PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 6
Strani 328–337

Jože Grasselli:

O FROBENIUSOVEM ŠTEVILU

Ključne besede: matematika, teorija števil, diofantske enačbe.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1384-Grasselli.pdf

O FROBENIUSOVEM ŠTEVILU

1

V daljnji deželi plačujejo le s kovanci po 7 in 10 denarnih enot. Katere zneske lahko poravnajo?

Zastavljeno vprašanje zahteva dopolnitev. Sprašujemo seveda le po zneskih, ki se povedo v naravnih številih (saj zneska, ki je necelo število, ni mogoče poravnati). Upoštevati pa je potrebno še nekaj. Recimo, da hočemo v Sloveniji v kovancih izplačati 18 SIT. Odštejemo npr. tri kovance po 5 SIT in tri po 1 SIT; lahko pa damo npr. štiri kovance po 5 SIT in dobimo nazaj kovanec 2 SIT. Znesek 18 SIT je bil prvič poravnan *brez vračila*, drugič *z vračilom*.

Katere zneske je mogoče v daljnji deželi izplačati z vračilom?

Ker je

$$7 \cdot 3 + 10 \cdot (-2) = 1\,, \tag{1}$$

je možno izplačati znesek 1. (Plačnik da tri kovance po 7 enot in vrnejo mu dva kovanca po 10 enot.) Po množenju z naravnim številom n iz (1) dobimo

$$7(3n) + 10(-2n) = n \tag{2}$$

in vidimo, da je mogoče poravnati znesek n. (Za $3n$ kovancev po 7 enot vrnejo $2n$ kovancev po 10 enot.) Označimo z x število kovancev po 7 enot, z y število kovancev po 10 enot in vsebino enakosti (2) povejmo takole:

A. *Vsako naravno število n izrazimo lahko v obliki $7x + 10y$ s celima številoma x in y.*
Ali:
Pri vsakem naravnem številu n je enačba

$$7x + 10y = n$$

rešljiva v celih številih x, y.

Kako je v daljnji deželi s plačevanjem zneskov brez vračila?

Ker ni vračanja, nobeno od celih števil x, y ne sme biti negativno. Gre torej za natančno tiste zneske, ki jih lahko izrazimo v obliki

$$7x + 10y\,, \tag{3}$$

ko se x, y spreminjata po nenegativnih celih številih

$$0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots\,. \tag{4}$$

Moremo izplačati npr. vsote $7 = 7 \cdot 1 + 10 \cdot 0$, $10 = 7 \cdot 0 + 10 \cdot 1$, $17 = 7 \cdot 1 + 10 \cdot 1$; ne pa npr. 1, 8, 23.

Pokažimo, da je naravno število n, večje od 53, izrazljivo v obliki (3) pri x, y iz (4) in da 53 take izrazitve nima.

Iz ugotovitve A vemo, da obstajata celi števili x_0, y_0, ko je

$$7x_0 + 10y_0 = n\,. \tag{5}$$

Delitev y_0 s 7 daje količnik k in nenegativen ostanek r; števili k, r sta celi in

$$y_0 = 7k + r\,, \qquad 0 \le r < 7\,. \tag{6}$$

Z najdenim k in znanim x_0 naredimo celo število $r_1 = x_0 + 10k$; od tod sledi

$$x_0 = r_1 - 10k\,. \tag{7}$$

Ko zapisa (6), (7) za y_0 in x_0 vnesemo v (5), dobimo

$$7r_1 + 10r = n\,. \tag{8}$$

Po privzetku je $n > 53$, zaradi (6) pa $0 \le r < 7$; zato iz (8) izhaja ocena

$$7r_1 = n - 10r > 53 - 60 = -7\,.$$

Torej je $7r_1 > -7$ in tako $r_1 > -1$; to pove, da je celo število r_1 iz množice (4); ker velja to tudi za r, imamo v (8) željeno izrazitev za n.

Ali je lahko

$$7x + 10y = 53 \tag{9}$$

pri x, y iz (4)? Ker je $10 \cdot 6 > 53$ in x ni negativen, more y v (9) biti le 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ko te vrednosti za y postavimo v (9), dobimo za $7x$ po vrsti 53, 43, 33, 23, 13, 3; nobeno teh števil ni deljivo s 7 in tako x v (9) ni celo število.

Dognali smo: Brez vračila morejo v daljnji deželi poravnati vsak znesek $54, 55, 56, \ldots$; zneska 53 brez vračila ne morejo izplačati; od zneskov $1, 2, \ldots, 52$ lahko brez povračila plačajo le nekatere.

Povejmo to ugotovitev še drugače.

B. *Vsako naravno število $n > 53$ lahko zapišemo v obliki $7x + 10y$ z nenegativnima celima številoma x, y; za število 53 to ni mogoče.*
Ali:
Za vsako naravno število $n > 53$ ima enačba

$$7x + 10y = n$$

rešitev v nenegativnih celih številih x, y; pri $n = 53$ enačba take rešitve nima.

Lahko se zgodi, da pri plačevanju brez vračila plačnik enega od obeh kovancev za 7 ali 10 enot ne uporabi; ker ni vračanja, more npr. znesek 56 enot poravnati le tako, da našteje osem kovancev po 7 enot.

Pa vzemimo, da v daljnji deželi poostrijo pogoje izplačevanja. Dovoljeno je le še plačevanje brez vračila in pri vsakem plačilu je potrebno uporabiti oboje kovance. Katere zneske je sedaj mogoče poravnati? Ravno tiste, ki jih opiše izraz $7x+10y$, ko tečeta x, y po naravnih številih $1, 2, 3, \ldots$. Natančnejši odgovor vsebuje trditev

C. *Vsako naravno število $n > 70$ lahko izrazimo v obliki $7x + 10y$ pri naravnih x, y; za $n = 70$ to ne velja.*
Ali:
Za vsako naravno število n večje od 70 ima enačba

$$7x + 10y = n$$

rešitev v naravnih številih x, y; pri $n = 70$ enačba take rešitve nima.

Enakosti

$$\begin{array}{ll} 7 \cdot 3 + 10 \cdot 5 = 71 & 7 \cdot 8 + 10 \cdot 2 = 76 \\ 7 \cdot 6 + 10 \cdot 3 = 72 & 7 \cdot 1 + 10 \cdot 7 = 77 \\ 7 \cdot 9 + 10 \cdot 1 = 73 & 7 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 78 \\ 7 \cdot 2 + 10 \cdot 6 = 74 & 7 \cdot 7 + 10 \cdot 3 = 79 \\ 7 \cdot 5 + 10 \cdot 4 = 75 & 7 \cdot 10 + 10 \cdot 1 = 80 \end{array} \tag{10}$$

kažejo, da za naravna števila od 71 do 80 drži, kar pravi trditev C. Naj bo sedaj naravno število $n \geq 81$ in števka njegovih enic j. Med števili (10) je ravno eno, ki ima enico j; zaznamujmo ga a_j (npr. $a_2 = 72$, $a_0 = 80$). Ker je $n \geq 81$ in $71 \geq a_j \geq 80$, je razlika $n - a_j$ naravno število; ker se n in a_j končujeta z enako števko, je $n - a_j$ večkratnik od 10; torej je $n - a_j = 10k$ pri naravnem k. Iz (10) je $a_j = 7x + 10y$ z naravnima x, y in $n = 7x + 10(k + y)$ je želena izrazitev.

Če bi bilo

$$7x + 10y = 70 \tag{11}$$

pri naravnih x, y, bi 7 delil $10y$ in potem 7 delil y; torej bi bilo $y = 7s$ pri naravnem s. Prav tako bi po (11) bil x deljiv z 10 in $x = 10t$ pri naravnem t. Najdena x, y, postavljena v (11), pripeljeta do $70(s + t) = 70$ in po krajšanju do $s + t = 1$. Za naravni števili s, t to ne more veljati (vsota dveh naravnih števil je 2 ali več). Z naravnima x, y se torej enačba (11) ne da izpolniti.

Trditev C je dognana.

Povzemimo: Ko morajo v daljnji deželi pri plačevanju brez vračanja uporabiti oboje kovance, lahko plačajo vsak znesek $71, 72, 73, \ldots$; zneska 70 ne morejo poravnati; od zneskov $1, 2, 3, \ldots, 69$ nekatere da, druge ne.

2

Zapustimo daljnjo deželo in se pomudimo pri nekaterih posplošitvah ugotovitev iz razdelka 1. Namesto 7 in 10 vzamemo tuji naravni števili a in b, večji od 1.

Č. *Če sta a, b tuji naravni števili, je vsako naravno število izrazljivo v obliki $ax + by$ s celoštevilskima x, y.*
Ali:
Naj bosta a, b tuji naravni števili; pri naravnem številu n je enačba

$$ax + by = n$$

rešljiva v celih številih x, y.

Trditve Č ne bomo dokazovali. Povejmo samo, da npr. z Evklidovim algoritmom na a, b pridemo do celih števil x_1, y_1, takih, da velja

$$ax_1 + by_1 = 1\,.$$

Pri celih številih $x_0 = nx_1$, $y_0 = ny_1$ je potem

$$ax_0 + by_0 = n\,.$$

D. *Naj bosta a, b tuji naravni števili, večji od 1, in*

$$g(a,b) = ab - a - b\,. \tag{12}$$

Vsako naravno število $n > g(a,b)$ je izrazljivo v obliki $ax + by$ z nenegativnima celoštevilskima x, y; za $n = g(a,b)$ to ne drži.
Ali:
Pri tujih naravnih številih a, b, večjih od 1, ima enačba

$$ax + by = n \tag{13}$$

za vsako naravno število $n > g(a,b)$ rešitev v nenegativnih celih številih x, y; za $n = g(a,b)$ take rešitve nima.

Trditev D doženemo podobno kot B. Po Č obstajata celi števili x_0, y_0, ko je

$$ax_0 + by_0 = n\,. \tag{14}$$

Ko delimo y_0 z a, dobimo količnik k in ostanek r ter imamo

$$y_0 = ka + r\,, \qquad 0 \le r < a \tag{15}$$

pri celoštevilskih k, r. Znani x_0, b, k določajo celo število $r_1 = x_0 + kb$ in od tod je

$$x_0 = r_1 - kb\,. \tag{16}$$

Postavimo (16) in (15) v (14) pa smo pri enačbi

$$ar_1 + br = n\,. \tag{17}$$

Zaradi (15) je r največ $a - 1$; zato iz (17) izhaja ocena

$$ar_1 + b(a-1) \ge n\,.$$

Upoštevamo privzetek $n > ab - a - b$ in dobimo

$$ar_1 > ab - a - b - b(a-1) \quad \text{ali} \quad ar_1 > a\,.$$

Torej je celo število $r_1 > -1$ in tako $r_1 \ge 0$; po (15) je tudi $r \ge 0$ in (17) predstavlja rešitev enačbe (13) v nenegativnih celih številih $x = r_1$, $y = r$.

Ali je lahko

$$ax + by = ab - a - b \tag{18}$$

pri nenegativnih celoštevilskih x, y? Potem je

$$a(x+1) = b(a-1-y)$$

in b deli $a(x+1)$; ker je b tuj a, mora b deliti $x+1$ in je zato

$$x = -1 + sb\,. \tag{19}$$

Tu je s naravno število, saj je x nenegativno celo število in b naravno število. Iz (18) sledi tudi

$$b(y+1) = a(b-1-x)\,.$$

Od tod vidimo, da a deli $y+1$ in je potem

$$y = -1 + ta \tag{20}$$

pri naravnem številu t. Zapisa (19), (20) sledita iz predpostavke, da x, y ustrezata enačbi (18). Ko ju vanjo vnesemo, po skrčenju dobimo $(s+t)ab = ab$. Ker je $ab \neq 0$, je $s+t=1$. V naravnih številih pa to ne gre.

Trditev D je dognana.

Naravni števili a, b sta po privzetku večji od 1 in tuji, zato različni. Kadar sta najmanjši, je eno 2, drugo 3; torej je

$$ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1 \geq 2 - 1 = 1\,.$$

Z (12) podano celo število $g(a,b)$ je tako pozitivno in liho, saj sta a, b tuja. Imenuje se *Frobeniusovo število* za a, b.

Zaznamujmo s $h(a,b)$ število naravnih števil, ki jih ne moremo izraziti v obliki $ax+by$, kjer sta x, y celi nenegativni števili. Največje naravno število te vrste je po trditvi D Frobeniusovo število $g(a,b)$. Zato je $h(a,b) \geq 1$. Do boljše ocene privede kratek razmislek.

Če sta naravni števili n_1, n_2 izrazljivi, obstajajo nenegativni celoštevilski x_1, y_1, x_2, y_2, da je

$$ax_1 + by_1 = n_1\,, \qquad ax_2 + by_2 = n_2\,.$$

Po seštetju dobimo

$$a(x_1+x_2) + b(y_1+y_2) = n_1 + n_2$$

in vidimo, da je obenem z n_1, n_2 tudi vsota n_1+n_2 izrazljiva (saj sta x_1+x_2, y_1+y_2 nenegativni celi števili).

Vse možnosti, kako zapisati $g(a,b)$ z vsoto dveh nenegativnih celih števil, so

$$\begin{aligned} &0 + g(a,b) &&= g(a,b) \\ &1 + (g(a,b) - 1) &&= g(a,b) \\ &2 + (g(a,b) - 2) &&= g(a,b) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\ &(g(a,b) - 1) + 1 &&= g(a,b) \\ &g(a,b) + 0 &&= g(a,b) \end{aligned} \tag{21}$$

V vsaki od teh enačb vsaj eden od obeh sumandov na levi strani ni izrazljiv; če sta namreč oba sumanda izrazljiva, je po prejšnjem odstavku tudi njuna vsota $g(a,b)$ izrazljiva; vemo pa, da $g(a,b)$ ni izrazljiv. Ker je $g(a,b)$ lih, sta v vsaki od enačb sumanda različna, isti sumand nastopa ravno v dveh enačbah (npr. 1 v drugi in predzadnji enačbi). Neizrazljivih sumandov je tako vsaj toliko, kot je polovično število enačb (21). Zato drži

$$h(a,b) \geq (\frac{1}{2}(g(a,b) + 1)\,. \tag{22}$$

Zgled. V skladu z (12) smo že v B našli $g(7,10) = 53$; po (22) je $h(7,10) \geq 27$.

Izpeljimo še trditev:

E. *Pri tujih naravnih številih a, b, večjih od 1, vsako naravno število $n > ab$ lahko izrazimo v obliki $ax + by$ z naravnima x, y; za $n = ab$ take izrazitve ni.*

Ali:

Pri tujih naravnih številih a, b, ki sta nad 1, je za vsako naravno število $n > ab$ enačba

$$ax + by = n$$

rešljiva v naravnih številih x, y; za $n = ab$ take rešitve ni.

Vsako naravno število $n > ab$ lahko zapišemo $n = ab + j$, kjer je j naravno število. Po ugotovitvi D obstajata nenegativni celi števili x_0, y_0, ko je

$$ax_0 + by_0 = ab - a - b + j\,.$$

Seveda velja

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b\,.$$

Iz vsote teh enačb

$$a(x_0 + 1) + b(y_0 + 1) = ab + j$$

že sledi zahtevana izrazitev za $n > ab$; od celih števil x_0, y_0 namreč nobeno ni negativno, zato sta $x_0 + 1$, $y_0 + 1$ naravni števili.

Če bi pri naravnih številih x, y imeli

$$ax + by = ab\,, \tag{23}$$

bi iz tujosti a, b izhajalo, da je $x = sb$, $y = ta$ pri naravnih s, t; to bi v (23) pripeljalo do nemogoče enačbe $s + t = 1$.

Trditev E je dognana.

3

V razdelku 2 smo si ogledali, katera naravna števila zavzame izraz $ax + by$, če sta a, b tuji naravni števili nad 1 in se x, y spreminjata po celih, nenegativnih celih ali le po pozitivnih celih številih. Povejmo še nekaj besed o tem v splošnem primeru.

Naj bodo $c_1, c_2, \ldots, c_t$ tuja naravna števila, ustrezajoča pogoju

$$1 < c_1 < c_2 < \ldots < c_t$$

in $t \geq 3$.

Vsako naravno število n lahko izrazimo v obliki

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_tx_t = n\,,$$

kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_t$ cela števila.

Največje naravno število, ki ga ne moremo zapisati v obliki $c_1x_1 + + c_2x_2 + \cdots + c_tx_t$ z nenegativnimi celimi $x_1, x_2, \ldots, x_t$, se imenuje *Frobeniusovo število* za $c_1, c_2, \ldots, c_t$ in ga označujemo $g(c_1, c_2, \ldots, c_t)$. Zanj velja

$$c_1 - 1 \leq g(c_1, c_2, \ldots, c_t) \leq c_1c_2 + c_1c_3 + \cdots + c_1c_t - c_1 - c_2 - \cdots - c_t\,. \tag{24}$$

V razdelku 2 smo našli $g(c_1, c_2) = c_1c_2 - c_1 - c_2$. Za $g(c_1, c_2, \ldots, c_t)$ pri $t \geq 3$ tak obrazec ni poznan. Je pa mogoče včasih $g(c_1, c_2, \ldots, c_t)$ določiti, če imajo $c_1, c_2, \ldots, c_t$ poleg zgornjih še kakšne dodatne lastnosti. Navedimo dva takšna primera.

Če sta od števil c_1, c_2, c_3 vsaki dve tuji, je

$$g(c_1c_2, c_2c_3, c_3c_1) = 2c_1c_2c_3 - c_1c_2 - c_2c_3 - c_3c_1 .$$

Za zaporedna naravna števila $c, c+1, c+2, \ldots, c+t-1$ in c večji od 1 je

$$g(c, c+1, c+2, \ldots, c+t-1) = \left[\frac{c+t^2-3}{t-1}\right] c + \frac{t^2-t-2}{2} + \frac{(2c+t-1)t}{2} . \tag{25}$$

Oglati oklepaj v (25) pomeni, da je treba vzeti največje celo število, ki ne presega števila $(c+t^2-3)/(t-1)$. Npr. za $c = 100$, $t = 3$ iz (25) najdemo

$$g(100, 101, 102) = 53 \cdot 100 + 2 - 101 \cdot 3 = 4999 .$$

Naj pomeni $h(c_1, c_2, \ldots, c_t)$ število naravnih števil, ki jih ni mogoče izraziti v obliki $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_tx_t$ pri nenegativnih celoštevilskih $x_1, x_2, \ldots, x_t$. Podobno kot v (23) ugotovimo

$$h(c_1, c_2, \ldots, c_t) \geq \frac{1}{2}(g(c_1, c_2, \ldots, c_t) + 1) .$$

Največje naravno število, ki ga ne moremo izraziti kot vsoto $c_1x_1 + +c_2x_2 + \cdots + c_tx_t$ pri naravnih $x_1, x_2, \ldots, x_t$, zaznamujemo $f(c_1, c_2, \ldots, c_t)$; s Frobeniusovim številom je takole povezano

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_t) = g(c_1, c_2, \ldots, c_t) + c_1 + c_2 + \cdots + c_t . \tag{26}$$

Iz $g(100, 101, 102) = 4999$ sledi po (26)

$$f(100, 101, 102) = 4999 + 303 = 5302 .$$

Za vsako naravno število $n > 5302$ obstajajo naravna števila x_1, x_2, x_3, da je $100x_1 + 101x_2 + 102x_3 = n$. Ni pa mogoče v tej obliki zapisati 5302 (in nekaterih manjših naravnih števil).

Pripis. Ferdinand Georg Frobenius se je rodil leta 1849 v Berlinu in tam umrl leta 1917. Po končanem študiju v rojstnem mestu je bil profesor najprej na politehniki v Zürichu, nato na univerzi v Berlinu. Deloval je na raznih področjih matematike, zlasti pomembni so njegovi prispevki v algebri.

Naloge.

1. Trditvi D, E držita tudi tedaj, če izpustimo zahtevo, da sta a, b nad 1; ni pa $g(a,b)$ več naravno število. Prepričaj se o tem.
2. Katera naravna števila lahko izrazimo v obliki $ax + by$ z nenegativnima celoštevilskima x, y, če naravni števili a, b nista tuji?
3. Preveri, da je $h(7,10) = 27$, $h(7,11) = 33$.
4. Število 140 lahko le na en način izrazimo v obliki $7x + 10y$, če naj bosta x, y naravni števili (namreč $x = 10$, $y = 7$). Toda 141 je mogoče v taki obliki izraziti na dva, 211 na tri načine. Poišči izrazitve!
5. Vse celoštevilske rešitve enačbe

$$100x_1 + 101x_2 + 102x_3 = 5302$$

so zajete z obrazcema

$$x_1 = 51 + x_3 + 101v\,, \quad x_2 = 2 - 2x_3 - 100v\,,$$

ko x_3, v tečeta po celih številih. Od tod takoj vidimo, da enačbe ni mogoče izpolniti v naravnih številih. (Da bo x_2 naravno število, mora biti $x_3 = 0$, $v = 0$.)

6. Poštne pristojbine so 40, 41, 42, 43,... denarnih enot, poravnati jih je mogoče le z leplenjem znamk. Uprava se odloči, da bo izdala znamke le dveh različnih vrednosti, ne bo pa med njima znamke z vrednostjo 1. Ugotovi, da sta samo dve izbiri: znamki za 2 in 41 ali pa za 5 in 11 denarnih enot.

Jože Grasselli