PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **6** (1978/1979)
Številka 4
Strani 196–201

Danijel Bezek:

OD ŠTEVIL H GEOMETRIJI, UMETNOSTI IN IGRI

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/6/372-Bezek.pdf

OD ŠTEVIL H GEOMETRIJI, UMETNOSTI IN IGRI

UVOD: Med evropskimi matematiki srednjega veka je zanimiva osebnost LEONARDO FIBONACCI. Marsikaj o njem bo ostalo za vedno skrivnost, kot so bile skrivnostne rešitve njegovih nalog. Leta 1225, je na matematičnem tekmovanju v Pisi bila tudi tale naloga:

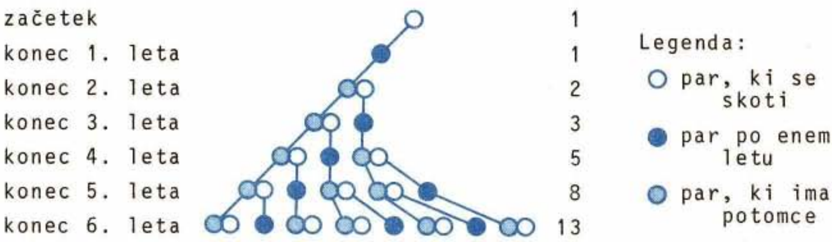
Poišči ulomek, ki je popoln kvadrat in ostane popoln kvadrat tudi, ko ga zmanjšamo ali povečamo za 5.

Fibonacci je našel rešitev: 1681/144, še danes ni znano, kako. (Rešitev: $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$ in $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$)

Bil je odličen poznavalec števil - aritmetike in algebre.

a) Po skoraj 800 letih matematiki vedno znova odkrivajo zanimivosti, ki so povezane z zaporedjem števil, ki ga po njem imenujemo *Fibonaccijevo zaporedje*. Začelo se je z nalogo o zajcih: *Skoti se par zajcev - samec in samica. Po enem letu dozorita in od konca drugega leta skoti zajklja vsako leto nov par zajcev - samca in samico, za katere velja isti ciklus razmnoževanja.* Vprašanje: *Koliko parov je po poljubnem številu let, če ni smrtnih primerov?*

Prikazana je shematična rešitev naloge, kjer posamezni krožec ustreza paru.



Števila: 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , ... (1)

so členi Fibonaccijevega zaporedja. Prvi in drugi člen zaporedja sta v našem primeru 1; vse druge pa dobimo tako, da seštejemo oba predhodnika. To zapišemo takole:

$$a_1 = 1 \ , \ a_2 = 1 \quad \text{in} \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (2)$$

Člen a_n imenujemo splošni člen zaporedja, ker nam pove pravilo, po katerem lahko poiščemo katerikoli člen zaporedja.

1. Poišči še nekaj naslednjih členov Fibonaccijevega zaporedja (1).
2. Poišči a_{30} in a_{35} v Fibonaccijevem zaporedju.

Zadnja naloga nas prepriča, da je iskanje "bolj kasnih" členov zaporedja zamudno delo. Po pravilu (2) je treba po korakih zapisati vse člene do iskanega člena zaporedja.

Postavlja se vprašanje: Ali lahko še kako drugače, razen po omenjenem načinu, poiščemo poljubni člen Fibonaccijevega zaporedja? Odgovor je pritrdilen, n-ti člen Fibonaccijevega zaporedja dobimo tako, da naravno število n vstavimo v izraz za splošni člen (3):

$$a_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \qquad (3)$$

3. Preveri, če za $n=2$ in $n=3$ zares dobiš drugi in tretji člen Fibonaccijevega zaporedja, ko ju vstaviš v splošni člen (3).
4. Dokaži, da za Fibonaccijevo zaporedje veljajo naslednje zakonitosti:

a) $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_{n+2} - 1$

b) $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-3} + a_{2n-1} = a_{2n}$

c) $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n-2} + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

Navodilo: Upoštevaj temeljno lastnost splošnega člena!

b) Število τ (izg.: tau) zapišemo kot verižni ulomek (4)

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}} \qquad (4)$$

Pravi vrednosti števila τ se lahko približujemo korakoma, tako da izračunavamo vrednosti številskega izraza (4) s končnim številom operacij seštevanja. Glej (5) !

$$\begin{aligned} 1 &= 1{,}0000 \\ 2 &= 2{,}0000 \\ 3/2 &= 1{,}5000 \\ 5/3 &= 1{,}6667 \\ 8/5 &= 1{,}6000 \\ 13/8 &= 1{,}625 \end{aligned}$$

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}} \tag{5}$$

Izračunane vrednosti so ulomki, katerih števec in imenovalec sta zaporedna člena Fibonaccijevega zaporedja: a_n/a_{n-1} .

Bolj kasni členi Fibonaccijevega zaporedja dajo boljši približek števila τ. Kolikšna pa je prava vrednost števila τ?

Iz zapisa (4) vidimo, da je $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$ ali:

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0 \tag{6}$$

Enačbo (6) preoblikujemo ($\tau^2 - \tau = 1$) in dopolnimo levo stran do popolnega kvadrata ($\tau^2 - 2(\frac{1}{2}\tau) + (\frac{1}{2})^2 = 1 + (\frac{1}{2})^2$ ali kar je isto $(\tau - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$). Obe strani korenimo ($\tau - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$) in po premisleku ima naš τ pozitivno vrednost:

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{7}$$

c) Število $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ ima tudi geometrijski pomen. τ je vrednost razmerja med večjim in manjšim delom celote, ki je razdeljeno po *zlatem rezu.*

Zlati rez razdeli celoto v večji in manjši del tako, da je manjši del v primerjavi z večjim v enakem razmerju kot večji del proti celoti.

Kar smo povedali, bomo v levem stolpcu razčlenili po algebrski poti. V desnem stolpcu pa bomo algebrsko razlago dopolnili z bolj nazorno geometrijsko razlago.

če označimo celoto z 1, večji del z M (po lat. Maior=večji) in manjši del z m (po lat. minor=manjši), smemo zgoraj povedano sorazmerje zapisati:

$m/M = M/1$ ali $(1-M)/M = M/1$

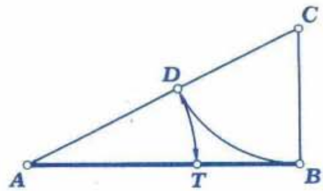
Iz zapisanega sorazmerja sledi enačba za M:

$$M^2 + M - 1 = 0$$

In podobno kot prej za τ poiščemo obe rešitvi, od katerih pride v poštev rešitev $M = (\sqrt{5} - 1)/2$ in potem za $m = 1 - M = (3 - \sqrt{5})/2$

6. Izračunaj količnik M/m in se prepričaj, da je enak številu τ .

Za celoto vzamemo daljico $\overline{AB}=1$. Pravokotno nanjo postavimo v krajišču B drugo daljico $\overline{BC}=1/2$



(9)

Točka C je središče krožnice skozi točko B in seče daljico $\overline{AC}$ v točki D.
Točka A je središče krožnice, ki poteka skozi D in seče daljico $\overline{AB}$ v točki T.
Daljici $\overline{AT}$ in $\overline{BT}$ sta večji in manjši del po zlatem rezu T razdeljene daljice $\overline{AB}$.
Dokaz: Po Pitagorovem izreku meri hipotenuza $\overline{AC}=\sqrt{5}/2$ in daljica $\overline{AT}=\overline{AD}=(\sqrt{5}/2-1/2)=$ $=(\sqrt{5}-1)/2$ in $\overline{BT}=\overline{AB}-\overline{AT}=$ $=(3-\sqrt{5})/2$

7. Izračunaj vrednost razmerja za daljici $\overline{AB}/\overline{AT}$!

Za daljici $\overline{AB}$ in $\overline{AT}$ pravimo, da sta v *stalnem sorazmerju*.

Umetniki najrazličnejših zgodovinskih obdobij so menili, da imajo umetnine, kjer so karakteristični deli (npr.: dolžina in širina slikarskega platna, višina in dolžina hišnih portalov, tlorisne dolžine ...) v stalnem sorazmerju, najlepšo obliko.

Primer:

M i l i j o n s k i   s o n e t

Pavla V a š a k a

1 6 2 9 3
7 5 3 9 6
6 8 8 0 6
9 0 4 5 3

8 3 5 2 4
9 3 3 4 2
8 2 3 1 2
2 9 1 3 4

3 7 2 8 8
7 7 3 9 8
9 6 5 2 5

7 5 6 5 7
8 0 9 6 7
9 2 9 0 5

Na levi strani je zapisan sonet. Kljub temu, da je zapisan s številskimi simboli (topografska poezija), ohranja vse oblikovne značilnosti soneta (kitica in rima).
Zanimiv je tudi zato, ker je vsota vseh 14 vrstic enaka 1 000 000. Preveri!

Sonet sestavljajo štiri kitice - dve kitici s po štirimi vrsticami (kvartini) in dve kitici s po tremi vrsticami (tercini).
Verz, s katerim se začneta tercini, je navadno miselno najbogatejši. Zanimivo je, da ta verz kot zlati rez, razdeli sonet v dva dela - večji in manjši - tako da je razmerje števila vrstic obeh delov 8/5; t.j. približek števila τ; ulomek pa sestavljata števili iz Fibonaccijevega zaporedja.

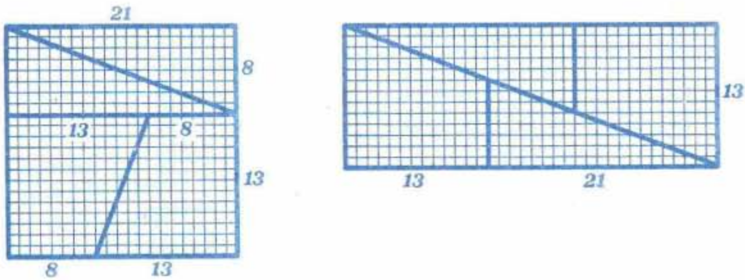
Bogati vsebini soneta se pridružuje še najlepša oblika.

8. Izberi si poljubno daljico b in na njej poišči po zgledu (9) daljši odsek M po zlatem rezu razdeljene daljice b.

Konstruiraj pravokotnik, ki bo imel za osnovnico daljico $a=b+M$ in za višino daljico b.

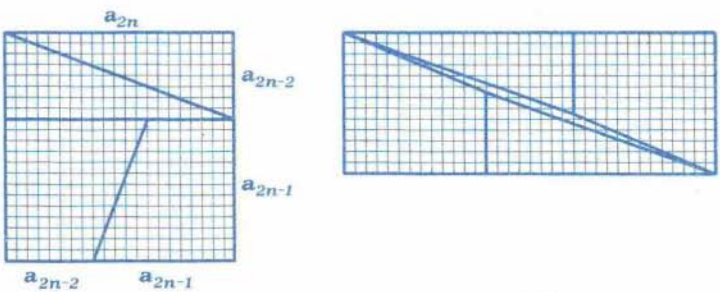
Narisanemu pravokotniku pravimo "zlati pravokotnik" in ima po umetniškem prepričanju med pravokotniki najlepšo obliko, saj sta si osnovnica in višina v stalnem sorazmerju. Dokaži: $a/b=\tau$!

9. Ob koncu pa še igra s škarjami in Fibonaccijevimi števili. Iz milimetrskega papirja izrežemo kvadrat 21x21 in ga razrežemo kot kaže slika a). Stranice, ki oklepajo prave kote, so členi



(a) (b)

Fibonaccijevega zaporedja (8,13,21). Iz razrezanih kosov sestavimo pravokotnik b). Primerjaj ploščini kvadrata in pravokotnika! Zdi se, kot da gre za "čarovniške škarje", s katerimi dobiš nekaj, česar ni. To velja za vse kvadrate s stranico, ki je člen a_{2n} iz Fibonaccijevega zaporedja (slika c). V resnici pa



(c) (d)

gre za optično prevaro (slika d), ki je toliko manj opazna, kolikor večji je člen a_{2n} .

Danijel Bezek