BASELSKI PROBLEM

ALEKSANDER SIMONIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A99, 40-03, 40A25

V članku obravnavamo Eulerjev pristop k reševanju baselskega problema. Podrobneje je predstavljena njegova prva rešitev, v nadaljevanju članka pa sledi opis kasnejšega dopolnjevanja dokaza.

THE BASEL PROBLEM

The article discusses Euler's method of solving the Basel problem. While the first part of the article presents his first solution in detail, the rest of the article describes how the proof was later completed.

Uvod

Z neskončnimi vrstami se je srečal že starogrški matematik **Arhimed** (287–212 pr. n. št.) pri kvadraturi odseka parabole in tako dokazal konvergenco geometrijske vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}\,.$$

Prav tako je ena prvih preučevanih vrst harmonična vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

za katero je najzgodnejši dokaz divergence v 14. stoletju podal Francoz **Nicole Oresme** (1323–1382).

Za obdobje pravega razmaha raziskovanja neskončnih vrst pa štejemo 17. stoletje. V tem času so matematiki odkrili logaritme in za natančno računanje so potrebovali natančne tabele. Logaritemsko funkcijo so razvili v potenčno vrsto, ki ji danes pravimo *Taylorjeva* (**Brook Taylor** (1685–1731)), čeprav sta podobne razvoje odkrila že **Nicholas Mercator** (1620–1687) in **James Gregory** (1638–1675). Kot primer takšne vrste se pogosto navaja

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\,, \tag{1}$$

s konvergenčnim območjem $(-1, 1]$.

Okoli leta 1650 se je **Pietro Mengoli** (1625–1686) v *Novae quadraturae arithmeticae* ukvarjal z izračunom vsote vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,. \tag{2}$$

Problema sta se lotila tudi angleška matematika **John Wallis** (1616–1703) in **Henry Oldenburg** (1615–1677). Wallis je v knjigi *Arithmetica infinitorum* (1655) izračunal vsoto vrste (2) na tri decimalna mesta natančno, Oldenburg pa je leta 1673 s problemom seznanil **Gottfrieda Leibniza** (1646–1716).

Leibniz se je v tem času ukvarjal z izračunom vsote vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

njeni členi se pojavijo v *harmoničnem trikotniku*[1], in jo izračunal, takole:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

A problem, ki ga je odprl Mengoli, je ostal nerešen. Leibniz je za pomoč zaprosil **Jakoba Bernoullija** (1654–1705), enega največjih matematikov tistega časa.

Jakob Bernoulli je leta 1689 napisal knjigo *Tractatus de seriebus infinitis*, v kateri je podrobno obravnaval nekatere neskončne vrste, med drugim tudi vrsto (2). Najprej je pokazal, da za vsak $k \geq 1$ velja

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}\,.$$

Potem je brez zadržkov zapisal

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots \leq \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{2}{k(k+1)} + \cdots = 2$$

in zaključil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2\,.$$

[1] Označimo s $H_{i,j}$ število v i-ti vrstici in j-tem stolpcu harmoničnega trikotnika, pri čemer je $j \leq i$. Naj velja $H_{i,1} = 1/i$. Preostala števila generiramo z rekurzijo $H_{i,j} - H_{i+1,j} = H_{i+1,j+1}$.

Za Jakoba Bernoullija je bil to dovolj dober argument pri dokazu konvergence vrste (2). Kljub uspehu pa nikakor ni znal izračunati njene vsote v zaključeni obliki. Priznal je poraz in v *Tractatus* zapisal naslednji stavek:

Če kdo najde in nam pove, kar se nam je dotlej kljub naporom izmikalo, večna mu bo naša hvaležnost.[2]

S tem je bila matematična javnost seznanjena s problemom, ki je danes znan kot *baselski*[3] *problem*.

Eulerjevi numerični rezultati

Ni znano, kdaj je **Leonhard Euler** (1707–1783) prvič izvedel za baselski problem, dejstvo pa je, da je bil njegov zasebni učitelj matematike **Johann Bernoulli** (1667–1748), Jakobov brat. Zato mnogi predvidevajo, da je prav Johann seznanil Eulerja s problemom.

Med letoma 1727 in 1733 sta **Daniel Bernoulli** (1700–1782), Johannov sin, in Euler delovala v Sankt Peterburgu. Verjetno sta razpravljala tudi o tem problemu, saj je Euler v članku *De summatione innumerabilium progressionum*[4] leta 1731 opisal postopek za hitrejši numerični izračun vsote vrste (2). Euler je želel izračunati vsoto na nekaj decimalnih mest natančno, vendar bi moral sešteti vsaj tisoč členov, da bi bil rezultat natančen na komaj tri decimalna mesta.

Eulerjeva metoda je bila izraziti določeni integral

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\ln(1-x)}{x} \right) dx$$

na dva različna načina. Pri prvem je funkcijo $\ln(1-x)$ zamenjal z vrsto (1) in integriral

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}\,.$$

Pri drugem načinu je naredil substitucijo $1-x=y$ in dobil

$$I = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln y}{1-y} dy\,.$$

[2] [5], str. 42

[3] Basel, mesto v Švici in kraj, kjer je bil *Tractatus* napisan.

[4] Objavljen leta 1738 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5*, str. 91–105.

Potem je integrand razvil v vrsto, vsak člen integriral z metodo *per partes* in dobil

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - (\ln 2)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}\,.$$

Po primerjavi rezultatov obeh načinov je zapisal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} n^2} + (\ln 2)^2.$$

Število $\ln 2$ je preprosto izrazil z vrsto (1) in seštel prvih dvajset členov, torej

$$\ln 2 = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \approx \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n 2^n} \approx 0{,}6931471\,,$$

in nato še

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} n^2} \approx \sum_{n=1}^{14} \frac{1}{2^{n-1} n^2} \approx 1{,}1644806\,.$$

Tako je dobil vsoto vrste na šest decimalnih mest natančno:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1{,}644934\,.$$

Pri tej izpeljavi je lepo vidno Eulerjevo manipuliranje z izrazi, kot so vrste in integrali. Tak način dela je postal njegova stalnica in še danes vpliva na celotno matematiko.

Naslednjo numerično metodo je Euler opisal v članku *Methodus generalis summandi progressiones*[5] leta 1732. Uporabil je t. i. *Eulerjevo sumacijsko formulo*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \\
&+ \sum_{k=1}^{r} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) \\
&+ \frac{1}{(2r+1)!}\int_a^b B_{2r+1}(x - \lfloor x \rfloor) f^{(2r+1)}(x)dx, \qquad (3)
\end{aligned}$$

[5]Objavljen leta 1738 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6*, str. 68–97.

kjer je funkcija f vsaj $(2r+1)$-krat zvezno odvedljiva na intervalu $[a,b]$, pri čemer sta a in b celi števili, r pa je poljubno naravno število. Zadnji integral pomeni ostanek in je bil dodan kasneje. Števila B_n se imenujejo *Bernoullijeva števila*, funkcije $B_n(x)$ pa *Bernoullijevi polinomi*. Dokaz formule je Euler objavil leta 1735, bralec pa si lahko podrobnejši dokaz pogleda v [3, str. 522]. Euler je formulo takoj začel uporabljati na najrazličnejših primerih, tudi na vrsti (2). Ročno je izračunal

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} = \frac{1968329}{1270080} \approx 1{,}54976773116654069035 \,.$$

Preostanek vrste je izračunal po (3) za $a = 11$, $b \to \infty$, $r = 13$ in dobil

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{2 \cdot 11^2} + \sum_{k=1}^{13} \frac{B_{2k}}{11^{2k+1}} \approx 0{,}09516633568168574612 \,,$$

kar je skupaj prineslo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1{,}64493406684822643647 \,.$$

Prvi neenačaj je tam zato, ker smo izpustili ostanek sumacijske formule. Število r je sicer poljubno, vendar vpliva na natančnost rezultata in se določi na podlagi ocenitve ostanka (zgoraj vzeti r smo določili na tak način).

S tem je bila vsota vrste izračunana na dvajset decimalnih mest natančno. Čeprav Euler še vedno ni bil zadovoljen (baselski problem je spraševal po natančni vsoti), je njegova sumacijska metoda postala nepogrešljivo orodje pri raziskovanju asimptotičnega vedenja vrst in velikih števil ter tako posredno prispevala tudi k dokazu *praštevilskega izreka*[6].

Rešitev

Leta 1735 je Euler našel rešitev in jo opisal v članku *De summis serierum reciprocarum*[7].

Eulerjeva rešitev temelji na posplošitvi *Newton-Girardove formule* (**Isaac Newton** (1642–1727), **Albert Girard** (1595–1632). Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$

[6] Naj $\pi(x)$ označuje število praštevil, ki ne presegajo x. Izjavo, da je $\lim_{x\to\infty}(\pi(x)\log x)/x = 1$, imenujemo praštevilski izrek.

[7] Objavljen leta 1740 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7*, str. 123–134.

poljubna realna števila. Izraz oblike

$$\sigma_k = \sum_{1\leq i_1,i_2,\ldots,i_k\leq n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$$

imenujemo *k-ti elementarni simetrični polinom* števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Posebej definiramo: $\sigma_0 = 1$. Naj bo $S_k = \sum_{i=1}^n a_i^k$, kar je tudi simetrični polinom, toda ne vedno elementaren. Newton-Girardova formula povezuje simetrične polinome S_k in elementarne simetrične polinome σ_k:

$$m\sigma_m + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k S_k\sigma_{m-k} = 0; \qquad 1 \leq m \leq n\,.$$

Od tu kaj hitro sledi zapis vsote S_k samo s simetričnimi polinomi

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_1, \\ S_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ S_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Formula velja za poljubno veliko naravno število n. Euler je šel v skrajnost in privzel, da formula velja tudi za neskončno zaporedje. Obravnaval je neskončne produkte in pripadajoče potenčne vrste oblike

$$\left(1-\frac{x}{A}\right)\left(1-\frac{x}{B}\right)\left(1-\frac{x}{C}\right)\cdots = 1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 \pm \ldots \tag{5}$$

Po primerjavi obeh strani je zapisal

$$\alpha = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \cdots, \quad \beta = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} + \cdots, \quad \gamma = \frac{1}{ABC} + \ldots$$

in po uporabi posplošenih formul (4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \cdots &= \alpha, \\ \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} + \cdots &= \alpha^2 - 2\beta, \\ \frac{1}{A^3} + \frac{1}{B^3} + \frac{1}{C^3} + \cdots &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Euler je obliko v (5) izbral še z drugim namenom. Množica $A, B, C, \ldots$ predstavlja ničle neskončnega produkta. Izraz (5) pa zagotavlja, da so to tudi vse ničle neskončne potenčne vrste. Očitno je, da to drži pri končnem produktu in vrsti. Ponovno je Euler posplošil primer na neskončnost.

Euler je svoje rezultate uporabil na funkciji

$$f(x) = 1 - \frac{\sin x}{\sin a}\,, \tag{7}$$

kjer je a fiksirano število, ki ni večkratnik števila π. Ničle funkcije f so

$$x = \begin{cases} a, \\ 2n\pi + a, \\ (2n-1)\pi - a, \\ -(2n\pi - a), \\ -((2n-1)\pi + a), \end{cases}$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Sledimo Eulerju in funkcijo zapišimo kot potenčno vrsto:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{\sin a} + \frac{x^3}{3!\sin a} \mp \ldots$$

Upoštevamo (5) in dobimo

$$f(x) = \Big(1 - \frac{x}{a}\Big) \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x}{(2n-1)\pi - a}\Big) \cdot \Big(1 + \frac{x}{(2n-1)\pi + a}\Big) \cdot \\ \Big(1 - \frac{x}{2n\pi + a}\Big) \cdot \Big(1 + \frac{x}{2n\pi - a}\Big)\,. \tag{8}$$

Od tu z uporabo formul (6) sledi

$$\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Big(\frac{1}{n\pi - a} - \frac{1}{n\pi + a}\Big) = \frac{1}{\sin a}\,, \tag{9}$$

$$\frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{(n\pi - a)^2} + \frac{1}{(n\pi + a)^2}\Big) = \frac{1}{\sin^2 a}\,, \tag{10}$$

$$\frac{1}{a^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Big(\frac{1}{(n\pi - a)^3} - \frac{1}{(n\pi + a)^3}\Big) = \frac{1}{\sin^3 a} - \frac{1}{2\sin a}\,. \tag{11}$$

Naj bo $a = \frac{\pi}{2}$. Potem je po (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Ker pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

lahko zaključimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

S tem je bil baselski problem po 46 letih rešen. Euler je rešitev zaupal Danielu Bernoulliju, vendar je kmalu vsak evropski matematik vedel, kdo je mladi genij. Ko je Johann Bernoulli izvedel za Eulerjev uspeh, je zapisal:

In tako je zadoščeno goreči bratovi želji, ki je spoznal, da je iskanje vsote težje, kot si kdor koli lahko predstavlja, in je javno priznal, da je ves njegov trud zaman. Ko bi le moj brat še živel.[8]

Nadaljnji rezultati in kritike

Euler se kljub uspehu, ki mu je zagotovil matematično kariero, ni ustavil. V prej omenjenem članku *De summis ...* je po (11) pri $a = \frac{\pi}{2}$ izračunal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\,.$$

Podobno kot funkcijo (7) je obravnaval $\frac{\sin x}{x}$ in dobil

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)\,, \tag{12}$$

od koder je z uporabo (6) izračunal še vrednosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{6825 \cdot 93555}\,.$$

Kmalu po objavi dokaza pa so prišle kritike. Daniel Bernoulli je Eulerju očital, da je v dokazu privzel, da Newton-Girardove formule veljajo za neskončno zaporedje in da je delal z neskončnimi vrstami kot s polinomi. Pojavili so se še drugi dvomi. Ali so vse rešitve enačbe $\sin x = \sin a$ realne?

---

[8] [2], str. 445

Zakaj ničle funkcije $f(x)$ določajo neskončni produkt tak, kot je? Tudi funkcija $e^x f(x)$ ima enake ničle, pa zagotovo ne more imeti istega neskončnega produkta. Teh težav se je zavedal tudi Euler, vendar je bil o veljavnosti svojih formul dokaj prepričan. Izračunani rezultati so se ujemali z numeričnimi, pri posebnih primerih pa je dobil že znane vrste. Npr. pri $a = \frac{\pi}{2}$ vrsta (9) postane znana

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

Prav tako pri $a = \frac{\pi}{4}$ dobimo

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,,$$

ki je bila znana že Newtonu. Produkt (12) pri $x = \frac{\pi}{2}$ postane znani *Wallisov produkt*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots}\,.$$

Ti posebni primeri so Eulerja opogumili, da je objavil rešitev. Kljub temu ga je radovednost gnala naprej in je v naslednjih sedmih letih svoje rezultate postavil na trdnejše temelje.

Začel je z dokazovanjem produkta (12), iz katerega je zlahka izpeljal podobne faktorizacije za druge kotne funkcije in s tem utemeljil produkt (8). Glavno orodje pri tem sta *Eulerjevi formuli*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,,$$

s katerima je mimogrede dokazal, da imajo kotne funkcije samo realne ničle. Ko je bila pravilnost zapisa produkta (12) dokazana, se je lotil vrste (9). Dobil jo je kot rezultat logaritmiranja in odvajanja produkta (8). Postopek je opisal v članku *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur*[9] leta 1742, čeprav lahko upravičeno trdimo, da je do rezultatov prišel že prej.[10] Eulerjeva izpeljava postane ob upoštevanju enakomerne konvergence brezhibna. Preko vrste (9) je v splošnem dokazal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^{2k+1}} = \frac{E_{2k}}{2^{2k+2}(2k)!}\pi^{2k+1}\,,$$

[9] Objavljen leta 1743 v *Miscellanea Berolinensia 7*, str. 172–192.

[10] Eulerjeve formule se pojavijo v pismih **Christianu Goldbachu** (1690–1764) leta 1741 in 1742.

kjer se števila E_{2k} imenujejo *Eulerjeva števila*. Podobno je logaritmiral in odvajal še produkt (12) ter izpeljal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} .$$

Na tem mestu omenimo še, da je Euler, željan prepričati vse tiste, ki so dvomili o produktu (12), leta 1743 objavil članek *Démonstration de la somme de cette suite* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + etc.$[11], kjer je ponovno izračunal vsoto vrste (2). Temelj dokaza je izraz

$$\frac{(\arcsin x)^2}{2} = \int_0^x \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt ,$$

od koder je z razvojem $\arcsin x$ v potenčno vrsto dobil želeni rezultat. Podrobnosti izpeljave lahko bralec najde v [1, str. 1079].

Euler je našel vsote vrst in neskončnih produktov za nekatere posebne primere, nikakor pa ni našel natančne vsote vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} . \tag{13}$$

V članku *De seriebus quibusdam considerationes*[12], napisanem leta 1739, je numerično izračunal vsoto vrste za $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Pod vplivom rezultata pri sodih potencah je predpostavjal, da je vsota enaka $N\pi^{2k+1}$, in poskušal najti racionalen N. Vendar mu to ni uspelo.

Baselski problem po Eulerju

Članek bomo sklenili s tremi primeri, ki izhajajo iz baselskega problema in so matematike zaposlovali še dolgo časa po Eulerju.

Euler se je že leta 1737 zavedal pomembnosti vrste (2) v zvezi s praštevili. V članku *Variae observationes circa series infinitas*[13] je dokazal enakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} ,$$

[11] Objavljen v *Journ. lit. d'Allemange, de Suisse et du Nord*, 2:1, str. 115–127.

[12] Objavljen leta 1750 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 12*, str. 53–96.

[13] Objavljen leta 1744 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9*, str. 160–188.

kjer produkt teče po vseh praštevilih. Ta pomembni rezultat je temelj poznejše analitične teorije števil. **Bernhard Riemann** (1826–1866) je spoznal pomembnost vrste in jo obravnaval kot kompleksno funkcijsko vrsto, znano pod imenom *Riemannova funkcija zeta*. V prelomnem članku *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*[14] je dokazal znamenito funkcijsko enačbo

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)\,.$$

Manj znano pa je, da je Euler med intenzivnim iskanjem vsote vrste (13) v članku *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques*[15] leta 1749 objavil prav tako funkcijsko enačbo.

Omenili smo že težave pri predstavljanju funkcije z neskončnim produktom prek njenih ničel. Na to vprašanje je prvi odgovoril **Karl Weierstrass** (1815–1897) med preučevanjem analitičnih funkcij. Prav tako je Weierstrass zaslužen za uvedbo pojma enakomerne konvergence, s katerim je pojasnil upravičenost odvajanja in integriranja funkcijskih vrst.

Kaj pa danes vemo o skrivnostni vrsti (13)? Še vedno ne vemo, kakšna je njena vsota v zaključeni obliki. Znano pa je, da je vsota za $k = 1$ iracionalno število, kar je leta 1979 dokazal **Roger Apéry** (1916–1994). Najnovejši rezultati so iz let 2000 in 2001, ko je bilo dokazano, da za neskončno števil k vsota vrste predstavlja iracionalno število in da ima za $k = 2, 3, 4, 5$ vsaj ena od vrst iracionalno vsoto.

LITERATURA

[1] R. Ayoub, *Euler and the zeta function*, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 10, 1067–1086 (1974).

[2] C. B. Boyer, *A history of mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1991.

[3] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, New York, Dover publications, 1990.

[4] V. S. Varadarajan, *Euler through time: a new look at old themes*, Washington, The Mathematical Association of America, 2006.

[5] W. Dunham, *Euler: the master of us all*, Washington, The Mathematical Association of America, 1999.

[6] E. W. Weisstein, *Newton-Girard Formulas*, MathWorld – A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/Newton-GirardFormulas.html`.

[7] The Euler Archive, `http://www.math.dartmouth.edu/∼euler/`.

[14] Objavljen leta 1859 v *Monatsberichte der Berliner Akademie.*

[15] Objavljen leta 1768 v *Memoires de l'académie des sciences de Berlin 17*, str. 83–106.