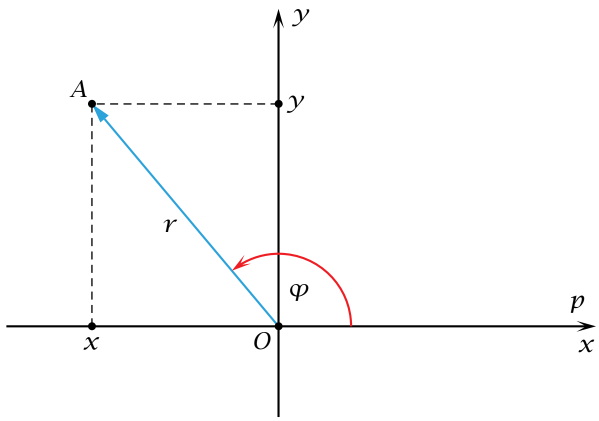
Popačenje

↓↓↓
PETER LEGIŠA
→

Polarni koordinatni sistem v ravnini

V ravnini imejmo pravokotni koordinatni sistem. Pozitivni del p abscisne osi, usmerjen od točke O, proglasimo za *polarno os*, točka O je *pol* ali *koordinatno izhodišče*.



SLIKA 1.
Točka O je pol, poltrak p polarna os. Števili $|OA| = r$ in kot φ sta polarni koordinati točke A.

Kote z vrhom v O merimo v smeri, ki pomeni najkrajše vrtenje polarne osi na pozitivni del osi y (slika 1).

Vsaki točki A v ravnini ($A \neq O$) lahko priredimo dve števili:

- razdaljo r točke A od O, ki jo imenujemo *polmer* ali *radij* točke in
- *polarni (smerni) kot* φ, ki ga zveznica OA oklepa s poltrakom p.

Števili r, φ sta *polarni koordinati* točke A. Točka A je s polarnima koordinatama enolično določena. Če vzamemo, da je $0 \leq \varphi < 360°$, pa sta tudi polarni koordinati točke A enolično določeni. (Brez tega dogovora lahko smernemu kotu prištejemo poljuben večkratnik polnega kota.) Sam pol O je karakteriziran z $r = 0$, polarni kot za točko O pa ni določen. Če je sta x in y pravokotni koordinati točke A, je seveda $r^2 = x^2 + y^2$.

Primer. Pomislite na uporabo radarja v morskem prometu. Radar oddaja ozek snop mikrovalov in se vrti okrog navpične osi. Ko radar v določeni smeri zazna odboj, sklepamo, da je tam ladja (ali kak drug večji kovinski objekt). Torej poznamo njen smerni kot. Iz zakasnitve odbitega vala pa izračunamo njeno oddaljenost – radij.

Če imamo pravokotni koordinatni sistem in ima točka A polarni koordinati (r, φ), sta njeni kartezični koordinati po definiciji funkcij sinus in kosinus enaki

- $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$

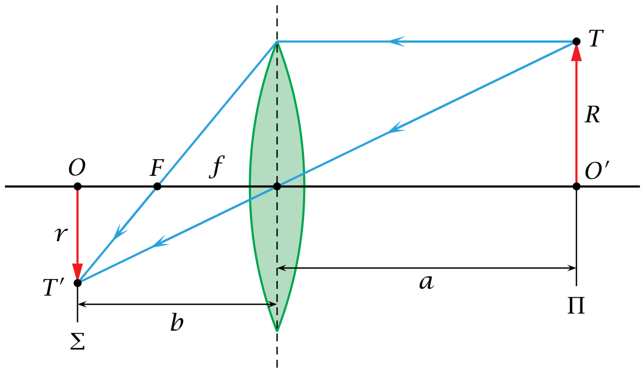
Dogovorimo se: *Koordinate* bodo v tem članku pomenile kartezične koordinate in *koordinatni sistem* kartezični koordinatni sistem, razen če ne bo rečeno drugače.

Kaj je popačenje?

Kaj naj bi »idealno« naredil objektiv v fotografskem aparatu? Privzeli bomo, da je naš objektiv rotacijsko simetričen. Se pravi, če bi (v laboratoriju) objektiv zavrteli okrog osi, se slika ne bi spremenila.

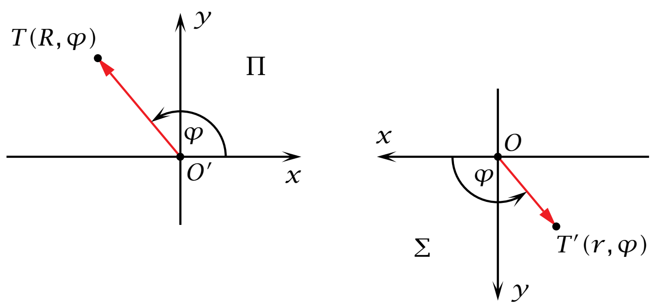
V praksi to ni čisto res. Tudi med novimi objektivi naletimo na slabši primerek. Navadno je kak element v sestavu premaknjen/nagnjen in je zato kakovost slike v raznih smereh različna. Danes take napake opazimo zaradi velike ločljivosti tipal ob stoodstotni povečavi na zaslonu mnogo hitreje kot včasih. Nekdanji zdravnik in znanstvenik je pred desetimi leti ustanovil uspešno podjetje, ki izposoja fotografske objektive. Poroča [2], da morajo takoj po nakupu približno tri odstotke tovarniško nove (in večinoma drage) optike vrniti ali zanjo uveljavljati stvarno napako, ker njihovi testi pokažejo prevelike okvare.

Presečišče osi objektiva in tipala kamere označimo z O. Imejmo ravnino Π, pravokotno na os leče (slika 2) (in torej vzporedno tipalu kamere). Tej ravnini rečemo *predmetna ravnina*. Njeno lego lahko podamo z enim samim številom – oddaljenostjo od ravnine tipala.



SLIKA 2.

Velja $r = mR$, kjer je $m = b/a$.



SLIKA 3.

Objektiv preslika točko $T(R, \varphi)$ v točko $T'(r, \varphi)$.

Če smo izostrili na predmetno ravnino, nam objektiv daljico dolžine R v predmetni ravnini Π preslika na daljico dolžine r v ravnini Σ tipala (= senzorja) kamere. Obstaja še število m (faktor pomanjšanja – ali povečanja), idealno odvisno le od razdalje do predmetne ravnine, da je $r = mR$. Izpeljavo teh rezultatov za upodabljanje s tanko lečo najdemo v članku *Moteča perspektiva* v prvi številki Preseka 2016–17 [1]. Idealni objektiv nam naredi **podobnostno transformacijo** (dela) ravnine Π na ravnino tipala. Tak idealen objektiv preslika daljice na daljice in ohranja kote. Pravokotnik idealni objektiv preslika v pravokotnik, kvadrat v kvadrat itd.

Predvsem pri uporabi zoom objektivov, ki segajo v širokokotno območje, pa opazimo, da ti ne delujejo idealno. Zlasti pri najmanjši goriščnici opazimo neprijetno napako, imenovano **popačenje**. Če nosilka preme črte ne gre skozi središče slike, je podoba črte na tipalu ukrivljena. Slika pravokotnika ni več pravokotnik. Angleški izraz za popačenje je *distortion*, nemški *Verzeichnung*.

Kako popačenje opišemo?

Kot zgoraj, imejmo ravnino Π, vzporedno ravnini senzorja. Objektiv je zmožen preslikati le del te ravnine okrog preseka O' optične osi s Π. Ta del je navadno krog ali (zaradi zaslonk, ki blokirajo nezaželene žarke v objektivu) pravokotnik s središčem v izhodišču O'. Navadno slika ravno pokriva tipalo aparata. V nadaljevanju članka bomo upoštevali to omejitev. Na sliki 3 vidimo, kako lahko izberemo koordinatna sistema v ravnini Π in v ravnini Σ senzorja, tako da se točka T s polarnima koordinatama (R, φ) v ravnini Π preslika na ravnino Σ senzorja v točko T' s polarnima koordinatama (r, φ).

Če bi bil objektiv idealen, bi veljalo $r = mR$. V tem primeru bi, kot smo rekli, preslikava bila podobnostna transformacija, ki ohranja kote in vse razdalje pomnoži z m. Tako pa je r funkcija spremenljivke R, ki se nekoliko razlikuje od mR. Pišimo $s = mR$. Število s bi bila razdalja preslikane točke od sredine tipala, če bi bil objektiv idealen. Na intervalu I možnih vrednosti za s velja

$$r(s) = s\left(1 + \frac{d(s)}{100}\right). \quad (1)$$

Tu je $d(s)$ velikost popačenja v odstotnih točkah. Absolutni razteg radija s znaša $sd(s)/100$. Včasih govorimo, da gre za **radialno popačenje**, ker prizadene le polmere. Privzeli bomo, da *funkcija* $s \mapsto r(s)$ *strogo narašča na intervalu* I *in* $d(0) = 0$.

To zagotavlja, da popačenje (namišljene) idealne slike različni točki preslika v različni, se pravi, da je popačenje injektivna preslikava. Če se omejimo na t. i. *priosne* žarke, se pravi žarke, ki potekajo blizu optične osi in oklepajo majhen kot z osjo, objektiv deluje v nekaterih pogledih skoraj idealno in torej popačenja praktično ni. Zato pričakujemo, da je $d(0) = 0$.

Funkcija $s \mapsto d(s)$ ni odvisna od tega, kako zaprta je zaslonka objektiva. Je pa odvisna od razdalje med predmetno ravnino in ravnino tipala.

Podjetje Zeiss je eno redkih, ki za nekatere svoje objektive daje grafe funkcije d. Primere imamo v članku [3]. Na slikah v Zeissovem članku imamo poleg grafa za funkcijo d še rdeče narisan nagib grafa, to je matematično *odvod* funkcije d. Nagib v dani točki je smerni koeficient tangente na graf v tej točki. Kot bomo videli, je pomembno, kje funkcija d narašča (pada). Funkcija strogo narašča, kjer je njen nagib pozitiven. Strogo pada, kjer je nagib negativen.

Zanima nas, kako se dejanska slika razlikuje od idealne.

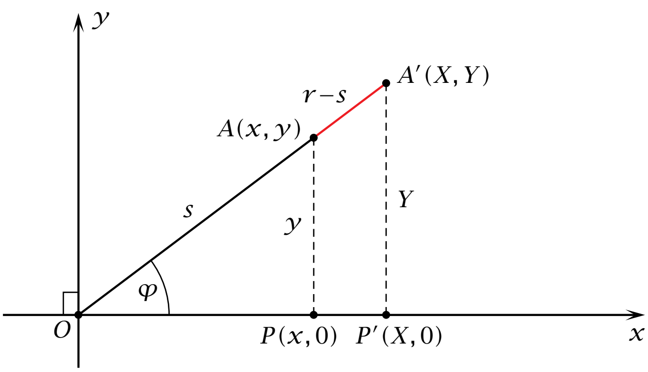
> Podrobno bomo tako preučili preslikavo, ki točko A s polarnima koordinatama (s, φ) preslika v točko A' s polarnima koordinatama $(r(s), \varphi)$.

Ker se pri tem polarni kot ne spremeni, velja:

Vsaka premica p skozi izhodišče se pri tej preslikavi ohranja. Posamezne točke na premici p se lahko premaknejo, vendar ostanejo na p.

Formule za popačenje

Vzemimo na idealni sliki točko A s kartezičnima koordinatama $A(x, y)$. Njen polmer v polarnih koordinatah je $s = \sqrt{x^2 + y^2}$. Na popačeni sliki točki A odgovarja točka A' s kartezičnima koordinatama $A'(X, Y)$ kot na sliki 4.



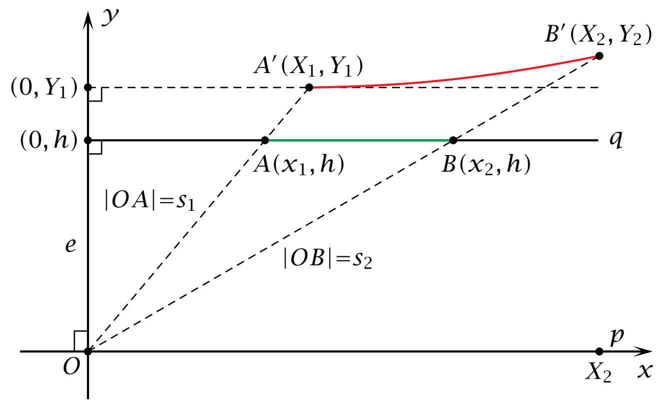
SLIKA 4.
Tu je $|OA| = s$ in $|OA'| = r$.

Njen polmer znaša $r(s) = s\left(1 + \frac{d(s)}{100}\right)$. Ker sta trikotnika POA in $P'OA'$ podobna, je $X : x = r(s) : s$. Tako ima točka A' absciso enako $X = xr(s)/s = x + x\frac{d(s)}{100}$. Enako vidimo, da je ordinata točke A' enaka $Y = yr(s)/s = y + y\frac{d(s)}{100}$. Tako sta kartezični koordinati točke A' enaki

- $$X = x\frac{r(s)}{s} = x + \frac{x}{100}\, d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right);$$
  $$Y = y\frac{r(s)}{s} = y + \frac{y}{100}\, d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right). \qquad (2)$$

Popačenje daljico, katere nosilka gre skozi izhodišče, spet preslika na (navadno drugo) daljico z isto nosilko. Kaj pa, če nosilka daljice ne gre skozi izhodišče?

Vzemimo na idealni sliki premico q, ki ne gre skozi izhodišče O. Narišimo ji vzporednico p skozi O. Postavimo pravokotni koordinatni sistem tako, da ima q enačbo $y = h > 0$ kot na sliki 5.



SLIKA 5.
Tu je $|OA| = s_1$ in $|OB| = s_2$. Blazinasto popačenje daljico AB preslika na rdečo krivuljo od A' do B'.

Na popačeni sliki točki $T(x, h)$ na premici q po enačbi (2) odgovarja točka $T'(X(x), Y(x))$ s koordinatama

- $$X(x) = x + \frac{x}{100}\, d\left(\sqrt{x^2 + h^2}\right);$$
  $$Y(x) = h + \frac{h}{100}\, d\left(\sqrt{x^2 + h^2}\right). \qquad (3)$$

Poglejmo, kaj se dogaja, ko x narašča od 0 naprej. Narašča funkcija $x \mapsto s(x) = \sqrt{x^2 + h^2}$. Za nas je še posebno pomembna formula za višino Y ukrivljene slike vodoravne črte $y = h$, zato jo ponovimo:

- $$Y(x) = h + \frac{h}{100}\, d\left(\sqrt{x^2 + h^2}\right). \qquad (4)$$

Blazinasto popačenje

Denimo, da funkcija $s \mapsto d(s)$ na intervalu $J = [s_1, s_2]$ **strogo narašča.** Točka $A(x_1, h)$ z $x_1 > 0$ naj ima polmer s_1, se pravi $x_1^2 + h^2 = s_1^2$ na sliki 5. Prav tako naj ima $B(x_2, h)$ z $x_2 > 0$ polmer s_2. Seveda je $x_2 > x_1$. Če je $x_1 \leq x \leq x_2$, je $T(x, h)$ na daljici AB. Kakšno obliko ima popačena slika daljice AB?

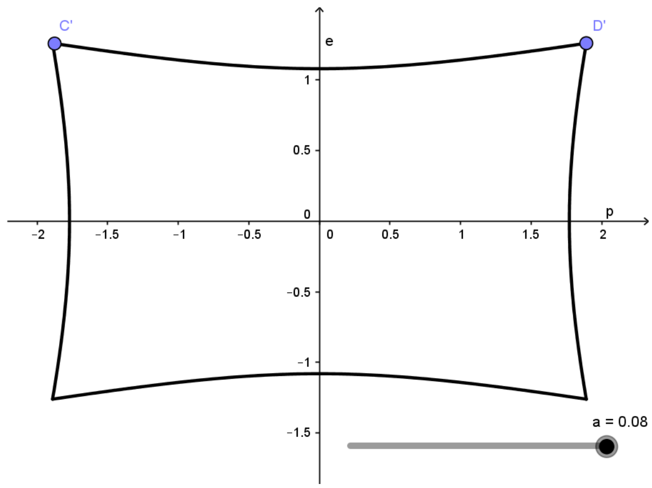
Ko x narašča od x_1 do x_2, narašča $s(x) = \sqrt{x^2 + h^2}$ od s_1 do s_2. Na intervalu $J = [s_1, s_2]$ je d naraščajoča. Zato na intervalu $I = [x_1, x_2]$ narašča funkcija $x \mapsto d(\sqrt{x^2 + h^2})$. Vsota dveh naraščajočih funkcij je naraščajoča, zato po (3) na intervalu I strogo narašča preslikava $x \mapsto X(x)$. Funkcija $Y(x) = h + \frac{h}{100} d(\sqrt{x^2 + h^2})$ prav tako strogo narašča na intervalu $I = [x_1, x_2]$. Ko x potuje od x_1 do x_2, se zato $T'(X(x), Y(x))$ giblje desno in navzgor. Popačena slika daljice AB je torej krivulja, ki jo imamo lahko za graf strogo naraščajoče funkcije na intervalu od $X_1 = X(x_1)$ do $X_2 = X(x_2)$.

Torej, ko potujemo po popačeni sliki daljice AB od A' do B', se T' oddaljuje od premice p kot na sliki 5.

Imejmo na idealni sliki pravokotni okvir (= rob pravokotnika) s središčem v izhodišču O, tako da polmeri vseh točk okvirja ležijo v intervalu J. Naj bo CD stranica okvirja in p premica skozi O, vzporedna daljici CD. Ko se po popačeni sliki stranice CD okvirja oddaljujemo od središča, se oddaljujemo tudi od premice p. (Premico p pa, kot smo že rekli, popačenje ohranja.)

Popačeni okvir ima tako obliko natlačene blazine – ožje v sredini, s štrlečimi vogali (slika 6), saj je popačenje relativno najbolj raztegnilo prav vogale. Temu pravimo **blazinasto popačenje** ali *popačenje v obliki blazine* – angleško *pincushion distortion*, saj so take napihnjene blazinice, v katere šivilja zabada bucike. Povzemimo:

> Imejmo na idealni sliki daljico AB, vzporedno premici p skozi O (vendar ne vsebovano v p). Premica e naj poteka skozi O in naj bo pravokotna na p. Polmeri točk na AB naj leže na intervalu, na katerem funkcija d strogo narašča. Ko se po popačeni sliki daljice AB oddaljujemo od e, se **oddaljujemo** tudi od premice p. Zato govorimo o *blazinastem popačenju.*



SLIKA 6.
Blazinasto popačenje pravokotnega okvirja.

Vzeli smo $J = [s_1, s_2]$. Točke na idealni sliki s polmerom v J ležijo na kolobarju s središčem v izhodišču. Meji tega kolobarja sta krožnici s polmeroma s_1 in s_2. Popačitev ta kolobar preslika na kolobar s središčem v izhodišču. Meji popačenega kolobarja sta krožnici s polmeroma $r(s_1) = s_1(1 + (1/100)d(s_1))$ in $r(s_2) = s_2(1 + (1/100)d(s_2))$. V našem primeru je $r(s_2) - r(s_1) = s_2 - s_1 + (1/100)(d(s_2) - d(s_1)) > s_2 - s_1$, torej popačenje poveča razdaljo med krožnicama.

Pri »standardnih« zoomih imamo navadno na tele območju rahlo blazinasto popačenje.

Sodčkasto popačenje

Denimo zdaj, da funkcija d na intervalu $K = [t_1, t_2]$ **strogo pada.** Naj ima $G(z_1, h)$ polmer t_1 in $H(z_2, h)$ polmer t_2, kjer je $0 < z_1 < z_2$ kot na sliki 7. Potem $x \mapsto d(s(x))$ na tem intervalu strogo pada. Po formuli (4) funkcija $x \mapsto Y(x)$ strogo pada na intervalu $L = [z_1, z_2]$. Ker $x \mapsto s(x)$ strogo narašča, to velja tudi za $x \mapsto r(s(x))$, saj je r strogo naraščajoča. Toda $r(s(x)) = \sqrt{(X(x))^2 + (Y(x))^2}$. Ker $x \mapsto Y(x)$ strogo pada, mora $x \mapsto X(x)$ strogo naraščati. Ko x teče od z_1 do z_2, se točka $T'(X(x), Y(x))$ giblje desno in navzdol. Tako vidimo:

→

Imejmo na idealni sliki daljico GH, vzporedno premici p skozi O (vendar ne vsebovano v p). Premica e naj poteka skozi O in naj bo pravokotna na p. Polmeri točk na GH naj leže na intervalu, na katerem funkcija d strogo pada. Ko se po popačeni sliki daljice GH oddaljujemo od e, se **bližamo** premici p kot na sliki 7. Zato govorimo o *sodčkastem popačenju* ali *popačenju v obliki sodčka* – angleško *barrel distortion*. Premici p in e se pri popačenju seveda ohranjata.

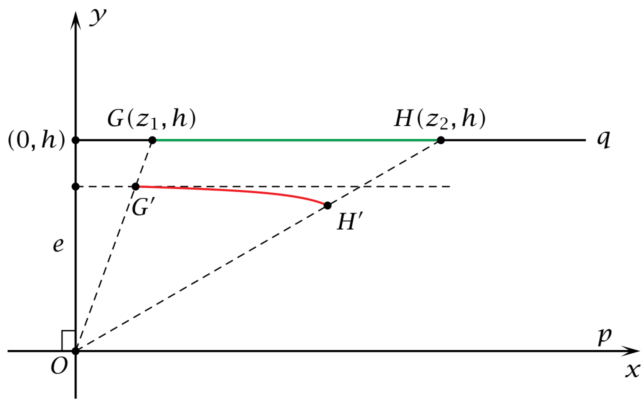
Vzemimo na idealni sliki pravokotni okvir s središčem v izhodišču, tako da polmeri vseh točk okvirja ležijo v intervalu K. Najbolj se skrčijo polmeri od središča slike najbolj oddaljenih točk. Popačenje »zategne« vogale pravokotnika. Popačeni pravokotnik dobi obliko soda kot na sliki 8.

Pri posnetkih arhitekture, reprodukcijah je popačenje zelo moteče.

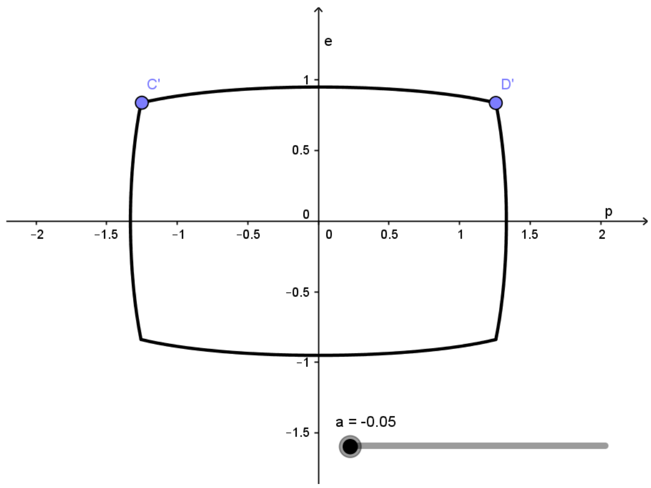
Pri objektivih akcijskih kamer in »ribjih očes« pa je ekstremno sodčkasto popačenje celo zaželeno – ker na ta način spravimo na sliko kar se da veliko stvarnosti.

Valovito popačenje

Lahko se zgodi, da radiji točk na daljici BA, ki ne gre skozi izhodišče, ležijo v intervalu J, kjer funkcija d strogo narašča, in v intervalu K, kjer funkcija d strogo pada. Naj bo p premica skozi izhodišče



SLIKA 7.
Tu je $|OG| = t_1$ in $|OH| = t_2$.

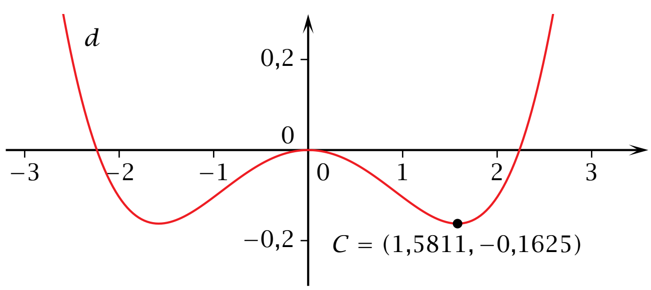


SLIKA 8.
Sodčkasto popačenje pravokotnega okvirja.

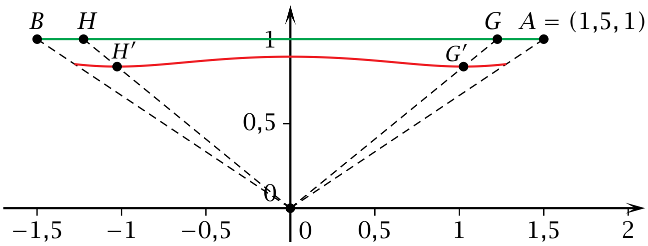
vzporedna in disjunktna z daljico AH. Premica e naj poteka skozi O in naj bo pravokotna na p. Ko se po popačeni sliki daljice AH oddaljujemo od e, se na enem delu oddaljujemo od p, na drugem delu pa približujemo premici p. Temu pravimo *popačenje v obliki brkov – mustač* ali *valovito popačenje*.

Primer. Denimo, da je $d(s) = -0{,}13s^2 + 0{,}026s^4$. Oglejmo si vedenje funkcije d za nenegativne s. Ko spremenljivko s povečujemo od 0 naprej, najprej prevlada prvi člen v vsoti za $d(s)$ in funkcija d pada. Kasneje prevlada višja potenca v drugem členu in funkcija d narašča.

Graf za d imamo na sliki 9. V točki C, kjer d preide iz padanja v naraščanje, zavzame funkcija d naj-



SLIKA 9.
Graf funkcije $d(x) = -0{,}13x^2 + 0{,}026x^4$ ima minima v točkah z absciso $x = \pm\sqrt{2{,}5}$.



SLIKA 10.
Rdeča krivulja predstavlja valovito popačenje daljice AB.

manjšo vrednost – minimum. Z matematičnim orodjem, imenovanim odvod (snov četrtega leta gimnazije), ugotovimo, da je ta minimum pri $s = \sqrt{2{,}5}$. Minime (in maksime) pa nam poišče tudi ukaz `Ekstrem` v prosto dostopni GeoGebri. Torej funkcija d pada na intervalu $[0, \sqrt{2{,}5}]$ in narašča na intervalu $[\sqrt{2{,}5}, \infty]$. To lahko preverimo tudi s kakim drugim programom ali računalom, ki zna narisati graf polinoma d.

Naj bo $A(1{,}5, 1)$ in $B(-1{,}5, 1)$. Popačeno podobo daljice AB imamo rdeče obarvano na sliki 10. V nadaljevanju tega članka bomo na preprostejših primerih razložili, kako smo to narisali. Točki $G(\sqrt{1{,}5}, 1)$ in $H(-\sqrt{1{,}5}, 1)$ na daljici AB imata polmer $\sqrt{2{,}5}$. Na sliki 10 vidimo v rdeči krivulji od G' do H' sodčkasto popačenje daljice GH in v rdečem preostanku blazinasto popačenje daljic AG in BH. Popačitev daljice AB ima obliko umetniških brkov, kakršni so bili v modi okrog leta 1900.

Na [4] imam na GeoGebra Tube interaktivno sliko z naslovom *Zapleteno popačenje daljice*, kjer je $d(s) = -0{,}13s^2 + bs^4$. Z drsnikom lahko spreminjamo parameter b.

Modeliranje popačenja

Mnoge funkcije lahko dobro aproksimiramo s polinomi. Ker je $d(0) = 0$, poskusimo z $\frac{d(s)}{100} = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + \dots$ Literatura [3, str. 27], [5, str. 87–90] pravi, da po t. i. *Seidelovi teoriji aberacij* pri objektivih, sestavljenih iz dobro centriranih leč s sferičnimi površinami, v gornjem izrazu lahko izpustimo lihe potence. **Ludwig Seidel** je to teorijo objavil v več člankih v reviji *Astronomische Nachrichten* leta 1856. Praksa kaže, da pri takih objektivih zelo dober približek dobimo v obliki

$$\frac{d(s)}{100} = as^2 + bs^4. \tag{5}$$

En tak primer smo že podrobno obravnavali.

Enostavno popačenje

V mnogih primerih lahko v enačbi (5) zanemarimo drugi člen, tako da vzamemo

$$\frac{d(s)}{100} = as^2 \tag{6}$$

in tako

$$r(s) = s(1 + as^2). \tag{7}$$

Če velja enačba (7), bomo to imenovali *enostavno popačenje*.

Razteg radija s znaša $r - s = sd(s)/100 = as^3$. Bistven vpliv na sliko ima predznak koeficienta a. Če je $a > 0$, funkcija $s \mapsto d(s) = as^2$ strogo narašča na intervalu $[0, \infty]$. Povzemimo:

- Za $a > 0$ dobimo enostavno blazinasto popačenje.
- Za $a < 0$ dobimo enostavno sodčkasto popačenje.

Če to vstavimo v enačbo (2), vidimo, da točki $A(x, y)$ na idealni sliki na popačeni sliki odgovarja točka $A'(X, Y)$ s kartezičnima koordinatama

$$X = x + ax(x^2 + y^2); \quad Y = y + ay(x^2 + y^2). \tag{8}$$

Vodoravna premica z enačbo $y = h$ je sestavljena iz točk (x, h). Zato se popači v krivuljo, sestavljeno iz točk (X, Y), tako da je

$$X = x + ax(x^2 + h^2); \quad Y = h + ah(x^2 + h^2). \tag{9}$$

To je *parametrična enačba* te krivulje; spremenljivka x je *parameter*. Programi za računalniško geometrijo kot, recimo, prosto dostopna GeoGebra, znajo narisati take parametrično podane krivulje. Ukaz je

```
Krivulja[
    x + a x(x^2 + h^2), h + a h(x^2 + h^2),
    x, -1.5, 1.5
],
```

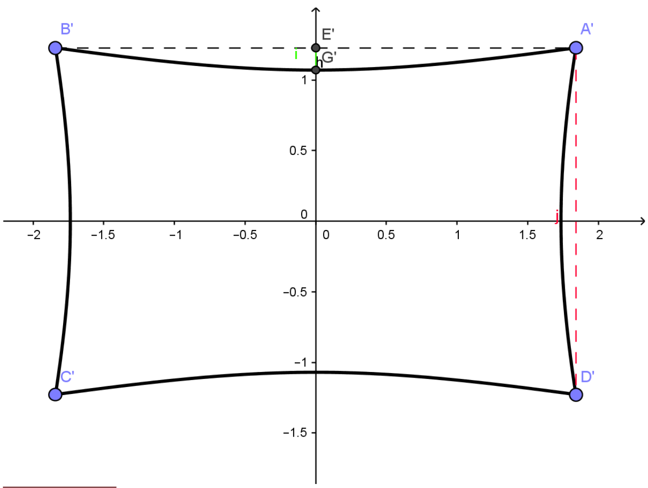
če spremenljivka x teče od $-1{,}5$ do $1{,}5$.

Na slikah 6 in 8 imamo enostavni popačenji pravokotnega okvirja velikosti 3×2, s središčem v izhodišču. Na sliki 6 je $a = 0{,}08$, na sliki 8 pa je $a = -0{,}05$.

Na naslovu [4] sem v GeoGebri naredil interaktivno sliko z naslovom *Enostavno popačenje pravokotnega okvirja*. Z drsnikom spreminjamo parameter a. Pri $a = 0$ ni popačenja.

TV popačenje

Če imamo le blazinasto ali le sodčkasto popačenje, je zaželena preprosta številska ocena za velikost popačenja.



SLIKA 11.
Tu so A', B', C', D' vogali tipala.

Na sliki 11 so ukrivljene črte popačena slika pravokotnega okvirja s središčem v izhodišču O, pravokotnik $A'B'C'D'$ pa predstavlja tipalo. Kvocient

- $$100\,\frac{|E'G'|}{|A'D'|}$$

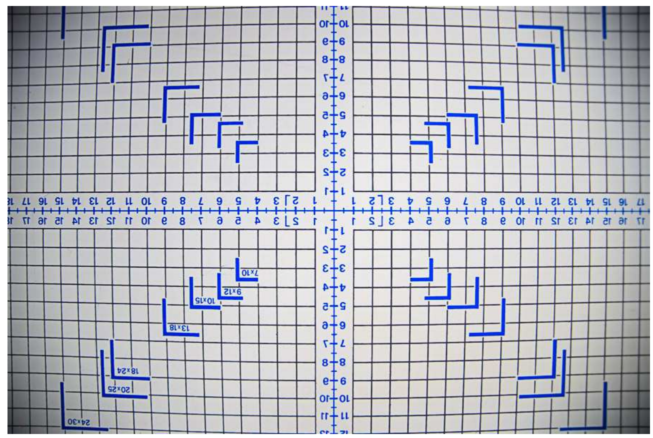
je *TV popačenje* v odstotnih točkah. Nekateri raje uporabljajo *SMIA TV popačenje*, ki je dvakratnik vrednosti TV popačenja. Vsi ti pojmi in precejšnja zmeda v terminologiji izvirajo še iz časov katodnih cevi na televizorjih. Uporabljajo pa jih tudi nekatere internetne strani, ki testirajo objektive.

Pri primerjalnih testih objektivov velikost popačenja še zmeraj igra veliko vlogo. **Objektivi s fiksno goriščno razdaljo imajo navadno bistveno manjše popačenje kot zoom objektivi pri enaki goriščnici.**

Bolj zapletena popačenja in vinjetiranje

Kaj pa, če velja formula (5) ali kaj še bolj zapletenega? En tak primer smo že obravnavali in izdelali sliko 9. Objektivi pametnih telefonov in tudi mnogi drugi novejši širokokotni objektivi vsebujejo močno asferične elemente. Zato imajo lahko zelo zapletena popačenja. Na [3, str. 27] imamo grafa funkcije d za tak objektiv pri dveh razdaljah slikanja. Popačenje sicer ni veliko, a je tako zapleteno, da funkcije d ne moremo dobro aproksimirati s preprostim polinomom.

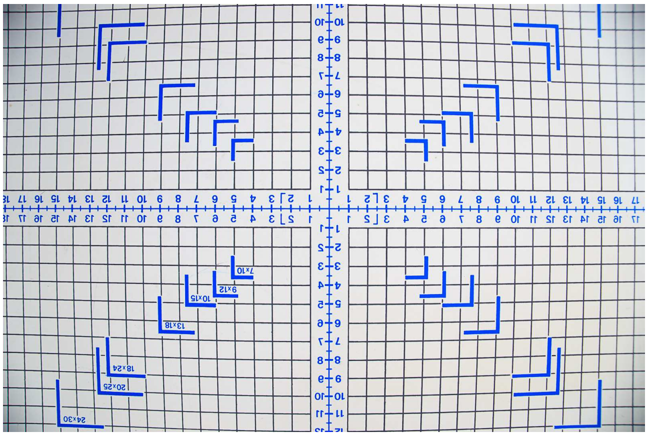
Poglejmo končno primer iz fotografske prakse.



SLIKA 12.
Zapleteno popačenje pravokotne mreže in temni vogali pri odprti zaslonki.

Fotografijo 12 sem posnel s četrt stoletja starim (cenenim) zoomom z goriščno razdaljo 28–80 mm (Canon EF 28–80 mm, 1 : 3,5–5,6 II) na tipalu »polnega formata« (Full Frame, kratko FF), to je velikosti približno 36 mm × 24 mm. Z zrcalom na mizi sem poskusil doseči, da je os slikanja pravokotna na tarčo. Goriščna razdalja je znašala 28 mm in izbral sem najmanjšo možno razdaljo slikanja. Vidno je popačenje, v glavnem sodčkasto. Edinole v vogalih se slika najvišje (najnižje) črte neha približevati vodoravni simetrali slike in se morda čisto v kotu celo začne oddaljevati. Po formuli (4) torej v vogalih funkcija d neha padati in je skoraj konstantna, morda čisto v kotu celo začne naraščati. Torej to ni enostavno popačenje. Čisto v kotu imamo morda celo malce blazinastega popačenja.

Slika je bila posneta pri povsem odprti zaslonki (1 : 3,5). Vogalčki so temni, temu pravimo **vinjetiranje**, ki je tu zelo močno. *Vinjeta* pomeni prvotno okrasni rob okrog risbe ali besedila. V fotografiji pa *vinjetiranje* pomeni zatemnitev vogalov. Vinjetiranje je pri portretih večkrat zaželeno, ker osredotoči pozornost na sredino fotografije. Včasih ga pričaramo celo naknadno. Na obravnavani reprodukciji pa nas zelo moti.



SLIKA 13.
Fotografija pravokotne mreže pri zaslonki 8.

Če objektiv nekoliko zaprem, denimo, za dve zaslonki in pol na 1 : 8 (se pravi na zaslonsko število 8) kot na fotografiji 13, se popačenje ne spremeni, vinjetiranje pa skoraj izgine.

Druge napake objektiva in uklon

Fotografijo 12 sem ročno izostril na sredino na LCD zaslonu aparata (v »Live View« načinu), ob desetkratni povečavi. Standardno »fazno« ostrenje ob pogledu skozi optično iskalo na moji zrcalno refleksni kameri je namreč hitro, a ni zmeraj zanesljivo. Že na mali sliki v reviji lahko vidite, da je ob odprti zaslonki in natančni izostritvi na sredino slike desni rob povsem neoster, še posebno zgoraj. To bi lahko pomenilo, da morda tipalo ni povsem vzporedno tarči ali pa, kar je bolj neugodno, da je kak optični element nagnjen. Tudi v tem primeru bi, kot pravi članek [6], morda objektiv lahko ostro preslikal celotno tarčo, če bi bila ustrezno nagnjena. Za preskus sem premaknil okvirček za ostrenje v zgornji desni vogal. Izkazalo se je, da tega kota (za razliko od drugih vogalov) sploh ni mogoče zadovoljivo upodobiti. Z objektivom je nedvomno nekaj narobe.

Pri zoom objektivih je pogosto pri določeni goriščnici kak rob ali vogal manj oster – vendar navadno ni takih hudih napak kot v gornjem primeru. Če slikamo naravo, manjših neeenakomernosti v ostrini večinoma ne bomo opazili. Več o tem lahko preberete v [6]. Nekateri proizvajalci zdaj zaradi vse večje ločljivosti tipal kontrolo kvalitete izboljšujejo [7].

Na fotografiji 13 sem na istem starem poceni zoom objektivu 28–80 mm zaslonko zaprl na 1 : 8. Ostrina na robovih in v vogalih se je močno izboljšala (a pri našem pokvarjenem primerku je desni zgornji vogal še zmeraj vidno slabši od drugih vogalov).

Če zapiram objektiv še bolj, bo sprva še manj problemov na robu. Vendar ob manjšanju odprtine, skozi katero prihaja svetloba na tipalo, vse bolj prihaja do izraza fizikalni pojav, imenovan **uklon (difrakcija).** Uklon prizadene kakovost celotne slike, tudi v središču. Pri polnem formatu se vpliv uklona pozna nekako od zaslonskega števila 16 naprej. Pri zaslonki 32 tega ne moremo več spregledati. Uklon prizadene tudi najdražjo optiko. Nekateri prozvajalci kamer zdaj oglašujejo, da njihova tehnologija obdelave slike omogoča zmanjšanje vpliva uklona, a na promocijskem materialu kakih velikih izboljšav nisem opazil. Pri manjših tipalih se uklon pozna že pri manjših zaslonskih številih. Na kameri s senzorjem velikosti 6,2 mm × 4,6 mm (oznaka za to velikost je tudi 1 : 2,3′′) je pri zaslonki 8 odprtina zelo majhna in slika že vidno slabša. Tipala pametnih telefonov so navadno še manjša. Ampak optika na telefonih navadno nima zaslonskega mehanizma, tako da dela z maksimalno odprtino. Več o uklonu si preberite na [8].

Sam za reprodukcije in pomembne skupinske slike uporabljam (zaradi slabih izkušenj z zoomi nižjega in srednjega cenovnega razreda) večinoma objektive s fiksno goriščno razdaljo. Ti imajo neprimerno manj optičnih problemov. Pri polnem formatu lahko za majhen denar kupimo standardni objektiv 50 mm 1 : 1,8 ali 40 mm 1 : 2,8. Za nekoliko manjši senzor (APS-C velikost) dobimo poleg prej omenjenih še objektiv 24 mm 1 : 2,8. Ti objektivi imajo minimalno popačenje. Od zaslonke 2,8 naprej naredijo ob pravilni izostritvi odlično sliko, in to od

→

roba do roba. Vredno je kupiti novejše konstrukcije, saj je kontrola kakovosti boljša in pri zrcalno refleksnih aparatih je t. i. fazno avtomatično ostrenje z novimi tipi motorčkov precej bolj zanesljivo.

Literatura

[1] P. Legiša, *Moteča perspektiva*, Presek **44** (2016), 1, 4–14.

[2] R. Cicala, *Lensrentals Repair Data: 2012-2013*, https://www.lensrentals.com/blog/2013/08/lensrentals-repair-data-2012-2013/, ogled: 1. 3. 2017.

[3] Strokovnjaka firme Zeiss razlagata popačenje: B. Hönlinger, H. H. Nasse, *Verzeichnung*, Carl Zeiss Camera Lens News, Photo-Objektive, Oktober 2009, http://www.zeiss.com/content/dam/Photography/new/pdf/de/cln_archiv/cln33_de_web_special_distortion.pdf, angleška verzija: *Distortion*, http://lenspire.zeiss.com/en/wp-content/uploads/sites/2/2016/01/cln33_en_web_special_distortion.pdf, ogled: 1. 3. 2017.

[4] Interaktivne ilustracije članka so na avtorjevi strani na GeoGebra Tube: https://www.geogebra.org/peter.legisa, ogled: 1. 3. 2017.

[5] S. F. Ray, *Applied photographic optics*, Second ed., Focal Press, Oxford 1995.

[6] R. Cicala, *Fun with field of focus II*, https://www.lensrentals.com/blog/2016/11/fun-with-field-of-focus-ii-copy-to-copy-variation-and-lens-testing/, ogled: 1. 3. 2017.

[7] R. Cicala, *Is your camera really the best optical test*, https://www.lensrentals.com/blog/2016/09/is-your-camera-really-the-best-optical-test/, ogled: 1. 3. 2017.

[8] Cambridge in Colour, *Lens Diffraction and Photography*, http://www.cambridgeincolour.com/tutorials/diffraction-photography.htm, ogled: 1. 3. 2017.

× × ×

Vsota kvadratov prvih n zaporednih naravnih števil

Jens Carstensen in Alija Muminagić

Ko boste prebrali naslov, si boste verjetno mislili, saj to pa dobro poznamo. Kaj novega pa lahko še izvemo? Avtorja misliva drugače in zato sva napisala ta članek.

Najprej opišimo zgled, kje na omenjeno vsoto lahko naletimo v življenju. Zamislite si jabolka, zložena v kvadratno piramido. Eno na vrhu, pod njim so štiri, zložena v kvadrat s stranico po dve jabolki, v tretji plasti nato sledi devet jabolk in tako dalje. Koliko je vseh jabolk v piramidi, če vemo, iz koliko plasti je sestavljena? Ravno toliko, kot vsota, ki jo obravnavamo. Poznamo mnogo (tudi zelo duhovitih) doka-