PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **4** (1976/1977)
Številka 2
Strani 113–115

Edvard Kramar:

ODLIKOVANI TRIKOTNIKI

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/4/4-2-Kramar.pdf

MATEMATIKA

ODLIKOVANI TRIKOTNIKI

Vprašajmo se po takih trikotnikih, katerih dolžine stranic so naravna števila, imenovali jih bomo kar celoštevilski trikotniki, ki imajo še lepo lastnost, da je njihov obseg po številski vrednosti enak njihovi ploščini (spet po številski vrednosti)

$$o = p$$

Spodaj bomo videli, da obstaja le pet takih trikotnikov. Preden se lotimo iskanja teh nenavadnih trikotnikov, problem še malo posplošimo. Najprej se vprašajmo po vseh celoštevilskih trikotnikih, za katere velja, da je $o = 2p$. Videli bomo, da obstaja le en tak trikotnik, celoštevilskih trikotnikov, ki bi imeli obseg enak tri ali večkratni ploščini, pa sploh ni.

Postavimo kar splošno nalogo: *iščemo celoštevilske trikotnike, za katere velja*

$$o = \lambda p$$

kjer je λ neko realno število. Ugotovili bomo, da imamo za naravne vrednosti parametra λ rešitve le pri $\lambda = 1$ in $\lambda = 2$, za nekatere necele vrednosti parametra dobimo še take trikotnike, za parametre $\lambda > \sqrt{48}$ pa nobenega več. Ker so taki trikotniki nekaj posebnega in so zelo redki, jih bomo imenovali *odlikovani trikotniki*.

Lotimo se iskanja teh trikotnikov! Najprej vpeljemo običajno oznako za polovičen obseg trikotnika $s = o/2 = (a+b+c)/2$. S to količino se po znanem Heronovem obrazcu izraža ploščina trikotnika

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Tako lahko naš pogoj zapišemo v obliki

$$2s = \lambda\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Dolžine stranic a, b in c so naravna števila, zato je tudi srednjica s naravno število ali kvečjemu ulomek z imenovalcem 2. Take oblike so potem tudi števila $s-a$, $s-b$ in $s-c$, zato zanje vpeljimo oznake

$$s-a = m/2, \quad s-b = n/2, \quad s-c = k/2$$

pri čemer so m, n in k naravna števila. Kaj očitno je potem: $(m+n+k)/2 = 3s - 2s = s$. Kvadrirajmo našo enačbo in vpeljimo vanjo zgornja števila. Če jo še okrajšamo in uredimo, dobimo

$$16(m+n+k) = \lambda^2 kmn$$

Vsaka rešitev te enačbe v naravnih številih pri nekem izbranem λ nam bo preko zgornjih zvez dala iskane dolžine stranic a, b in c. (Sam se prepričaj, da iz pogojev $m,n,k > 0$ sledi, da so a, b in c res stranice nekega trikotnika). Dogovorimo se še, da bomo iskano rešitev pisali v obliki (a,b,c). Če kakšni od teh treh števil zamenjamo med seboj, bomo šteli novo trojico za isto, saj je trikotnik tvorjen iz istih treh daljic. Domenimo se, da bomo vsak odlikovani trikotnik pisali v obliki urejene trojice (a,b,c), pri čemer bo $a \leqq b \leqq c$. Hitro se tedaj prepričamo, da bo potem $k \leqq n \leqq m$. Iz zgornje enačbe dobimo oceno: $mnk = 16(m+n+k)/\lambda^2 \leqq 16(m+m+m)/\lambda^2 = 48m/\lambda^2$, odtod pa po krajšanju z m oceno: $nk \leqq 48/\lambda^2$. Upoštevajmo še $k^2 = k.k \leqq k.n$ in dobimo: $k^2 \leqq 48/\lambda^2$. Ker je $a = s-m/2 = (n+k)/2$, $b = (m+k)/2$, $c = (m+n)/2$, so števila m, n in k očitno vsa hkrati soda ali vsa liha.

Naše ugotovitve še enkrat strnimo: Pri danem parametru $\lambda > 0$ dobimo vse odlikovane trikotnike, če zadostimo z naravnimi števili m, n in k naslednje zahteve:

$$16(m+n+k) = \lambda^2 mnk$$
$$nk \leqq 48/\lambda^2, \quad k^2 \leqq 48/\lambda^2$$
$$k \leqq n \leqq m \text{ in } m,n \text{ in } k \text{ so iste parnosti}$$

Sedaj nam ne bo težko najti obljubljene trikotnike. Vzemimo najprej $\lambda = 1$. Ker je sedaj $16(m+n+k) = mnk$, so očitno m, n in k soda števila in iz ocene $k^2 \leqq 48$ sledi $k = 2$, 4 ali 6. Če upoštevamo še $nk \leqq 48$, dobimo naslednje možnosti:

$k = 2$; $n = 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22$ ali 24
$k = 4$; $n = 4,6,8,10$ ali 12
$k = 6$; $n = 6$ ali 8

pri tem smo seveda upoštevali neenačbo $n \geqq k$. Če iz naše enačbe izračunamo $m = 16(k+n)/(kn-16)$, vidimo, da mora biti najprej $kn > 16$ in nam odpadejo možnosti $k = 2$, $n = 2, 4, 6, 8$ in tudi $k = 4$, $n = 4$. Ostane nam še 14 možnosti za k in n, ki jih vstavimo v enačbo za m in ker mora biti tudi to sodo število, ne manjše od k ali n, dobimo le pet dobrih trojic, ki jih z izračunanimi stranicami zapišimo v tabelo

k	n	m	a	b	c
2	10	48	6	25	29
2	12	28	7	15	20
2	16	18	9	10	17
4	6	20	5	12	13
4	8	12	6	8	10

Primer $\lambda = 2$, kar pomeni, da je obseg številsko dvakrat večji od ploščine, še hitreje obdelamo. Enačba ima sedaj obliko $4(k+m+n) = kmn$ in spet ugotovimo, da morajo biti k, m in n vsi sodi. Iz druge neenačbe $k^2 \leqq 48/4 = 12$ dobimo edino rešitev $k = 2$ ter iz zahteve $kn \leqq 12$ le tri možnosti za n: 2, 4 ali 6. Izrazimo še število m, pri čemer že upoštevajmo $k = 2$: $m = 2(n+2)/(n-2)$. Z nič ne smemo deliti, torej $n \neq 2$, odpade pa tudi $n = 6$, ker bi tedaj bil $m = 4 < n$. Edina rešitev je $k = 2$, $n = 4$, $m = 6$ in iskani odlikovani trikotnik je (3,4,5).

Našli smo torej pet celoštevilskih trikotnikov, katerih obseg je številsko enak njegovi ploščini in le en tak trikotnik, čigar obseg je številsko dvakrat večji od njegove ploščine. Prihodnjič bomo poiskali še nekatere odlikovane trikotnike pri večjih parametrih λ.

Edvard Kramar