf das unbewegliche Hinderniß DCA an. Diese seine Bestimmung ist diesemnach wie aus AD und DC zusammengesetzt zu betrachten. §§. 66, 69. DC trägt zum Stoße nichts bey, sondern nur AD. DC bleibt daher in und nach dem Stoße unverändert; AD aber wird ganz gehoben. §§. 166, 165. Der mit der Bestimmung AC auf DCE stoßende Körper muß sich also nach dem Stoße mit der Bestimmung oder Geschwindigkeit DC bewegen.

DC ist mit der Fläche DCE, auf welche der stoßende Körper angelaufen ist, vermög der Auflösung der Kraft AC gleichlaufend. §. 69. Wenn aus dem Einfallspunkte C, in welchem der Körper A an DCE anläuft, eine auf DCE senkrechte FC, das Einfallsloth errichtet wird, so ist ACF der schiefe Winkel der Einfallswinkel, und, wenn AC für den Halbmesser angenommen wird, AF, folglich auch die gleiche DC die Bogenhöhe des Einfallswinkels. Es ist also DC zu AC wie die Bogenhöhe des schiefen Winkels zur ganzen Bogenhöhe, oder zum Halbmesser.

Ohne alle Erinnerung ist es einleuchtend klar, daß der stoßende weiche Körper, nach dem Stoße die Geschwindigkeit wie DC unverändert

bey=

beybehält, wenn nebst dem Stoße keine andere die Bestimmung DC veränderende Ursache vorhanden ist; indem hier nur die Folgen des Stoßes in die Erwegung genommen werden.

168.

Die Menge der bewegenden oder wirkenden Kräfte des Körpers bleibt unverändert, wenn seine Geschwindigkeit in der nähmlichen Masse vermehret oder vermindert gesetzt wird, in welcher seine Masse vermindert oder vergrößert ist worden. Oder, wenn die Geschwindigkeit und Masse des Körpers im verkehrten Verhältnisse verändert werden, bleibt die Menge seiner bewegenden Kräfte unverändert.

Die Masse des Körpers sey M, seine Geschwindigkeit G, so ist die Menge seiner bewegenden Kräfte MG § 14. Nach der getroffenen Veränderung habe der Körper die Masse m, und Geschwindigkeit g allein so: das M : m :: g : G sey, vermög Bedingniß, so ist nach der getroffenen Abänderung die Menge seiner bewegenden Kräfte mg = MG, der vor der Abänderung gewesenen.

Wenn die Masse und Geschwindigkeit des Körpers im verkehrten Verhältnisse abgeändert werden, so wird die Geschwindigkeit desto größer oder kleiner, je kleiner oder größer die Masse gesetzt ist. Die Abnahme der Masse wird durch den Wachsthum der Geschwindigkeit, oder der Wachsthum der Masse durch die Abnahme der Geschwindigkeit ersetzt. Beydes erhält die Produkte aus den Massen in die Geschwindigkeiten unverändert.

Diesemnach können die Massen mehrerer aufeinander wirkenden, z. B. stoßenden Körper ohne Veränderung der Mengen ihrer bewegenden Kräfte, folglich auch ihrer Wirkungen gleich gesetzt werden, wenn man ihre Geschwindigkeiten im verkehrten Verhältnisse ihrer hiemit veränderten Massen abgeändert annimmt; eines jeden Geschwindigkeit gerade so viel größer oder kleiner setzt, als seine Masse kleiner oder größer, der Gleichheit wegen gesetzt werden müßte. Durch diese Ausgleichung der Massen bewirkt man, daß diese, welche als gleiche, keine Veränderung unter den Wirkungen erzeugen, bey der Betrachtung dieser ausser Acht gelassen werden können. Wodurch die Erwegung und Bestimmung derselben erleichtert wird.

169.

Wenn mehrere weiche Körper zugleich auf den nähmlichen stoßen, so ist des gestoßenen Bestimmung und Bewegung nach dem Stoße aus allen den Bestimmungen zusammengesetzt, welche er von den stoßenden nach den §§. 164, 165 oder 167 erwiesenen Sätzen

Sätzen erhalten hätte, wenn einer nach dem anderen angelaufen wäre.

Wenn mehrere Körper auf einander zugleich stoßen, können ihre Massen ohne Veränderung der Wirkungen gleich gesetzt werden, wenn man derselben Geschwindigkeiten im verkehrten Verhältnisse ihrer durch die Ausgleichung veränderten Massen abgeändert setzt. §. 168. Diesem gemäß setzen wir die Massen dreyer stoßenden Körper A, D und E, und des gestoßenen B Tab. 2. Fig. 24 untereinander gleich. Die mit dieser Ausgleichung im verkehrtem Verhältnisse der Massen angenommenen Geschwindigkeiten der Stoßenden setzen wir durch die Linien AB, DB und EB ausgedrückt. Da der Stoß, wenn beyde Stoßende sich vor dem Stoße bewegen, eben so ist, wie er seyn würde, wenn der Gestoßene geruhet, der Stoßende aber mit der Differenz oder Summe, der in beyden vor dem Stoße gewesenen Kräfte bewegt hätte, §. 160, so drücken wir die Geschwindigkeit des gestoßenen Körpers B durch keine Linie aus, sondern betrachten selbe nur in der die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße ausdrückenden Formel: $C = \frac{MG \pm mg}{M + m}$, §. 163. Nach dieser Formel läßt sich die Geschwindigkeit bestimmen, welche B haben würde, wenn A oder D, oder endlich E allein auf B anlief. Was immer für ein Körper auf B stoßend betrachtet Tab. 2. Fig. 24.

 wird,

wird, ist M = m vermög gesetzter Ausgleichung, und gedachte Formel mit folgender $\frac{MG \pm Mg}{M + M} = \frac{MG \pm Mg}{2M} = \frac{G \pm g}{2}$ die nähmliche. Die Geschwindigkeit des gestoßenen Körpers B nach dem Stoße wäre also jedesmal der halben Summe oder halben Differenz der in beyden Stoßenden vor dem Stoße gewesenen Geschwindigkeiten gleich, es sey, daß A, D oder E der stoßende Körper wäre. Jede dieser Geschwindigkeit müßte in der Richtung des Stoßenden seyn. §§. 60, 61. Diesen Gründen gemäß sey die Geschwindigkeit des gestoßenen B nach dem Stoße des mit der Bestimmung AB anlaufenden Körpers A wie BG, nach dem Stoße des mit DB anlaufenden D wie BF, und endlich nach dem Stoße des mit EB anlaufenden E wie BC. Wenn also alle drey Körper zugleich auch B stoßen, so erhält B zugleich drey Bestimmungen: BG, BF und BC, weil keine wirkende Kraft ohne Wirkung seyn kann. Der Körper B verhält sich in diesem Falle, wie ein von drey Kräften BG, BF und BC zugleich angetriebener Körper, und muß alle diese Bestimmungen in eine so zusammensetzen, daß er jeder, so viel es möglich ist, folge §. 64.

Nachdem die Geschwindigkeit des Gestoßenen nach dem Stoße nach §. 62 bestimmt ist, hat die Bestimmung seiner Menge der bewegenden Kräfte §. 14 keine Beschwerde. Diese ist BK

$\times$ B

$\times B$ oder $BK \times M$, wenn M die in allem gleich gesetzte Masse ausdrückt.

Aus der oben angeführten Formel für die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße $C = \frac{G \pm g}{2}$ kann die Geschwindigkeit eines jeden Stoßenden nach dem Stoße bestimmt werden, und die mit weichen Körpern, deren zwey oder mehr auf den nähmlichen stoßen, angestellten Versuche bestättigen, was hier aus natürlichen Gründen eben erwiesen ist worden.

170.

Im Stosse der vollkommen elastischen Körper sind zwey Zeitpunkte zu unterscheiden, deren Wirkung gleich und die nähmliche ist.

Die Natur der elastischen Körper bringt es mit sich, daß sie sich nach vollbrachter Zusammendrückung in ihre vorgehabte Gestalt zurücksetzen. Im Stoße der elastischen Körper sind also zwey Zeitpunkte zu unterscheiden, in deren ersterem die stoßenden Körper sich wechselseitig zusammendrücken, in dem zweyten aber sich in ihre vorgehabte Gestalt zurücksetzen. Sind die Körper vollkommen elastisch, so muß die Wiederherstellung dem Zusammendrücken nicht nur gerade entgegengesetzt, sondern auch vollkommen gleich seyn. Die stoßenden vollkommen elastischen Körper müssen daher durch ihre Wiederherstellung

 gleich,

gleich, und eben so aufeinander wirken, wie sie beym Zusammendrücken wirkten. Die z. B. in
Tab. 1. Fig. 23. a und b Tab. 1. Fig. 23 zur Zeit des Stoßes sich befindenden und in einander dringenden Körper müssen, wenn sie vollkommen elastisch gesetzt werden, sich erstens zusammendrücken, indem a in b in der Richtung aK drenget, b auf a aber in bK zurückwirkt, nachdem aber der Gestoßene dem Stoßenden kein Hinderniß der Bewegung mehr ist, das wechselseitige Eindringen folglich aufhöret, vollkommen wieder herstellen, a nähmlich in der Richtung aK, b aber in bK, folglich, da sie im Zusammendrücken so nahe aneinander gekommen sind, daß einer des anderen seiner Wiederherstellung im Wege stehe, so müssen sie das zweytemal, und vollkommen so aufeinander wirken, wie sie beym Zusammendrücken wirkten. Die Wirkung dieses zweyten Zeitpunktes der Wiederherstellung im Stoße der vollkommen elastischen Körper, muß der Wirkung des ersten des Zusammendruckens in Beziehung auf das wechselseitige Eindringen vollkommen gleich, und mit dieser die nähmliche seyn.

Wir setzen, nach der §. 150 gegebenen Erklärung, die im Stoße zu betrachtenden Körper in ihrer natürlichen Eigenschaft vollkommen. Wir müssen daher in der Betrachtung des Stoßes der elastischen die wechselseitige Wirkung, welche sie beym Zusammendrücken mit den weichen Körpern gemein haben, verdoppeln, folglich für

den

den Stoß der elastischen Körper den Verlust des Stoßenden nicht minder, als den Gewinn des gestoßenen, welche wir für weiche Körper, §. 164 bestimmt haben, doppelt nehmen.

Wenn nur einer der zwey Stoßenden vor dem Stoße sich beweget, oder beyde in die nähmliche Gegend, so ist der für weiche Körper §. 164 bestimmte Verlust $= \frac{m(G-g)}{M+m}$, der Gewinn aber $= \frac{M(G-g)}{M+m}$; für den Stoß der Elastischen also ist des Stoßenden Verlust $= \frac{2m(G-g)}{M+m}$, des gestoßenen Gewinn aber $= \frac{2M(G-g)}{M+m}$, wenn ihre Bewegung vor dem Stoße in die nähmliche Gegend gerichtet ist.

Wenn die weichen in geraden entgegengesetzten Richtungen zusammenstossen, so ist der Verlust $= \frac{m(G+g)}{M+m}$, der Gewinn aber $= \frac{M(G+g)}{M+m}$; für den Stoß der Elastischen also, wenn ihre Bewegung vor dem Stoße gerade entgegengesetzt ist, der Verlust: $= \frac{2m(G+g)}{M+m}$ und der Gewinn $= \frac{2M(G+g)}{M+m}$.

171.

Wenn einer der stoßenden elastischen Körper vor dem Stoße ruhet, oder mit einer kleineren Geschwindigkeit vorausgehet; so ist die Geschwindigkeit des Stoßenden nach dem Stoße $= \frac{MG - mG + 2mg.}{M + m}$ des Gestoßenen aber $= \frac{2MG - Mg + mg.}{M + m.}$

Die Geschwindigkeit des Stoßenden nach dem Stoße erhält man, wenn sein im Stoße erlittener Verlust von seiner vor dem Stoße gewesenen Geschwindigkeit abgezogen wird. Des Stoßenden Geschwindigkeit nach dem Stoße ist also $= G - \frac{2m(G - g)}{M + m}$ §. 170, folglich

$$= \frac{MG + mG - 2mG + 2mg}{M + m.} = \frac{MG - mG + 2mg.}{M + m.}$$

Wenn zu der vor dem Stoße gewesenen Geschwindigkeit des Gestoßenen, sein im Stoße erhaltener Gewinn $= \frac{2M(G - g)}{M + m}$ zugesetzt wird, so giebt diese Summe des Gestoßenen Geschwindigkeit nach dem Stoße. Diese also ist

$$= g + \frac{2M(G-g)}{M+m} = \frac{Mg+mg+2MG-2Mg}{M+m}.$$

$$= \frac{2MG-Mg+mg.}{M+m}$$

Die mit elfenbeinernen oder Marmorkugeln von bestimmten Massen und Geschwindigkeiten angestellten Versuche, bestättigen diese Formeln hinlänglich, ungeachtet daß diese Körper nicht vollkommen elastisch sind, deren wir keine, als vielleicht die einzigen Lichtfunken, in der Natur kennen.

Aus diesen Formeln erhält auch der Versuch und seine Erklärung, in welchem an einer Reihe mehrerer elastischen Kugeln von gleicher Masse z. B. elfenbeinener so viele der letzteren, und in eine dem Scheine nach ganz gleiche Bewegung gesetzt werden, als vom ersteren an die übrige Reihe gerade angelaufen sind. Die ganze Reihe der Kugeln, welche nicht anlaufen, ruhet bey diesem Versuche. Es ist daher in diesem Falle bey dem Gestoßenen keine Geschwindigkeit vorhanden, und alle Glieder der angeführten Formeln, in welchen diese als Faktor vorkömmt, sind $= 0$. Nebst diesen sind die Massen aller Körper in der angenommenen Reihe gleich, folglich, $M = m$, und in den Formeln kann eines von beyden durchgehends gebraucht werden. Diesemnach ist die für den Stoßenden bestimmte Geschwindigkeit nach dem Stoße, nähmlich $\frac{MG-mG+2mg}{M+m}$

=

$$= \frac{MG - MG + 0}{M + M} = 0.$$ Der Stoßende muß nach dem Stoße ruhen. Des Gestoßenen Geschwindigkeit ist: $\frac{2MG - Mg + mg}{M + m} =$ $\frac{2MG - 0 + 0}{M + M} = \frac{2MG}{2M} = G.$ Der Gestoßene hat nach dem Stoße eine der vor dem Stoße gewesenen Geschwindigkeit des Stoßenden gleiche Geschwindigkeit. Die Ruhe und Geschwindigkeit sind bey den stoßenden Körpern verwechselt worden. Da nun dieser Wechsel in der ganzen Reihe der angenommenen Kugeln, zwischen jeden zwey einander berührenden so oft erfolgt, als Kugeln am Anfange an die übrige Reihe anlaufen, so müssen am Ende der Reihe so viele der letzten, welche ihre Geschwindigkeiten nicht mehr übergeben können, in gleiche Bewegung versetzt werden, als am anderen Ende der Reihe angelaufen sind.

172.

Nach dem in entgegengesetzten Richtungen zusammenlaufend vollbrachten Stoße, ist des Stoßenden Geschwindigkeit = $\frac{MG - mG - 2mg}{M + m}.$ Des Gestoßenen aber: = $\frac{2MG + Mg - mg}{M + m}.$ In der Richtung des Stoßenden nähmlich.

Für

Für diesen Fall des Stoßes ist der Verlust des Stoßenden $= \frac{2m(G+g)}{M+m}$, der Gewinn des Gestoßenen aber $= \frac{2M(G+g)}{M+m}$. §. 170.

Des ersteren Geschwindigkeit nach dem Stoße also $= G - \left(\frac{2mG + 2mg}{M+m}\right) =$

$$\frac{MG+mG-2mG-2mg}{M+m} = \frac{MG-mG-2mg}{M+m};$$

und, weil g die Geschwindigkeit des Gestoßenen vor dem Stoße in Beziehung auf G negativ ist, folglich $-g$ zu dem in der Richtung G erhaltenen Gewinn des Gestoßenen addiret werden muß, um seine Geschwindigkeit nach dem Stoße zu erhalten, so ist diese $= \frac{2M(G+g)}{M+m}$

$$-g = \frac{2MG + 2Mg - Mg - mg}{M+m}$$

$$= \frac{2MG + Mg - mg}{M+m}.$$

Nach der hier gesetzten Bedingniß der vor dem Stoße entgegengesetzten Richtungen mit elastischen Kugeln wie die oben §. 171 angestellten Versuche bestättigen auch diese Formeln.

173.

Nachdem §. 166 erwiesen ist worden, daß der schiefe Stoß mit Hindansetzung jener Bestimmungen der Stoßenden, welche zum Stoße nichts beytragen, wie der gerade zu betrachten sey; so haben wir von dem schiefen Stoße der elastischen nichts zu bemerken, als: daß die §§. 171 und 172 gegebenen Formeln auch den schiefen Stoß der elastischen bestimmen, wenn selbe auf die Bestimmungen der Stoßenden angewendet, mit welchen sie eigentlich aufeinander stoßen, und das, was diese Formeln geben, mit dem zum Stoße nichts beytragenden, folglich unverändert bleibenden Bestimmungen der schief stoßenden Körper nach dem §. 64 zusammengesetzt werden. Durch die sogleich folgende Anwendung dieser Bemerkung wird selbe einleuchtend werden.

174.

Wenn ein vollkommen elastischer Körper an eine unbewegliche Fläche schief stößt, oder anläuft, so muß er unter gleichem Winkeln zurückprellen; oder der Zurückprallungswinkel ist jenem des Einfalls gleich.

Der vollkommen elastische Körper A Tab.
Tab. I. I Fig. 22 laufe an die unbewegliche Flä-
Fig. 22. che DCE in der Richtung AC an. Wie wir es §. 167 vom weichen Körper angenommen haben.

Diese

Diese Bestimmung ist aus AD und DC zusammengesetzt §. 66. DC trägt zum Stoße nichts bey §. 68, wird daher durch den Stoß auch nicht verändert. AD allein also kömmt hier in Betrachtung. AD drückt in diesem Falle des Stoßenden Geschwindigkeit G aus, dessen Masse wir M setzen. Des Gestoßenen Geschwindigkeit g ist keine, und weil dieser Körper unbeweglich gesetzt wird, so können wir seine Masse $m = \infty$ annehmen. Für diesen Fall also ist die §. 171 bestimmte Geschwindigkeit des Stoßenden nach dem Stoße: $\frac{MG - mG + 2mg}{M + m} = \frac{MG - \infty G + 2\infty 0}{M + \infty} = \frac{MG - \infty G}{M + \infty} = \frac{-\infty G}{\infty} = -G$. Der stoßende Körper A erhält eine mit seiner vor dem Stoße gewesenen gleiche, aber negative, das ist gerade entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit. Statt AD bekömmt er DA oder CF = AD, nachdem er in C auf DCE gestoßen hat. Da seine vor dem Stoße gehabte Bestimmung DC durch den Stoß nicht verändert wird, so würde der Körper A mit dieser Bestimmung allein nach dem Stoße in der Richtung DC so fortschreiten, daß er in gleicher Zeit einen gleichen Raum CE = DC beschrieb. Der Körper A hat daher nach dem Stoße auf DCE zwey unter dem rechten Winkel

FCE

FCE ihn antreibende Bestimmungen CF und CE, und muß die Diagonale CB des Parallelogrammes CFBE beschreiben, dessen Seiten CF und CE sind §. 62.

ACF ist der Einfallswinkel, FCB aber der Zurückprallung. Da DC = EC und AD = CF = EB, so sind auch die Winkel ACD und BCE und folglich auch ihre Ergänzungswinkel zu einem rechten gleich. ACF = BCF, und auch CB = AC.

Da dieser Satz nur von vollkommenen elastischen Körpern erwiesen wird, so können wir auch umgekehrt aus der Gleichheit des Einfalls- und Zurückprallungswinkels auf die vollkommene Elastizität des zurückgeprallten Körpers schließen, und für erwiesen annehmen: daß der Körper vollkommen elastisch sey, der nach einem schiefen Anlauf unter gleichem Winkel zurückgeprallet wird.

Wenn der Körper A statt der schiefen Bestimmung AC vor dem Stoße die senkrechte AD allein gehabt hätte, so erhellet aus den angeführten Gründen von selbsten, daß er im Stoße eben so die Bestimmung AD verlohren, und eine gleiche und gerade entgegengesetzte CF erhalten hätte, folglich mit gleicher Geschwindigkeit abgeprallet worden wäre. Es ist hiemit erwiesen, daß der vollkommen elastische, Körper, wenn er an eine Fäche anläuft mit gleicher Geschwindigkeit wieder zurückspringen müsse, und jeder Körper vollkommen elastisch sey, dessen Geschwindigkeit

digkeit im Apprellen jener des Anlaufes gleich ist.

Unter den uns in der Natur bekannten Körpern sind die Lichtfunken die einzigen, von welchem wir erweisen können, daß ihr Zurückprallungswinkel jenem des Einfalls, wenigstens, so viel unsere Sinnen bestimmen können, gleich sey Die einzigen Luftfunken werden daher mit gleicher Geschwindigkeit zurückgeprallet, und sind vollkommen elastisch. Der übrigen zurückgeprallten elastischen Körper Geschwindigkeit, weicht von der im Anlaufe gehabten desto mehr ab, jemehr ihnen an der Vollkommenheit der Elastizität oder Schnellkraft mängelt. Dessen ungeachtet wird der erwiesene Satz durch die mit solchen Körpern angestellten Versuche bestättiget.

175.

Wenn Tab. 2 Fig. 24 die Geschwindigkeiten BG, BF und BC unter der Bedingniß des vielfachen Stoßes vollkommen elastischer Körper nach dem §§. 171, 172 gegebenen Formeln bestimmt werden, wie diese §. 169 für weiche Tab. 2. Fig. 24.

Körper nach §. 163 bestimmt sind worden, so dient der §. 169 erwiesene Satz samt seinem Beweise auch für den vielfachen Stoß der vollkommen elastischen Körper. Der mit dieser Abänderung wiederholte Beweiß des 169 §. setzt erst erwähnte Behauptung außer allen Zweifel.

Anmerkungen zum ersten Kapitel.

§. 10.

Wenn die Zeit der Bewegung in gleiche Theile getheilet betrachtet, und der Raum eines solchen Theiles der Zeit für das Maß der Geschwindigkeit angenommen wird, so ist der Raum der ganzen Zeit R nicht nur wie GZ, sondern auch R = GZ, folglich $G = \frac{R.}{Z}$

§. 27.

Wenn zwey Körper in der nähmlichen geraden, oder gleichlaufenden Linie in die nähmliche, oder gerade entgegengesetzte Gegenden sich bewegen, so ist die Bestimmung ihres relativen Raumes, und folglich auch ihrer relativen Geschwindigkeit ohne Beschwerde, und von selbsten einleuchtend. Um also die in diesem § erwähnte Bestimmung der relativen Geschwindigkeiten in volles Licht zu setzen, wollen wir nur noch die schiefen Bewegungen zweyer Körper in die nähmliche, und in entgegengesetzte Gegenden in Betrachtung ziehen.

Zu diesem Ende setzen wir Tab. I Fig. 23 die Körper A und B in schiefen Bewegungen Aa und Bb in die nähmliche Gegend begriffen, so sind ihre Bestimmungen AG Ga, denn Mb und BM, §. 66 deren zwey und zwey nähmlich AG und Mb, dann Ga und BM gleichlaufend in die nähmliche Tab. I. Fig. 23.

Gegend gerichtet sind. In beyden diesen Richtungen also ist der relative Raum, oder die Strecke, um welche sie sich einander nähern, folglich auch ihre relative Geschwindigkeit wie die Differenz der absoluten Räume, oder der mit diesen verhältnißmässigen Geschwindigkeiten.

Zur Erwegung der schiefen Bewegungen in entgegengesetzte Gegenden sollen sich die Körper A und b, in Aa und bB gegeneinander bewegen. Diese ihre Bestimmungen sind die erstere aus AG und Ga, die zweyte aus bM und MB zusammengesetzt §. 66. AG und bM sowohl als Ga und MB sind gleichlaufend, und gerade entgegengesetzt. In beyden diesen Richtungen daher ist die relative Geschwindigkeil wie die Summe der absoluten. Auf die nähmliche Art wird das Verhältniß der relativen Geschwindigkeit zur absoluten für jeden Fall der schiefen Bewegungen bestimmt, wenn nähmlich die Bestimmungen der Körper, welche schief gegeneinander sind, in gleichlaufende aufgelöset werden, bey welchen Bestimmungen der Körper die relative Geschwindigkeit sich eben so verhält, wie bey Bewegungen der Körper in der nähmlichen geraden Linie.

Zum zweyten Kapitel.

§. 32.

Im Beweise dieses § ist die zwischen den angenommenen Bestandtheilen A und B. Tab. 1 Fig. 1 begriffene gerade Linie AB im verkehrten Verhältnisse der Bestandtheile in C, das ist, so getheilet worden, daß: AC::BC::B:A sey. Da also die Bestandtheile A und B gleich sind, muß auch AC = BC, und alle Linien, welche ::B:A sich in diesem

Tab. I. Fig. I.

sem Beweise verhalten, gleich seyn, und man könnte ohne Veränderung dieses Beweises AB in C in zwey gleiche Theile getheilet setzen. Allein nur in dem Falle zweyer ersten physischen miteinander verbundenen Bestandtheile ist die Theilung der Linie AB in zwey gleiche Theile der Bestimmung des Schwerpunktes unverändert richtig. Wenn mehrere auf einander wirkende, oder mit einander verbundene Bestandtheile oder ganze Körper betrachtet werden, so muß die Theilung der Linie, wie hier AB ist, im verkehrten Verhältnisse der Zahl der Bestandtheile oder der Massen geschehen. Dieses Verhältniß wird alsdann zum Verhältnisse der Gleichheit, wenn die Umstände gleiche Massen, oder Zahlen der Bestandtheile von beyden Seiten geben. Wegen der Gleichförmigkeit ist auch beym Beweise des Schwerpunktes zweyer Bestandtheile allenthalben, wo hievon die Rede ist, der Ausdruck des verkehrten Verhältnisses der Bestandtheile beybehalten worden, welcher in übrigen Fällen nothwendig ist.

§. 33.

Der in diesem §, und alle von der Summe der Abstände in Beziehung auf eine ausser den Bestandtheilen gelegene Fläche erwiesene Sätze sind so sicher und allgemein, daß selbe auf eine mit der in diesem § angenommene ähnliche Art auch in Beziehung auf solche Flächen ohne Anstand erwiesen werden, welche zwischen den Bestandtheilen, jedoch nicht durch ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, oder auch durch einen der Bestandtheile durchgezogen betrachtet werden.

Daß eben gedachte Sätze auch in Beziehung auf die durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt gezogenen Flächen richtig sind, wenn die dieß — und jenseits dieser Flächen sich befindenden Abstände der Bestandtheile positiv und negativ genommen werden, ist, ohne Erinnerung einleuchtend, nachdem es von diesen Flächen überhaupt erwiesen ist, daß die Summen der Abstände Dieß- und Jenseits gleich sind.

§§. 49, 50.

In diesem § und in einigen anderen wird der Schwerpnnkt wie ein beweglicher Punkt betrachtet; und bey der Erklärung des Schwerpunkts §. 29 ist die Bemerkung gemacht worden, es sey wahrscheinlicher, daß der Schwerpunkt des Körpers auf einen Punkt der Zwischenräume, als daß er auf einen physischen Bestandtheil des Körpers falle. Der Punkt des leeren Raumes, auf welchen der Schwerpunkt fällt, ist aber unbeweglich, wie der ganze leere Raum, dessen Theil er ist. Wenn daher der Schwerpunkt in der Bewegung betrachtet wird, so setzen wir eigentlich nur, daß die Bestimmung des Schwerpunktes von einem Punkte auf den anderen übertragen werde, indem der Körper von einem Theile des Raumes, in welchem er sich beweget, in den anderen übergehet, uud weil diese Bestimmung immer die nähmliche bleibt, so drücken wir uns der Deutlichkeit wegen so aus, als wenn selbst der Punkt, auf welchen die Bestimmung des Schwerpunktes fällt, sich bewege, und einen Raum beschriebe.

Zum dritten Kapitel.

§. 69.

Nachdem die Auflösung der schiefen Kraft diesem § gemäß gemacht ist, hat die Bestimmung der Verhältnisse, in welchen die ganze, das ist, die Wirkung der nähmlichen schief angewandten Kraft,

wenn

wenn sie gerade angewendet wäre, die übrige, oder die Wirkung der schiefen, und die getilgte Kraft untereinander stehen, keine Beschwerde.

Wenn Tab. 1 Fig. 10 mit AC als Halbmesser um C dem Scheitel des schiefen Winkels ein Viertel Cirkul GAF beschrieben wird, so ist AC die ganze Kraft der Halbmesser, oder die ganze Bogenhöhe, AD und DC aber, oder AE und EC die aufgelösten Kräfte, folglich die übrigen und getilgten sind, die Bogenhöhen und die Nebenbogenhöhen (Consinus) der schiefen Winkel ACD oder ACF. Im ersten Falle, in welchem die schief angewandte Kraft eine Bewegung auf der Fläche GDC bewirken soll, der schiefe Winkel folglich ACD, die übrige Kraft DC, und die getilgte AD wird, ist DC die Nebenbogenhöhe, und AD die Bogenhöhe des schiefen Winkels. Im zweyten Falle, in welchem durch die schief angewandte Kraft der Durchbruch der Fläche in C gesucht wird, der schiefe Winkel ACF, die übrige Kraft AD, und die erloschene DC ist, wird AD zur Nebenbogenhöhe, und DC zur Bogenhöhe des schiefen Winkels. Wenn also die ganze oder gerade angewandte Kraft G, die Wirkung der schiefen, oder die übrige Kraft U, und die getilgte oder erloschene E genannt wird, so haben wir diese Verhältnisse: G:U :: AC:DC, und G:E :: AC:AD, dann im zweyten Falle: G:U::AC: AD, und G:E::AC:DC, und wenn wir die ganze Bogenhöhe oder Halbmesser durch H, die Bogenhöhe und die Nebenbogenhöhe des schiefen Winkels durch B und N ausdrücken, so ist allgemein für jeden Fall: G:U::H:N, und G:E::H: B, endlich: U:E:N:B. Tab. I. Fig. 10.

Hiemit ist erwiesen, daß die Kräfte mit Verlust schief angewendet werden, folglich wenn es die Umstände nicht unmöglich machen, jederzeit gerade anzubringen sind.

Auch erhellet von selbsten, daß man in jedem dieser Verhältnisse das vierte Glied finden könne, wenn die anderen drey bekannt sind.

§. 71.

Tab. I. Fig. 9.

Aus dem eben erwiesenen Verhältnisse kann man jene Theile oder Wirkungen, der unter einem Winkel zugleich wirkenden Kräfte bestimmen, welche zur Zusammensetzung wirklich beytragen, wie Tab. I. Fig. 9. AS und AU sind, oder dabey verlohren gehen, wie SG und UE, wenn die Stärke der unter einem Winkel GAE zugleich wirkenden Kräfte AG und AE sammt dem eingeschlossenen Winkel gegeben werden. Denn wenn der Winkel GAE gegeben wird, so sind auch die übrigen drey Winkel des Parallelogrammes AEIG, dessen Seiten AG und AE bekannt, nachdem GAE = GIE, und alle vier Winkel zusammengenommen 360° betragen, und weil entgegengesetzte Seiten im Parallelogramme gleich sind, so hat man alle vier Seiten, so bald zwey nebeneinander stehende bekannt sind. AG = EI und AE = GI. Da der Winkel GAE durch die Diagonale AI in zwey Winkel GAI und IAE getheilt wird, ist die Summe dieser zwey Winkel in dem Winkel GAE gegeben, und weil die Wechselwinkel bey gleichlaufenden Linien gleich sind, folglich: GAI = AIE und AIG = IAE, so ist auch die Summe der Winkel AIE und IAE samt den entgegengestellten Seiten AE und EI = AG bekannt, wenn AG und AE mit dem eingeschlossenen Winkel GAE gegeben wird; und es kann nach dem trigonometrischen Satze: Die Summe der

Sei=

Seiten eines Dreyeckes verhält sich zur Differenz derselben, wie die Tangente der halben Summe zur Tangente der halben Differenz der den nähmlichen Seiten gegenüberstehenden Winkel, die halbe Differenz der nähmlichen Winkel AIE und IAE bestimmt werden, welche zur halben Summe addiret den größeren, von der halben Summe aber abgezogen, den kleineren der zwey Winkel giebt. Diesemnach ist jeder Winkel bey A, nähmlich: GAI und IAE bekannt. Diese Winkel aber sind von den Richtungen der zu AI schief angewandten Kräften AG und AE mit der Richtung der Wirkung eingeschlossenen Winkel. Es ist also nach den zum 69. §. erwiesenen Verhältnissen: G : U :: H. N und G : E :: H : B, der Halbmesser zur Nebenbogenhöhe des Winkels GAS wie AG zu AS, und der Halbmesser zur Nebenbogenhöhe des EAU wie AE zu AU; dann der Halbmesser zur Bogenhöhe des Winkels GAS wie AG zu GS, und der Halbmesser zur Bogenhöhe des EAU, wie AE zu UE. In jedem dieser Verhältnisse sind drey Glieder bekannt. Es können also aus diesen Verhältnissen die Wirkungen oder Theile AS und AU, welche in der That in die Zusammensetzung des AI kommen, nicht minder, als die dabey getilgten Theile SG und UE der unter dem Winkel GAE zugleich wirkenden Kräfte AG und AE bestimmt werden, wenn diese samt dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind.

Zum siebenten Kapitel.

118.

Eine ganz einfache und auf die einfachesten Grundsätze gebaute Art den Schwankungsmittelpunkt des zusammengesetzten Pendules zu bestimmen, wird aus folgendem Satze gefolgert:

Wenn sich zwey oder mehrere mit einander verbundene Körper um eine gemeinschaftliche Achse, oder einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt bewegen, so sind ihre Geschwindigkeiten in dem Verhältnisse ihrer Abstände von der angenommenen Achse, oder vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte.

Um die Achse oder den Mittelpunkt C, Tab.
Tab. 2. Fig. 26. 2 Fig. 26 sollen sich die in AC mit einander verbundenen Körper A, B und F bewegen, und in a, b und f gelanget seyn, folglich die Räume Aa, Bb, Ff beschrieben haben. Da wegen der gesetzten Verbindung der Körper diese Räume gleichzeitig sind, so stehen sie, was immer für eine Bewegung diese Körper gehabt haben, im Verhältnisse der Geschwindigkeiten. §§. 10, 78, 85. Wenn daher die Geschwindigkeiten dieser Körper G, g und 𝔊 genannt werden, so ist G : g : : Aa : Bb, g : 𝔊 : : Bb : Ff, u. s. w. Diese Räume sind ähnliche Cirkulbögen, welche in dem Verhältnisse der Halbmesser stehen. Die Geschwindigkeiten G, g und 𝔊 sind daher wie die Halbmesser AC, BC und FC. Diese als gerade zwischen den Schwerpunkten der Körper und der Achse, oder dem Mittelpunkte C begriffene Linien sind ihre Abstände von der Achse, oder dem Mittelpunkte, §. 32.

Aus diesem Satze folgt, daß die Geschwindigkeit eines jeden der so verbunden mit einander in der Bewegung um die nähmliche Achse, oder den gemeinschaftlichen Mittelpunkt begriffenen Körper, durch seinen Abstand von der angenommenen Achse ausgedrückt werden könne, und G : AC, g : BC, G : : FC sey.

Wenn diesemnach Tab. 2 Fig. 27 die in ihren einzelnen Schwerpunkten A und B versammelt betrachteten Körper, durch AC und BC unter dem Winkel ACB verbunden, gesetzt werden, so muß ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt in AB §. 46, und auch in der aus C zum Gesichtskreis senkrecht gezogenen oder Richtungslinie §. 55, folglich im Durchschnittspunkte D seyn. Ziehen wir durch C eine zum Gesichtskreis gleichlaufende, zu CD folglich senkrechte Linie EF, aus A und B aber die zu EF senkrechten, folglich mit CD gleichlaufenden AE und BF, und setzen wir, daß der Schwankungsmittelpunkt wo in O, dann AC = a, BC = b, DC = d, AE = e, BF = f, und die noch unbekannte Größe OC = X sey, und die um C beweglichen Körper A und B, folglich auch die Punkte O und D, nachdem sie zu einer beliebigen Höhe erhoben sind worden, sich selbst überlassen, so werden sie in ihren vorbesetzten Standpunkten mit Geschwindigkeiten anlangen, welche, wie ihre Abstände von C sind. In A : : a, in B : : b, in D : : d, in O : : X. Mit diesen Geschwindigkeiten werden sich die Körper A und B, und Punkte D und O, wenn die Verbindung der Körper, da sie in den vorher besetzten Punkten eintreffen, sogleich gehoben wird, in die entgegengesetzte Seite zu Höhen erheben, welche wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten sind. §. 85. In A also wird diese Höhe : : a^2, in B : : b^2, in D : : d^2, und in O : : X^2 seyn. Tab. 2. Fig. 27.

Weil

Weil $\pm d \times M = \pm S$ §. 40, folglich $\pm d = \frac{\pm S}{M}$ so kann die Höhe, zu welcher sich der Schwerpunkt D erhebet, als sein beschriebener Raum auch durch die mit der Summe der Massen dividirte Summe der von beyden Körpern A und B beschriebenen Räume, oder bestiegenen Höhen ausgedrückt werden. Diese Summe der Räume ist in $A :: Aa^2$, in $B :: Bb^2$. In beyden zusammen folglich $:: Aa^2 + Bb^2$, und die Summe der Massen ist; $A + B$. Die Höhe also, zu welcher sich der Schwerpunkt D im gesetzten Falle erhebet, ist auch $= \frac{Aa^2 + Bb^2}{A + B}$, und diese Größe ist $:: d$.

Um die Höhe $:: X$, zu welcher sich der Schwankungsmittelpunkt erhebet, ähnlich auszudrücken, kann d mit x verglichen werden, und es muß $d : x$ seyn, $:: \frac{Aa^2 + Bb^2}{A + B}$ zu dem gesuchten Ausdruck nähmlich $= \frac{Aa^2x + Bb^2x}{Ad + Bd}$.

Die Höhe zu welcher der Schwankungsmittelpunkt sich erhebet, ist auch x^2, es ist also auch $x^2 = \frac{Aa^2x + Bb^2x}{Ad + Bd}$, und $X = \frac{Aa^2 + Bb^2}{Ad + Ad}$ $\frac{Aa^2 + Bb^2}{d(A+B)}$.

$d = CD$ ist der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes D von C, folglich ist $d(A+B)$ die Summe der Abstände der zwey Körper A und B, welche auch durch $Ae + Bf$ ausgedrückt werden könnte. §. 39. Aa^2 und Bb^2 sind die Produkte der Massen, oder Gewichte, 1. Abh. §. 56. A und B in die Quadrate ihrer Abstände von dem Aufhangspunkte C. Der Abstand des Schwankungsmittelpunktes von dem Aufhangspunkte ist daher dem Quotienten gleich, welchen die Summe der Produkte aus den Massen oder Gewichten in die Quadrate ihrer Abstände von dem Aufhangspunkte mit der Summe aller Abstände dividiret giebt. Jedes an dem zusammengesetzten Pendule vorhandenes Gewicht muß mit dem Quadrate seines Abstandes von dem Aufhangspunkte multiplizieret; die Summe aller dieser Produkte aber mit der Summe aller Abstände, das ist: mit dem Produkte aus dem Abstande des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der Gewichte in die Summe derselben dividiret werden, damit der Abstand des Schwankungsmittelpunktes vom Aufhangspunkte, oder die Länge des zusammengesetzten Pendules bestimmt werde.

Damit wir sehen, daß die hier bestimmte Art, den Schwankungsmittelpunkt durch seinen Abstand von dem Aufhangspunkte zu finden, nicht blos erwegend, sondern auch ausübend sey; nehmen wir Tab. 2. Fig. 28 ein metallenes Stänglein CA an, und setzen sein Gewicht nach der ganzen Länge gleichförmig vertheilet. In dieser Beziehung kann dieß Stänglein wie eine Linie betrachtet werden, welche aus unendlich kleinen aufeinander gestellten, als Punkte zu betrachtenden Theilen zusammengesetzt sey, dergleichen A, G, M, P, u. s. w. Jeder dieser Theile ist der für den Schwankungsmittelpunkt gegebenen Bestimmungsart gemäß mit dem Quadrate seines Abstandes von dem Aufhangspunkte C zu multiplieren: $A \times AC^2$, $G \times GC^2$, $M \times MC^2$, u. s. w. Jedes dieser Produkte giebt einen Körper, dessen Grundfläche dem Quadrate des betreffenden Abstandes, die Höhe aber der Höhe des mit diesem Qua-

Tab. 2. Fig. 28.

drate multiplizierten Theiles, und jede Seite seiner Grundfläche dem Abstande gleichet. $A \times AC^2$ giebt den Körper, dessen Grundfläche $DE^2 = AC^2$, und Höhe A; $G \times GC^2$ den Körper dessen Grundfläche $FK^2 = GC^2$, Höhe aber G, u. s. w. Die Grundflächen dieser Körper nehmen wie die Quadrate der Abstände von C die Seiten dieser Grundflächen, aber nie die Abstände von C ab. Gleichwie die Seiten DE, FK, LN, u. s. w. dieser quadratischen Grundflächen, die Fläche des Dreyeckes DCE, dessen Grundlinie $DE = AC$ der Höhe, eben so geben gedachte aufeinander gestellte Körper, deren Grundfläche die Quadrate: $DE^2 = AC^2$, $FK^2 = GC^2$, u. s. w. sind, eine Pyramide, deren Grundfläche $DE^2 = AC^2$ dem Quadrate ihrer Höhe, und DCE eine ihrer vier gleichen Seitenflächen ist. Der Körperinhalt dieser Pyramide also ist die Summe aller Produkte aus den Gewichten A, G, M, P, u. s. w. in die Quadrate der Abstände AC, GC, MC, u. s. w. Der dritte Theil des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe, giebt den Körperinhalt der Pyramide $= \frac{AC \times DE^2}{3} = \frac{AC \times AC^2}{3} = \frac{AC^3}{3}$. Auch die Summe aller gedachten Produkte ist also $= \frac{AC^3}{3}$ dem Produkte aus der Summe aller Theile des Stängleins in das Quadrat seiner Länge. Diese Summe der Produkte muß der gegebenen Bestimmungsart gemäß, mit der Summe der Abstände aller Theile des Stängleins vom Aufhangspunkte C, welche in dem Produkte aus dem Abstande des Schwerpunktes in die ganze Masse des Stängleins enthalten ist, dividiret werden,

und

und der Abstand des Schwerpunktes B von C ist wegen der gleichförmigen Vertheilung des Gewichtes $\frac{AC}{2}$, und daher $\frac{AC}{2} \times AC = \frac{AC^2}{2}$ die Summe aller Abstände. $\frac{AC^3}{3}$ also mit $\frac{AC^2}{2}$ dividiret : $\frac{AC^3}{3} : \frac{AC^2}{2} = \frac{AC^3}{3} \times \frac{2}{AC^2} = \frac{2AC^3}{3AC^2} = \frac{2AC}{3}$ der Länge ist der Abstand des Schwankungsmittelpunktes, oder die Länge an dem als ein zusammengesetztes Pendul zu verwendenden Stängleins AC.

Wenn ein metallenes Stänglein, an welchem eine gleichförmige Vertheilung des Gewichtes angenommen werden kann, die Länge AC = 3 Sch. z. B. hat, so ist der Abstand seines Schwankungsmittelpunktes vom Aufhangspunkte der eben gemachten Berechnung nach = 2 Sch. und ein aus einem sehr dünnen Faden, und im Vergleich dessen sehr merklichen Gewichte bestehendes Pendul, dessen Länge = 2 Sch. hat in der Ausübung mit gedachtem Stänglein gleichzeitige Schläge. Der Schwankungsmittelpunkt ist also in dem Stänglein so bestimmt, daß ein durch die Vereinigung des Gewichtes aller Theile des Stängleins bestelltes einfaches Pendul mit dem Stänglein gleichzeitig wäre, §. 118.

§. 121.

Weil in diesem § die Verhältnisse, welche im nächstfolgenden für die Schwankungszeiten, und Zahlen in sehr kleinen Cirkulbögen bestimmt sind, auf die Beweise gegründet werden, welche die Mathema-

tik

tik von Schwankungen in Cykloidbögen giebt, so scheint die Erklärung: wie die Cykloide, oder Radlinie erzeuget werde? hier nothwendig zu seyn. Zu diesem Ende sey

Tab. 2. Fig. 29. Tab. 2 Fig. 29, die gerade Linie AB. Diese werde von dem Cirkul ATVA mit dem Punkte E in A berühret. Wenn dieser Cirkul an der Linie AB sich beweget, daß er sich um seinen Mittelpunkt Y drehe, und dieser zugleich in der zu AB gleichlaufenden Linie YZ, dessen Abstand dem Halbmesser des Cirkuls YE gleich ist, fortschreite, bis der Punkt E die Linie AB wiederum, z. B. in B berühre, so beschreibet der Punkt E die Linie ACB, welche Radlinie oder Cykloide genannt wird, und der Umkreis des Cirkuls ATVA wird sich an der Linie AB, so zu sagen entwickeln, oder ausstrecken. AB ist die Grundlinie C, der Punkt, welcher von AB den größten Abstand hat, der Scheitel, die von C zu AB senkrecht gezogene Linie CD die Achse und der Cirkul ATVA, dessen Punkt E die Cykloide beschrieb, der Erzeuger der Cykloide. Aus dieser Erklärung folgt von selbst, daß die Grundlinie $AB = ATVA$ dem Umkreise des Erzeugers folglich $AD = DB = FXH$, die Achse $CD = HF$ dem Durchmesser des Erzeugers, $AC = CB = \frac{ACB}{2}$, und die zwischen dem Anfange der Cykloide A und dem Berührungspunkte F der Gradlinie AB begriffene Theil $AF = XF$ dem zwischen der Radlinie und dem nähmlichen Berührunspunkte F begriffenen Bogen des Erzeugers sey.

Ich würde zu weitläufig werden, wenn ich alle Eigenschaften dieser Radlinie samt ihren Beweisen hieher setzte. Ich begnüge mich daher mit derselben Anzeige ohne alle Beweise. Jeder meiner Schüler, der auch diese zu erlernen wünscht, kann selbe von mir verlangen, oder

oder aus den Leçons elementaires de Mecanique par M. de la Caille pag. 180. herausnehmen. Die Eigenschaften der Cycloide, auf welche die Verhältnisse der Pendule vorzüglich gegründet werden, sind:

1) Jede zwischen der Cycloide und dem Umkreise des auf der Achse CD als Durchmesser beschriebenen Erzeugers begriffene zur Grundlinie AB gleichlaufende XG ist dem zwischen ihr, und dem Scheitel der Cycloide begriffenen, oder gegen den Scheitel abgeschnittenem Bogen GC des Erzeugers gleich; und umgekehrt: Jede zur Grundlinie AB gleichlaufende, den auf der Achse der Cycloide beschriebenen Erzeuger schneidende, und dessen gegen Scheitel C abgeschnittenem Bogen GC gleiche Linie XG hat den andern äußersten Punct X in der Cycloide.

2) Die Berührungslinie XH der Cycloide ist mit der Sehne GC des auf der Achse CD beschriebenen Erzeugers, welche zwischen dem Scheitel der Cycloide, und der aus dem Berührungspunkte X zur Grundlinie AB gleichlaufend gezogenen Linie XG begriffen wird, gleichlaufend.

3) Jeder durch den Scheitel C, und eine zur Grundlinie AB gleichlaufende KL bestimmte Cycloidbogen LC ist der eben hiemit bestimmten doppelten Sehne MC des an der Achse beschriebenen Erzeugers DGCMD gleich, folglich $2CD = CLB = AXC$, und $ACB = 4CD$.

4) Wenn der Körper an einer verkehrten Cycloide AVB Tab. 2. Fig. 30., dessen Achse DV senkrecht zum Gesichtskreise ist, über den Bogen LV herabläuft, so ist in jedem Puncte M seine Geschwindigkeit $G :: \sqrt{LV^2 - MV^2}$, wie die Quadratwurzel der Differenz, welche man erhält, wenn die zwey vom Anfange der Bewegung, und dem Punkte, in welchem die Geschwindigkeit betrachtet wird, bis zum Scheitel genommenen Bögen zum Quadrate erhoben wer- Tab. 2. Fig. 30.

den, dann das zweyte Quadrat von dem ersteren abgezogen.

Denkt man sich LV in eine gerade Linie ausgestreckt, mit dieser als Halbmesser aus V als Mittelpunkt den Halbcirkul LZP beschrieben, und aus dem auf die gerade Linie LV in M übertragenen Punkt M die Bogenhöhe MX errichtet, so ist eben gedachte Geschwindigkeit G : : MX. Wenn daher die Geschwindigkeit betrachtet wird, welche der Körper nach dem Herablaufen über LV in V hat, so ist diese : : $\sqrt{LU^2}$: : VZ.

5) Unter den nähmlichen Bedingnissen des in eine gerade Linie gestreckten Cycloidbogens LV beschreibt der Körper mit der im Herablaufen über LV in V erhaltenen Geschwindigkeit, und mit gleichförmiger Bewegung den Halbcirkul LZP in der nähmlichen Zeit, welche er zur Beschreibung des Cycloidbogens LVP braucht.

6) Mit eben dieser im Scheitel V erlangten Geschwindigkeit, und in gleichförmiger Bewegung durchläuft der Körper den in eine gerade Linie gestreckten Cycloidbogen LV, über welchen er herablaufend solche Bestimmung erhalten hat, in der nähmlichen Zeit, in welcher er frey über die Achse der nähmlichen Cycloide fiel.

Tab. 2. Fig. 30. 7) Die Zeit, welche der Körper zum Herabgehen über was immer für einen Cycloidbogen LV, und zum Steigen über einen gleichen VP verwendet, oder die Schwankungszeit in der Cycloide ist zur Zeit des freyen Falles über die Achse der nähmlichen Cycloide, wie der Cirkulumkreis zu seinem Halbmesser; und, da dieses Verhältniß bey allen Cirkuln das nähmliche, folglich auch das erste ein beständiges Verhältniß ist, und die Zeit des freyen Falles über die nähmliche Achse die nähmliche bleibt, so ist auch die Zeit der Bewegung in was immer für einem Bogen

LVP

LVI' der nähmlichen Cycloide unveränderlich. Der größere und kleinere Bogen der nähmlichen Cycloide werden in gleichen Zeiten beschrieben. Die Schwankungen des Pendules in der nähmlichen Cycloide sind gleichzeitig.

8) Wenn die Länge des zwischen zwey verkehrten Cycloiden CA, und CB sich schwingenden Pendules CV = 2DV der doppelten Achse, so vollbringt es seine Schwankungen in der Cycloide, deren Achse DV ist. Tab. 2. Fig. 30.

9) Die Radlinie, oder Cycloide ist die Linie der schnellesten Bewegung; oder: an keiner Linie gelangt der Körper von einem Punkte zu dem andern entfernten in so kurzer Zeit, als an der Cycloide.

Läßt man an zwey nach der Krümmung der nähmlichen Cycloide ausgehohlten Rinnen zwey gleiche Körper von verschiedenen Höhen herablaufen, so gelangen selbe zugleich an die Scheitel ihrer Cycloiden. Bestimmt man ein Pendul nach den No. 8. gesetzten Bedingnissen, so stimmen seine Schwankungen mit den Bögen jener Cycloide überein, dessen Achse der halben Länge des Pendules gleicht. Laufen zwey gleiche Körper, einer an der schiefen Ebene, der andere an einer verkehrten Cycloide, von gleicher Höhe zur nähmlichen Fläche herab, so gelanget der zweyte eher dahin, als der erste. Die letzten drey Sätze werden daher auch durch Versuche bestättiget.

§§. 122. 123.

Daß bey Pendulen, welche in Cycloidbögen sich schwingen, $Z : z :: \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{S}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{s}}$ sey, wie es in diesem §. angenommen ist worden, wird aus dem No. 7. angeführten Satze gefolgert:

Die Schwankungszeit sey $= Z$, die Zeit des freyen Falles über die Achse der nähmlichen Cycloide $= F$, der Circulumkreis $= U$, der Durchmesser $= D$, so ist nach dem erwähnten Satz: $Z : F :: U : D$, und für ein zweytes Pendul in einer anderen Cycloide: $z : f :: u : d$. Weil nun $U : D :: u : d$, so ist auch: $Z : F :: z : f$, und $Z : z :: F : f$. Der freye Fall über die Achse ist eine gleichförmig zunehmende Bewegung §. 100. Die in dieser Bewegung beschriebenen Räume, die Achsen nähmlich, welche wir A und a nennen wollen, sind wie die Producte aus der beschleunigenden Kraft, oder Schwerbestimmung, welche S und s sey, in die Quadrate der Zeit § 78, welche wir durch F und f ausdrücken. Es ist also $A : a :: SF^2 : sf^2$, und $F^2 : f^2 :: \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$. Die Achsen sind vermög No. 8 den halben Pendulslängen gleich, welche wir L und l annehmen können, und die halben Größen sind wie die ganzen. Statt $A : a$ also $L : l$ gesetzt, so ist $F^2 : f^2 :: \frac{L}{S} : \frac{l}{s}$, und $F : f :: \sqrt{\frac{L}{S}} : \sqrt{\frac{l}{s}}$, und $Z : z :: \sqrt{\frac{L}{S}} : \sqrt{\frac{l}{s}}$.

Weil nun $N : n :: z : Z$, wie §. 123 erwiesen ist worden, so ist für Pendule, welche in Cycloiden sich schwingen: $N : n :: \sqrt{\frac{S}{L}} : \sqrt{\frac{s}{l}}$.

Zum achten Kapitel.

1. Um die vom Wurfe der irdischen Körper in diesem Kapitel erwiesenen Sätze und ihre Gründe durch die Anwendung in helleres Licht zu setzen, will ich

eine Aufgabe samt ihrer Auflösung und dem allgemeinen auf die natürlichen Ursachen gegründeten Beweise derselben anführen. Die Anwendung gedachter Gründe bestimmt mich dazu, daß ich zur Auflösung der Aufgabe nicht den leichteren, und kürzeren analytischen Weg einschlagen, sondern eine blos auf die Aehnlichkeit der Dreyecke, und aus dieser folgenden Verhältnisse gebaute Auflösung geben werde.

Aufgabe. Wenn drey Punkte, aus, durch, und auf welchen der geworfene Körper sich bewegen soll, in einer und der nähmlichen Fläche, und der zweyte ober der geraden zwischen der ersten und letzten begriffenen Linie gegeben werden, den Erhebungswinkel, oder die Richtung des Wurfes, die Wurfs-Bestimmung und Höhe samt der zu beschreibenden Parabel zu bestimmen.

Auflösung. Die drey Punkte sollen Fig. 31. A, M, und U seyn. Aus A sey der Körper durch M auf U zu werfen. A, M, und U sollen in der nähmlichen Fläche AMU, und zwar M ober der geraden Linie AU seyn, in welcher die Wurfsweite bestimmt ist. Tab. 2. Fig. 31.

Wenn AU im Gesichtskreise liegt, so sind die zum Gesichtskreise senkrechten Linien auch zu AU senkrecht, in AU folglich keine Durchschnittspunkte zu betrachten. In übrigen bleibt die Auflösung, und auch der Beweis unverändert. Durch die drey gegebenen Punkte A, M, und U ziehe man, nachdem A mit U durch die gerade AU verbunden ist, drey unbestimmte zum Gesichtskreise senkrechte Linien AD, OML, und XUT, von welchen AU, da sie in der 31. Fig. nicht im Gesichtskreise liegt, in N und U geschnitten wird. Aus U werde dann durch den gegebenen Punkt M die gerade AD wo in B schneidende UMB gezogen, und der gegen A abgeschnittene

tene Theil AB auf die durch M gezogene zum Gesichtskreise senkrechte OL aus dem Durchschnittspunkte N der Linie AU in NL übertragen, dann aus A durch L die gerade XUT wo in T schneidende Linie ALT gezogen. Diese ist die gesuchte Richtung des Wurfes, und TAU der Erhöhungswinkel. Um die zur Erlangung der Wurfsbestimmung erforderliche Höhe des freyen Falles zu bestimmen, werde AU die Wurfsweite in vier gleiche Theile AK = KN = NR = RU getheilet, und durch jeden Eintheilungspunkt eine zum Gesichtskreise AX senkrechte bis zur Richtung des Wurfes AT gezogen. Die durch N gezogene fällt hier mit jener überein, welche durch M gezogen wurde. Die erste senkrechte KF bestimmt das Dreyeck FAK, dessen Winkel AFK = DAF. Wenn daher gedachtes Dreyeck TAK so übertragen wird, daß der Winkel AFK auf DAF, die Seiten AF, und FK aber auf BA und GA fallen, so ist das Dreyeck BAG = AFG. Die aus F zu GB gleichlaufend gezogene, und AD wo in D schneidende FD bestimmt DA jene Höhe, über welche der Körper frey fallen müßte, um die zum Wurfe in AT erforderliche Bestimmung zu erhalten.

FK, die zwischen der Richtung AT und der Wurfsweite AU begriffene zum Gesichtskreise senkrechte Linie, ist die Wurfshöhe, und wird auf LN in MN übertragen, wenn aus F die mit AU gleichlaufende und LN in M schneidende Linie FMY gezogen ist.

Die zu beschreibende Parabel, oder den Weg zu bestimmen, welchen der in AT geworfene Körper beschreibet, ist ML der zwischen der Wurfshöhe MN, und Richtung AT begriffene Theil der nähmlichen zum Gesichtskreise senkrechten OL in so viele gleiche Theile zu theilen, als deren in AU genommen sind worden, folglich senkrechte zum Gesichtskreise gezogen

gen sind. Hier also in vier gleiche Theile. Einer dieser Theile auf FK von F aus in FI, und dann auf PR von Y aus in YQ übertragen bestimmt die Punkte I, und Q nebst den ohnehin schon bestimmten M und U, welche durch die Linien AI, IM, MQ, und QU verbunden die gesuchte Parabel geben, wenn gedachte Linien parabolische Bogen sind, deren Punkte auf eben diese Art bestimmt werden.

Beweis. Wenn der aus A in der Richtung AT mit einer Bestimmung wie 2DA geworfene Körper richtig auf U fällt, nachdem er sich über die Wurfsweite nicht höher, als MN erhoben hat, und M nebst allen Punkten I, Q, u. s. w. durchgelaufen ist, das ist, die Parallel AIMQU beschrieben hat, so ist die durch die Höhe DA ausgedrückte Wurfsbestimmung, die Richtung AT, Höhe MN, samt der ganzen zu beschreibenden Parallel, in welcher die drey gegebenen Punkte sind, richtig bestimmt. Da hiemit alle Bedingnisse der Aufgabe erfüllet sind, so glaube ich, dieses ohne allen Anstand annehmen zu können, und folglich nur noch zu beweisen zu haben, daß die Bestimmungen so gegeben sind, wie ich eben beschrieben habe. Es ist also zu beweisen:

1) Daß der aus A in der Richtung AT mit der Bestimmung wie 2DA geworfene Körper auf U falle, die Wurfskraft 2DA folglich, samt der Richtung AT, richtig bestimmt sey.

Der in AT geworfene Körper ist wie von AU, und UT umgetrieben zu betrachten, derer jede mit AT gleiche Wirkungszeit hat §§. 64. 65. 66. In der Zeit also, in welcher der in der Richtung AT geworfene Körper AT beschreiben würde, durchlief er in der Richtung der Wurfsweite den Raum AU, und in der zum Gesichtskreise senkrechten Richtung hierauf einen Raum UT, und hat die mit AT gleichzeitigen Bestimmungen AU, und UT. UT ist jener Bestimmung gleich, welche der Körper im freyen Falle über die Hälfte von UT in gleicher Zeit erhalten würde §§. 90. 100. Die mit UT, folglich auch mit AU, und mit AT gleichzeitige Wirkung der Schwerbestimmung also ist gleich UT, und UT wird durch die Wirkung der Schwere in der Zeit ganz getilget, in welcher der geworfene Körper AT beschrieb, und folglich in der Richtung oder nach der Lage der Wurfsweite den Raum AU durchläuft. Weil nun die dem in AT geworfenen Körper vermög Auflösung der Aufgabe ertheilte Bestimmung = 2DA eine gleichförmige Bewegung erzeugt, und in gleichen Zeiten gleiche Wirkung leistet, so können wir, um gedachte Tilgung der Bestimmung UT deutlicher zu erklären, AU die Linie, durch welche die andere gleichzeitige Bestimmung des in AT geworfenen Körpers ausgedrückt wird, in vier gleiche Theile AK, KN, NR, und RU eingetheilet, und in diesen die vier gleichen Theile der ganzen Zeit, in welcher UT wirkt, und welche mit jener von AT, oder AU gleich ist, ausgedrückt setzen. Wenn diesemnach die Wirkung, welche von der Bestimmung UT in der ganzen Zeit ohne Mitwirkung der Schwere erzeugt würde, UT ist, so müßte, eben auch mit Hindansetzung der Schwere, die Wirkung in dem ersten Theile der Zeit KF, in zwey, oder der halben Zeit NL, in drey Theilen RP, und so in allen vier gleichen Theilen, oder in der ganzen Zeit UT seyn. Die gerade entgegengesetzten Wirkungen der Schwere, welche wie 1, 4, 9, 16 zu nehmen sind, weil diese Bestimmung zur gleichförmig zunehmenden Bewegung wirkt §. 100. und 1. Abh. §§. 53. 57. müssen nach der nähmlichen Eintheilung der Zeit: FI, LM, PQ, und TU seyn, nachdem diese letzte

der

der Bestimmung UT gleich ist. Diese Wirkungen von jenen der in AT enthaltenen Bestimmung UT abgezogen §. 61., lassen für die in der Richtung UT den geworfenen Körper samt seiner Schwere antreibende Bestimmung UT in den ersten Theil der Zeit die Wirkung KI, für zwey Theile NM, für drey RQ, und für alle vier Theile, oder die ganze Zeit gar keine; das ist, am Ende dieses vierten Theiles der Zeit muß der in AT geworfene Körper wieder in AU der nähmlichen Fläche seyn, von welcher er aufgestiegen ist. In der ersten Hälfte der Zeit nähmlich ist die Wirkung der Schwere immer noch kleiner, als jene der Bestimmung UT, mit Ende dieser Hälfte der Zeit selben gleich, nach diesem aber ist die Wirkung der Schwere immer größer, als jene der Bestimmung UT, bis diese ganz getilget ist, und der Körper wieder in AU gelangt, wovon er sich erhoben hatte. In Beziehung also auf das Steigen nach der Richtung UT des in AT geworfenen Körpers verhält sich dieser, als wenn er in der ersten Zeit von KI, in der zweyten, nachdem der Körper sich über KI schon erhoben hat, von IF, oder fM, um welches NM größer ist als KI, in der dritten, in welcher er um Mf $=$ YQ weniger als in den zwey ersten Zeiten zusammen hinaufgetrieben wird, von Mf herab, und endlich in dem vierten Theile der Zeit wie von QR angetrieben wäre. Wenn daher die Bestimmung UT des in AT geworfenen Körpers in Verbindung mit seiner Schwere genommen wird, wie sie es werden muß §. 125., so muß sich der geworfene in Ansehung seiner Bestimmung UT, oder in der zum Gesichtskreise senkrechten Richtung so bewegen, als wenn in dieser Richtung, und in den betrachteten Theilen der ganzen Zeit Bestimmungen wie KI, IF, Mf, und QR auf ihn wirkten. Die in AT enthaltene Bestimmung AU des gewor-

fenen

fenen Körpers wird durch die Wirkung der Schwere, wenn selbe zum Gesichtskreise AX gleichlaufend ist, gar nicht verändert; ist aber AU schief zum Gesichtskreise wie Fig. 29., so ist sie aus AX, und XU zusammengesetzt zu betrachten §§. 64. 65., von welchen nur XU verändert, und in der ganzen Zeit ganz getilget wird. AX bleibt unverändert. Wenn daher AT in Beziehung auf AX genommen würde, so müßten AH, HO, OS, und SX für die gleichzeitigen Wirkungen der in AX vorhandenen Bestimmung genommen werden, und dann blieb die in der Richtung der Wurfsweite vorhandene Bestimmung AX doch unverändert. Weil aber AT im gesetzten Falle nur in Beziehung auf AU zu nehmen, die Bestimmung AU folglich in der Richtung der gesuchten Wirkung ist, so muß diese als unverändert betrachtet werden § 68., und ihre gleichzeitigen Wirkungen sind AK, KN, NR, und RU. Diesemnach hat der in AT geworfene Körper in dem ersten Theil der Zeit Bestimmungen wie AK und KI, im zweyten KN = If, und IF, in dem dritten Theile NR = MY und Mf, in dem letzten Theile der Zeit endlich wie RU, und QR. Der so geworfene Körper muß also am Ende der ersten Zeit wie über AI in I, am Ende der zweyten Zeit wie über IM in M, zu Ende des dritten Theiles der Zeit wie über MQ in Q, und in dem letzten Theile der Zeit endlich wie über QU in U gelangen §. 64., mit dem Unterschiede, daß keine gerade Linien, sondern parabolische zwischen nähmlichen äußersten Punkten mit AI, IM, MQ, und QU bestimmte Bögen beschrieben werden, weil gedachte Bestimmungen unter einem Winkel, und eine zur gleichförmigen, die andere zur gleichförmig zunehmenden Bewegung wirken §. 97., die Quadrate der Ordinaten folglich wie die Abszissen sind.

Aus

Aus diesem ist klar, daß der in AT mit einer Bestimmung wie 2DA geworfene Körper erstens auf U fallen muß, wenn AT die Richtung so bestimmt ist, daß in der nach AT ertheilten Bestimmung 2DA die Bestimmung UT enthalten sey, welche in der Zeit der Wirkung in AT durch die Schwere getilgt wird, die Verhältnisse folglich in der gebauten Figur richtig sind, welche aus dieser Bedingniß folgen. Wenn UT durch die Schwerbestimmung in der Zeit der Wirkung in AT ganz getilgt wird, so muß UT jener Bestimmung gleich seyn, welche der Körper im freyen Falle über die Hälfte von TU erhalten würde, und der Körper in der nähmlichen oder gleichen Zeit frey über die halbe Höhe TU fallen, in welcher er UT, oder AT beschrieb §§. 100. 90. Wenn diese Zeit z genannt wird, so ist der beschriebene Raum die Hälfte der Höhe TU wie z^2 §. 78., und, weil die halben wie die ganzen Größen sind, auch: TU : : z^2. Aus eben diesen erwiesenen Gründen ist: DA : : Z^2, wenn die Zeit des freyen Falles über DA, in welchen der Körper die zum Wurfe nach der gegebenen Auflösung erforderliche Bestimmung 2DA erhält, Z genannt wird. Wenn also die gesetzte Bedingniß richtig ist, so muß: DA : UT : : $Z^2 : z^2$ seyn. Weil ferner die dem geworfenen Körper in der Richtung AT ertheilte Bestimmung : : 2DA ist, und auch 2DA mit dieser Bestimmung beschrieben würde, beyde diese Bewegungen also mit der nähmlichen Geschwindigkeit vollbracht würden, auch beyde gleichförmig sind, und die Zeit der Wirkung in AT der Zeit z, jene von 2DA aber = Z, so ist auch: 2DA : AT : : Z : z §. 10., und $(2DA)^2 : AT^2 : : Z^2 : z^2$. Dieses mit dem vorbestimmten Verhältnisse verglichen giebt: $(2DA)^2 : AT^2$: : DA : UT. Ist die oben gesetzte, und zur Richtigkeit der gegebenen Auflösung erforderliche Bedingniß in derselben erfüllt,

so

so muß der Bau der 31. Fig. eben bestimmte Proportion geben.

Die Dreyecke AFK, und BAG sind vermög des in der Auflösung gesetzten Baues der Figur gleich. DF ist mit FK aus der nähmlichen Ursache gleichlaufend, die Dreyecke DAF folglich, und FAK ähnlich. Wegen Aehnlichkeit dieser zwey Dreyecke aber ist: DA : AF : : AF : FK, das ist $\div$ DA : AF : FK, folglich $DA^2 : AF^2 :: DA : FK$. Die ersten zwey Glieder mit 2 multipliziret, oder verdoppelt: $(2DA)^2 : (2AF)^2 :: DA : FK$. Versetzt: $(2DA)^2 : DA :: (2AF)^2 : FK$. Beyde letzte Glieder mit 4 multipliziret: $(2DA)^2 : DA :: 4(2AF)^2 : 4FK$, oder $(2DA)^2 : DA :: (4AF)^2 : 4FK$. Versetzt: $(2DA)^2 : (4AF)^2 :: DA : 4FK$. Die Dreyecke FAK und TAU sind der gleichlaufenden Grundlinien FK und TU wegen ähnlich, folglich ist: AF : AT : : FK : UT : : AK : AU. Vermög des Baues der Figur ist AK der vierte Theil von AU, also ist auch AF von AT, und FK von UT der vierte Theil, und $(4AF)^2 = AT^2$, 4FK aber $=$ UT. Diese gleiche Größen in der obigen Proportion statt jenen gesetzt, ist also auch in der gegebenen Auflösung: $(2DA)^2 : AT^2 :: DA : UT$.

2) Daß die **Wurfshöhe** NM sey, oder: **der Körper nicht höher, und nicht weniger sich erhebe.**

Aus der in dem ersten Theile des Beweises angeführten Aehnlichkeit der Dreyecke: AFK, ALN, APR, und ATU ist einleuchtend, daß FK der vierte Theil, und LN die Hälfte von TU sey, wie AK der vierte, und AN die Hälfte von AU ist, vermög Bestimmung. Da also FM mit AU gleichlaufend gezogen ist, FK und LN zum Gesichtskreise senkrecht, mit einander folglich auch gleichlaufend sind, so ist MN $=$ FK, und auch MN der vierte

Theil

Theil von UT, und die Hälfte von LN. Der senkrecht hierauf geworfene Körper kann sich nur zur Hälfte jener Höhe erheben, zu welcher er ohne Schwere mit der Wurfsbestimmung allein sich erhoben hätte §. 129. In der ganzen Zeit hätte der Körper mit der Bestimmung UT in dieser Richtung nicht höher steigen können, als zur Hälfte von UT. Da er also in AT geworfen, wie oben erwiesen ist worden, nur in der ersten Hälfte der Zeit steigt, in der zweyten schon fällt, so kann er sich nur zum vierten Theil MN jener Höhe UT erheben, zu welcher er ohne Schwere gestiegen wäre. Vermög des ersten Theiles dieses Beweises aber ist er am Ende des ersten vierten Theiles der Zeit in I, des zweyten in M, des dritten in Q, und IK ist = QR, und kleiner als MN, also ist MN die Höhe des bestimmten Wurfes.

3) Daß AIMQU die krumme Linie sey, welche er in der Richtung AT mit einer Bestimmung wie 2DA geworfen beschreiben muß, und zwar eine Paralel.

Das erste ist schon in dem ersten Theile dieses Beweises erwiesen worden, da gezeigt wurde, daß der nach der gegebenen Bestimmung geworfene Körper auf U fallen müsse, nachdem er durch I, M, und Q gegangen ist.

Das zweyte ist daraus klar, daß vermög Bau der Figur IF, ML, QP, und UT, wie 1, 4, 9, 16 sind. AF aber = FL = LP = PT, folglich AF, AL, AP, AT wie 1, 2, 3, 4. Wenn daher der Ursprung der Abszissen A genommen wird, die Ordinaten wie die Quadrate der Abszissen sind. Durch welches Verhältniß die Parabel bestimmt wird.

Wenn die Wurfsweite noch weiter untergetheilet wird, z. B. jeder vierte Theil noch in 2 oder 4 u. s. w. Theile, so können auf die nähmliche angenommene Art auch 8, oder 16 u. s. w. Punkte dieser Parabel bestimmt werden, nachdem LM in eben so viele gleiche Theile getheilet, als AU, und einer dieser Theile auf die erste senkrechte bey A, wie Fig. 31. FK ist, in FI übertragen ist worden, und die übrigen Punkte nach dem nähmlichen Verhältnisse bestimmt werden, nach welchem die Punkte I, M, Q, U in dieser Figur bestimmt sind.

Zum zehenten Kapitel.

1) Es wird vielleicht manchen meiner Leser als Anfängern in der Naturlehre die Art zu bestimmen, wo sich die Mittelpunkte der stossenden Kugel im Stoße befinden, nicht unangenehm seyn, um die übrigen gegebenen Bestimmungen des Stoßes vollständiger zu begreifen. Um diesem Wunsche Genüge zu leisten, setze ich hier folgende Aufgaben mit ihren Auflösungen und Beweisen bey:

I. Aufgabe. Wenn die Geschwindigkeiten, und Halbmesser der auf einander gerade stossenden Kugeln bekannt sind, die Punkte zu bestimmen, in welchen ihre Mittelpunkte im Stoße seyn werden? oder zu bestimmen, wo diese Kugeln zusammentreffen?

Auflösung 1. Wenn sich beyde stossende in die nähmliche Gegend bewegen Tab. 2. Fig. 32. A und

Tab. 2. Fig. 32. B deren Halbmesser AG und BK gegeben werden, bewegen sich in der Linie AB in die nähmliche Gegend gegen b. Der Halbmesser AG werde an den Halbmesser BK von K aus in KD übertragen, daß folglich BD = BK + AG. Dann sey aus A unter was immer für einem Winkel mit AB die gerade AC gezogen, und in E so getheilet, daß, wenn G und g die gegebenen Geschwindigkeiten der Kugeln A und B sind: AC : EC : : G : g sey. Aus E werde

ED,

ED, und EB zu den äußersten Enden BD = BK + AG, und die unbestimmte mit AB gleichlaufende EF gezogen, dann durch die aus C mit ED gleichlaufende, und die verlängerte AB wo in a schneidende CFa bestimmt. Aus dem hiemit bestimmten Punkte F ziehe man endlich die Linie Fb gleichlaufend mit EB, bis selbe mit der verlängerten AB wo in b zusammenläuft; so sind a und b jene Punkte, in welchen die Mittelpunkte der Kugeln A und B im Stoße seyn werden, folglich ab der Raum, in welchem gedachte Kugeln sich treffen.

Beweiß. Wegen gleichlaufenden Grundlinien Aa und EF sind die Dreyecke ACa und ECF ähnlich, und AC : EC : : Aa : EF. Als gleichlaufende zwischen gleichlaufenden sind EF, und Bb gleich. Es ist also auch AC : EC : : Aa : Bb, und weil vermög Bau der Figur AC : EC : : G : g, so ist auch: Aa : Bb : : G : g. Wenn die Räume wie die Geschwindigkeiten sind, so müssen die Zeiten gleich seyn §. 10. Aa, und Bb sind daher die von A und B mit den gegebenen Geschwindigkeiten in der nähmlichen Zeit beschriebenen Räume, und A und B gelangen zugleich in a und b. EF = Bb, wie schon erwiesen ist. Aus der nähmlichen Ursache ist EF = Da, folglich Da = Bb, und Da — Ba = Bb — Ba, das ist, DB = ab. BD = BK + AG, also ist auch: ab = BK + AG. Der Abstand, welchen die in a, und b angelangten Mittelpunkte der Kugeln A und B haben, ist der Summe ihrer Halbmesser gleich. Die Kügeln müssen sich also berühren, da ihre Mittelpunkte in a und b gelangen, und weil A nothwendiger Weise mit größerer Geschwindigkeit folgt, als B vorausgeht, diese also jener zum Hindernisse der Bewegung ist, so muß A in B dringen, und B in A, da sie in a und b sind, das ist, auf einander stossen.

P 2 Auf-

Tab. 2. Fig. 33. Auflösung 2. Wenn A und B Tab. 2. Fig. 33. in der geraden Linie AB in entgegengesetzten Richtungen AB und BA zusammenlaufen. Zu AK werde aus K der Halbmesser BC übertragen, daß folglich AD = AK + BC, dann eine unbestimmte Linie EF gleichlaufend mit AB gezogen, und wo in L so getheilet, oder solche Theile derselben EL, und LF bestimmt, daß: EL : LF : : G : g sey. Durch E und F ziehe man aus D und B zwey gerade Linien DEG, und BFG, die ober, oder unter der Linie AB irgendwo in einem Punkte G zusammenlaufen. Aus diesem Punkte G werde durch den Eintheilungspunkt L die gerade AB wo in b schneidende Linie GLb gezogen, und aus b auf ba, AD übertragen, daß folglich ab = AD = AK + BC sey. Die Mittelpunkte der Kugeln A und B werden in a und b seyn, da sich selbe stossen.

Beweis. Wegen gleichlaufenden Grundlinien DB, und EF sind die Dreyecke: DGb, und EGL, dann bGB und LGF ähnlich, und Db : EL : : bG : LG, dann Bb : LF : : bG : LG, folglich auch: Db : EL : : Bb : LF; übersetzt: Db : Bb : : EL : LF. Vermög Bedingniß ist EL : LF : : G : g Es ist also auch: Db : Bb : : G : g. ab ist vermög Bestimmung = AD, folglich auch AD + Da = ab + Da, das ist Aa = Db. Also ist auch Aa : Bb : : G : g, und Aa und Bb sind die von A und B mit den gegebenen Geschwindigkeiten in gleichen Zeiten beschriebene Räume §. 10. A und B kommen zugleich auf a und b. Vermög Bestimmung ist ab = AD = AK + BC der Summe der Halbmesser. A und B berühren sich also, da sie in a und b sind. Weil A und B gegen einander laufen, so sind sie sich im Wege, indem sich selbe in a und b gelangend berühren. A und B also müssen in einander

drinbringen, das ist, auf einander stossen, da selbe in a und b sind §. 149.

II. Aufgabe. Wenn die Halbmesser der Kugeln und ihre Geschwindigkeiten samt derselben Richtungen gegeben werden, und diese schief gegen einander sind, die Orte ihrer Mittelpunkte im Stoße und die Fläche des Stoßes zu finden §. 149.

Auflösung. Weil Körper, welche sich schief gegen einander bewegen, zusammenlaufen müssen, damit sie sich stossen, so nehmen wir Tab. 1. Fig. 23. die Kugeln A und B, deren Halbmesser aK und bK, und Geschwindigkeiten G und g gegeben sind, in AC und BC schief gegen einander laufend an. Auf AC als Diagonale werde das Parallelogramm ABCD gebauet, und von A aus in AC ein Theil AF so bestimmt, daß AF : BC : : G : g sey, wenn auch AC verlängert werden müßte, um AF in diesem Verhältnisse zu bestimmen. Von dem Winkel D, welcher durch den Bau des Parallelogrammes bestimmt ist, ziehe man zu F eine gerade Linie DF, dann nehme man EC = aK + bK der Summe der Halbmesser mit dem Cirkel und beschreibe aus C dem Punkte des Zusammenlaufes der Richtungen, als Mittelpunkte einen DF, wo in E schneidenden Cirkulbogen. Aus E werde alsdann eine mit BC gleichlaufende, und AC wo in a schneidende Linie Ea, und aus a gleichlaufend mit EC ab gezogen, bis diese mit BC wo in b zusammenläuft. a und b sind jene Punkte, in welchen die Mittelpunkte der Kugeln A und B im Stoße seyn werden, und wenn in ab der Theil bK so bestimmt wird, daß bK dem Halbmesser der Kugel B gleiche, so ist aK der Halbmesser der Kugel A, und die aus K zu ab senkrecht errichtete Fläche KL die verlangte Fläche des Stoßes. Tab. 1. Fig. 23.

Beweis. Die Dreyecke AFD und aFE sind wegen ihren gleichlaufenden Grundlinien AD, und aE ähnlich, folglich ist: AF : aF : : AD : aE, und AF : AF — aF : AD : AD — aE. AD = BC, und aE = bC, folglich: AF : AF — aF : : BC : BC — bC, das ist: AF : Aa : : BC : Bb. Uebersetzt: AF : BC : : Aa : Bb. AF : BC : : G : g vermög Bestimmung, also ist auch: Aa : Bb : : G : g. Aa und Bb sind gleichzeitige Räume §. 10., und die Mittelpunkte der Kugeln A und B gelangen zugleich nach a und b. EC = ab, da also EC die Summe der Halbmesser ist, so berühren sich die Kugeln A und B, da ihre Mittelpunkte in a und b sich befinden. Die Bestimmungen Aa und Bb sind schief gegen einander, um also jene Theile derselben zu bestimmen, welche in der Richtung des Stoßes sind, zu dieser Wirkung folglich beytragen §. 69., sind selbe in gleichlaufende und senkrechte zu der Fläche des Stoßes KL aufzulösen, Aa in AG, und Ga, Bb aber in Mb und BM. Mit den zu KL gleichlaufenden Bestimmungen AG und Mb stossen A und B nicht zusammen, weil diese zur Richtung des Stosses ab und ba senkrecht sind §. 68., sondern nur mit der Differenz von Ga, und BM, weil diese mit ab der Richtung des Stoßes gleichlaufend, und in die nähmliche Gegend gerichtet sind. Ga ist größer als BM, A also wird in die nähmliche Gegend stärker nachgetrieben, als B vorausgehet. Diese Kugel steht jener im Wege, und A muß in B dringen, B folglich auch in A. Die Kugeln A und B stossen sich, da ihre Mittelpunkte in a und b sind.

Wenn die Richtungen der zwey zum Stoße zusammenlaufenden Körper schief gegen einander sind, so kann der Fall der entgegengesetzten Richtungen wie bey dem geraden Stoße nicht eintreffen, sondern es müssen die Bestimmungen jedesmal zusammenlaufend seyn, nur der Winkel, den selbe einschliessen, wird desto stumpfer seyn, je näher die Bestimmungen der stossenden den gerade entgegengesetzten kommen. Bey dem schiefen Stoße der Körper hat diese Aufgabe keinen doppelten Fall, wie bey dem geraden.

Wenn die Linie DF durch EC nicht erreicht wird, so ist keine zwischen DC und DF gezogene Linie, folglich auch keine zwischen AC und BC, welche der Summe der Halbmesser aK + bK glich, und in welcher die sich in AC und BC bewegenden Mittelpunkte zugleich eintreffen können, folglich sind die gegebenen Bedingnisse so beschaffen, daß sich die Kugeln A und B nicht einmal berühren können, viel weniger stossen, wie es der Bau einer solchen Figur ausweiset. Wird aber DF von EC nur berühret, so ist EC, folglich auch ab, in deren äußersten Punkten a und b die Mittelpunkte der Kugeln zugleich eintreffen, so bestellt, daß die in a und b zusammentreffenden Kugeln sich zwar berühren, aber nicht in einander dringen, und jene, deren Geschwindigkeit größer ist, bey der anderen nur vorübergehe. Damit sich also die Kugeln, da selbe in a und b eintreffen, auch stossen, muß DF von dem bestimmten Cirkulbogen geschnitten werden, EC folglich in zwey Punkten der Linie DF eintreffen. Der obere Durchschnittspunkt E bestimmt durch die mit BC, und EC gleichlaufenden Ea, und ab die Orte der Mittelpunkte im Stoße, weil sich die Körper nicht zweymal stossen können, sondern nach vollbrachtem Stoße mit gemeinschaftlicher Geschwindigkeit sich fortbewegen, oder zusammen ruhen, wenn die Körper weich §. 162., oder trennen, wenn sie elastisch sind §. 170. Setzt man statt einer der zwey stossenden Kugeln den runden Schatten eines Körpers, der von jenem durchgedrungen werden kann, so werden durch den oberen Durchschnittspunkt E gedachter Massen die Orte bestimmt, in welchen die Mittelpunkte der Kugel und des Schattens sind, da sie sich berühren, der Körper folglich in den Schatten tritt; der zweyte durch EC in DF bestimmte Durchschnittspunkt aber bestimmt nach der in der Auflösung angegebenen Art die Orte, in welchen die Mittelpunkte der Kugel, und des Schattens sich befinden, da sich selbe bey ihrer Trennung mit ihren äußersten Gränzen wieder berühren, der Körper folglich aus dem Schatten eben ganz ausgetreten ist.

2) Zum Schlusse dieser Anmerkungen setze ich noch den Beweis der den natürlichen Ursachen dem Scheine nach zuwider laufenden Wirkung, welche doch auch durch Versuche bestättiget wird, ungeachtet daß wir keine vollkommen elastische Körper in der Natur haben, wie solche im Beweise gesetzt werden.

Diese Wirkung ist: daß der elastische Körper von einer kleineren Masse, von einer größeren elastischen Masse gestossen, eine größere Geschwindigkeit nach dem Stoße erlange, wenn er vermittels eines dritten elastischen Körpers von mittlerer Masse, als wenn derselbe unmittelbar gestossen wird.

Beweis zu diesem, den wir aus den §. 171. erwiesenen Formeln ziehen müssen, sind die stossenden Körper vollkommen elastisch anzunehmen, wie wir selbe dort angenommen haben. Die stossenden Körper sollen Tab. 2. Fig. 34. die Kugeln A, B, und C seyn. Ihre Massen nenne man auch A, B, und C, und A sey > B, und B > C. A stosse auf B, und alsdann B auf C, so ist die Geschwindigkeit

Tab. 2. Fig. 34.

des B nach dem Stoße $= \frac{2AG}{A+B}$ §. 171., wenn statt M und m in der Formel diese angenommenen Benennungen der Massen gesetzt werden. Nach der nähmlichen §. 171. erwiesenen Formel ist die Geschwindigkeit des C nach dem Stoße $= \frac{4ABG}{AB+B^2+AC+BC}$.

Stoßt

Stoßt A unmittelbar auf C, so ist die Geschwindigkeit, welche C im Stoße erhält $= \frac{2AG}{A+C}$.

Es ist also zu beweisen, daß: $\frac{2AG}{A+C} < \frac{4ABG}{AB+B^2+AC+BC}$. Wenn jede dieser zwey Größen mit 2AG dividiret wird, so ist eine in dem nähmlichen Verhältnisse vermindert, wie die andere. Sie bleiben also gegen einander, wie sie waren, und es ist nur mehr zu beweisen, daß: $\frac{1}{A+C} < \frac{2B}{AB+B^2+AC+BC}$. Beyde mit dem Nenner der zweyten Größe multiplizirt muß auch: $\frac{AB+B^2+AC+BC}{A+C} < 2B$ seyn; das ist: nach vorgenommener Division $B+C+\frac{B^2-C^2}{A+C} < 2B$. Der Bruch $\frac{B^2-C^2}{A+C} = \frac{(B+C)(B-C)}{A+C}$. Beyde Glieder mit $A+C$ multipliziret $(A+C)\frac{(B^2-C^2)}{A+C} + (B+C)(B-C$. Diese Gleichung giebt die Proportion: $A+C : B+C :: B-C : \frac{B^2-C^2}{A+C}$. $A+C > B+C$, weil $A > B$, also ist auch $B-C > \frac{B^2-C^2}{A+C}$. $B-C+C=B$, also ist auch: $B > \frac{B^2-C^2}{A+C}+C$,

oder

oder $B > C + \frac{B^2 - C^3}{A + C}$, und $2B > B + C + \frac{B^2 - C^2}{A + C}$.

Durch Verhältnisse läßt sichs bestimmen, daß die Masse B im stäten geometrischen Verhältnisse zwischen A, und C stehen müsse, wenn C durch diesen vermittelten Stoß die möglich größte Geschwindigkeit erlangen soll. Weil nun zwischen A, und zwischen B und C, und zwischen jeden zwey Massen eine mittlere geometrisch verhältnißmässige Masse gefunden wird, so scheinet es, daß die Geschwindigkeit des letzten Körpers C ohne Ende vermehret werden könnte. Allein die Mathematik erweiset, daß gedachte Geschwindigkeit des C Gränzen habe, welche sie nie übersteigen kann, wenn die Reihe der im stäten geometrischen Verhältnisse zwischen der ersten, und letzten vollkommen elastischen Masse stehenden nicht unendlich ist; dergleichen in der Natur nicht seyn kann.

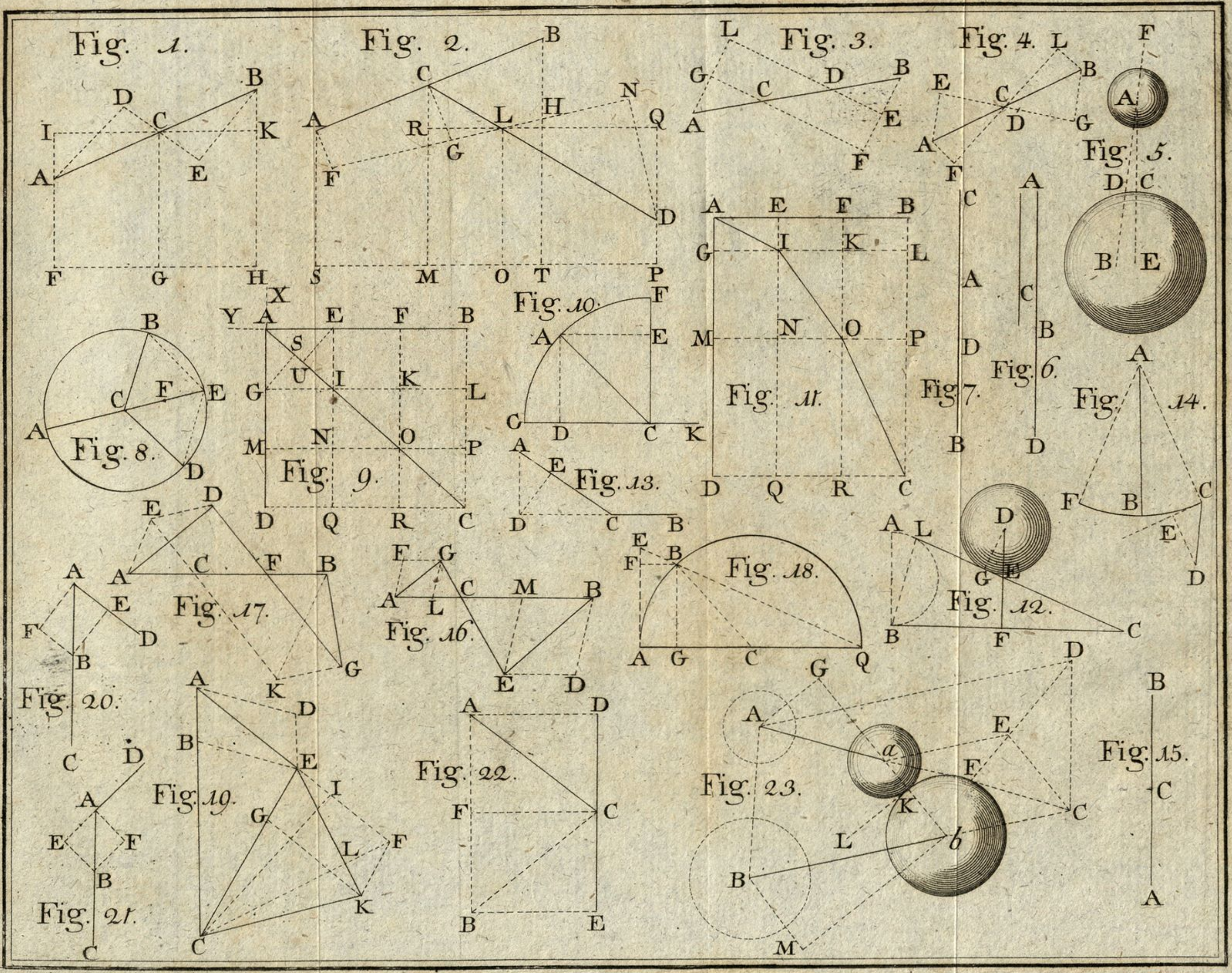
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.

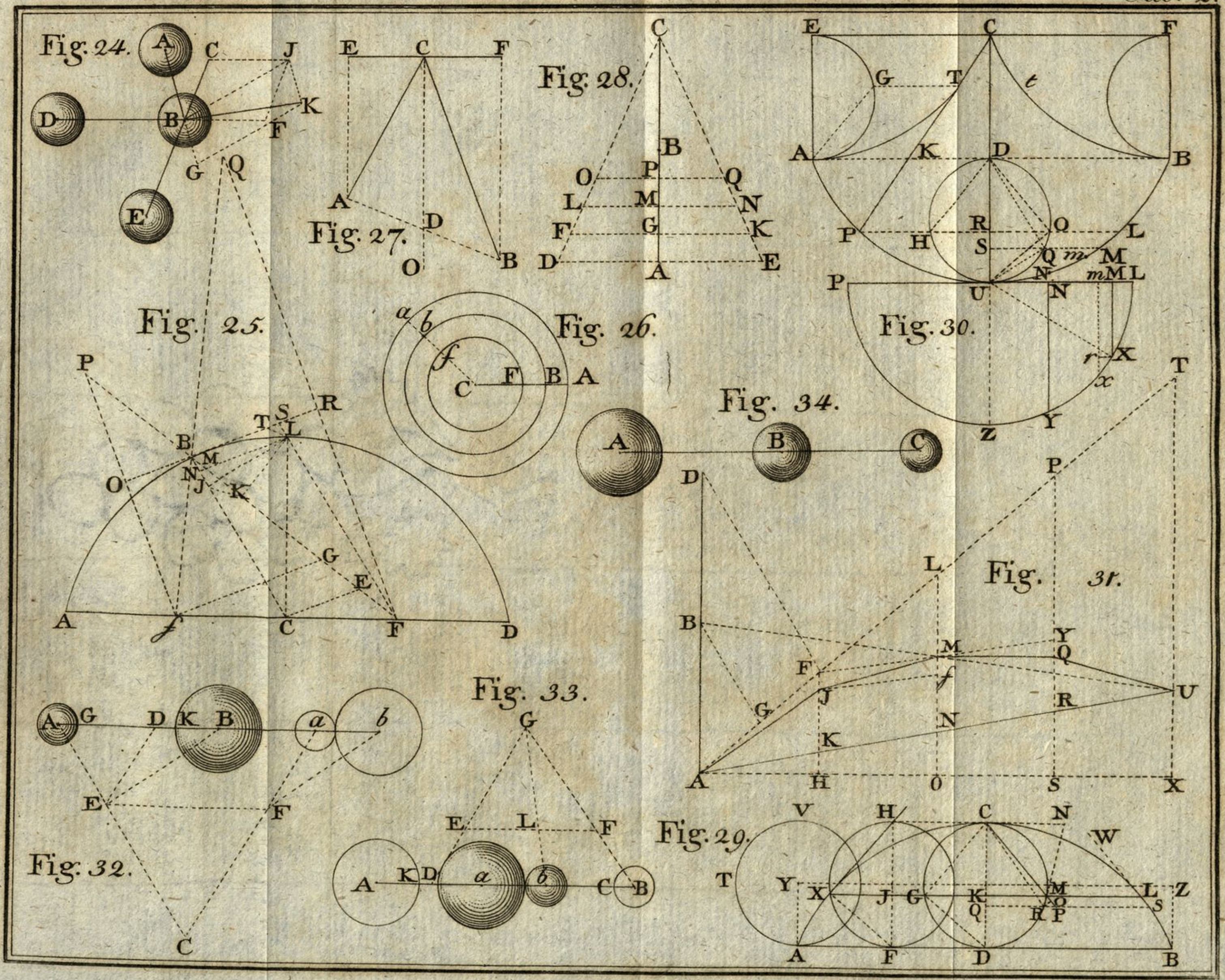

Fig. 24.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 30.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 34.
Fig. 31.
Fig. 33.
Fig. 29.
Fig. 32.