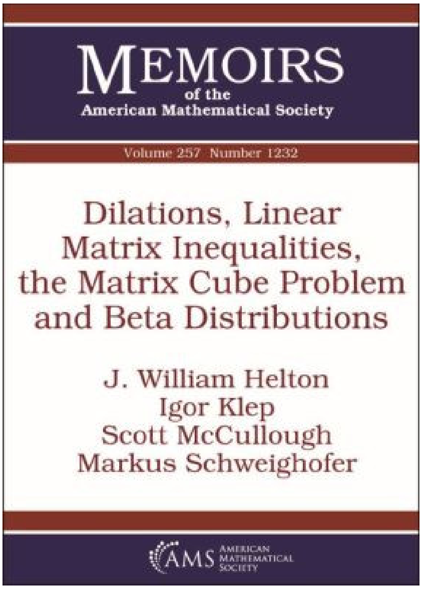
J. W. Helton, I. Klep, S. McCullough, M. Schweighofer, Dilations, linear matrix inequalities, the matrix cube problem and beta distributions, Memoirs of the American Mathematical Society 1232, American Mathematical Society, Providence, 2019, 106 strani.



Osrednja tematika knjige je študij vsebovanosti množice rešitev ene linearne matrične neenakosti (LMN) v množici rešitev druge. Bolj natančno, LMN je vsaka neenakost oblike

$$I_d \otimes 1 + A_1 \otimes x_1 + \cdots + A_g \otimes x_g \succeq 0, \quad (1)$$

kjer so $d \in \mathbb{N}$ naravno število, I_d identična $d \times d$ matrika, $A := (A_1, \ldots, A_g)$ g-terica realnih simetričnih $d \times d$ matrik, $x_1, \ldots, x_g$ spremenljivke, simbol $\otimes$ predstavlja običajno množenje matrike z realnim številom, simbol $\succeq 0$ pa pomeni, da je leva stran pozitivno semidefinitna matrika. Množica rešitev $D_A(1)$ neenakosti (1) se imenuje *spektraeder.*

Avtorji študirajo, kako za dani g-terki $A^{(i)} = (A_1^{(i)}, \ldots, A_g^{(i)})$, $i = 1, 2$, realnih simetričnih $d_i \times d_i$ matrik, učinkovito preveriti vsebovanost pripadajočih spektraedrov

$$D_{A^{(1)}}(1) \subseteq D_{A^{(2)}}(1). \quad (2)$$

Osrednja lastnost spektraedrov je konveksnost, zato je njihov študij v zadnjih nekaj desetletjih izredno pomembna in razvijajoča veja konveksne optimizacije. Predstavljajo pomemben vir rezultatov zlasti za področje semidefinitnega programiranja. Izkaže pa se, da posplošitev spektraedrov do prostih spektraedrov pogosto vodi do natančnejših rezultatov o algebraični povezavi med tericama matrik $A^{(1)}$ in $A^{(2)}$. Če v (1) vstavljamo za spremenljivke simetrične matrike iste velikosti (namesto 1 pa identično matriko te velikosti), simbol $\otimes$ pa označuje Kroneckerjev tenzorski produkt matrik, potem pripadajočo množico rešitev D_A imenujemo *prost spektraeder.* Ker pa je vsaka *prosta* konveksna množica prost spektraeder [3], LMN-ji predstavljajo tudi osnovni predmet raziskovanja proste analize, ki svojo uporabo najde predvsem na področjih proste verjetnosti, teorije sistemov, optimizacije in operatorskih algeber.

Preverjanje vsebovanosti (2) je na splošno zelo zahteven problem in spada v razred NP-težkih problemov. Avtorji v knjigi problem poenostavijo do preverjanja vsebovanosti prostih spektraedrov

$$D_{A^{(1)}} \subseteq D_{A^{(2)}}, \tag{3}$$

kar je problem z znano algebraično karakterizacijo [2, posledica 3.7], ki se jo da učinkovito preverjati z numeričnim algoritmom [2, razdelek 4]. Za smiselnost te poenostavitve natančneje študirajo povezavo z osnovnim problemom (2). Glavni pristop [2] dosedanjega študija LMN-jev je bil uvedba unitalne linearne preslikave $\tau : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ med linearnima ogrinjačama

$$\mathcal{S}_i := \Big\{ c_0 I_{d_i} + \sum_{j=1}^{g} c_j A_j^{(i)} : c_0, \ldots, c_g \in \mathbb{R} \Big\}, \quad i = 1, 2,$$

koeficientov *linearnih matričnih šopov*, kot imenujemo vsako levo stran (1), s predpisom $\tau(I_{d_1}) = I_{d_2}$, $\tau(A_j^{(1)}) = A_j^{(2)}$, $j = 1, \ldots, g$, in opažanje, da sta v primeru omejenosti spektraedra $D_{A^{(1)}}(1)$ vsebovanosti (2) oz. (3) ekvivalentni pozitivnosti oz. popolni pozitivnosti τ. Uporaba netrivialnih rezultatov teorije operatorskih algeber nato v primeru popolne pozitivnosti natančno algebraično opiše τ. V knjigi je uveden povsem nov pristop k reševanju problema (2), pri čemer je ključen vidik teorije dilatacij. (Lep pregledni članek o teoriji dilatacij je [5].) Glavni rezultat knjige je naslednji dilatacijski izrek (izrek 1.1 v knjigi).

Izrek 1. *Naj bo $d \in \mathbb{N}$ naravno število. Obstaja hilbertov prostor $\mathcal{H}$, družina $\mathscr{C}_d$ komutirajočih sebiadjungiranih skrčitev na $\mathcal{H}$, izometrija $V : \mathbb{R}^d \to \mathcal{H}$ in realno število $\vartheta(d)$, večje ali enako 1, tako da za vsako simetrično $d \times d$ skčitev X obstaja operator $T \in \mathscr{C}_d$, ki zadošča enakosti*

$$\frac{1}{\vartheta(d)} X = V^* T V. \tag{4}$$

Z uporabo tega izreka avtorji pokažejo, da je preverjanje vsebovanosti skrčitve $kD_{A^{(1)}}(1)$, kjer je $0 < k \leq 1$, v $D_{A^{(2)}}(1)$, ekvivalentno preverjanju vsebovanosti $kD_{A^{(1)}} \subseteq D_{A^{(2)}}$ na nivoju prostih spektraedrov. Kot je zapisano zgoraj, pa se da to vsebovanost učinkovito preveriti s pomočjo numeričnega postopka. S tem je do konstante skrčitve natančno rešen osnovni problem (2) knjige.

Primer, ko je $D_{A^{(1)}}$ enak množici

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(X_1, \ldots, X_g) \colon X_1, \ldots, X_g \text{ so simetrične } n \times n \text{ skrčitve}\},$$

imenovani *prosta kocka*, sta prva študirala Ben-Tal in Nemirovski [1]. V tem primeru je skrčitvena konstanta k kar enaka številu $\frac{1}{\vartheta(d_1)}$, kjer je $\vartheta(d_1)$ dilatacijska konstanta iz izreka 1. Pri tem je število $\vartheta(d_1)$ v knjigi natančno določeno s formulo, dokazana pa je tudi njegova optimalnost, tj. gre za najmanjše tako število, za katerega zaključek izreka 1 še velja. S tem je v celoti rešen problem vsebovanosti proste kocke v danem prostem spektraedru $D_{A^{(2)}}$ iz [1].

Na koncu omenimo še en pomemben vidik knjige. Poleg rešitve osnovnega problema so izpeljani rezultati zanimivi tudi za področja, iz katerih izhajajo. Izrek 1 je presenetljiva novost za teorijo dilatacij, saj v primerjavi z doslej znanimi dilatacijskimi rezultati nastopajoča dilatacijska konstanta $\vartheta(d)$ ni odvisna od števila matrik, pač pa le od njihove velikosti. Prav tako so rezultati pri izpeljavi formule za konstanto $\vartheta(d)$ zanimivi za teorijo verjetnosti, saj podajajo nova dejstva o nekaterih standardnih verjetnostnih porazdelitvah, kot sta binomska in beta porazdelitev.

Igor Klep je doktoriral leta 2006 na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, kjer je od leta 2018 zaposlen kot redni profesor za področje matematike. V vmesnem času je raziskovalno in pedagoško deloval na mnogih tujih institucijah (najdlje na Univerzi v Konstanzu v Nemčiji, Univerzi v San Diegu v ZDA in Univerzi v Aucklandu na Novi Zelandiji). Od leta 2018 je tudi podpredsednik mednarodnega združenja IWOTA, ustanovljenega leta 1981, ki letno organizira konferenco iz teorije operatorjev in njihove uporabe.

LITERATURA

[1] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *On tractable approximations of uncertain linear matrix inequalities affected by interval uncertainty*, SIAM J. Optim. **12** (2002), 811–833.

[2] J. W. Helton, I. Klep, S. McCullough, *The matricial relaxation of a linear matrix inequality*, Math. Program. **138** (2013), 401–445.

[3] J. W. Helton, S. McCullough, *Every free basic convex semi-algebraic set has an LMI representation*, Ann. Math. **176** (2012), 979–1013.

[4] I. Klep, *Matrično konveksne množice*, Obzornik mat. fiz. **63** (2016), 81–99.

[5] O. M. Shalit, *Dilation theory: a guided tour*, v: Operator Theory, Functional Analysis and Applications (ur. M. A. Bastos, L. Castro, A. Y. Karlovich), Operator Theory: Advances and Applications **282**, 2021, Birkhäuser, Cham; dostopno tudi na `doi.org/10.1007/978-3-030-51945-2_28`.

Aljaž Zalar