PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 4
Strani 218–223

Jože Grasselli:

O HARMONIČNIH ŠTEVILIH

Ključne besede: matematika, teorija števil, harmonična števila, Orejeva števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1376-Grasselli.pdf

O HARMONIČNIH ŠTEVILIH

Naj bodo $d_1 = 1$, $d_2, \ldots, d_j = n$ vsi pozitivni delitelji naravnega števila n. Njihovo harmonično sredino označujemo s $H(n)$, torej je

$$H(n) = \frac{j}{\frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_j}} . \tag{1}$$

Zgled. Potenca p^c, kjer je p praštevilo in c naravno število, nima drugih pozitivnih deliteljev kot $1, p, p^2, \ldots, p^c$; vseh je $c+1$ in po (1) je

$$H(c) = \frac{c+1}{1 + p^{-1} + \cdots + p^{-c}} = \frac{p^c(c+1)}{p^c + p^{c-1} + \cdots + 1} . \tag{2}$$

Naravno število n je *harmonično* ali *Orejevo*, kadar je število $H(n)$ celo (Oystein Ore (1899–1968), norveški matematik).

Zgled. Edini pozitivni delitelj za 1 je 1, vsi pozitivni delitelji za 10 so 1, 2, 5, 10. Zato je

$$H(1) = \frac{1}{1} = 1$$
$$H(10) = \frac{4}{1^{-1} + 2^{-1} + 5^{-1} + 10^{-1}} = \frac{20}{9}$$

Torej je 1 harmonično število, 10 pa ne.

Še sta med naravnimi števili $n_1, \ldots, n_t$ vsaki dve tuji, velja enakost

$$H(n_1 \ldots n_t) = H(n_1) \ldots H(n_t) . \tag{3}$$

Pravimo, da je harmonična sredina $H(n)$ multiplikativna. Vsako naravno število $n > 1$ ima izrazitev

$$n = p_1^{c_1} \ldots p_s^{c_s} , \tag{4}$$

kjer so $p_1, \ldots, p_s$ različna praštevila, $c_1, \ldots, c_s$ naravna števila. Zaradi multiplikativnosti je

$$H(p_1^{c_1} \ldots p_s^{c_s}) = H(p_1^{c_1}) \ldots H(p_s^{c_s}) . \tag{5}$$

Faktorje na desni izračunajmo po obrazcu (2).

Navedimo nekaj ugotovitev glede vrednosti za $H(n)$.

A. *Če je p praštevilo in c naravno število, število $H(p^c)$ ni celo. (Torej praštevilska potenca ni harmonično število.)*

Naj bo namreč $H(p^c) = v$ pri celem številu v. Ko upoštevamo (2), dobimo

$$(c+1)p^c = v(p^c + \cdots + p + 1)\,. \tag{6}$$

Ta enakost kaže, da p^c deli $v(p^c + \cdots + p + 1)$. Toda števili p^c, $p^c + \cdots + p + 1$ sta tuji, zato mora p^c deliti v in je $v = tp^c$ pri naravnem številu t. Vnesemo $v = tp^c$ v (6) in po krajšanju s p^c najdemo

$$c + 1 = t(p^c + \cdots + p + 1)\,.$$

Ker je $p \geq 2$ in $c \geq 1$, je dalje

$$c + 1 \geq p^c + \cdots + p + 1 > p^c \geq 2^c = (1+1)^c = 1 + c + \cdots \tag{7}$$

Na koncu v (7) stoji $1 + c$, če je $c = 1$; in več kot $c + 1$, če je $c \geq 2$. Neenakost (7) tako v nobenem primeru ni mogoča, trditev A torej drži.

Naravno število n je *popolno*, če znaša vsota njegovih (pozitivnih) deliteljev $2n$. Dokazano je, da so med sodimi števili popolna natančno tista, ki se zapišejo v obliki

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1)\,, \tag{8}$$

kjer je p praštevilo in 2^{p-1} praštevilo. Ni znano, ali je sodih popolnih števil neskončno; doslej so jih našli nekaj več kot 30, najmanjša so 6, 28, 496, 7128.

B. *Vsako sodo popolno število je harmonično.*

V (8) sta števili 2^{p-1}, $2^p - 1$ tuji. Z indukcijo se prepričamo, da je

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

za vsak naraven n. Vsota vseh pozitivnih deliteljev za 2^{p-1} je tako

$$1 + 2 + \cdots + 2^{p-1} = 2^p - 1$$

in zato

$$H(2^{p-1}) = \frac{2^{p-1}p}{2^p - 1}\,. \tag{9}$$

Število $2^p - 1$ v (8) je praštevilo, edina pozitivna delitelja sta 1, $2^p - 1$; zato je

$$H(2^p - 1) = \frac{(2^p - 1)2}{2^p}. \tag{10}$$

Zaradi multiplikativnosti je po množenju (9) in (10)

$$H(2^{p-1}(2^p - 1)) = p.$$

Trditev B je tako dognana.

Ali liha popolna števila obstajajo, ne vemo. Če obstajajo, so tudi ona harmonična.

Najmanjše harmonično število, ki ni popolno, je $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. Res velja

$$H(2^2 \cdot 5 \cdot 7) = \frac{2^2 \cdot 3}{7} \cdot \frac{5 \cdot 2}{6} \cdot \frac{7 \cdot 2}{8} = 5.$$

Do 27845je vsega 14 harmoničnih števil; navaja jih preglednica (M. Garcia):

n	$H(n)$	n	$H(n)$
1	1	$1638 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$	9
$6 = 2 \cdot 3$	2	$2970 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	11
$28 = 2^2 \cdot 7$	3	$6200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$	10
$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$	5	$8128 = 2^6 \cdot 127$	7
$270 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$	6	$8190 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	15
$496 = 2^4 \cdot 31$	5	$18600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 31$	15
$672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$	8	$18620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$	14

(11)

Vseh harmoničnih števil do 10^7 je 46, največje med njimi je $8872200 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 53$; našli pa so še več kot 200 nadaljnjih harmoničnih števil. Vsa doslej najdena harmonična števila so soda. Ore je postavil domnevo, da lihih harmoničnih števil ni. Ko bi se izkazalo, da ta domneva drži, bi bilo obenem dognano, da liha popolna števila ne obstajajo; vsako popolno število je namreč po že povedanem harmonično.

Kako poiščemo harmonična števila?

Napravimo obsežnejši seznam vrednosti $H(p^c)$ za praštevila $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$ in eksponente $c = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ter opazujmo, kdaj je produkt (5) celo število. Tako npr. iz

$$H(2^5) = \frac{2^6}{3 \cdot 7}, \quad H(3^3) = \frac{3^3}{2 \cdot 5}, \quad H(5) = \frac{5}{3}, \quad H(7) = \frac{7}{4}$$

izhaja

$$H(30240) = H(2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7) = \frac{2^6}{3 \cdot 7} \cdot \frac{3^3}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{4} = 24 .$$

Torej je 30240 harmonično število.

Kadar gre za harmonična števila, ki ležijo pod dano vrednostjo k, je treba seznam vrednosti $H(p^c)$ dovolj dolgo nadaljevati in računati produkte teh vrednosti. Pomagamo si lahko tudi tako, da gledamo, katere potence števila 2 (ali kakšnega drugega praštevila) morejo biti faktor v harmoničnem številu, ki ne presega k. Vzemimo, da je $k = 3 \cdot 10^7$. Ali obstaja harmonično število $n < 3 \cdot 10^7$, ki je deljivo z 2^{12}, ne pa z 2^{13}? Tedaj je seveda

$$n = 2^{12} p_1^{c_1} \ldots p_s^{c_s}$$

pri različnih lihih praštevilih $p_1, \ldots, p_s$ in naravnih številih $c_1, \ldots, c_s$. Po (2) izračunamo

$$H(2^{12}) = \frac{2^{12} \cdot 13}{8191} .$$

Imenovalec 8191 je praštevilo. Da bo

$$H(n) = \frac{2^{12} \cdot 13}{8191} \cdot \frac{p_1^{c_1}(c_1 + 1)}{p_1^{c_1} + \cdots + 1} \cdots \frac{p_s^{c_s}(c_s + 1)}{p_s^{c_s} + \cdots + 1}$$

celo število, mora 8191 deliti vsaj enega od števcev na desni, npr. $8191 \mid p_1^{c_1}(c_1 + 1)$. To pomeni, da je $p_1 = 8191$ ali pa nastopa p_1 v stopnji 8190 (in je potem $c_1 + 1 = 8191$). Prvič dobimo za n oceno

$$n = 2^{12} p_1^{c_1} \ldots p_s^{c_s} \geq 2^{12} \cdot 8191 = 33550336 > 3 \cdot 10^7 .$$

Drugič je $p_1 \geq 3$ in smo pri oceni

$$n \geq 2^{12} \cdot 3^{8190} > 3 \cdot 10^7 .$$

Torej ni harmoničnega števila, ki bi bilo manjše od $3 \cdot 10^7$ in deljivo z 2^{12}, ne pa z višjo potenco števila 2.

Med števili, ki so večja od $3 \cdot 10^7$, pa se najdejo harmonična števila, deljiva natančno z 2^{12}. Saj je že

$$H(33550336) = H(2^{12} \cdot 8191) = \frac{2^{12} \cdot 13}{8191} \cdot \frac{8191 \cdot 2}{8192} = 13\,.$$

Dodatno olajšujejo iskanje harmoničnih števil še nekatere njihove lastnosti, ki pa jih na tem mestu ne bomo opisovali.

Brez dokaza omenimo še

C. *Naj bo r racionalno število. Obstaja kvečjemu končno mnogo naravnih števil n, da je $H(n) = r$.*

Če je r naravno število, je zato kvečjemu končno mnogo naravnih števil n, da velja $H(n) = r$. Iz preglednice (11) vidimo, da že pri začetnih harmoničnih številih n zavzame $H(n)$ vsa naravna števila od 1 do 11, razen 4. Da se pokazati, da je $H(n) \neq 4$ pri vsakem naravnem številu n. Ali so poleg 4 še katera druga naravna števila, ki jih $H(n)$ izpusti?

Naloge.

1. Ali obstaja harmonično število, manjše od 10^{12} in deljivo z 2^6 ter 3^6, ne pa z višjima potencama od 2 in 3? (Izračunaj $H(2^6)$, $H(3^6)$ in upoštevaj, da sta 127, 1093 praštevili.)
2. Pokaži, da število $2p^c$, kjer je p liho praštevilo in c naravno število večje od 1, ni harmonično.
3. Pokaži, da mora liho popolno število imeti obliko

$$n = p^c v^2\,.$$

Tu je p praštevilo oblike $4t + 1$, naravno število c tudi te oblike, v naravno število. Ugotovi od tod, da je $H(n)$ celo število. (Naj bo namreč

$$n = p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}\,,$$

kjer so $p_1, \dots, p_s$ različna liha praštevila, in $c_1, \dots, c_s$ naravna števila. Ker je n popolno število, velja enakost

$$(1 + p_1 + \dots + p_1^{c_1}) \dots (1 + p_s + \dots + p_s^{c_s}) = 2p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}\,, \qquad (12)$$

saj je leva stran vsota vseh pozitivnih deliteljev od n. Zaradi (12) je na levi natanko eden od faktorjev deljiv z 2, ne pa z 2^2. Lahko vzamemo, da je to kar prvi faktor, tj. $1 + p_1 + \dots + p_1^{c_1}$; ker je v tej vsoti $c_1 + 1$ lihih sumandov, mora biti c_1 lih; vsi drugi faktorji so lihi, zato $c_2, \dots, c_s$ sodi. Če p_1, c_1 ne bi bila oblike $4t+1$, bi imela obliko $4t - 1$ in prvi faktor bi bil deljiv s 4; to hitro vidimo.)

4. Naj bo p praštevilo, c naravno število. Za $c = 1$ je

$$H(p) = \frac{2p}{1+p} \tag{13}$$

in za $c > 1$

$$H(p^c) = \frac{p^c(c+1)(p-1)}{p^{c+1}-1} > \frac{(c+1)(p-1)}{p} \geq \frac{3(p-1)}{p} > \frac{2p}{1+p}\,. \tag{14}$$

Zaradi $p^2 > 3$ je namreč $3(p^2 - 1) > 2p^2$. Nadalje je

$$\begin{aligned} &\frac{2p}{1+p} = 2 - \frac{2}{1+p} > 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{za } p > 2 \quad \text{in} \\ &\frac{2 \cdot 2}{1+2} = \frac{4}{3} \quad \text{za } p = 2\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Iz (13), (14), (15) pri naravnih številih $c_1, \ldots, c_s$ in različnih praštevilih $p_1, \ldots, p_s$ dobimo zaradi multiplikativnosti

$$H(p_1^{c_1}) \geq \frac{4}{3} \quad \text{in} \quad H(p_1^{c_1} \ldots p_s^{c_s}) > (\frac{4}{3})^s \quad \text{za } s \geq 2\,. \tag{16}$$

5. Pokaži, da je

$$(\frac{4}{3})^s > s \quad \text{za } s \geq 7$$

in

$$H(p_1^{c_1} \ldots p_s^{c_s}) > s \quad \text{za } s = 1, 2, 3, 4, 5, 6\,.$$

Po (16) potem velja

$$H(p_1^{c_1} \ldots p_s^{c_s}) > s; \quad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

6. Če naj bo $H(n) = 4$, sme biti n zaradi (17) deljiv z največ tremi različnimi praštevili (ali njihovimi potencami). Od tod moreš ugotoviti, da je $H(n) \neq 4$ za vsak naraven n.

Jože Grasselli