PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **31** (2003/2004)
Številka 3
Strani 144–149

Sandi Klavžar:

O LUCASOVIH ŠTEVILIH

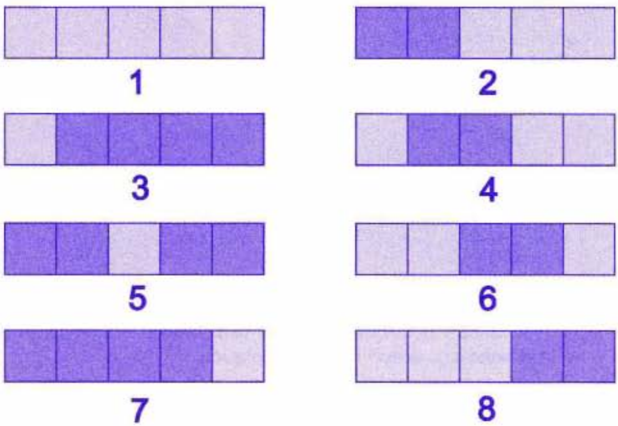
Ključne besede: matematika, teorija števil, Fibonaccijeva števila, Lucasova števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/31/1559-Klavzar.pdf

O LUCASOVIH ŠTEVILIH

Ravna barvanja in Fibonaccijeva števila

Recimo, da imamo zaporedje kvadratov, ki jih želimo pobarvati na naslednji način. Katerikoli posamezni kvadrat lahko pobarvamo z eno barvo (recimo svetlo sivo), dva sosednja kvadrata pa lahko pobarvamo le skupaj z neko drugo barvo (recimo temno sivo). Za taka sosednja kvadrata bomo rekli, da tvorita *domino*. Na koliko različnih načinov lahko na ta način pobarvamo vrsto kvadratov predpisane dolžine? Če je dolžina vrste ena, imamo en sam način, to je, da edini kvadrat pobarvamo svetlo. Za dolžino dva imamo dva načina, bodisi vsakega izmed kvadratov pobarvamo svetlo bodisi naredimo domino. Za dolžini tri in štiri naj bralec sam prešteje vse možne načine, za dolžino pet pa imamo osem načinov, ki so prikazani na sliki 1. Na primer, barvanje označeno s 3 je sestavljeno iz enega kvadrata in dveh domin.



Slika 1. Osem ravnih barvanj dolžine pet.

Naj bo n naravno število, ki predstavlja število kvadratov, in naj F_n označuje število vseh opisanih barvanj. Zgoraj smo videli, da je $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ in $F_5 = 8$. Naj bo sedaj $n \geq 3$ in poglejmo poljubno barvanje n kvadratov. Barvanje lahko končamo na dva načina:

- bodisi je zadnji kvadrat pobarvan svetlo
- bodisi zadnja dva kvadrata tvorita domino.

V prvem primeru lahko preostalih $n-1$ kvadratov pobarvamo na poljuben predpisan način in to lahko naredimo na F_{n-1} načinov. Podobno lahko v drugem primeru pobarvamo preostalih $n-2$ kvadratov na F_{n-2} načinov. Ugotovili smo torej, da za $n \geq 3$ velja

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,. \tag{1}$$

Na primer, $F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3$ in $F_4 = F_3 + F_2 = 3 + 2 = 5$. To sta ravno vrednosti, za kateri smo bralcu že svetovali, da ju poišče tako, da pregleda vse možnosti. Nadalje je $F_5 = F_4 + F_3 = 5 + 3 = 8$, kar smo tudi videli na sliki 1. Opazimo lahko, da so tri barvanja na sliki 1 taka, da se zaključijo z domino, pet pa s svetlim kvadratom. Število načinov razporeditve ploščic torej tvori zaporedje števil

$$\boxed{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots}\,,$$

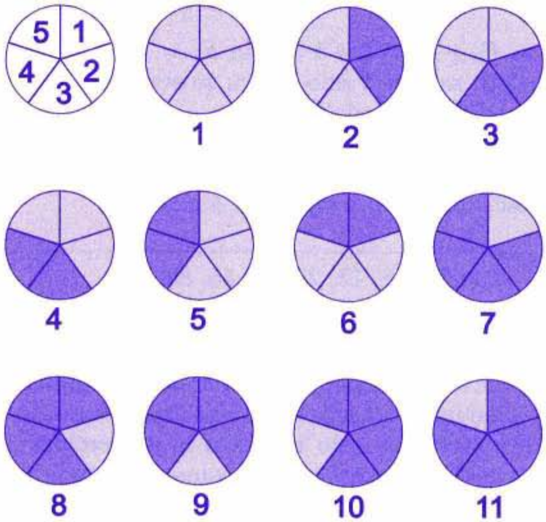
kjer začnemo z 1 in 2. Vsako naslednje število dobimo kot vsoto prejšnjih dveh števil. Naleteli smo na znamenito zaporedje **Fibonaccijevih števil**, ki ima poleg opisane interpretacije še mnoge druge zanimive načine opisa.

Fibonaccijeva števila so zelo zanimiva in pomembna v matematiki. Ker je Presek že nekajkrat pisal o njih, bomo sedaj malce skrenili s poti in si zastavili vprašanje, kaj dobimo, če se iz ravne vrste (kvadratov) preselimo na krog.

Krožna barvanja in Lucasova števila

Razdelimo krog na n enakih krožnih izsekov, na sliki 2 imamo narisan primer za $n = 5$. Na koliko načinov lahko sedaj pobarvamo krožne izseke, če jih barvamo tako, da lahko krožni izsek pobarvamo z eno barvo (svetlo sivo), ali dva sosednja izseka pobarvamo z drugo barvo (temno sivo)? Na sliki 2 imamo narisane vse možnosti za primer $n = 5$. Prva možnost je, da vse izseke pobarvamo svetlo. Nadalje lahko dva sosednja izseka pobarvamo temno, preostale izseke pa svetlo. Takih možnosti je pet, označene so s števili od 2 do 6. Nazadnje lahko pobarvamo dvakrat po dva sosednja izseka temno, preostali edini izsek pa svetlo. Tudi teh možnosti (označenih od 7 do 11) je pet, skupaj je torej enajst načinov.

Označimo z L_n število vseh različnih zgoraj opisanih barvanj kroga razdeljenega na n krožnih izsekov. Premislili smo že, da je $L_5 = 11$. Preden nadaljujemo, si poglejmo povezavo barvanj s slik 1 in 2. Barvanja na sliki 2 prerežimo med krožnima izsekoma 1 in 5. Tedaj tri barvanja izgubijo lastnost, ki smo jo zahtevali, namreč, da po dva temna izseka nastopata skupaj. To so barvanja označena s 6, 8 in 10, torej barvanja, ki imajo par izsekov 5 in 1 skupaj pobarvan s temno barvo. Preostalih osem barvanj pa ravno sovpada z barvanji s slike 1. Z drugimi besedami, s tem, ko smo namesto v ravni vrsti barvali v krogu, smo pridobili tri nove načine. Posplošimo ta premislek!



Slika 2. Enajst krožnih barvanj dolžine pet.

Naj bo n vsaj 4. Vsako ravno barvanje dolžine n nam da tudi krožno barvanje dolžine n tako, da začetek in konec ravnega zaporedje zlepimo skupaj. Takih barvanj je F_n. Za vsako krožno barvanje, ki ga ne moremo dobiti na ta način, tvorita izseka n in 1 zaporedni temni par (torej tvorita "domino"). Vsako tako barvanje lahko dobimo iz ravnega barvanja dolžine $n-2$ tako, da na začetek in konec dodamo en temen kvadrat ter ju zlepimo skupaj v temno domino. Ker je takih barvanj F_{n-2}, smo za $n \geq 4$ ugotovili, da velja

$$L_n = F_n + F_{n-2}\,. \tag{2}$$

Od tod in iz (2) sledi

$$L_n = F_n + F_{n-2} = (F_{n-1} + F_{n-2}) + (F_{n-3} + F_{n-4})\,.$$

Po drugi strani zaradi (2) dobimo

$$L_{n-1} + L_{n-2} = (F_{n-1} + F_{n-3}) + (F_{n-2} + F_{n-4})\,.$$

V zgornjih dveh enakostih smo na desni strani dobili isti izraz, torej morata biti tudi izraza na levi enaka, zato za $n \geq 4$ velja

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\,. \tag{3}$$

Iz (2) sledi, da je $L_4 = F_4 + F_2 = 5 + 2 = 7$. Vsak bralec naj sam nariše vseh sedem barvanj kroga, razdeljenega na štiri krožne izseke. Pozor, z dvema "dominama" imamo dve različni barvanji. Da bo zveza (2) veljala tudi za L_4 in L_3, definirajmo še $L_2 = 3$ in $L_1 = 1$. Slednji vrednosti lahko utemeljimo tudi takole. Če imamo krog nerazdeljen (torej je cel krog en sam krožni izsek), ga lahko pobarvamo na en sam način. Če pa imamo dva krožna izseka, če je torej krog razdeljen na polovico, lahko vsako izmed polovic pobarvamo svetlo. Skupaj tvorita domino. Pri tem je pomembno, kje je sredina take domine, zgoraj ali spodaj. Torej imamo dve različni domini in tako skupaj tri možna barvanja.

Števila barvanj krožnih izsekov torej tvorijo zaporedje števil, ki se začne z 1 in 3, nato pa je vsako naslednje število vsota prejšnjih dveh števil:

$$\boxed{1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 189, \ldots}$$

Ta števila imenujemo **Lucasova števila**. Kot vidimo, so definirana skoraj enako kot Fibonaccijeva števila, edina razlika je, da pri Fibonaccijevih začnemo z 1 in 2, medtem ko pri Lucasovih z 1 in 3.

Nekaj lastnosti Lucasovih števil

Prvo lastnost Lucasovih števil, njihovo zvezo s Fibonaccijevimi števili, smo spoznali v povezavi (2). V nadaljevanju si oglejmo še nekaj lepih lastnosti Lucasovih števil.

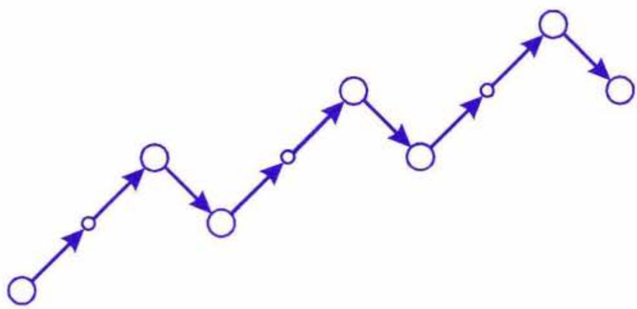
Najprej pokažimo, kje v Pascalovem trikotniku se skrivajo Lucasova števila. *Pascalov trikotnik* je trikotna shema števil, ki je zgrajena tako, da imamo v vrstici z oznako 0 enico. Vsaka naslednja vrstica se začne in konča z enico, števila pa podpisujemo tako, da število a v izbrani vrstici napišemo na sredini med števili b in c v prejšnji, pri čemer velja $a = b + c$.

Spodaj imamo izpisanih nekaj začetnih vrstic Pascalovega trikotnika.

$$
\begin{array}{lccccccccccccccccc}
0: & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
1: & & & & & & & & \underline{1} & & 1 & & & & & & & \\
2: & & & & & & & 1 & & \underline{2} & & 1 & & & & & & \\
3: & & & & & & \underline{1} & & 3 & & 3 & & \boxed{1} & & & & & \\
4: & & & & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & \boxed{1} & & & & \\
5: & & & & 1 & & \boxed{5} & & 10 & & \boxed{10} & & 5 & & 1 & & & \\
6: & & & \boxed{1} & & 6 & & \boxed{15} & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
7: & & 1 & & \boxed{7} & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
8: & \boxed{1} & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

Števila iz Pascalovega trikotnika imenujemo *binomska števila* in jih označujemo z *binomskim simbolom* $\binom{n}{k}$. Pri tem nam n pove vrstico Pascalovega trikotnika, v kateri se nahaja dano binomsko število, k pa ustrezno diagonalo, kjer tudi diagonale štejemo od 0 dalje. Na primer, $\binom{4}{1} = 4$ in $\binom{8}{3} = 56$.

Pokažimo, kje se v Pascalovem trikotniku skrivajo Lucasova števila. Število L_n lahko izračunamo na naslednji način. Začnemo pri enici v vrstici n in seštejemo tista števila, ki jih dobimo po naslednjem vzorcu:



Slika 3. Pravilo izbiranja števil v Pascalovem trikotniku.

Natančneje, seštejemo vsa tista števila, ki se nahajajo znotraj večjih krožcev. V zgornjem Pascalovem trikotniku sta označeni dve taki izbiri števil. Prva izbira se začne v vrstici 3, ustrezna števila so podčrtana, medtem ko se druga izbira začne v vrstici 8, izbrana števila so v kvadratkih. V prvem primeru je vsota izbranih števil 4, kar je ravno L_3, v drugem primeru je vsota 47, in to je L_8.

Za Lucasova števila lahko izpeljemo še veliko drugih lepih lastnosti, za vzorec navedimo tri izmed njih.

- Za vsak $n \geq 1$ velja $L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2$. Na primer,

$$\begin{aligned} L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2 &= 1^2 + 3^2 + 4^2 + 7^2 + 11^2 \\ &= 1 + 9 + 16 + 49 + 121 \\ &= 196 \\ &= 11 \cdot 18 - 2 \\ &= L_5 L_6 - 2\,. \end{aligned}$$

- Za vsak $n \geq 2$ velja $L_{n+1} = \frac{1}{2}(L_n + 5F_{n-1})$. Na primer,

$$\begin{aligned} L_5 &= 11 \\ &= \frac{1}{2}(7 + 5 \cdot 3) \\ &= \frac{1}{2}(L_4 + 5F_3)\,. \end{aligned}$$

- Za vsak $n \geq 1$ velja $L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n$. Na primer,

$$\begin{aligned} L_4^2 &= 49 \\ &= 47 + 2 \\ &= L_8 + 2(-1)^8 \\ &= L_8 + 2\,. \end{aligned}$$

Naloge

1. Nariši vsa ravna barvanja kvadratov dolžine 6.
2. Izračunaj F_{20} in L_{20}.
3. Seštevaj vsako drugo Fibonaccijevo število, torej izračunaj vsote oblike $F_1 + F_3 + \cdots$. Ali opaziš kako zakonitost?
4. Nariši vsa krožna barvanja dolžine 6.
5. Oglej si nekaj produktov oblike $F_n L_{n+1}$, na primer $F_3 L_4 = 3 \cdot 7 = 21$. Ali opaziš kako zakonitost?
6. Spoznali smo vzorec, ki nam iz Pascalovega trikotnika izlušči Lucasova števila. Recimo, da sedaj zopet začnemo z enico v vrstici n ter nato v omenjenem vzorcu jemljemo le vsako drugo število—z drugimi besedami, izbiramo števila spodnje diagonale. Na primer, za $n = 8$ so to števila 1, 7, 15, 10 in 1. Ali opaziš pravilo?

Sandi Klavžar

Rešitve so na str. 167.