PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **25** (1997/1998)
Številka 5
Strani 294–299

Marko in Nada Razpet:

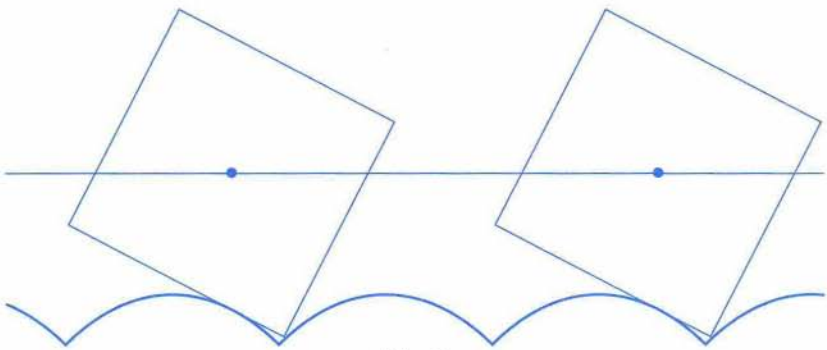
KVADRATNO KOLO, VERIŽNICA IN TRAKTRISA

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/25/1350-Razpet.pdf

KVADRATNO KOLO, VERIŽNICA IN TRAKTRISA

Vožnja z avtom ali kolesom po cestnih grbinah ni nič kaj prijetna. Kolesa so okrogla in se jim prilagajajo. Osi koles se pri tem dvigajo in spuščajo, z njimi vred pa tudi voznik. Ali ne bi nemara prešli na drugačna kolesa, recimo kvadratna? Pri iskanju odgovora na zastavljeno vprašanje, bomo zadevo poenostavili. Privzeli bomo, da so vse grbine enake. Poenostavljene razmere prikazuje slika 1.



Slika 1.

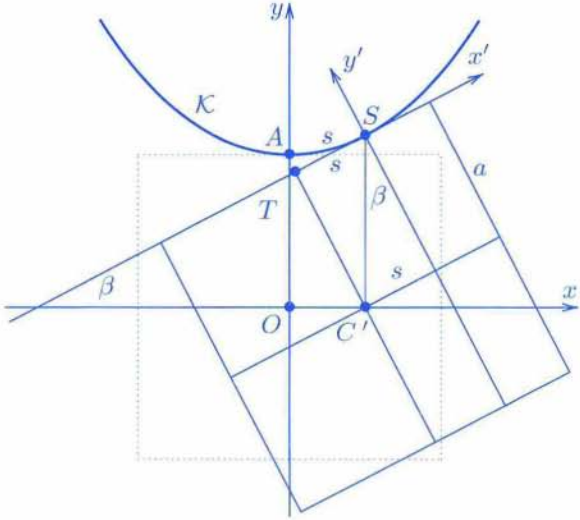
Postavimo vprašanje: *Kakšen naj bo vzdolžni profil vodoravne ceste, da se bo kvadratno kolo brez drsenja kotalilo po njej, pri tem pa se bo središče kolesa (os) ves čas gibalo vodoravno?*

Za lažjo obravnavo poiščimo tako ravninsko krivuljo, da se bo kvadrat s stranico $2a$ s spodnje strani lepo, brez drsenja, kotalil po njej. Pri tem naj središče kvadrata ves čas leži na vodoravni premici. Taka krivulja mora imeti dolžino $2a$, zaradi simetričnosti kvadrata pa mora biti tudi sama simetrična. Ko bomo tako krivuljo našli, bomo vzeli samo en njen del in tako bo določen tudi sam profil ceste.

Vzemimo torej gladko krivuljo $\mathcal{K}$ v pravokotnem koordinatnem sistemu Oxy. Tangenta na $\mathcal{K}$ v točki A naj bo vzporedna z osjo x. Točka A ima koordinati $(0, a)$.

Središče C' kotalečega se kvadrata naj bo stalno na osi x. Na krivulji $\mathcal{K}$ lahko v vsaki njeni točki $S(x, y)$ postavimo pravokotni koordinatni sistem $Sx'y'$ tako, kot prikazuje slika 2. Pri tem je $y = f(x)$, kjer je f funkcija, ki jo iščemo. Os x' naj bo tangenta na $\mathcal{K}$ v točki S, os y' pa pravokotnica na tangento (normala) v točki S. Ko točka S potuje po krivulji $\mathcal{K}$, se os x' ziblje na krivulji, os y' pa opleta po ravnini. Ko je S v A, je C' v O. Tedaj ima C' v sistemu $Sx'y'$ koordinati $(0, -a)$.

Zaradi simetrije glede na os y je dovolj, da krivuljo $\mathcal{K}$ obravnavamo le v prvem kvadrantu. Naj bo s dolžina krivulje od točke A do poljubne točke S na $\mathcal{K}$. Točka C' ima v sistemu $Sx'y'$ koordinati $(-s, -a)$. Kakšne koordinate ima C' v sistemu Oxy?



Slika 2.

Tangenta na $\mathcal{K}$ v točki S ima naklonski kot β.

V Preseku smo že večkrat brali, kako lahko uporabljamo kompleksna števila. Med drugim tudi to, da množenje danega kompleksnega števila s $\cos\beta + i\sin\beta$ pomeni zasuk točke, ki temu številu pripada v ravnini kompleksnih števil, okrog točke, ki ustreza številu 0, in sicer za kot β. Bodita

$$z(S) = x + iy \quad \text{in} \quad z(C') = \xi + i\eta \tag{1a}$$

kompleksni števili, ki ustrezata točkama $S(x, y)$ in $C'(\xi, \eta)$, potem ko smo ravnino Oxy poistovetili z ravnino kompleksnih števil.

Produkt $(-s - ia)(\cos\beta + i\sin\beta)$ predstavlja zasuk točke C' za kot β okrog točke S. Iz slike 2 sledi

$$z(C') = z(S) + (-s - ia)(\cos\beta + i\sin\beta)\,. \tag{1b}$$

Ko izenačimo realna in imaginarna dela na obeh straneh enačbe (1b), dobimo koordinati (ξ, η) točke C' v sistemu Oxy

$$\xi = x + a\sin\beta - s\cos\beta\,, \quad \eta = f(x) - a\cos\beta - s\sin\beta\,. \tag{2}$$

Naloga zahteva, da je $\eta = 0$ za vsak x. Torej

$$y(x) = a\cos\beta + s\sin\beta\,. \tag{3}$$

Označimo odvod funkcije $f\,'(x)$ s $p(x)$ in se spomnimo, da je odvod funkcije f v točki x enak tangensu naklonskega kota β tangente na krivuljo $y = f(x)$ v točki $S(x, f(x))$. Torej velja $p(x) = \tan\beta$. Diferencial ds loka krivulje $y = f(x)$ lahko, kot je znano, izrazimo v obliki $ds = \sqrt{p^2(x)+1}\,dx$. Iz te enačbe dobimo $ds = \sqrt{\tan^2\beta + 1}\,dx = \frac{dx}{\cos\beta}$. Torej $dx = \cos\beta\,ds$ in $dy = f\,'(x)\,dx = \tan\beta\,\cos\beta\,ds = \sin\beta\,ds$.

Enačbo (3) na obeh straneh diferenciramo in pri tem upoštevamo prejšnje ugotovitve

$$\sin\beta\,ds = -a\sin\beta\,d\beta + \sin\beta\,ds + s\cos\beta\,d\beta\,. \tag{4}$$

Po poenostavitvi in krajšanju pridemo do enačbe

$$a\sin\beta = s\cos\beta\,. \tag{5}$$

Rezultat upoštevamo v enačbi (2) in dobimo $\xi = x$. To pa pomeni, da je točka $C\,'$ ravno pravokotna projekcija točke S na os x, tako kot kaže slika 2. Tedaj je

$$\tan\beta = \frac{s}{a} = \frac{1}{a}\,s\,. \tag{6}$$

Iskana krivulja ima torej lastnost:

Naklon tangente v katerikoli točki S krivulje je sorazmeren z dolžino krivulje od točke A, v kateri je tangenta na krivuljo vodoravna, do točke S.

Krivulja s to lastnostjo je verižnica. Tako obliko zavzame idealna verižica, ko se umiri, če jo obesimo v dveh točkah, ki nista na isti vertikali. Starejši bralci Preseka se bodo morda spomnili, da je o verižnici pisal Andrej Likar v članku *Veriga in oboki* (glej Presek, letnik 18, 1990/91, št. 3).

Ker ima krivulja $\mathcal{K}$ v točki $A(0, a)$ vodoravno tangento, mora funkcija f izpolnjevati začetna pogoja $f(0) = a$ in $f\,'(0) = 0$.

Kako zapisati enačbo verižnice? Računi potekajo precej preprosto, če uporabimo funkciji hiperbolični kosinus (cosh) in hiperbolični sinus (sinh), ki sta definirani za vsako realno spremenljivko x s formulama

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,, \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,. \tag{7}$$

Prva funkcija je soda, zavzame pri 0 najmanjšo vrednost $\cosh 0 = 1$, vsako od 1 večjo vrednost pa natanko dvakrat. Druga funkcija je liha, pri 0 ima vrednost $\sinh 0 = 0$ in zavzame vsako realno vrednost natanko enkrat. Obe funkciji povezuje enakost $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Pa tudi odvoda sta preprosta

$$(\cosh x)' = \sinh x\,, \quad (\sinh x)' = \cosh x\,. \tag{8}$$

Funkcija sinh ima inverzno funkcijo, ki jo imenujemo area hiperbolični sinus (asinh). Zožitev funkcije cosh na poltrak $[0, +\infty)$ ima inverzno funkcijo, imenovano area hiperbolični kosinus (acosh). Obe se izražata z naravnim logaritmom takole

$$\operatorname{acosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\,, \quad \operatorname{asinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\,. \tag{9}$$

Za njuna odvoda pa velja

$$(\operatorname{acosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,, \quad (\operatorname{asinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\,. \tag{10}$$

Poiščimo sedaj enačbo verižnice iz enačbe (6). Dolžino loka s, ki se z absciso x točke S spreminja, izračunamo z integralom

$$s = s(x) = \int_0^x \sqrt{p^2(t) + 1}\, dt\,. \tag{11}$$

Torej je $s'(x) = \sqrt{p^2(x) + 1}$. Enačbo (6) prepišemo v obliko $p(x) = \frac{1}{a} s(x)$, nato obe strani odvajamo in dobimo preprosto diferencialno enačbo

$$p'(x) = \frac{1}{a}\sqrt{p^2(x) + 1}\,, \tag{12}$$

iz nje pa

$$\frac{p'(x)}{\sqrt{p^2(x) + 1}} = \frac{1}{a}\,. \tag{13}$$

Leva stran enačbe (13) je ravno $(\operatorname{asinh} p(x))'$, desna pa $(\frac{x}{a})'$. Enakost odvodov pomeni, da se nastopajoči funkciji razlikujeta za konstanto c

$$\operatorname{asinh} p(x) = \frac{x}{a} + c\,. \tag{14}$$

Ker pa je $p(0) = f'(0) = 0$ in $\operatorname{asinh} 0 = 0$, dobimo $c = 0$ in $p(x) = \sinh \frac{x}{a}$.
Tako smo že korak bližje rešitvi

$$p(x) = f'(x) = \sinh \frac{x}{a}\,. \tag{15}$$

To pomeni, da je $f(x) = a\cosh\frac{x}{a} + d$, kjer je d neka konstanta. Ker je $\cosh 0 = 1$ in $f(0) = a$, dobimo $d = 0$, in enačba verižnice je

$$y = f(x) = a\cosh\frac{x}{a}\,. \tag{16}$$

Za kotaljenje kvadrata s stranico $2a$ pride v poštev samo tisti del verižnice (16), za katerega je $|f'(x)| \le 1$. V krajiščih loka mora naklonski kot stranice kotalečega se kvadrata biti $\frac{\pi}{4}$ oziroma $\frac{3\pi}{4}$. Tako pridemo do zahteve $|\sinh xa| \le 1$ oziroma $|\frac{x}{a}| \le \operatorname{asinh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$. Dolžina tega dela je ravno dolžina stranice kvadrata. Po formuli (11) je

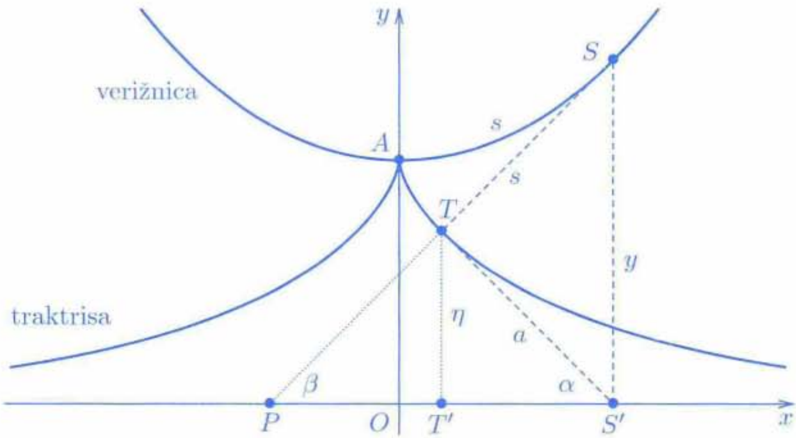
$$s = 2\int_0^{a\operatorname{asinh} 1} \sqrt{p^2(t)+1}\,dt = 2\int_0^{a\operatorname{asinh} 1} \sqrt{\sinh^2\frac{t}{a}+1}\,dt\,. \tag{17}$$

S poenostavitvijo in s substitucijo $u = \frac{t}{a}$ lahko ta integral izračunamo

$$s = 2a\int_0^{\operatorname{asinh} 1} \cosh u\,du = 2a\sinh u\,\Big|_0^{\operatorname{asinh} 1} = 2a\,. \tag{18}$$

Tako smo prišli do konca: Del krivulje, po kateri se brez drsenja kotali kvadrat s stranico $2a$, tako da pri tem njegovo središče ves čas potuje po osi x, je verižnica $y = a\cosh\frac{x}{a}$ nad intervalom $[-a\ln(1+\sqrt{2}), a\ln(1+\sqrt{2})]$. Take loke potem poljubno zvezno nadaljujemo levo in desno vzdolž osi x. Pri tem se verižnica povzpne od $y = a$ do $y = a\sqrt{2}$. Višina grbin je torej $a(\sqrt{2}-1)$.

Kakšna pa je povezava vsega tega s traktriso ali vlečnico? Opazujmo na sliki 2 gibanje točke T, ki je središče zgornje stranice kotalečega se kvadrata. Ko je ta stranica vzporedna z osjo x, je T v A. Pri kotaljenju kvadrata se točka T giblje po krivulji, kot kaže slika 3. Pri tem je razdalja med T in S' (središčem kvadrata), ki se giblje po osi x, stalno enaka a. To pa je značilno za traktriso. Bralci Preseka so jo najbrž že srečali (glej Boris Lavrič, *Traktrisa*, Presek, letnik 17, 1989/90, št. 5). Na vodoravni ravnini opisuje traktriso točkasta masa, ki je privezana na neraztegljivi niti, katere prosti konec počasi vlečemo po premici v tej ravnini. Ta premica je asimptota traktrise.



Slika 3.

Slika 3 pomaga, da določimo koordinati (ξ, η) točke T kot funkciji kota α. Iz pravokotnega trikotnika $TT'S'$ izračunamo $\eta = a \sin\alpha$. Nekoliko več dela je z absciso ξ. Kot doslej naj bo x abscisa točke S.

Na sliki 3 vidimo, da sta kota α in β komplementarna in da je $a = y \sin\alpha = a \cosh\frac{x}{a} \sin\alpha$. Iz te povezave sledi $x = a \operatorname{acosh}\frac{1}{\sin\alpha}$. Z uporabo enakosti (9) in nekaterih trigonometrijskih formul dobimo

$$\xi = x - a\cos\alpha = a(\ln\cot\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha)\,. \tag{19}$$

To velja za traktriso v prvem kvadrantu. Za celotno traktriso je ugodneje vpeljati kotu α suplementaren kot $t = \pi - \alpha$, to je naklonski kot tangente na traktriso. Koordinati poljubne točke $T(\xi, \eta)$ na traktrisi lahko izrazimo v obliki

$$\xi = a(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t)\,, \quad \eta = a\sin t\,. \tag{20}$$

To sta parametrični enačbi traktrise. Parameter t se spreminja od 0 do π. Ko t raste od 0 proti $\frac{\pi}{2}$, potuje točka T po drugem kvadrantu, se dviga od abscisne osi proti najvišji točki $A(0, a)$, ki jo doseže pri $t = \frac{\pi}{2}$. Ko t narašča od $\frac{\pi}{2}$ proti π, se T spušča v prvem kvadrantu proti abscisni osi. Abscisna os je asimptota traktrise, dane z enačbama (20).

Marko in Nada Razpet