VERIŽNICA – ELEMENTAREN IN CELOVIT PRISTOP[1]

KREŠIMIR VESELIĆ

Lehrgebiet Mathematische Physik
Fernuniversität Hagen

Math. Subj. Class. (2010): 49-01, 97-01

Podan je elementaren dokaz, ki ne zahteva znanja variacijskega računa, da je verižnica stacionarna točka klasičnega problema iskanja vezanega ekstrema. Dokazano je tudi, da ima ta problem v verižnici strogi globalni minimum.

CATENARY – AN ELEMENTARY AND COMPLETE APPROACH

The equilibrium of a standard catenary is solved without previous knowledge of the Variational Calculus. An elementary proof of the strict global minimum is provided.

Verižnica že dolgo rabi kot lep šolski primer iskanja vezanega ekstrema. Minimizirati moramo funkcional

$$\Phi(y) = \rho g \int_0^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{1}$$

(potencialna energija grafa funkcije y), kjer sta ρ (dolžinska masna gostota) in g (težnostni pospešek) dani pozitivni konstanti. Funkcional moramo minimizirati med vsemi zvezno odvedljivimi funkcijami y, ki zadoščajo pogoju

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = d \tag{2}$$

(dožina grafa funkcije y je dana). Ob tem si predpišemo še robne pogoje. Obravnavali bomo dva tipa robnih pogojev: ali

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1 \tag{3}$$

(obe robni točki krivulje sta pribiti) ali pa

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = -\alpha x_1, \quad \alpha > 0 \tag{4}$$

(desni rob krivulje drsi vzdolž premice $y = -\alpha x$).

Pri uvodu v osnove klasičnega variacijskega računa in izpeljavi Euler-Lagrangeeve enačbe se za robne pogoje (3) hitro najde funkcijo hiperbolični kosinus kot ekstremalo zgornjega vezanega problema; robni pogoji (4) potrebujejo nekaj več teorije, saj se definicijski interval za funkcional Φ spreminja s funkcijo y. Še nekaj več izpeljav pa je treba za dokaz, da ima v dobljeni funkciji funkcional Φ tudi enoličen minimum. Pristop, ki nam pomaga iz

[1] V spomin profesorju Svetozarju Kurepi

te zagate in nam omogoči, da lahko oba tipa robnih pogojev obravnavamo hkrati, je, da iskane krivulje ne iščemo kot graf neke funkcije $y = y(x)$, ampak v parametrični obliki (npr. Troutman [1, pogl. 3])

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s \text{ ločna dolžina.}$$

Tu sta x in y zvezno odvedljivi funkciji na intervalu $[0, d]$, za kateri velja

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 - 1 = 0, \quad s \in [0, d]. \tag{5}$$

To nas pripelje do problema, ko moramo minimizirati funkcional

$$\Psi(x, y) = \rho g \int_0^d y \, ds \tag{6}$$

pri vezeh (5) in robnih pogojih: ali

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x(d) = x_1, \quad y(d) = y_1, \tag{7}$$

ali pa

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(d) = -\alpha x(d), \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

Kot je bilo pokazano že v [1], konveksnost funkcionalov poenostavi iskanje globalnega minimuma (vsaj za robne pogoje (7)). Vendar dejstvo, da je funkcional (6) linearen in da je vez (5) predstavljena s kvadratno funkcijo, omogoči nadaljnjo poenostavitev problema.

Vsak par (x, y) zvezno odvedljivih funkcij, ki zadoščata pogojem (5) in (7)/(8), bomo imenovali *konfiguracija.* Za poljubni konfiguraciji (x, y) in $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ ter poljubno zvezno funkcijo $\lambda = \lambda(s)$ imamo tako

$$\begin{aligned}
\Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= \int_0^d (\rho g \widetilde{y} + (\widetilde{x}'^2 + \widetilde{y}'^2 - 1)\lambda) \, ds \\
&= \int_0^d ((y + \widetilde{y} - y)\rho g + (y' + \widetilde{y}' - y')^2 \lambda + (x' + \widetilde{x}' - x')^2 \lambda - \lambda) \, ds \\
&= \Psi(x, y) + \int_0^d \big((\widetilde{y} - y)\rho g + 2y'\lambda(\widetilde{y}' - y') + 2x'\lambda(\widetilde{x}' - x') + \\
&\qquad\qquad + (\widetilde{y}' - y')^2 \lambda + (\widetilde{x}' - x')^2 \lambda\big) \, ds.
\end{aligned}$$

Pri predpostavki, da sta x in y dvakrat zvezno odvedljivi funkciji, funkcija λ pa enkrat zvezno odvedljiva, po integraciji po delih ob upoštevanju robnih pogojev pri 0 dobimo

$$\Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \Psi(x, y) + \tag{9}$$

$$+ \int_0^d (\rho g(\widetilde{y} - y) - 2(\lambda y')'(\widetilde{y} - y) - 2(\lambda x')'(\widetilde{x} - x)) \, ds \tag{10}$$

$$+ 2\lambda(d) y'(d)(\widetilde{y}(d) - y(d)) + 2\lambda(d) x'(d)(\widetilde{x}(d) - x(d)) \tag{11}$$

$$+ \int_0^d \lambda((\widetilde{x}' - x')^2 + (\widetilde{y}' - y')^2) \, ds. \tag{12}$$

Takoj vidimo naslednje: če lahko najdemo taki funkciji x in y, da sta (10) in (11) enaka 0 za vsako konfiguracijo $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ in neko pozitivno funkcijo λ, potem je (x, y) enolična konfiguracija, ki minimizira funkcional Ψ. Rešiti moramo torej naslednji sistem navadnih diferencialnih enačb

$$-(2\lambda x')' = 0, \quad \rho g - (2\lambda y')' = 0, \quad x'^2 + y'^2 = 1 \tag{13}$$

pri robnih pogojih: ali

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(d) = y_1, \quad x(d) = x_1, \tag{14}$$

ali pa

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(d) = -\alpha x(d), \quad y'(d) = x'(d)/\alpha \tag{15}$$

(zadnji robni pogoj pri $s = d$ pomeni, da na desnem robu veržnica ostane pravokotna na premico, po kateri desni rob drsi).

Enačbe (13) zlahka integriramo

$$x(s) = c_1 \left(\operatorname{arsh} \left(\frac{s - c_2}{c_1} \right) + \operatorname{arsh} \frac{c_2}{c_1} \right) \tag{16}$$

$$y(s) = \sqrt{c_1^2 + (s - c_2)^2} - \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \tag{17}$$

$$\lambda(s) = \frac{\rho g}{2} \sqrt{c_1^2 + (s - c_2)^2} \tag{18}$$

in od tod dobimo

$$y(x) = c_1 \left(\operatorname{ch} \left(\frac{x}{c_1} + b \right) - \operatorname{ch} b \right).$$

Konstante določimo iz naslednjih pogojev:

$$d = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = c_1 \operatorname{sh} \left(\frac{x_1}{c_1} + b \right) - c_1 \operatorname{sh} b \tag{19}$$

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{oziroma} \tag{20}$$

$$y(x_1) = -\alpha x_1, \quad y'(x_1) = \operatorname{sh} \left(\frac{x_1}{c_1} + b \right) = 1/\alpha. \tag{21}$$

Konstanti c_1 in b sta v primeru robnih pogojev (3) dobljeni na standarden način. Če delimo (20) z (19) in upoštevamo identitete med hiperboličnimi funkcijami, dobimo sistem enačb

$$\operatorname{th} \mu = \frac{y_1}{d}, \quad \mu = \frac{x_1}{2c_1} + b,$$

ki ima enolično rešitev μ. Podobno dobimo še sistem enačb

$$\frac{\sqrt{d^2 - y_i^2}}{x_1} = \frac{\operatorname{sh}\nu}{\nu}, \quad \nu = \frac{x_1}{2c_1},$$

ki ima enolično pozitivno rešitev ν. Vrednosti μ in ν določata iskani konstanti c_1 in b.

V primeru robnih pogojev (4) pa konstanti po nekaj elementarnih računskih operacijah enolično določimo takole: naj bo z enolična pozitivna rešitev enačbe

$$\frac{\alpha}{\sqrt{(\frac{\operatorname{sh}(z)}{z})^2 + \alpha^2}} = \operatorname{th}\left(z - \operatorname{arsh}\frac{1}{\alpha}\right).$$

S pomočjo te izračunamo

$$x_1 = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh} z}{z}\right)^2 + \alpha^2}}, \quad c_1 = \frac{x_1}{2z}, \quad b = \operatorname{arsh}\frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{c_1}.$$

Sklep

Predstavljena izpeljava verižnice kot stacionarne točke problema vezanega ekstrema (i) poda popoln odgovor na zastavljeni problem: obstoj, izračun in enoličnost točke, v kateri ima funkcional minimum, (ii) se izogne težavam z variabilno končno točko krivulje na naraven način in (iii) uporabi dejstvo, da je vez predstavljena s kvadratno funkcijo, kar nam z metodo „dopolnitve do popolnih kvadratov“ omogoči algebraičen dokaz obstoja strogega globalnega minimuma funkcionala.

Verižnica je primer mehaničnega sistema v gravitacijskem polju s togimi vezmi. Taki sistemi se pogosto lahko opišejo s kvadratično Lagrangeevo funkcijo, in tedaj je možen podoben elementaren dokaz obstoja strogega globalnega minimuma (npr. v [2], kjer je obravnavana končna verižnica).

Običajno se primer verižnice obravnava šele, ko se izpelje osnove variacijskega računa. Predstavljeni pristop pa se zlahka uporabi tudi kot uvod v variacijski račun, saj je popolnoma elementaren – obravnavamo le kvadratične funkcionale in rešujemo navadne linearne diferencialne enačbe (edine nelinearnosti se pojavijo le v integracijskih konstantah). Po drugi strani pa naš pristop v (9)–(12) že vsebuje nekaj bistvenih korakov Lagrangeeve metode.

LITERATURA

[1] J. L. Troutman, *Variatonal Calculus and Optima Control*, Springer, 1983.

[2] K. Veselić, *Finite catenary and the method of Lagrange*, SIAM, R. **37**, (1995), 224–229.