PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **13** (1985/1986)
Številka 6
Strani 346–349

Jože Grasselli:

PRIJATELJSKA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika, teorija števil, prijateljska števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/13/797-Grasselli.pdf

PRIJATELJSKA ŠTEVILA

Zgodba o prijateljskih številih se začenja v davnini, nadaljuje se skozi čase do današnjega dne in še nima konca.

Obnovimo nekaj odlomkov iz te zgodbe.

Začelo se je z nekakšno igro. Z njo so se kratkočasili nekdanji ljubitelji števil. Igra se je odvijala v treh korakih:

1. Izberi naravno število a, večja od 1.
2. Poišči številu a vse prave delitelje. (To so pozitivni delitelji števila a, manjši od a.)
3. Izračunaj vsoto $S(a)$ vseh pravih deliteljev števila a.

Za $a = 10$ poteka igra takole. Vsi pozitivni delitelji za 10 so 1, 2, 5, 10. Vsi pravi delitelji so potem 1, 2, 5 in $S(10) = 1 + 2 + 5 = 8$.

Če je a majhen, se igra hitro izteče. Pri velikih a pa je igra dolgotrajna. Lahko se celo zgodi, da igre kdaj ne moremo pripeljati do konca, kajti za velik a ni preprosta stvar najti vse prave delitelje.

Izračunajmo $S(220)$ in $S(284)$. Vsi pravi delitelji za 220 so

$$1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110$$

za 284 pa

$$1, 2, 4, 71, 142$$

Ko jih seštejemo, dobimo

$$S(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$
$$S(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Vidimo, da sta si števili 220 in 284 nekako vzajemni: vsota pravih deliteljev za 220 je 284, za 284 pa 220. To so opazili že stari Grki. Zaradi te lastnosti sta se jim zdeli števili 220 in 284 posebej imenitni in so ju imenovali prijateljski.

Naravni števili a, b sta torej **prijateljski**, če izpolnjujeta zahteve:

$$a > 1, b > 1; \quad a \neq b; \quad S(a) = b, S(b) = a \tag{1}$$

Nekateri domnevajo, da je prijateljski par 220, 284 našel Pitagora. Če to drži, je bil začetek prijateljskih števil pred dobrimi 2500 leti.

Drugi spet mislijo, da so za prijateljski par 220, 284 vedeli vsaj 500 let pred Pitagoro. V tem primeru se je začela zgodba o prijateljskih številih pred več kot 3000 leti.

Najstarejši poznani dokument, ki omenja prijateljska števila, je neko poročilo o Pitagori in pitagorejcih. Napisal ga je sirski filozof Jamblihos (283? – – 330). Jamblihos pripoveduje, da so Pitagoro nekoč vprašali, kaj je prijatelj. Po pitagorejskih nazorih naj bi se vse dalo razložiti z naravnimi števili. V takšnem smislu je Pitagora tudi odgovoril: "Prijatelj je drugi jaz, kakor 22o in 284." Od tod naj bi izviralo ime za prijateljska števila.

Dolgo sta bili 220, 284 edini znani prijateljski števili. Seveda se je zastavljalo vprašanje, ali je še kaj takih števil. To vprašanje je mogoče reševati na razne načine.

Najprej bi lahko na slepo izbirali pare naravnih števil in preverjali, ali je par prijateljski ali ne. Malo je upanja, da bi pri takem ravnanju prišli do kakšnega prijateljskega para.

Potem bi mogli spreminjati a po vseh naravnih številih od 2 do danega naravnega števila c. Če bi vsakokrat izračunali vsoto pravih deliteljev $S(a)$, bi dobljena preglednica za $S(a)$ pokazala vse pare prijateljskih števil, ki ne presegajo števila c. Ta način bi bil sicer izčrpen, je pa zamuden in nezanimiv. Saj gre za preskušanje vseh parov naravnih števil od 2 do c.

Obstajajo tudi bolj načrtni načini za iskanje prijateljskih števil. Podani so navadno v obliki pravil. Kako se do takih pravil pride, ne bomo opisovali.

Prvo tako pravilo je postavil zdravnik, astronom in matematik Thabit ibn Kurrah (836 – 901) iz Bagdada. Njegovo pravilo se glasi:

Naj bo n naravno število, večje ali enako 2. Če so

$$p = 3.\,2^{n-1} - 1, \quad q = 3.\,2^{n} - 1, \quad r = 9.\,2^{2n-1} - 1 \tag{2}$$

praštevila, sta

$$a = 2^{n}\,p\,q, \qquad b = 2^{n}\,r \tag{3}$$

prijateljski števili.

Thabitovo pravilo je na videz preprosto. Ko ga uporabljamo, pa naletimo na težave. Ni namreč lahko ugotoviti, pri katerih n so p, q, r iz (2) praštevila.

Za $n = 2$ pride iz (2)

$$p = 3.2 - 1 = 5, \quad q = 3.2^2 - 1 = 11, \quad r = 9.2^3 - 1 = 71$$

To so sama praštevila. Zato sta po (3)

$$a = 2^2.5.11 = 220, \quad b = 2^2.71 = 284 \tag{4}$$

prijateljski števili. Prišli smo do para, ki ga že poznamo.

Ne ve se, ali je Thabit svoje pravilo uporabil še v kakšnem drugem primeru razen za $n = 2$.

Če vzamemo $n = 3$, je po (2)

$$p = 3.2^2 - 1 = 11, \quad q = 3.2^3 - 1 = 23, \quad r = 9.2^5 - 1 = 287 = 7.41$$

Ker r ni praštevilo, iz (3) sedaj ne dobimo prijateljskega para.

Pri $n = 4$, najdemo iz (2)

$$p = 3.2^3 - 1 = 23, \quad q = 3.2^4 - 1 = 47, \quad r = 9.2^7 - 1 = 1151$$

Ker so to praštevila, je po (3) par

$$a = 2^4.23.47 = 12\,796, \quad b = 2^4.1151 = 18\,416 \tag{5}$$

prijateljski.

Podobno za $n = 7$ iz (2) dobimo

$$p = 3.2^6 - 1 = 191, \quad q = 3.2^7 - 1 = 383, \quad r = 9.2^{13} - 1 = 73\,727$$

Da sta prvi dve števili praštevili, se hitro preveri. Malo težje je ugotoviti, da je tudi tretje število praštevilo. Ko se o tem prepričamo, dajeta obrazca (3) prijateljski par

$$a = 2^7.191.383 = 9\,363\,584, \quad b = 2^7.73727 = 9\,437\,056 \tag{6}$$

Nedavno so dognali, da so (4), (5), (6) edini pari prijateljskih števil, ki se dobe iz Thabitovega pravila, ko se n spreminja od 2 do 20 000.

V Evropi je zaživelo zanimanje za prijateljska števila v sedemnajstem stoletju. Takrat je bilo Thabitovo pravilo že davno pozabljeno, če so zanj tu sploh kdaj vedeli. Pierre Fermat (1601 – 1665) in René Descartes (1596 – 1650) sta Thabitovo pravilo vsak zase na novo odkrila. Fermat je z njim prišel leta 1636 do prijateljskega para (5), Descartes pa nekoliko pozneje do para (6). Ibn al Banna iz Maroka navaja v svojih spisih par (5) že okrog leta 1300. Vendar so to opazili šele pred kratkim.

Ko je nastopil Leonhard Euler (1707 – 1783), so bili poznani trije prijateljski pari, namreč (4), (5) in (6). Te pare sestavljajo sama soda števila. Euler je izpeljal več pravil, ki jih je uporabil pri iskanju prijateljskih števil. S temi pravili je našel 59 novih parov. Med pari, ki jih je odkril, so tudi nekateri pari lihih prijateljskih števil. Eden takih parov je

$$a = 3^3 . 5 . 7 . 71 = 67\,095, \quad b = 3^3 . 5 . 17 . 31 = 71\,145 \tag{7}$$

V devetnajstem stoletju se seznam prijateljskih števil ni dosti razširil, saj so našli le štiri nove pare. Do leta 1945 pa se je vsega nabralo 200 prijateljskih parov.

Precej pa je seznam narastel v zadnjih štiridesetih letih. Izboljšali so se namreč kriteriji za praštevila. Nadalje so k temu pripomogla nova pravila za iskanje prijateljskih števil, ki so se pridružila Thabitovemu in Eulerjevim pravilom. Važno vlogo so imeli tudi računalniki, saj si z njimi pomagajo pri preskušanju pravil. Tako je sedaj najdenih vsega nekaj nad 1130 parov prijateljskih števil. Med temi pari so pravi velikani: npr. prijateljski par, ki ga sestavljata števili, vsako s 152 mesti v desetiškem zapisu.

Ko si ogledujemo seznam prijateljskih števil, vzbujajo pozornost nekatere posebnosti. Omenimo jih nekaj.

Vsi do sedaj znani pari prijateljskih števil so taki, da sta obe števili istega para ali sodi ali lihi. Ali je kakšen prijateljski par, v katerem je eno število sodo, drugo liho?

Lihi števili, ki nastopata v prijateljskem paru (7), nista tuji. To velja za vse znane lihe prijateljske pare. Ali obstaja kakšen lihi prijateljski par s tujima si številoma?

Pri vseh znanih lihih prijateljskih parih sta števili deljivi s 3. Ali sta števili iz lihega prijateljskega para zmeraj deljivi s 3?

Na nobeno gornjih vprašanj še ni odgovora.

Brez odgovora je tudi vprašanje, koliko je parov prijateljskih števil: končno ali neskončno. Nekaterim se zdi, da to vprašanje ne bo nikoli rešeno. Pač pa je dognano, da so prijateljska števila med naravnimi števili veliko redkeje posejana kot praštevila.

Jože Grasselli