Dodatna poglavja iz linearne algebre za 1. letnik finančne matematike na FMF

Primož Moravec

13. september 2017

CIP - Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana
512.64(075.8)

Primož Moravec
Dodatna poglavja iz linearne algebre za 1. letnik finančne matematike na FMF
[Elektronski vir] / Primož Moravec ; [slike avtor]. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal., 2017
Način dostopa (URL):
https://www.fmf.uni-lj.si/~moravec/Papers/finmat_alg1.pdf

ISBN 978-961-288-021-7

291672320

Kazalo

Uvod

Okvirna vsebina:

- Moore–Penroseov inverz matrike
- Jordanova kanonična forma
- Perron–Frobeniusov izrek
- Model Leontijeva
- Pozitivni funkcionali

Predznanje, ki je potrebno za razumevanje snovi, ki je tu obdelana, je pokrito v skripti Tomaža Koširja *Linearna algebra za študente Praktične matematike*, ki je na voljo na povezavi

`http://www.fmf.uni-lj.si/~kosir/poucevanje/0910/alg1-fm.html`.

Tudi oznake, ki jih uporabljamo, tesno sledijo tistim, ki so uporabljeni v Koširjevi skripti.

Poglavje 1

Moore–Penroseov inverz matrike

Oglejmo si sistem linearnih enačb
$$Ax = b.$$
Če je matrika A kvadratna in obrnljiva, ima ta sistem enolično rešitev $x = A^{-1}b$. Če je sistem rešljiv in je rang matrike A strogo manjši od števila neznank, lahko rešitve, ki jih je neskončno mnogo, dobimo z Gaussovo eliminacijo. V praktičnih problemih pa se pogosto pojavi potreba po tem, da najdemo rešitve sistema eksplicitno s formulo, ki je odvisna od A in b. Po drugi strani, tudi če sistem nima rešitve, bi včasih radi našli „približno" rešitev tega sistema. Kako to dvoje storiti?

V tem poglavju si bomo ogledali konstrukcijo Moore–Penroseovega inverza matrike, ki odgovori na zgornje vprašanje.

1.1 Psevdoinverz matrike

Definicija. Naj bo A $m \times n$ matrika z realnimi elementi. Matriki A^+ pravimo *psevdoinverz* oziroma *Moore–Penroseov inverz* matrike A, če veljajo naslednje zahteve:

1. $AA^+A = A$,
2. $A^+AA^+ = A^+$,
3. $(AA^+)^{\mathrm{T}} = AA^+$,
4. $(A^+A)^{\mathrm{T}} = A^+A$.

Ker morata matriki AA^+ in A^+A obstajati, mora biti matrika A^+, če obstaja, velikosti $n \times m$. Pripomnimo, da bi lahko pojem psevdoinverza definirali tudi za kompleksne matrike, pri čemer bi v pogojih (3) in (4) transponiranje zamenjali s hermitiranjem; v splošnem bi lahko oba pogoja formulirali kot zahtevo, da sta matriki AA^+ in A^+A sebi adjungirani. Od tu dalje se bomo zaradi enostavnosti omejili le na realne matrike.

Trditev 1.1.1. *Naj bo A matrika. Če za A obstaja psevdoinverz, je enolično določen.*

Dokaz. Naj bosta B in C psevdoinverza matrike A. Potem je
$$\begin{aligned} AB &= (ACA)B = (AC)(AB) = (AC)^{\mathrm{T}}(AB)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}(ABA)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \\ &= (AC)^{\mathrm{T}} = AC. \end{aligned}$$
Podobno je $BA = CA$. Od tod dobimo
$$B = (BA)B = C(AB) = CAC = C,$$
s čimer je trditev dokazana. $\square$

Kasneje bomo dokazali, da ima vsaka matrika psevdoinverz in izpeljali splošno formulo za računanje le-tega. Tu si oglejmo nekaj posebnih primerov.

Primer 1.1.2. Naj bo A obrnljiva kvadratna matrika. Potem matrika A^{-1} zadošča lastnostim (1)–(4) iz definicije psevdoinverza, zato je $A^+ = A^{-1}$. Psevdoinverz je torej posplošitev pojma inverza obrnljive kvadratne matrike.

Primer 1.1.3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

neničeln stolpec. Potem je

$$A^+ = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}.$$

Hitro namreč preverimo, da za to matriko veljajo lastnosti (1)–(4) iz definicije psevdoinverza.

Primer 1.1.4. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je B obrnljiva kvadratna matrika. Potem je

$$A^+ = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar je zopet enostavno preveriti po definiciji.

Lema 1.1.5. *Za poljubni matriki A in B, za kateri obstaja AB, velja $\operatorname{rang}(AB) \le \operatorname{rang} A$ in $\operatorname{rang}(AB) \le \operatorname{rang} B$.*

Dokaz. Stolpci matrike AB so $Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_n$, kjer so $b_1, b_2, \ldots, b_n$ stolpci matrike B. Zato je $\operatorname{rang}(AB) \le \operatorname{rang} A$. Po drugi strani je

$$\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(AB)^{\mathrm{T}} = \operatorname{rang}(B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}) \le \operatorname{rang} B^{\mathrm{T}} = \operatorname{rang} B.$$

S tem je lema dokazana. □

Trditev 1.1.6. *Naj bo A realna matrika, za katero obstaja psevdoinverz. Potem velja:*

(a) A^+ *ima tudi psevdoinverz; velja* $(A^+)^+ = A$.

(b) A^{T} *ima tudi psevdoinverz; velja* $(A^{\mathrm{T}})^+ = (A^+)^{\mathrm{T}}$.

(c) $\operatorname{rang} A^+ = \operatorname{rang} A$.

(d) $A^{\mathrm{T}} A A^+ = A^{\mathrm{T}}$.

Dokaz. Dokaz točk (a) in (b) je rutinsko preverjanje zahtev (1)–(4) iz definicije psevdoinverza, ki ga prepuščamo bralcu. Za dokaz točke (c) uporabimo Lemo 1.1.5 in od tod dobimo

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A(A^+A)) \le \operatorname{rang}(A^+A) \le \operatorname{rang} A^+$$

in

$$\operatorname{rang} A^+ = \operatorname{rang}(A^+(AA^+)) \le \operatorname{rang}(AA^+) \le \operatorname{rang} A,$$

od koder sledi (c). Preostane še dokaz točke (d). Z uporabo (b) dobimo

$$A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^+ A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^+)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(AA^+)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} A A^+,$$

saj je matrika AA^+ po definiciji simetrična. □

Sedaj bomo pokazali, da ima vsaka realna matrika psevdoinverz. Najprej obdelajmo poseben primer, ko je rang matrike enak številu stolpcev:

Izrek 1.1.7. *Naj bo A $m \times n$ matrika, za katero velja* $\operatorname{rang} A = n$. *Potem psevdoinverz A^+ obstaja in je dan s formulo*

$$A^+ = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}.$$

Dokaz. Najprej dokažimo, da je matrika $A^{\mathrm{T}}A$, ki je velikosti $n \times n$, obrnljiva. Predpostavimo nasprotno, torej, da je $\operatorname{rang}(A^{\mathrm{T}}A) < n$. Potem ima homogen sistem linearnih enačb

$$A^{\mathrm{T}}Ax = 0$$

netrivialno rešitev $x \in \mathbb{R}^n$. Oglejmo si

$$0 = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = (Ax)^{\mathrm{T}}Ax = [\langle Ax, Ax\rangle],$$

kjer je $\langle , \rangle$ standardni skalarni produkt v $\mathbb{R}^m$. Zaradi pozitivne definitnosti skalarnega produkta sledi $Ax = 0$, kar pa je nemogoče, ker je $\operatorname{rang} A = n$. Zato $A^{\mathrm{T}}A$ ima inverz. Formula za A^+ sedaj sledi neposredno iz Trditve 1.1.6 (d). □

Opomba 1.1.8. Podoben rezultat lahko pokažemo tudi v primeru, ko je A $m \times n$ matrika, za katero je $\operatorname{rang} A = m$. V tem primeru je namreč rang matrike A^{T} tudi enak m, kar je ravno število stolpcev matrike A^{T}. Po izreku 1.1.7 dobimo

$$(A^{\mathrm{T}})^+ = (AA^{\mathrm{T}})^{-1}A,$$

iz Trditve 1.1.6 (b) pa sledi

$$A^+ = ((A^T)^+)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Primer 1.1.9. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\operatorname{rang} A = 2$, lahko A^+ izračunamo s pomočjo formule iz Izreka 1.1.7:

$$\begin{aligned} A^+ &= (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 13 & 15 & -10 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

V splošnem primeru lahko problem obstoja psevdoinverza prevedemo na situacijo Izreka 1.1.7 na naslednji način:

Trditev 1.1.10. *Naj bo A $m \times n$ matrika ranga r. Potem obstajata $m \times r$ matrika F in $r \times n$ matrika G, za kateri velja* $\operatorname{rang} F = \operatorname{rang} G = r$ *in* $A = FG$.

Dokaz. Vzemimo r linearno neodvisnih stolpcev matrike A in z njimi tvorimo matriko F, ki je velikosti $m \times r$ in ima rang enak r. Naj bo A_k k-ti stolpec matrike A. Potem je A_k linearna kombinacija stolpcev matrike F, kar lahko na kratko zapišemo kot

$$A_k = FG_k,$$

kjer so G_k stolpci dolžine r. Če postavimo

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \dots & G_n \end{bmatrix},$$

je to matrika velikosti $r \times n$, za katero po konstrukciji velja $A = FG$. Ker ima matrika G r vrstic, je $\operatorname{rang} G \leq r$. Po drugi strani pa je $r = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(FG) \leq \operatorname{rang} G$, zato je $\operatorname{rang} G = r$. □

Primer 1.1.11. Oglejmo si matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rang matrike A je enak 2. Ker sta prva dva stolpca linearno neodvisna, lahko postavimo

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Sedaj stolpce matrike A izrazimo kot linearne kombinacije stolpcev iz F:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ oziroma } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ oziroma } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ oziroma } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Zato je

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izrek 1.1.12. *Naj bo A realna matrika, $A = FG$, kjer sta F in G matriki iz Trditve 1.1.10. Potem psevdoinverz matrike A obstaja in je dan s formulo*

$$A^+ = G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}}.$$

Dokaz. Iz dokaza Izreka 1.1.7 sledi, da sta matriki GG^{T} in $F^{\mathrm{T}}F$ obrnljivi (glej tudi Opombo 1.1.8). Sedaj moramo le še preveriti, da za matriko A^+, ki je definirana v Izreku 1.1.12, veljajo zahteve (1)–(4) iz definicije psevdo inverza. Z direktnim računom dobimo

$$AA^+A = F(GG^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1})((F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}}F)G = FG = A,$$

$$A^+AA^+ = G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}((F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}}F)(GG^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1})(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}} = A^+,$$

poleg tega pa sta

$$AA^+ = FGG^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}} = F(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}}$$

in

$$A^+A = G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}}FG = G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}G$$

očitno simetrični matriki. S tem je dokaz končan. □

Primer 1.1.13. Poiščimo psevdoinverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

iz Zgleda 1.1.11. Matriko A lahko kot v Trditvi 1.1.10 zapišemo kot $A = FG$, kjer

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Najprej izračunajmo

$$F^{\mathrm{T}}F = \begin{bmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad GG^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Po Izreku 1.1.12 je

$$\begin{aligned} A^+ &= G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{54}\begin{bmatrix} 93 & -78 \\ -78 & 66 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -23 & -6 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \\ 19 & 6 & -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Omenimo, da obstaja še veliko drugih načinov računanja psevdoinverzov matrik.

1.2 Sistemi linearnih enačb

Oglejmo si eno od uporab psevdoinverza matrike. Naj bo dan sistem linearnih enačb

$$Ax = b,$$

kjer je A $m \times n$ matrika. Znano je, da rešitev tega sistema obstaja natanko tedaj, ko je rang matrike A enak rangu razširjene matrike $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$. Naslednji rezultat karakterizira obstoj rešitev s pomočjo psevdoinverza matrike A:

Trditev 1.2.1. *Rešitev sistema $Ax = b$ obstaja natanko tedaj, ko je $AA^+b = b$.*

Dokaz. Če velja $AA^+b = b$, je ena od rešitev sistema očitno $x = A^+b$. Obratno, recimo, da obstaja x, da je $Ax = b$. Ker je $A = AA^+A$, dobimo

$$b = AA^+Ax = AA^+b,$$

s tem pa je dokaz končan. □

Izrek 1.2.2. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in recimo, da je sistem linearnih enačb*

$$Ax = b$$

rešljiv. Potem lahko vse rešitve sistema dobimo s formulo

$$x = A^+b + (I - A^+A)y,$$

kjer je $y \in \mathbb{R}^n$ poljuben vektor.

Dokaz. Iz teorije Gaussove eliminacije že vemo, da če je x_0 neka rešitev sistema $Ax = b$, potem je množica vseh rešitev sistema enaka

$$x_0 + \ker A = \{x_0 + z \mid z \in \ker A\}.$$

Po Trditvi 1.2.1 je A^+b rešitev sistema $Ax = b$, zato je dovolj preveriti, da je jedro matrike A enako $K = \{(I - A^+A)y \mid y \in \mathbb{R}^n\}$. Vzemimo $z \in K$. Potem je

$$Az = A(I - A^+A)y = Ay - AA^+Ay = 0,$$

torej je $K \subseteq \ker A$. Obratno, če je $z \in \ker A$, potem je $Az = 0$. Potem je

$$z = (I - A^+A)z,$$

torej je $z \in K$. S tem je izrek dokazan. $\square$

Posledica 1.2.3. *Naj bo sistem enačb $Ax = b$ rešljiv. Potem je rešitev ena sama natanko tedaj, ko velja $A^+A = I$. V tem primeru rešitev izračunamo po formuli*

$$x = A^+b.$$

Primer 1.2.4. Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Matrika sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

V Primeru 1.1.13 smo že izračunali psevdoinverz te matrike:

$$A^+ = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -23 & -6 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \\ 19 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Direkten račun pokaže, da velja $AA^+b = b$, zato sistem ima rešitev po Trditvi 1.2.1. Po Izreku 1.2.2 so vse rešitve sistema oblike $x = A^+b + (I - A^+A)y$, kjer je y poljuben vektor v $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -23 & -6 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \\ 19 & 6 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -23 & -6 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \\ 19 & 6 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Na prvi pogled izgleda, da bomo dobili triparametrično družino rešitev. V resnici je družina rešitev enoparametrična; če označimo

$$t = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{6},$$

dobimo

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{18} + t, \\ x_2 &= \frac{1}{9} - 2t, \\ x_3 &= \frac{5}{18} + t. \end{aligned}$$

Pri tem je t poljubno realno število.

1.3 Metoda najmanjših kvadratov

Naj bo dan sistem linearnih enačb
$$Ax = b,$$
kjer je A $m \times n$ realna matrika in $b \in \mathbb{R}^m$. Pri tem predpostavimo, da je prostor $\mathbb{R}^m$ opremljen s standardnim skalarnim produktom. Recimo sedaj, da je sistem protisloven, torej, da nima rešitev. Iz Trditve 1.2.1 vemo, da ta situacija nastopi natanko tedaj, ko $AA^+b \neq b$. V tem primeru poskušamo najti takšne vektorje $x \in \mathbb{R}^n$, ki so v nekem smislu „skoraj rešitve" sistema. Načinov za to, kako merimo, ali je nek vektor „skoraj rešitev", je več. Ogledali si bomo enega od najbolj standardnih.

Definicija. Pravimo, da je vektor $y \in \mathbb{R}^n$ rešitev sistema $Ax = b$ *po principu najmanjših kvadratov*, če za vsak $z \in \mathbb{R}^n$ velja
$$\|Ay - b\| \leq \|Az - b\|.$$

Če torej gledamo funkcijo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom $F(z) = \|Az - b\|$, iščemo globalni minimum te funkcije na $\mathbb{R}^n$. Na problem lahko pogledamo še drugače. Najprej se spomnimo definicije pravokotne projekcije vektorja na podprostor (v našem posebnem primeru):

Definicija. Naj bo U podprostor v $\mathbb{R}^m$ in $v \in \mathbb{R}^m \setminus U$. Potem je vektor $u \in U$ *pravokotna projekcija* vektorja v na U, če je vektor $u - v$ pravokoten na vse vektorje iz U.

Znano je, da če je $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ ortonormirana baza podprostora U, potem lahko pravokotno projekcijo vektorja v na U izračunamo po formuli
$$u = \mathrm{proj}_U v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle v, e_k\rangle e_k.$$

Za pravokotno projekcijo velja naslednja lastnost:

Trditev 1.3.1. *Naj bo U podprostor v $\mathbb{R}^m$ in $v \in \mathbb{R}^m \setminus U$. Potem za vsak vektor $u \in U$, različen od* $\mathrm{proj}_U v$*, velja*
$$\|v - u\| > \|v - \mathrm{proj}_U v\|.$$

Dokaz. Po definiciji je $v - \mathrm{proj}_U v$ pravokoten na neničeln vektor $\mathrm{proj}_U v - u \in U$. Po Pitagorovem izreku je
$$\|v - u\|^2 = \|v - \mathrm{proj}_U v + \mathrm{proj}_U v - u\|^2 = \|v - \mathrm{proj}_U v\|^2 + \|\mathrm{proj}_U v - u\|^2 > \|v - \mathrm{proj}_U v\|^2,$$
to pa dokaže trditev. $\square$

Trditev 1.3.1 sedaj ponuja način, kako poiščemo rešitev sistema $Ax = b$ po principu najmanjših kvadratov. Ker sistem po predpostavki ni rešljiv, je $b \notin \mathrm{im}\, A$. Označimo
$$w = \mathrm{proj}_{\mathrm{im}\, A} b.$$
Po Trditvi 1.3.1 za vsak $z \in \mathbb{R}^n$ velja
$$\|b - Az\| \geq \|b - w\|.$$
Ker je $w \in \mathrm{im}\, A$, ga lahko zapišemo kot $w = Ay$ za nek $y \in \mathbb{R}^n$. Potem je $\|b - Az\| \geq \|b - Ay\|$; ker to velja za vsak $z \in \mathbb{R}^n$, je y rešitev sistema $Ax = b$ po principu najmanjših kvadratov.

Lahko se vprašamo, koliko je rešitev danega sistema linearnih enačb po principu najmanjših kvadratov. Oglejmo si najprej primer, ko so stolpci matrike A linearno neodvisni. V tem primeru je $\mathrm{rang}\, A = n$ in
$$\dim \ker A = n - \mathrm{rang}\, A = 0,$$

kar pomeni, da je A, gledana kot linearna preslikava $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, injektivna. To pomeni, da je vektor y, konstruiran v zgornjem odstavku, enolično določen. V tem primeru je rešitev sistema po principu najmanjših kvadratov ena sama. V splošnem je lahko takšnih rešitev več, dobimo pa jih tako, da poiščemo vse vektorje $y \in \mathbb{R}^n$, za katere velja

$$Ay = \mathrm{proj}_{\mathrm{im}\, A} b.$$

Ogledali si bomo, kako si lahko s pomočjo psevdoinverza matrike A pomagamo pri iskanju vseh rešitev po principu najmanjših kvadratov. Rezultat je presenetljivo enak kot v Izreku 1.2.2:

Izrek 1.3.2. *Naj bo dan sistem linearnih enačb*

$$Ax = b,$$

kjer je A $m \times n$ realna matrika in $b \in \mathbb{R}^m$. Množica vseh rešitev sistema po principu najmanjših kvadratov je enaka

$$\{A^+ b + (I - A^+ A)y \mid y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dokaz. Brez škode lahko predpostavimo, da sistem ni rešljiv. Kot zgoraj definirajmo

$$w = \mathrm{proj}_{\mathrm{im}\, A} b.$$

Recimo, da sta y_0 in y_1 takšna vektorja iz $\mathbb{R}^n$, za katera velja

$$w = Ay_0 = Ay_1.$$

Potem je $y_0 - y_1 \in \ker A$. Povsem enak sklep kot v dokazu Izreka 1.2.2 pokaže, da je

$$\ker A = \{(I - A^+ A)y \mid y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Zato je dovolj pokazati, da za vektor $v = A^+ b$ velja $Av = w$. Vzemimo poljuben $z \in \mathbb{R}^n$. Potem iz Trditve 1.1.6 dobimo

$$\langle Av - b, Az \rangle = \langle A^{\mathrm{T}}(Av - b), z \rangle = \langle (A^{\mathrm{T}} A A^+ - A^{\mathrm{T}})b, z \rangle = \langle 0, z \rangle = 0,$$

torej je vektor $Av - b$ pravokoten na vse vektorje iz $\mathrm{im}\, A$. Po definiciji pravokotne projekcije je $Av = w$. □

V posebnem primeru, ko je $\mathrm{rang}\, A = n$, smo že videli, da je rešitev sistema po principu najmanjših kvadratov ena sama. Po izreku 1.3.2 je dana z $y = A^+ b$. Če uporabimo še Izrek 1.1.7, dobimo:

Posledica 1.3.3. *Naj bo dan sistem linearnih enačb*

$$Ax = b,$$

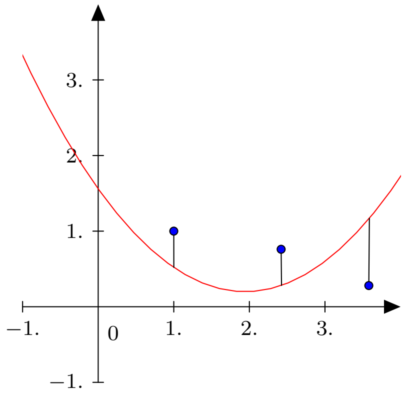
kjer je A $m \times n$ realna matrika in $b \in \mathbb{R}^m$. Če je $\mathrm{rang}\, A = n$, je rešitev sistema po principu najmanjših kvadratov

$$y = (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}} b.$$

Primer 1.3.4. Recimo, da imamo podatke meritev količine y v odvisnosti od spremenljivke x:

x	y
1	0,4
2	0,3
3	0,9
4	1,1
5	3,7

Slika 1.1: Odmiki točk od grafa.



Podatke bi radi aproksimirali s kvadratno funkcijo $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ tako, da bo vsota kvadratov odmikov posameznih točk od ustreznih točk na paraboli pri isti abscisi čim manjša (gl. Sliko 1.1).

Problem lahko prevedemo na zgornjega tako, da pogledamo sistem enačb za neznanke a_0, a_1 in a_2, ki ga dobimo, če koordinate točk vstavimo v kvadratno funkcijo. Zapišemo ga lahko v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,9 \\ 1,1 \\ 3,7 \end{bmatrix}.$$

Seveda sistem nima rešitve (to je jasno iz tega, ker se parabola ne bo točno prilegala vsem točkam), iščemo pa rešitev sistema po principu najmanjših kvadratov. Označimo z A matriko sistema in z b vektor na desni strani. Ker je rang $A = 3$, lahko uporabimo Posledico 1.3.3 in dobimo:

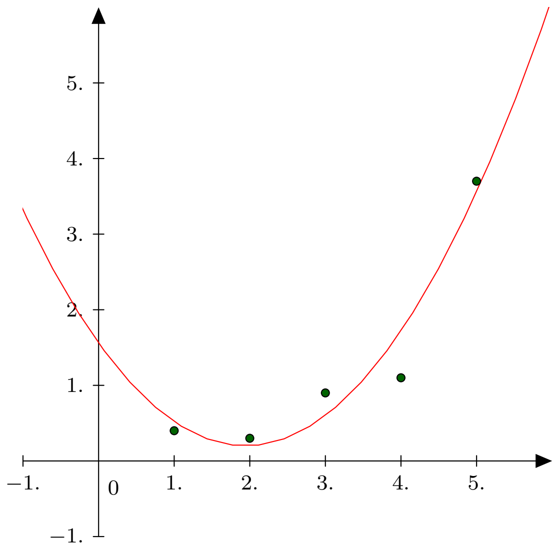
$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 779 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,9 \\ 1,1 \\ 3,7 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 322 & -231 & 35 \\ -231 & 187 & -30 \\ 35 & -30 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,4 \\ 26,6 \\ 119,8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1,56 \\ -1,40 \\ 0,36 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Iskana kvadratna funkcija je torej

$$y = 1,56 - 1,40x + 0,36x^2.$$

Graf in točke meritev so prikazani na Sliki 1.2.

Slika 1.2: Parabola, ki se najbolje prilega danim točkam.



Na podoben način lahko izmerjene podatke aproksimiramo s poljubno linearno kombinacijo danih funkcij. Če imajo točke, dobljene iz meritev, koordinate $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ in podatke aproksimiramo po principu najmanjših kvadratov s funkcijo

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x),$$

kjer so $f_1, f_2, \dots, f_n$ dane realne funkcije, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pa neznane realne konstante, v resnici rešujemo sistem

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

po principu najmanjših kvadratov. Če je rang matrike sistema enak n, rešitev dobimo iz Posledice 1.3.3. Več o tem bo bralec spoznal pri numerično naravnanih predmetih.

Poglavje 2

Jordanova kanonična forma

Kvadratna kompleksna matrika A se da diagonalizirati, če obstajata obrnljiva matrika P in diagonalna matrika D, da je $A = PDP^{-1}$; pravimo tudi, da je A podobna diagonalni matriki D. Znano je, da diagonalo matrike D sestavljajo lastne vrednosti matrike A, stolpci matrike P pa so ustrezni linearno neodvisni lastni vektorji. Matrika A se da torej diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja baza prostora, sestavljena iz lastnih vektorjev.

Jasno je, da obstajajo matrike, ki se ne dajo diagonalizirati; enostaven primer je matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ki ima dvojno lastno vrednost 0, lastni podprostor pa je

$$\operatorname{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Tolažilni rezultat je Schurov izrek, ki pravi, da je vsaka kvadratna kompleksna matrika podobna neki zgornjetrikotni matriki. Kljub temu pa je z neprevidno izbiro baze dobljena zgornjetrikotna matrika še vedno polna neničelnih elementov. Cilj tega poglavja je pokazati, da lahko bazo prostora vedno izberemo tako, da je matrika A podobna bločno diagonalni matriki, katere bloki so zgornjetrikotne matrike, ki imajo „skoraj povsod" same ničle. Prednost tega je, da lahko s pomočjo takšnega zapisa učinkovito računamo potence matrike A, poleg tega pa lahko računamo funkcije matrik $f(A)$ za primerno izbrane funkcije f.

Opomba 2.0.1. Pred nadaljevanjem vpeljimo še par oznak. Če je $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linearna preslikava, ji lahko glede na bazi $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{B}_2$ prostora $\mathbb{C}^n$ priredimo matriko, ki jo označimo z $A_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$. Če sta $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ neki drugi bazi prostora $\mathbb{C}^n$, potem lahko $A_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1}$ izrazimo s pomočjo $A_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ preko prehodnih matrik:

$$A_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1} = P_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_2} A_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} P_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1}.$$

2.1 Izrek o spektralnem razcepu

Naj bo A kvadratna kompleksna matrika. Spomnimo se, da je *minimalni polinom* matrike A polinom $m_A(\lambda)$ z vodilnim koeficientom 1, za katerega velja $m_A(A) = 0$, za vsak drug polinom $q(\lambda)$, za katerega je $q(A) = 0$, pa velja, da je deljiv z $m_A(\lambda)$. Iz Cayley–Hamiltonovega izreka sledi, da minimalni polinom $m_A(\lambda)$ deli karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Poleg tega je znano, da ima minimalni polinom matrike A iste ničle kot karakteristični polinom, morda z drugimi večkratnostmi.

Trditev 2.1.1. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $p(\lambda)$ polinom s kompleksnimi koeficienti, ki je deljiv z minimalnim polinomom $m_A(\lambda)$ matrike A. Naj bo $p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$, kjer sta p_1 in p_2 tuja* *polinoma. Označimo $V_i = \ker p_i(A)$, $i = 1, 2$. Potem je $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$. Glede na ta razcep je A podobna matriki oblike*

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Ker sta polinoma p_1 in p_2 tuja, obstajata polinoma q_1 in q_2, da je

$$p_1(\lambda)q_1(\lambda) + p_2(\lambda)q_2(\lambda) = 1.$$

Izberimo $v \in \mathbb{C}^n$. Označimo $v_1 = p_2(A)q_2(A)v$ in $v_2 = p_1(A)q_1(A)v$. Potem očitno velja $v = v_1 + v_2$. Ker je po predpostavki $p(A) = 0$, dobimo

$$p_1(A)v_1 = p_1(A)p_2(A)q_2(A)v = p(A)q_2(A)v = 0,$$

torej je $v_1 \in V_1$. Podobno dokažemo, da je $v_2 \in V_2$, torej je $\mathbb{C}^n = V_1 + V_2$. Pokažimo, da je ta vsota direktna. Če je $v \in V_1 \cap V_2$, je $p_1(A)v = p_2(A)v = 0$, zato je

$$v = (p_1(A)q_1(A) + p_2(A)q_2(A))v = q_1(A)p_1(A)v + q_2(A)p_2(A)v = 0.$$

To že pomeni, da je $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$.

Če je $\mathcal{B}_1$ neka baza prostora V_1, $\mathcal{B}_2$ pa baza prostora V_2, potem je $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ baza prostora $\mathbb{C}^n$. Za vektor $v \in V_1$ velja $p_1(A)(Av) = Ap_1(A)v = 0$, torej je $A(V_1) \subseteq V_1$. Podobno je $A(V_2) \subseteq V_2$. Zato je matrika $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ iskane oblike. □

V posebnem lahko Trditev 2.1.1 uporabimo za primer $p(\lambda) = m_A(\lambda)$ in dobimo:

Izrek 2.1.2 (Izrek o spektralnem razcepu)**.** *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in*

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

njen minimalni polinom, pri čemer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paroma različne lastne vrednosti matrike A. Označimo

$$V_i = \ker(A - \lambda_i I)^{k_i}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Potem je $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$. Glede na ta razcep je A podobna matriki oblike

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix},$$

pri čemer je λ_i edina lastna vrednost matrike A_i za vsak $i = 1, \ldots, r$.

Dokaz. Po Trditvi 2.1.1 je $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \ker q(A)$, kjer je $q(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$. Glede na ta razcep je matrika A podobna matriki

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}.$$

Recimo, da je λ_1 lastna vrednost matrike A'. Potem obstaja neničeln vektor $v \in \ker q(A)$, da je $Av = \lambda_1 v$, torej je $v \in \ker q(A) \cap V_1 = \{0\}$, kar ni mogoče. Torej λ_1 ni lastna vrednost matrike A'. Minimalni polinom za A' je zato enak $m_{A'}(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$, minimalni polinom matrike A_1 pa je enak $m_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}$. Če prejšnjo trditev sedaj uporabimo za A', po r korakih dobimo iskani razcep. □

Podoben rezultat dobimo tudi, če namesto $p(\lambda)$ vzamemo karakteristični polinom $p_A(\lambda)$; sklep je skoraj enak, zato ga bomo izpustili.

Primer 2.1.3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hiter račun pokaže, da je karakteristični polinom matrike A enak

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(3 - \lambda).$$

Ker velja $(A + I)(A - 3I) \neq 0$, je minimalni polinom matrike A kar

$$m_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3).$$

Poiščimo najprej bazo za $V_1 = \ker(A + I)^2$. Ker je

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

matrika ranga 1, je $\dim V_1 = 2$. Baza tega prostora je npr

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Podobno je baza prostora $V_2 = \ker(A - 3I)$ npr

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

V bazi $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ima A matriko

$$A_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{S}} A P_{\mathcal{S}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Primer 2.1.4. Naj bo $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ projektor, torej matrika, za katero velja $P^2 = P$. Recimo, da je $P \neq 0, I$. Potem je minimalni polinom matrike P enak $m_P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$. Po Izreku o spektralnem razcepu je $\mathbb{C}^n = \ker P \oplus \ker(I - P)$. Lahko je videti, da je $\ker(I - P) = \operatorname{im} P$, torej $\mathbb{C}^n = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. Če je $x \in \ker P$, je $Px = 0$, za $x \in \ker(I - P)$ pa velja $Px = x$. Zato ima P glede na zgornji razcep matriko oblike

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

2.2 Jordanova kanonična forma matrike

Definicija. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

njen minimalni polinom, pri čemer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paroma različne lastne vrednosti matrike A. Podprostoru

$$\ker(A - \lambda_i I)^{k_i}$$

pravimo *korenski podprostor* matrike A za lastno vrednost λ_i.

Iz Izreka o spektralnem razcepu torej sledi, da prostor $\mathbb{C}^n$ lahko razcepimo na direktno vsoto korenskih podprostorov dane matrike A, glede na ta razcep pa je A podobna bločno diagonalni matriki

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix},$$

katere bloki so matrike z eno samo lastno vrednostjo. Naš cilj je poiskati primerne baze korenskih podprostorov, v katerih bodo imeli ti bloki čim lepšo obliko. Zato lahko brez škode predpostavimo, da je kar A matrika z eno samo lastno vrednostjo ρ. V tem primeru je njen karakteristični polinom enak $p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \rho)^n$, minimalni polinom pa je oblike $m_A(\lambda) = (\lambda - \rho)^k$. Če postavimo

$$B = A - \rho I,$$

potem je

$$p_B(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$$

in

$$m_B(\lambda) = \lambda^k.$$

To pomeni, da je k najmanjše takšno naravno število, za katerega velja $B^k = 0$. Definirajmo

$$W_i = \ker B^i.$$

Potem dobimo verigo podprostorov

$$\{0\} = W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_k = \mathbb{C}^n. \tag{2.1}$$

Trditev 2.2.1. *Inkluzije v verigi (2.1) so stroge.*

Dokaz. Recimo najprej, da velja $W_{k-1} = W_k = \mathbb{C}^n$. To bi pomenilo $B^{k-1} = 0$, kar pa je v protislovju s tem, da je $m_B(\lambda) = \lambda^k$. Zato velja $W_{k-1} \neq W_k$.

Recimo, da za nek i velja $W_i = W_{i+1}$. Pokažimo, da potem velja $W_{i+1} = W_{i+2}$. Če namreč izberemo poljuben $x \in W_{i+2}$, velja $B^{i+2}x = 0$, torej je $Bx \in W_{i+1} = W_i$, kar pomeni $0 = B^i Bx = B^{i+1}x$, torej je $x \in W_{i+1}$. S tem smo pokazali $W_{i+2} \subseteq W_{i+1}$, obratna inkluzija pa vedno velja. Če torej za nek i velja $W_i = W_{i+1}$, potem iz zgornjega sledi

$$W_i = W_{i+1} = W_{i+2} = \cdots = W_{k-1} = W_k,$$

kar pa je v protislovju s prvim odstavkom. □

Lema 2.2.2. *Za vektor $x \in \mathbb{C}^n$ velja $x \in W_i$ natanko tedaj, ko je $Bx \in W_{i-1}$.*

Dokaz. Vektor x leži v W_i natanko tedaj, ko je $B^{i-1}Bx = B^i x = 0$, to pa je ekvivalentno z $Bx \in W_{i-1}$. □

Definicija. Naj bo $\mathcal{V}$ neprazna podmnožica vektorjev v $\mathbb{C}^n$. Pravimo, da je $\mathcal{V}$ *i-linearno neodvisna*, če veljajo naslednje zahteve:

(a) $\mathcal{V}$ je vsebovana v W_i,

(b) Vektorji v množici $\mathcal{V}$ so linearno neodvisni,

(c) Vektorski podprostor $\operatorname{Lin} \mathcal{V}$ ima trivialen presek s podprostorom W_{i-1}.

Lema 2.2.3. *Naj bo $i > 1$. Če je množica vektorjev $\mathcal{V}$ i-linearno neodvisna, je množica*

$$B\mathcal{V} = \{Bv \mid v \in \mathcal{V}\}$$

$(i-1)$-linearno neodvisna.

Dokaz. Naj bo
$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}.$$
Ker je $\mathcal{V} \subseteq W_i$, je po Lemi 2.2.2 množica $B\mathcal{V}$ vsebovana v W_{i-1}. Dokažimo sedaj, da je množica vektorjev
$$B\mathcal{V} = \{Bv_1, Bv_2, \dots, Bv_s\}$$
linearno neodvisna. Recimo, da za neke skalarje $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C}$ velja
$$\alpha_1 Bv_1 + \alpha_2 Bv_2 + \cdots + \alpha_s Bv_s = 0.$$
To pomeni, da je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s \in \ker B \subseteq \ker B^{i-1} = W_{i-1}$, torej je zaradi i-linearne neodvisnosti množice $\mathcal{V}$
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s \in \operatorname{Lin} \mathcal{V} \cap W_{i-1} = \{0\},$$
zato so vektorji $Bv_1, Bv_2, \dots, Bv_s$ linearno neodvisni. Preostane še dokaz, da je $\operatorname{Lin} B\mathcal{V} \cap W_{i-2} = \{0\}$. Izberimo torej $x \in \operatorname{Lin} B\mathcal{V} \cap W_{i-2}$. To pomeni, da je
$$x = \alpha_1 Bv_1 + \alpha_2 Bv_2 + \cdots + \alpha_s Bv_s$$
za neke $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C}$, poleg tega pa je
$$0 = B^{i-2}x = B^{i-2}(\alpha_1 Bv_1 + \alpha_2 Bv_2 + \cdots + \alpha_s Bv_s) = B^{i-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s),$$
kar pomeni
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_s v_s \in \operatorname{Lin} \mathcal{V} \cap W_{i-1} = \{0\}.$$
Od tod sledi $x = 0$, to pa smo želeli dokazati. □

Sedaj se lotimo konstrukcije posebne baze prostora $\mathbb{C}^n$. Ker je W_{k-1} pravi podprostor v $W_k = \mathbb{C}^n$, lahko z dopolnitvijo baze W_{k-1} do baze celotnega prostora najdemo tak podprostor U_1 v W_k, da je
$$\mathbb{C}^n = W_k = U_1 \oplus W_{k-1}.$$
Najprej izberimo poljubno bazo podprostora U_1:
$$\mathcal{U}_1 = \{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_{s_1}^{(1)}\}.$$
Ker je $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus W_{k-1}$, je množica $\mathcal{U}_1$ k-linearno neodvisna. Po Lemi 2.2.3 je množica $B\mathcal{U}_1$ $(k-1)$-linearno neodvisna, kar pomeni, da so njeni elementi linearno neodvisni vektorji, ki ležijo v W_{k-1}, poleg tega pa je $\operatorname{Lin} B\mathcal{U}_1 \cap W_{k-2} = \{0\}$. Zato lahko množico $B\mathcal{U}_1$ dopolnimo do baze podprostora U_2, za katerega velja $W_{k-1} = U_2 \oplus W_{k-2}$:
$$\mathcal{U}_2 = \{Bu_1^{(1)}, Bu_2^{(1)}, \dots, Bu_{s_1}^{(1)}, u_{s_1+1}^{(2)}, u_{s_1+2}^{(2)}, \dots, u_{s_2}^{(2)}\} = \{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_{s_2}^{(2)}\}.$$

Sedaj postopek ponovimo z množico $\mathcal{U}_2$; po k korakih dobimo podprostore $U_1, U_2, \dots, U_k$, za katere velja
$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n = W_k &= U_1 \oplus W_{k-1}, \\ W_{k-1} &= U_2 \oplus W_{k-2}, \\ &\vdots \\ W_2 &= U_{k-1} \oplus W_1, \\ W_1 &= U_k \oplus W_0 = U_k, \end{aligned}$$
skupaj z bazami
$$\mathcal{U}_i = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_{s_i}^{(i)}\}$$
podprostorov U_i, ki so konstruirane na podoben način kot zgoraj. Velja:

Trditev 2.2.4. *Velja* $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$.

Dokaz. Iz konstrukcije sledi $\mathbb{C}^n = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$. Izberimo $x \in \mathbb{C}^n$ in recimo, da je

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k,$$

kjer $x_i, y_i \in U_i$. Ker je $\mathbb{C}^n = U_1 \oplus W_{k-1}$ in $x_1, y_1 \in U_1$, zaradi enoličnosti zapisa sledi

$$x_1 = y_1 \text{ in } x_2 + \cdots + x_k = y_1 + \cdots + y_k.$$

S podobnim premislekom dobimo $x_i = y_i$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$, od tod pa sledi, da je vsota podprostorov res direktna. □

Iz Trditve 2.2.4 sledi, da je

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_k$$

baza prostora $\mathbb{C}^n$. Pravimo ji *Jordanova baza* za matriko B. Če želimo, da bo matrika $B_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$ za B v tej bazi lepa, moramo bazne elemente razvrstiti na poseben način; najprej zapišemo bazne vektorje v shemo, kot je prikazana v Tabeli 2.1.

Tabela 2.1: vektorji Jordanove baze za B

$$\begin{array}{ccccccccc}
u_1^{(1)}, & \ldots, & u_{s_1}^{(1)} & & & & & & \\
u_1^{(2)}, & \ldots, & u_{s_1}^{(2)}, & \ldots, & u_{s_2}^{(2)} & & & & \\
u_1^{(3)}, & \ldots, & u_{s_1}^{(3)}, & \ldots, & u_{s_2}^{(3)}, & \ldots, & u_{s_3}^{(3)} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
u_1^{(k)}, & \ldots, & u_{s_1}^{(k)}, & \ldots, & u_{s_2}^{(k)}, & \ldots, & u_{s_3}^{(k)} & \ldots, & u_{s_k}^{(k)}
\end{array}$$

Nato jih po vrsti izbiramo po stolpcih, začenši s prvim, od spodaj navzgor. Oglejmo si, kako izgleda matrika za B v tako urejeni bazi:

$$\begin{aligned}
Bu_1^{(k)} &= 0, \\
Bu_1^{(k-1)} &= u_1^{(k)}, \\
Bu_1^{(k-2)} &= u_1^{(k-1)}, \\
&\vdots \\
Bu_1^{(1)} &= u_1^{(2)} \\
Bu_2^{(k)} &= 0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dobimo torej, da je

$$B_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s_k} \end{bmatrix},$$

pri čemer je vsaka od matrik J_i oblike

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriko $B_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$ ponavadi označimo z $J(B)$ in ji pravimo *Jordanova kanonična forma matrike* B. Matrikam J_i pravimo *Jordanove kletke matrike* B.

Iz konstrukcije Jordanove kanonične forme za B lahko razberemo, koliko je Jordanovih kletk posameznih velikosti. Opazimo namreč, da vsak stolpec v Tabeli 2.1 porodi natanko eno kletko. Tako imamo natanko s_1 kletk velikosti $k \times k$, število kletk velikosti $(k-1) \times (k-1)$ je enako $s_2 - s_1$, itd. Splošno, število kletk velikosti $j \times j$ je enako $s_{k-j+1} - s_{k-j}$. Število vseh kletk je enako s_k. Iz zgornje konstrukcije je razvidno še, da je

$$s_i = \dim W_{k-i+1} - \dim W_{k-i} = \dim\ker B^{k-i+1} - \dim\ker B^{k-i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

torej je število kletk velikosti $j \times j$ enako

$$s_{k-j+1} - s_{k-j} = 2\dim\ker B^j - \dim\ker B^{j+1} - \dim\ker B^{j-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

V posebnem je $s_k = \dim\ker B$, torej je skupno število kletk za B enako velikosti baze lastnega podprostora B za lastno vrednost 0. To je razvidno tudi iz Tabele 2.1, saj bazo lastnega podprostora $\ker B$ tvorijo ravno vektorji $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_{s_k}^{(k)}$. Poleg tega opazimo, da je največja kletka dimenzije $k \times k$, kjer je k ravno stopnja minimalnega polinoma matrike B.

Vrnimo se sedaj na primer, ko je A matrika z eno samo lastno vrednostjo ρ. Ker je $A = B + \rho I$, je A po zgornjem premisleku podobna matriki

$$J(A) = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s_r} \end{bmatrix},$$

kjer so matrike J_i oblike

$$J_i = \begin{bmatrix} \rho & 1 & & & \\ & \rho & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \rho & 1 \\ & & & & \rho \end{bmatrix}.$$

Tudi v tem primeru matrikam J_i pravimo *Jordanove kletke* za lastno vrednost ρ. V splošnem je po Izreku o spektralnem razcepu matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ podobna bločni matriki

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{bmatrix},$$

katere bloki so matrike z eno samo lastno vrednostjo. Zato je A podobna matriki

$$J(A) = \begin{bmatrix} J(A_1) & & & \\ & J(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(A_r) \end{bmatrix},$$

kjer so $J(A_i)$ bločno diagonalne matrike, katere bloki so Jordanove kletke (raznih velikosti) za dano lastno vrednost. Matriki $J(A)$ pravimo *Jordanova kanonična forma matrike* A. Velja

$$A = PJ(A)P^{-1},$$

kjer je P prehodna matrika, katere stolpci so vektorji, ki jih dobimo iz zgornje konstrukcije Jordanove baze za matriko B. Tem stolpcem pravimo *Jordanova baza* za matriko A. Povzemimo sedaj celoten postopek v splošnem primeru:

Postopek za določanje Jordanove kanonične forme:

Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika. Za vsako lastno vrednost λ matrike A, ki ima večkratnost r, ponovimo naslednji postopek:

1. Izračunamo $(A-\lambda I)^i$ za $i = 1, 2, \ldots$. Imamo verigo podprostorov

$$\{0\} < \ker(A-\lambda I) < \ker(A-\lambda I)^2 < \cdots .$$

Potence matrike $(A-\lambda I)$ računamo toliko časa, dokler so inkluzije v tej verigi stroge. Veriga se sčasoma ustali. Če označimo

$$d_i = \dim\ker(A-\lambda I)^i,$$

potem obstaja tak k, da velja

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_{k-1} < d_k = d_{k+1} = \cdots = r.$$

Veriga jeder matrik $(A-\lambda I)^i$ se ustali pri $i = k$.

2. Iz zgornjih podatkov lahko sklepamo naslednje:

   (a) Število Jordanovih kletk za lastno vrednost λ je enako d_1.

   (b) Največja kletka za lastno vrednost λ je velikosti $k \times k$.

   (c) „Prispevek" lastne vrednosti λ k minimalnemu polinomu $m_A(x)$ matrike A je $(x-\lambda)^k$.

   (d) Če definiramo

   $$s_i = d_{k-i+1} - d_{k-i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

   je število kletk velikosti $j \times j$ enako

   $$\begin{cases} s_1 & : \ j = k \\ s_{k-j+1} - s_{k-j} & : \ j \neq k \end{cases},$$

   pri čemer $j = 1, 2, \ldots, k$.

3. Določimo del Jordanove baze, ki pripada lastni vrednosti λ. Brez škode lahko Jordanove kletke za lastno vrednost λ uredimo padajoče po velikosti blokov; recimo, da so te velikosti

$$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_{d_1}.$$

Izberemo

$$v_1^{(1)} \in \ker(A-\lambda I)^{n_1} \setminus \ker(A-\lambda I)^{n_1-1},$$

ki je linearno neodvisen od predhodno dobljenih vektorjev, ki bodo tvorili Jordanovo bazo. Izračunamo

$$\begin{aligned} v_1^{(2)} &= (A-\lambda I)v_1^{(1)}, \\ v_1^{(3)} &= (A-\lambda I)^2 v_1^{(1)}, \\ &\vdots \\ v_1^{(n_1)} &= (A-\lambda I)^{n_1-1} v_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Nato izberemo

$$v_2^{(1)} \in \ker(A-\lambda I)^{n_2} \setminus \ker(A-\lambda I)^{n_2-1},$$

ki je linearno neodvisen od predhodno dobljenih vektorjev, ki bodo tvorili Jordanovo bazo. Izračunamo

$$\begin{aligned} v_2^{(2)} &= (A-\lambda I)v_2^{(1)}, \\ v_2^{(3)} &= (A-\lambda I)^2 v_2^{(1)}, \\ &\vdots \\ v_2^{(n_2)} &= (A-\lambda I)^{n_2-1} v_2^{(1)}. \end{aligned}$$

Postopek ponovimo za vsako Jordanovo kletko posebej. Dobljene vektorje zložimo v prehodno matriko P v naslednjem vrstnem redu:

$$v_1^{(n_1)}, v_1^{(n_1-1)}, \ldots, v_1^{(1)}, v_2^{(n_2)}, v_2^{(n_2-1)}, \ldots, v_2^{(1)}, \ldots, v_{d_1}^{(n_{d_1})}, v_{d_1}^{(n_{d_1}-1)}, \ldots, v_{d_1}^{(1)}.$$

Za vsako lastno vrednost Jordanove kletke zložimo bločno diagonalno v matriko $J(A)$, pri čemer so velikosti kletk za posamezno lastno vrednost urejene padajoče, vektorje Jordanove baze pa v matriko P v vrstnem redu, ki je opisan v koraku 3. Velja

$$A = PJ(A)P^{-1}.$$

Posledica 2.2.5. *Matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se da diagonalizirati natanko tedaj, ko je njen minimalni polinom oblike*

$$m_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_k),$$

kjer so $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ paroma različne lastne vrednosti matrike A.

Primer 2.2.6. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrike A je

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3,$$

torej je 2 edina lastna vrednost matrike A. Ker je

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

je $\operatorname{rang}(A-2I) = 1$, torej je $\dim\ker(A-2I) = 2$. Matrika A ima torej dve Jordanovi kletki, od koder brez nadaljnjega računanja lahko sklepamo, da je

$$J(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poleg tega je $(A-2I)^2 = 0$, torej je $\dim\ker(A-2I)^2 = 3$. Določimo sedaj Jordanovo bazo za A. Ker je naš primer enostavnejši od splošnega, ki je opisan zgoraj, bomo tu oznake nekoliko poenostavili. Za 2×2 kletko izberemo vektor $v_2 \in \ker(A-2I)^2 \setminus \ker(A-2I)$. Lahko vzamemo npr

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nato izračunamo

$$v_1 = (A - 2I)v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Za 1×1 kletko pa izberemo vektor $v_3 \in \ker(A - 2I)$, ki je linearno neodvisen od vektorjev v_1 in v_2. Ustrezna izbira je npr

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Prehodna matrika P, za katero velja $A = PJ(A)P^{-1}$, je potem

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primer 2.2.7. Recimo, da je A matrika velikosti 5×5, ki ima edini lastni vrednosti 2 in -1. Poleg tega vemo, da je $\operatorname{rang}(A - 2I) = 3$, $\operatorname{rang}(A - 2I)^2 = 1$ in $\operatorname{rang}(A + I) = 4$. V tem primeru je

$$\begin{aligned} \dim \ker(A - 2I) &= 2, \\ \dim \ker(A - 2I)^2 &= 4, \\ \dim \ker(A + I) &= 1. \end{aligned}$$

Imamo torej dve Jordanovi kletki za lastno vrednost 2 in eno kletko za lastno vrednost 1. Dimenzija $\ker(A - 2I)^2$ je maksimalna možna, zato je velikost največje kletke za lastno vrednost 2 enaka 2×2. Tudi dimenzija $\ker(A + I)$ je največja možna, zato je kletka za lastno vrednost -1 velikosti 1×1. Zato je

$$J(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.3 Funkcije matrik

Naj bo A kompleksna $n \times n$ matrika. Če je

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_k\lambda^k$$

polinom s kompleksnimi koeficienti, potem definiramo

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_k A^k.$$

Pojavi se vprašanje, kako učinkovito izračunati $p(A)$ za dano matriko A. To se prevede na računanje potenc matrike A. Če je stopnja polinoma majhna, potem lahko potence izračunamo neposredno. V splošnem pa je računanje potenc matrike A in s tem tudi $p(A)$ zelo zamudno. Po drugi strani si lahko pri tem pomagamo z Jordanovo kanonično formo. Če je $A = PJ(A)P^{-1}$, potem je

$$A^\ell = P(J(A))^\ell P^{-1}.$$

Ker je $J(A)$ oblike

$$J(A) = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix},$$

kjer so J_i Jordanove kletke za lastne vrednosti matrike A, je

$$(J(A))^\ell = \begin{bmatrix} J_1^\ell & & & \\ & J_2^\ell & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r^\ell \end{bmatrix}.$$

Zato je dovolj videti, kako izračunati potence Jordanove kletke

$$J = \begin{bmatrix} \rho & 1 & & & \\ & \rho & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \rho & 1 \\ & & & & \rho \end{bmatrix}.$$

V ta namen zapišemo

$$J = \rho I + N,$$

kjer je

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Hitro opazimo, da je

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Z indukcijo ni težko preveriti, da je N^i zgornje trikotna matrika, ki ima prvih i naddiagonal enakih 0, na $(i+1)$-vi diagonali so same 1, drugje pa ničle. Ker matriki I in N komutirata, dobimo z uporabo binomskega izreka

$$J^\ell = (\rho I + N)^\ell = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \rho^{\ell-i} N^i = \begin{bmatrix} \rho^\ell & \binom{\ell}{1}\rho^{\ell-1} & \binom{\ell}{2}\rho^{\ell-2} & \dots & \dots & \binom{\ell}{m}\rho^{\ell-m} \\ & \rho^\ell & \binom{\ell}{1}\rho^{\ell-1} & \binom{\ell}{2}\rho^{\ell-2} & \dots & \binom{\ell}{m-1}\rho^{\ell-m+1} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \rho^\ell & \binom{\ell}{1}\rho^{\ell-1} & \binom{\ell}{2}\rho^{\ell-2} \\ & & & & \rho^\ell & \binom{\ell}{1}\rho^{\ell-1} \\ & & & & & \rho^\ell \end{bmatrix}.$$

S tem smo našli razmeroma učinkovit način, kako izračunamo vrednost matričnega polinoma v matriki A. Postopek lahko posplošimo na naslednji način. Naj bo f realna (ali kompleksna) funkcija, ki je neskončnokrat odvedljiva v okolicah lastnih vrednosti matrike A; slednjo predpostavko bomo rabili nekoliko kasneje. Če je $A = PJ(A)P^{-1}$, potem definiramo

$$f(A) = Pf(J(A))P^{-1}.$$

Podobno kot zgoraj definiramo

$$f(J(A)) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_r) \end{bmatrix},$$

kjer so J_i Jordanove kletke matrike A. Preostane nam torej še, da smiselno definiramo $f(J_i)$. Oglejmo si Jordanovo kletko velikosti $(m+1)\times(m+1)$:

$$J = \begin{bmatrix} \rho & 1 & & & \\ & \rho & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \rho & 1 \\ & & & & \rho \end{bmatrix} = \rho I + N,$$

kjer je N matrika kot zgoraj. Sedaj lahko funkcijo f razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli točke ρ:

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\rho)}{i!}(\lambda-\rho)^i.$$

Ideja je, da $f(J)$ definiramo tako, da v Taylorjevo vrsto vstavimo J namesto λ, podobno kot to naredimo za matrične polinome:

$$f(J) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\rho)}{i!}(J-\rho I)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\rho)}{i!}N^i.$$

Težava pa je, da imamo na desni strani neskončno matrično vrsto in bi sedaj morali razviti teorijo o tem, kdaj so takšne vrste konvergentne. Na srečo opazimo, da je vsota pravzaprav končna; po računu zgoraj namreč velja $N^{m+1}=0$. Zato je

$$f(J) = \sum_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(\rho)}{i!}N^i = \begin{bmatrix} f(\rho) & \frac{f'(\rho)}{1!} & \frac{f''(\rho)}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{f^{(m)}(\rho)}{(m)!} \\ & f(\rho) & \frac{f'(\rho)}{1!} & \frac{f''(\rho)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(m-1)}(\rho)}{(m-1)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & f(\rho) & \frac{f'(\rho)}{1!} & \frac{f''(\rho)}{2!} \\ & & & & f(\rho) & \frac{f'(\rho)}{1!} \\ & & & & & f(\rho) \end{bmatrix}.$$

V resnici se izkaže, da bi za funkcijo f lahko predpostavili nekoliko manj; če je ρ lastna vrednost matrike A in k velikost največje Jordanove kletke za ρ, potem je dovolj, da je funkcija f k-krat odvedljiva v okolici ρ.

Primer 2.3.1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo $\sin A$. V Primeru 2.2.6 smo že izračunali Jordanovo kanonično formo matrike A in prehodno matriko:

$$J(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\sin A = P\sin(J(A))P^{-1} = P\begin{bmatrix} \sin\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \\ & \sin 2 \end{bmatrix}.$$

Po zgornji formuli je

$$\sin\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 2 & \cos 2 \\ 0 & \sin 2 \end{bmatrix}.$$

Zato je

$$\sin A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin 2 & \cos 2 & 0 \\ 0 & \sin 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 2 & 4\cos 2 & -8\cos 2 \\ 0 & -2\cos 2 + \sin 2 & 4\cos 2 \\ 0 & -\cos 2 & 2\cos 2 + \sin 2 \end{bmatrix}.$$

Poglavje 3

Nenegativne matrike

V tem poglavju bomo obravnavali realne matrike, katerih vsi elementi so nenegativni (oziroma pozitivni).

Definicija. Naj bo $A = [a_{ij}]$ matrika nad $\mathbb{R}$. Matrika A je *nenegativna*, če je $a_{ij} \geq 0$ za vsaka $i, j = 1, 2, \ldots, n$. V tem primeru pišemo $A \geq 0$. Podobno pišemo $A > 0$, če so vsi elementi matrike A pozitivni.

Primer 3.0.1. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

je nenegativna, matrika

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

pa pozitivna. Matrika

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ni niti pozitivna niti nenegativna.

Definicija. Za realni matriki A in B istih dimenzij pišemo $A \geq B$ ($A > B$), če je $A - B \geq 0$ ($A - B > 0$).

Nekaj očitnih lastnosti relacije $\geq$ je zbranih v naslednji trditvi; dokaz prepuščamo bralcu:

Trditev 3.0.2. *Naj bodo A, B, C $n \times n$ realne matrike in $v \in \mathbb{R}^n$. Recimo, da velja $A \geq B$. Potem velja:*

(a) $A + C \geq B + C$.

(b) Če je $C \geq 0$, potem je $AC \geq BC$ in $CA \geq CB$.

(c) Če je $v \geq 0$, je $Av \geq Bv$.

Nenegativne matrike se zelo pogosto pojavijo v verjetnosti (markovske verige), teoriji grafov (matrike sosednosti grafov) ali v praktičnih primerih v ekonomiji, fiziki in drugje. Odlikuje jih cel kup lepih lastnosti in obstaja cela teorija znotraj linearne algebre, ki se ukvarja z nenegativnimi matrikami. Mi se bomo osredotočili le na kvadratne nenegativne matrike. Glavni rezultat, ki ga bomo dokazali, je Perron–Frobeniusov izrek, ki govori o lastnih vrednostih takšnih matrik.

3.1 Ireducibilne matrike

Definicija. Naj bo σ permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Permutacijska matrika*, ki pripada permutaciji σ, je matrika, ki ima na mestih $(i, \sigma(i))$, kjer $i = 1, 2, \ldots, n$, enke, drugje pa ničle.

Primer 3.1.1. Permutacijska matrika, ki pripada identični permutaciji, je ravno identična matrika. Če je npr

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

je ustrezna permutacijska matrika

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opomba 3.1.2. Očitno je vsaka permutacijska matrika P ortogonalna, zato je $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$. Poleg tega opazimo še naslednje: Če kvadratno matriko A z desne množimo s permutacijsko matriko P, ki pripada permutaciji σ, je rezultat matrika, katere i-ti stolpec je $\sigma(i)$-ti stolpec matrike A. Če A z leve pomnožimo s P^{T}, dobimo matriko, katere i-ta vrstica je $\sigma(i)$-ta vrstica matrike A.

Definicija. Naj bo $n \geq 2$. Nenegativna $n \times n$ matrika A je *reducibilna* (*razcepna*), če obstaja permutacijska matrika P, da je matrika $P^{\mathrm{T}}AP$ oblike

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

kjer sta matriki B in D kvadratni. Nenegativna matrika je *ireducibilna* (*nerazcepna*), če ni reducibilna (razcepna).

Matrika A je torej reducibilna, če jo lahko s končno mnogo hkratnih menjav vrstic in stolpcev prevedemo v bločno matriko iz zgornje definicije. Očitno so vse pozitivne matrike ireducibilne. Oglejmo si še kakšen zgled:

Primer 3.1.3. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

je reducibilna; če namreč hkrati zamenjamo 1. in 3. vrstico ter 1. in 3. stolpec, dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ki ima na diagonali en 2×2 blok in en 1×1 blok, pod prvim blokom pa so same ničle. Matrika

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

je po drugi strani ireducibilna. To lahko ugotovimo s preverjanjem vseh možnih izrazov $P^{\mathrm{T}}BP$, kjer je P permutacijska matrika velikosti 3×3; takšnih matrik je, vključno z identično matriko, 6. Podrobnosti prepustimo bralcu; kasneje bomo izpeljali dosti bolj nazoren kriterij za preverjanje ireducibilnosti.

Trditev 3.1.4. *Naj bo A ireducibilna nenegativna matrika velikosti $n \times n$, kjer je $n \geq 2$. Naj bo y nenegativen vektor v $\mathbb{R}^n$, ki ima natanko k pozitivnih komponent, kjer je $1 \leq k < n$. Potem ima vektor $(I + A)y$ več kot k pozitivnih komponent.*

Dokaz. Naj bo P takšna permutacijska matrika, da ima vektor

$$x = Py$$

prvih k komponent pozitivnih, ostale pa so enake 0. Z drugimi besedami, vektor x dobimo tako, da komponente vektorja y ustrezno premešamo. Oglejmo si vektor

$$(I + A)y = y + Ay.$$

Ker je $A \geq 0$, ima ta vektor kvečjemu $n-k$ ničelnih komponent. Recimo, da jih ima točno $n-k$ (predpostavimo torej nasprotno od tega, kar trdi rezultat). To pomeni, da če je i-ta komponenta vektorja y enaka 0, je tudi i-ta komponenta vektorja Ay enaka 0. Med drugim to pomeni, da če je i-ta komponenta Py enaka nič, je tudi i-ta komponenta PAy enaka 0. Ker je $y = P^{\mathrm{T}}x$, to pomeni da je i-ta komponenta vektorja $PAP^{\mathrm{T}}x$ enaka 0 za $i = k+1, k+2, \ldots, n$. Označimo $B = PAP^{\mathrm{T}}$ in si oglejmo i-to komponento vektorja Bx za $i > k$:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{k} b_{ij}x_j.$$

Ker pa so $x_j > 0$ za $j = 1, 2, \ldots, k$, sledi

$$b_{ij} = 0 \qquad \text{za } i > k, j \leq k.$$

To pomeni, da je matrika $B = PAP^{\mathrm{T}}$ oblike

$$\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

kjer je C blok velikosti $k \times k$, E pa blok velikosti $(n-k) \times (n-k)$. To je v protislovju z ireducibilnostjo matrike A. S tem je trditev dokazana. □

Posledica 3.1.5. *Naj bo A nenegativna ireducibilna matrika velikosti $n \times n$, kjer je $n \geq 2$. Naj bo y neničeln nenegativen vektor v $\mathbb{R}^n$. Potem je*

$$(I + A)^{n-1}y > 0.$$

Naslednji rezultat nam da kriterij za preverjanje ireducibilnosti matrik.

Posledica 3.1.6. *Nenegativna $n \times n$ matrika je ireducibilna natanko tedaj, ko je $(I+A)^{n-1} > 0$.*

Dokaz. Če je A ireducibilna, je po Posledici 3.1.5

$$(I + A)^{n-1}e_j > 0,$$

kjer je e_j stolpec, ki ima na j-tem mestu 1, drugje pa 0. To pomeni, da je j-ti stolpec matrike $(I + A)^{n-1}$ pozitiven. Ker to velja za vse $j = 1, 2, \ldots, n$, sledi $(I + A)^{n-1} > 0$.

Recimo sedaj, da je $(I + A)^{n-1} > 0$. Recimo, da je matrika A reducibilna. Potem obstaja permutacijska matrika P, da je

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

kjer sta matriki B in D kvadratni. Zato je

$$P^{\mathrm{T}}(I + A)^{n-1}P = (P^{\mathrm{T}}(I + A)P)^{n-1} = (I + P^{\mathrm{T}}AP)^{n-1} = \begin{bmatrix} I+B & C \\ 0 & I+D \end{bmatrix}^{n-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

kar pa je v protislovju s tem, da je matrika $P^{\mathrm{T}}(I + A)^{n-1}P$ pozitivna. □

Ta kriterij je koristen za preverjanje ireducibilnosti majhnih matrik. Kot smo videli v poglavju o Jordanovi kanonični formi, je računanje višjih potenc velikih matrik lahko precej zamudno.

Primer 3.1.7. Oglejmo si matriko B iz Zgleda 3.1.3:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$(I+B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} > 0,$$

je matrika B ireducibilna.

Naslednji rezultat pove nekaj o nenegativnih lastnih vektorjih ireducibilnih matrik. Uporabili ga bomo pri dokazu Perron–Frobeniusovega izreka.

Trditev 3.1.8. *Naj bo x nenegativen lasten vektor nenegativne ireducibilne matrike A. Potem je $x > 0$.*

Dokaz. Naj bo

$$Ax = \lambda x.$$

Če primerjamo komponente na levi in desni strani, lahko sklepamo, da je $\lambda \geq 0$. Če ima x natanko k ničelnih komponent, ima po Trditvi 3.1.4 vektor $(I+A)x$ več kot k ničelnih komponent. To pa ni mogoče, saj je

$$(I+A)x = (1+\lambda)x,$$

zato mora biti x pozitiven vektor. □

Izrek 3.1.9. *Nenegativna kvadratna matrika A je ireducibilna natanko tedaj, ko za vsak par indeksov (i,j) obstaja naravno število k, da je (i,j)-ta komponenta matrike A^k pozitivna.*

Dokaz. Naj bo A velikosti $n \times n$. Recimo, da je A ireducibilna. Po Posledici 3.1.6 je $(I+A)^{n-1} > 0$. Označimo

$$B = (I+A)^{n-1}A.$$

Matrika B je pozitivna; v njej bi lahko obstajal ničeln element le v primeru, ko bi matrika A imela kakšen stolpec iz samih ničel, to pa ne gre zaradi ireducibilnosti. Po binomskem izreku je

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^{k+1}.$$

Ker je $b_{ij} > 0$ za vsaka $i,j = 1,2\ldots,n$, mora obstajati takšen $0 \leq k \leq n-1$, da je (i,j)-ta komponenta matrike A^{k+1} pozitivna.

Predpostavimo sedaj, da je matrika reducibilna. Pokazali bomo, da obstajata indeksa i in j, da je (i,j)-ta komponenta matrike A^k enaka 0 za vsak k. Po predpostavki obstaja permutacijska matrika P, da je

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

kjer sta matriki B in D kvadratni, velikost matrike B naj bo $s \times s$. Če velja $s+1 \leq i \leq n$ in $1 \leq j \leq s$, potem je (i,j)-ta komponenta matrike

$$P^{\mathrm{T}}A^kP = (P^{\mathrm{T}}AP)^k = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}^k$$

enaka 0 za vsak k. □

Izrek 3.1.9 je osnova za zelo uporaben kriterij za preverjanje ireducibilnosti dane matrike. Preden ga navedemo, si oglejmo nekaj pojmov iz teorije grafov. *Usmerjen graf* je par $G = (V, E)$, kjer je V množica *vozlišč*, E pa množica urejenih parov (i, j), kjer sta i in j vozlišči. Takšnim urejenim parom pravimo *povezave*; predpostavimo, da naš graf nima povezav oblike (i, i). Pravimo tudi, da imamo povezavo od i do j in to zapišemo kot $i \to j$. Grafe lahko predstavimo grafično tako, da vozlišča narišemo kot točke, povezave (i, j) pa kot usmerjene daljice od i do j. *Pot* v usmerjenem grafu G med vozliščema u in v je končno zaporedje vozlišč $u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k = v$, za katero velja, da so vsi urejeni pari (v_i, v_{i+1}) v množici povezav grafa G. Pravimo, da je k dolžina poti med u in v.

Vsakemu (usmerjenemu) grafu lahko priredimo *matriko sosednosti.* Označimo vozlišča grafa s števili $\{1, 2, \ldots, n\}$ in tvorimo $n \times n$ matriko A na naslednji način:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad \text{obstaja povezava od } i \text{ do } j \\ 0 & : \quad \text{sicer} \end{cases} .$$

Da se dokazati, da če je A matrika sosednosti usmerjenega grafa, potem je (i, j)-ti element matrike A^k enak 1, če obstaja pot dolžine k med i in j, in 0 sicer.

Posledica 3.1.10. *Naj bo A nenegativna matrika velikosti $n \times n$. Priredimo ji usmerjen graf G, katerega vozlišča so števila $\{1, 2, \ldots, n\}$, urejeni par (i, j) pa je povezava natanko tedaj, ko $a_{ij} \neq 0$. Potem je matrika A ireducibilna natanko tedaj, ko za vsaka $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, obstaja pot v grafu G med vozliščema i in j.*

Dokaz. V grafu G je matrika sosednosti ravno matrika B, za katero je

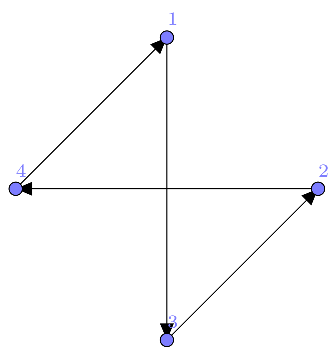
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad a_{ij} \neq 0 \\ 0 & : \quad \text{sicer} \end{cases} .$$

Rezultat od tod hitro sledi. □

Primer 3.1.11. Oglejmo si matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

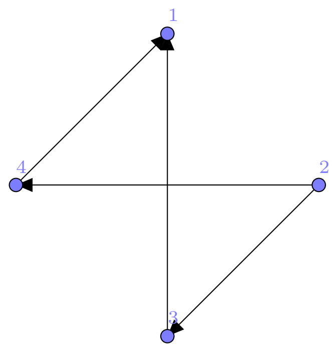
Priredimo ji graf iz Posledice 3.1.10:



Hitro preverimo, da iz vsakega vozlišča obstaja pot do vsakega drugega vozlišča, torej je matrika A ireducibilna. Oglejmo si še matriko

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ustrezen graf je



Ker iz vozlišča 1 ni poti do vozlišča 2, je matrika B reducibilna.

3.2 Collatz–Wielandtova funkcija

V tem razdelku si bomo ogledali funkcijo, ki ji pravimo Collatz–Wielandtova funkcija in igra ključno vlogo pri dokazu Perron–Frobeniusovega izreka. Za začetek vpeljimo oznaki:

$$\mathbb{P}^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ za vsak } i\},$$
$$\mathbb{E}^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}.$$

Poleg tega i-to komponento danega vektorja x označimo z x_i.

Definicija. Naj bo A nenegativna ireducibilna $n \times n$ matrika. Definirajmo funkcijo

$$f_A : \mathbb{P}^n \setminus \{0\} \to [0, \infty)$$

s predpisom

$$f_A(x) = \min_{x_i \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Funkciji f_A pravimo *Collatz–Wielandtova funkcija* matrike A.

Primer 3.2.1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika A je očitno ireducibilna. Izberimo

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$Ax = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

zato je

$$f_A(x) = \min\{6/1, 6/2\} = 3.$$

Videli bomo, da je funkcija f_A omejena na $\mathbb{P}^n \setminus \{0\}$. Glavni rezultat, ki ga bomo dokazali, je naslednji:

Izrek 3.2.2. *Naj bo A nenegativna ireducibilna $n \times n$ matrika. Potem funkcija f_A, zožena na množico $\mathbb{E}^n$, zavzame globalni maksimum.*

Pri dokazu Izreka 3.2.2 bomo uporabili nekaj pomožnih trditev, ki se dokažejo elementarno, na koncu pa še nekaj malega analize. Potrebne definicije za slednje na hitro povzemimo na tem mestu, pri čemer pripomnimo, da se da vse skupaj narediti v dosti večji splošnosti, tu pa bomo situacijo priredili za naše potrebe.

Za $a \in \mathbb{R}^n$ in $\epsilon > 0$ definirajmo *odprto kroglo* s središčem v a in polmerom ϵ kot množico

$$K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \epsilon\}.$$

Zaporedje vektorjev x_k v $\mathbb{R}^n$ *konvergira* proti vektorju x, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja naravno število k_0, da za vsak $k \geq k_0$ velja $\|x_k - x\| < \epsilon$, kar lahko pišemo tudi kot $x_k \in K(x, \epsilon)$. To je ekvivalentno s tem, da za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$ zaporedje i-tih komponent vektorjev x_k konvergira k i-ti komponenti vektorja x. Pišemo

$$x = \lim_{k \to \infty} x_k.$$

Če je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija n spremenljivk in x_k zaporedje vektorjev v $\mathbb{R}^n$, ki konvergira proti vektorju x, potem je

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x).$$

Podmnožica M v $\mathbb{R}^n$ je *odprta*, če za vsak $a \in M$ obstaja $\epsilon > 0$, da je $K(a, \epsilon) \subseteq M$. Za prazno množico dodatno definiramo, da je odprta v $\mathbb{R}^n$. Za podmnožico $M \subseteq \mathbb{R}^n$ pravimo, da je *zaprta*, če je $\mathbb{R}^n \setminus M$ odprta množica. Zaprte množice lahko karakteriziramo kot tiste podmnožice M v $\mathbb{R}^n$, za katera velja, da če vzamemo poljubno konvergentno zaporedje v M, potem tudi limita leži v M. Poleg tega pravimo, da je množica M v $\mathbb{R}^n$ *omejena*, če obstaja $\epsilon > 0$ in $a \in M$, da je $M \subseteq K(a, \epsilon)$. Omejenim zaprtim podmnožicam v $\mathbb{R}^n$ pravimo *kompaktne množice*. Tudi kompaktnost množic lahko karakteriziramo z zaporedji elementov; množica $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko za vsako zaporedje vektorjev v M obstaja neskončno podzaporedje, ki konvergira k nekemu elementu množice M.

Za nas bo pomemben naslednji rezultat:

Izrek 3.2.3. *Naj bo M kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in $f : M \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem funkcija f zavzame globalna ekstrema na M.*

Množica $\mathbb{E}^n$ je omejena in zaprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$, zato je kompaktna. Na prvi pogled izgleda, da je to že dovolj za dokaz Izreka 3.2.2. Žal pa funkcija f_A ni zvezna na $\mathbb{E}^n$; oglejmo si to na primeru:

Primer 3.2.4. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $\epsilon > 0$ in definirajmo

$$x(\epsilon) = \frac{1}{1+\epsilon} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}.$$

Očitno je $x(\epsilon) \in \mathbb{E}^3$. Poleg tega je

$$Ax(\epsilon) = \frac{1}{1+\epsilon} \begin{bmatrix} 2+\epsilon \\ 2+\epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix}.$$

Zato je

$$f_A(x(\epsilon)) = \min\{2+\epsilon, 1\} = 2+\epsilon.$$

Velja

$$x = \lim_{\epsilon \to 0} x(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

toda

$$\lim_{\epsilon \to 0} f_A(x(\epsilon)) = 2 \neq 1 = f_A(x).$$

Zato f_A ni zvezna v x.

Zgornji primer kaže, da sklep z zveznostjo ne bo deloval pri dokazu Izreka 3.2.2, vsaj neposredno ne. Po definiciji funkcije f_A je le-ta gotovo zvezna za tiste $x \in \mathbb{E}^n$, ki so strogo pozitivni, težave pa nastopijo v vektorjih, ki imajo kakšno ničelno komponento; to pokaže tudi zgornji zgled. Ideja dokaza Izreka 3.2.2 je, da se temu izognemo s pomočjo Posledice 3.1.5.

Najprej si oglejmo nekaj osnovnih lastnosti Wielandt–Collatzove funkcije:

Trditev 3.2.5. *Naj bo A nenegativna ireducibilna $n \times n$ matrika in f_A njena Wielandt–Collatzova funkcija. Naj bo $x \in \mathbb{P}^n \setminus \{0\}$.*

(a) Za vsak $t > 0$ velja $f_A(tx) = f_A(x)$.

(b) Naj bo ρ največje realno število, za katerega je $Ax - \rho x \geq 0$. Potem je $f_A(x) = \rho$.

(c) Za $y = (I+A)^{n-1}x$ velja $f_A(y) \geq f_A(x)$.

Dokaz. (a) Direkten račun da

$$f_A(tx) = \min_{(tx)_i \neq 0} \frac{(A(tx))_i}{(tx)_i} = \min_{x_i \neq 0} \frac{t(Ax)_i}{tx_i} = f_A(x).$$

(b) Po definiciji funkcije f_A je

$$Ax - f_A(x)x \geq 0, \tag{3.1}$$

kar pomeni, da je $f_A(x) \leq \rho$. Poleg tega obstaja tak k, da je x_k neničelna komponenta vektorja x, k-ta komponenta vektorja $Ax - f_A(x)x$ pa je enaka 0. Če je torej $\rho > f_A(x)$, potem je k-ta komponenta vektorja $Ax - \rho x$ negativna, kar je v protislovju z definicijo števila ρ. Zato je $f_A(x) = \rho$.

(c) Pomnožimo neenačbo (3.1) z matriko $(I+A)^{n-1}$; to lahko storimo zaradi Trditve 3.0.2:

$$A(I+A)^{n-1}x - f_A(x)(I+A)^{n-1}x \geq 0,$$

oziroma

$$Ay - f_A(x)y \geq 0.$$

Po točki (b) sledi $f_A(y) \geq f_A(x)$. □

Trditev 3.2.6. *Naj bo A nenegativna ireducibilna $n \times n$ matrika in f_A njena Wielandt–Collatzova funkcija. Potem je f_A omejena funkcija na $\mathbb{P}^n \setminus \{0\}$. Še več, za vsak $x \in \mathbb{P}^n \setminus \{0\}$ velja*

$$0 \leq f_A(x) \leq \|A\|_1,$$

kjer je $\|A\|_1$ maksimum vsot stolpcev matrike A.

Dokaz. Očitno je $f_A \geq 0$. Označimo s

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

vsoto elementov j-tega stolpca matrike A. Po definiciji imamo za vsak $x \in \mathbb{E}^n$ neenakost

$$(Ax)_i \geq f_A(x)x_i,$$

kar lahko zapišemo na dolgo kot

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq f_A(x)x_i.$$

Seštejmo te neenakosti za vse $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq \sum_{i=1}^{n} f_A(x)x_i = f_A(x)\sum_{i=1}^{n} x_i = f_A(x).$$

Na levi strani te neenačbe lahko zamenjamo vrstni red seštevanja:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j &\geq f_A(x), \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} &\geq f_A(x), \\ \sum_{j=1}^{n} x_j c_j &\geq f_A(x). \end{aligned}$$

Ker po definiciji velja $\|A\|_1 \geq c_j$ za vsak $j = 1, 2, \ldots, n$, dobimo neenakost

$$\|A\|_1 = \max_i c_i = \max_i c_i \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \max_i c_i \cdot x_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq f_A(x),$$

kar smo želeli dokazati. □

Dokaz Izreka 3.2.2. Oglejmo si podmnožico

$$\Omega = \{(I + A)^{n-1}x \mid x \in \mathbb{E}^n\}$$

v $\mathbb{R}^n$. Podobno kot zgoraj je tudi množica Ω kompaktna. Ker je matrika A ireducibilna, so po Posledici 3.1.5 vsi vektorji iz Ω strogo pozitivni. Zato je funkcija f_A zvezna na Ω, torej tam zavzame globalni maksimum. Recimo, da se to zgodi v točki $z \in \Omega$, ki je oblike

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Vektor z ima vse komponente striktno pozitivne. Definirajmo vektor

$$x' = \frac{1}{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Potem je $x' \in \mathbb{E}^n$. Izberimo sedaj poljuben $x \in \mathbb{E}^n$ in postavimo $y = (I + A)^{n-1}x \in \Omega$. Po Trditvi 3.2.5 (c) je $f_A(x) \leq f_A(y)$. Ker je $y \in \Omega$, je

$$f_A(y) \leq f_A(z) = f_A((z_1 + z_2 + \ldots + z_n)x') = f_A(x'),$$

pri čemer zadnja enakost sledi iz Trditve 3.2.5 (a). Dokazali smo torej

$$f_A(x) \leq f_A(x')$$

za vsak $x \in \mathbb{E}^n$, torej f_A zavzame globalni maksimum pri $x = x'$. □

3.3 Največja lastna vrednost nenegativne matrike

Izrek 3.3.1 (Perron–Frobeniusov izrek). *Naj bo A ireducibilna nenegativna $n \times n$ matrika. Potem obstaja lastna vrednost ρ matrike A, za katero velja*

$$\rho \geq |\lambda|$$

za vsako lastno vrednost λ matrike A. Poleg tega obstaja pozitiven lasten vektor matrike A za lastno vrednost ρ.

Dokaz. Po Izreku 3.2.2 obstaja vektor $x' \in \mathbb{E}^n$, da velja

$$f_A(x') \geq f_A(x)$$

za vse $x \in \mathbb{E}^n$. Definirajmo

$$\rho = f_A(x').$$

Dokazali bomo, da je ρ iskana maksimalna lastna vrednost matrike A, vektor x' pa iskani pozitiven lastni vektor matrike A za lastno vrednost ρ. Dokaz bomo razdelili v več korakov.

Korak 1: *Dokažimo, da je $\rho > 0$.* V ta namen si oglejmo vektor

$$u = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

iz $\mathbb{E}^n$. Velja

$$\rho \geq f_A(u) = \min_i \frac{(Au)_i}{u_i} = \min_i \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\frac{1}{n}} = \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Slednji izraz je strogo pozitiven, saj zaradi ireducibilnosti matrika A ne more imeti ničelne vrstice.

Korak 2: *Dokažimo, da je ρ lastna vrednost matrike A, vektor x' pa lasten vektor.* Recimo, da $Ax' - \rho x' \neq 0$. Po definiciji je

$$Ax' - \rho x' \geq 0.$$

Iz Posledice 3.1.5 sledi

$$(I + A)^{n-1}(Ax' - \rho x') > 0.$$

Če označimo $y' = (I + A)^{n-1}x'$, lahko zgornjo neenakost zapišemo kot

$$Ay' - \rho y' > 0.$$

Zato obstaja $\delta > 0$, da je
$$Ay' - (\rho + \delta)y' \geq 0.$$
Po Trditvi 3.2.5 (b) je zato
$$\rho + \delta \leq f_A(y'),$$
torej je $\rho < f_A(y')$. To je v protislovju z maksimalnostjo ρ. To pomeni, da je ρ lastna vrednost matrike A z lastnim vektorjem x'.

Korak 3: *Dokažimo, da je* $x' > 0$. Ker je $x' \geq 0$, to sledi direktno iz Trditve 3.1.8.

Korak 4: *Dokažimo, da je* $\rho \geq |\lambda|$ *za vsako lastno vrednost* λ *matrike* A. Naj bo z lasten vektor matrike A za lastno vrednost λ. Napišimo enakost $Az = \lambda z$ po komponentah:
$$\lambda z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j.$$
Od tod po trikotniški neenakosti sledi
$$|\lambda| \cdot |z_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |z_j|.$$
Če to napišemo nazaj v vektorski zapis, dobimo
$$|\lambda| \cdot |z| \leq A|z|,$$
pri čemer je $|z|$ vektor, katerega i-ta komponenta je $|z_i|$ za vsak i. Po Trditvi 3.2.5 (b) je
$$|\lambda| \leq f_A(|z|),$$
ker pa je ρ globalni maksimum funkcije f_A, sledi $|\lambda| \leq \rho$. □

Lastni vrednosti ρ iz Perron–Frobeniusovega izreka pravimo *Perron–Frobeniusova lastna vrednost* matrike A, pozitivnemu lastnemu vektorju za lastno vrednost ρ pa pravimo *Perron–Frobeniusov lasten vektor* matrike A.

Opomba 3.3.2. V dokazu Izreka 3.3.1 smo v Koraku 2 pravzaprav dokazali naslednje: Če je $x \geq 0$ in $Ax - \rho x \geq 0$, potem je x lasten vektor matrike A za lastno vrednost ρ. Po Trditvi 3.1.8 je x celo Perron–Frobeniusov lastni vektor za A.

Primer 3.3.3. Oglejmo si matriko
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Matrika A je nenegativna in ireducibilna, njeni lastni vrednosti sta 5 (enojna) in 0 (dvojna). 5 je torej Perron–Frobeniusova lastna vrednost za A. Lastni podprostor matrike A za lastno vrednost $\lambda = 5$ je
$$\mathrm{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}.$$
Perron–Frobeniusovi lastni vektorji matrike A so natanko pozitivni večkratniki vektorja $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Perron–Frobeniusov izrek v posebnem velja za vse pozitivne matrike. Če je matrika A nenegativna in reducibilna, sklep Perron–Frobeniusovega izreka ne velja vedno:

Primer 3.3.4. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika A je reducibilna. 1 je dvojna lastna vrednost matrike A, Lastni podprostor pa je

$$\operatorname{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Zato matrika A nima striktno pozitivnega lastnega vektorja.

Omenimo, da je mogoče pokazati še več lastnosti Perron–Frobeniusovih lastnih vrednosti in vektorjev nenegativnih ireducibilnih matrik. Tu omenimo le dva rezultata v tej smeri:

Izrek 3.3.5. *Perron–Frobeniusova lastna vrednost nenegativne ireducibilne matrike je enostavna ničla karakterističnega polinoma.*

Dokaz. Dokaz je predolg, zato ga izpustimo. □

Posledica 3.3.6. *Naj bo A nenegativna ireducibilna matrika. Potem je lastni podprostor za Perron–Frobeniusovo lastno vrednost enorazsežen; vsak Perron-Frobeniusov lasten vektor je skalarni večkratnik Perron-Frobeniusovega lastnega vektorja z normo 1.*

Dokaz. Direktna posledica Izreka 3.3.5. □

Za splošne nenegativne matrike imamo naslednji rezultat, ki sledi iz Perron–Frobeniusovega izreka in dejstva, da so lastne vrednosti in lastni vektorji zvezne funkcije elementov matrik (preveri!):

Izrek 3.3.7. *Naj bo A nenegativna $n \times n$ matrika. Potem ima A nenegativno lastno vrednost ρ, za katero velja $\rho \geq |\lambda|$ za vsako lastno vrednost λ matrike A. Poleg tega obstaja nenegativen lasten vektor matrike A za lastno vrednost ρ.*

Dokaz. Izberimo $\epsilon > 0$ in pišimo

$$A_\epsilon = A + \epsilon B,$$

kjer je B neka pozitivna $n \times n$ matrika. Potem je $A_\epsilon > 0$, zato po Perron–Frobeniusovem izreku obstajata Perron–Frobeniusova lastna vrednost ρ_ϵ matrike A_ϵ in Perron-Frobeniusov lasten vektor $x_\epsilon > 0$. To pomeni, da za vsako lastno vrednost λ_ϵ matrike A_ϵ velja

$$\rho_\epsilon \geq |\lambda_\epsilon| \tag{3.2}$$

in

$$A_\epsilon x_\epsilon = \rho_\epsilon x_\epsilon. \tag{3.3}$$

Pošljimo sedaj $\epsilon \to 0$. Potem $A_\epsilon \to A$. Zaradi zgoraj omenjene zveznosti obstajata limiti

$$\rho = \lim_{\epsilon \to 0} \rho_\epsilon$$

in

$$x = \lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon.$$

Ker je $\rho_\epsilon > 0$ in $x_\epsilon > 0$, je $\rho \geq 0$ in $x \geq 0$. Lastne vrednosti λ_ϵ matrik A_ϵ konvergirajo proti λ, ki je zaradi zveznosti lastna vrednost matrike A. Poleg tega zaradi (3.2) in (3.3) velja $\rho \geq |\lambda|$ in $Ax = \rho x$. □

Poglavje 4

Linearen model proizvodnje

V ekonomiji je dostikrat pomembno razumeti povezave med proizvodnjo in distribucijo izdelkov. Eden od ključnih modelov, ki pripomorejo k razumevanju tega, je *model Leontijeva.* V tem poglavju si bomo na kratko ogledali ta model in s pomočjo orodij linearne algebre izpeljali pogoje za to, da model da smiselne rešitve.

4.1 Model Leontijeva

Recimo, da imamo n proizvajalcev, od katerih vsak proizvaja natanko eno dobrino. Te proizvajalce oziroma dobrine označimo kar s števili $1, 2, \ldots, n$. Naj bo x_i količina dobrine i, ki jo proizvedemo. Predpostavimo, da se dobrina i se uporablja pri proizvodnji vseh dobrin $1, 2, \ldots, n$, poleg tega pa lahko del izdelkov proizvajalca i potrebujejo tudi zunanji uporabniki (drugi proizvajalci, gospodinjstva,...). Označimo z x_{ij} količino dobrine i, ki jo potrebuje prizvajalec j, z d_i pa označimo količino dobrine i, ki jo potrebujejo zunanji odjemalci. Očitno mora veljati $x_{ij} \geq 0$ in $d_i \geq 0$. Če predpostavimo, da je proizvodnja enaka povpraševanju, mora veljati

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + d_i = x_i \tag{4.1}$$

za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Problem, s katerim se bomo ukvarjali, je poiskati takšne x_i, da bodo vse enačbe (4.1) izpolnjene.

Smiselno je predpostaviti, da vsak od proizvajalcev proizvede pozitivno količino svojega izdelka (tovarna ne stoji), torej, da velja $x_i > 0$. Takšnim rešitvam bomo rekli *smiselne rešitve.* V tem primeru lahko definiramo

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Število a_{ij} torej pove, *koliko enot dobrine i rabimo za proizvodnjo ene enote dobrine j.* Enačbe (4.1) lahko v tem primeru zapišemo kot

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + d_i = x_i \tag{4.2}$$

za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. To lahko zapišemo v matrični obliki; če označimo $A = [a_{ij}]$ in

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},$$

Potem velja $Ax + d = x$ oziroma

$$(I - A)x = d. \tag{4.3}$$

Z drugimi besedami, rešujemo sistem linearnih enačb. Matriki A pravimo *matrika Leontijeva* oziroma *vhodno–izhodna matrika*, vektorju x pravimo *vektor proizvodnje*, vektorju d pa *vektor povpraševanja.*

4.1.1 Zaprti model Leontijeva

Ogledali si bomo dva modela zgornjega proizvodnega problema; razlika bo v tem, ali je vektor povpraševanja ničeln ali ne. Najprej definirajmo:

Definicija. *Zaprti model Leontijeva* je homogen sistem enačb

$$(I - A)x = 0,$$

za katerega velja:

(a) Matrika A je nenegativna kvadratna matrika.

(b) Za vsak j obstaja i, da je $a_{ij} > 0$.

(c) $a_{ii} < 1$ za vsak i.

(d) Vsota elementov v vsakem stolpcu matrike A je enaka 1.

Smiselnost predpostavke (a) je očitna. Predpostavko (b) lahko interpretiramo na naslednji način. Če bi obstajal tak j, da bi veljalo $a_{ij} = 0$ za vse i, bi to pomenilo, da za proizvodnjo dobrine j ne rabimo nobene od dobrin $1, 2, \ldots, n$. V proizvodnem problemu, ki smo ga zgoraj obravnavali, smo predpostavili ravno nasprotno, zato je tudi predpostavka (b) smiselna glede na zgornji problem. Predpostavka (c) v zgornjem modelu proizvodnje enostavno pove, da za proizvodnjo ene enote dobrine i rabimo manj kot eno enoto iste dobrine. Predpostavljamo torej, da lahko vsak proizvajalec proizvede več svojih dobrin, kot jih potrebuje zase. Predpostavko (d) utemeljimo z dejstvom, da pri zaprtem modelu proizvodnje predpostavimo, da se celotna proizvodnja dobrine i porabi znotraj vseh panog. To v našem jeziku pomeni, da je vsota elementov v vsakem stolpcu matrike A enaka 1.

Na hitro si oglejmo, kdaj obstajajo smiselne rešitve zaprtega modela Leontijeva. Ta model ima vedno nenegativno rešitev $x = 0$. Če je matrika $I - A$ obrnljiva, t.j., 1 ni lastna vrednost matrike A, potem je $x = 0$ tudi edina rešitev modela Leontijeva. To seveda ni smiselna rešitev, zato mora matrika A imeti eno lastno vrednost enako 1. V resnici to sledi iz naših predpostavk. Preden to utemeljimo, si oglejmo, kaj so to markovske matrike:

Definicija. *Markovska matrika* je nenegativna matrika, v katerih je vsota vsake vrstice enaka 1.

Markovske matrike so pomembne v verjetnosti v teoriji markovskih verig. Primer takšne matrike je

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trditev 4.1.2. *Naj bo A markovska matrika. Potem je 1 lastna vrednost matrike A. Za vsako lastno vrednost λ velja $|\lambda| \leq 1$.*

Dokaz. Očitno je

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

rešitev sistema $(I-A)x=0$. Vektor x je lasten vektor matrike A za lastno vrednost 1. Naj bo λ poljubna lastna vrednost matrike A z lastnim vektorjem v. Recimo, da velja $|\lambda|>1$. Ker je $A^n v=\lambda^n v$, je

$$\lim_{n\to\infty}\|A^n v\| = \lim_{n\to\infty}|\lambda|^n\|v\| = \infty.$$

To pomeni, da ima za dovolj velik n matrika A^n vsaj en element, ki je strogo večji kot 1. Po drugi strani pa je lahko preveriti, da je A^n tudi markovska matrika, ki pa ima po definiciji vse elemente ≤ 1. Protislovje. $\square$

Izrek 4.1.3. *Naj bo $(I-A)x=0$ zaprt model Leontijeva in recimo, da je A ireducibilna matrika. Potem obstaja $x>0$, ki reši dani sistem enačb. Vse smiselne rešitve tega modela so pozitivni večkratniki vektorja x.*

Dokaz. Po predpostavki je matrika A^{T} markovska matrika. Ker imata A in A^{T} enake lastne vrednosti, iz Trditve 4.1.2 dobimo, da je 1 Perron–Frobeniusova lastna vrednost matrike A, zato iz Perron–Frobeniusovega izreka sledi, da obstaja pozitiven lasten vektor x matrike A za lastno vrednost 1. Drugi del trditve sledi iz Posledice 3.3.6. $\square$

Oglejmo si še konkreten primer uporabe zaprtega modela Leontijeva:

Primer 4.1.4. Imamo zaprto ekonomijo kmetov, mizarjev in krojačev. Kmetje porabijo 2/5 hrane, 1/3 mizarskih izdelkov in 1/2 oblačil. Mizarji porabijo 2/5 hrane, 1/3 mizarskih izdelkov in 1/2 oblačil. Krojači pri svoji proizvodnji porabijo 1/5 hrane, 1/3 mizarskih izdelkov, ne rabijo pa svojih izdelkov. Zunanje porabe teh treh izdelkov ni.

Če označimo panoge po vrsti s števili 1, 2 in 3, je matrika Leontijeva

$$A=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}.$$

Vektorji proizvodnje so natanko pozitivni lastni vektorji matrike A za lastno vrednost 1; sistem $(I-A)x=0$ rešimo z Gaussovo eliminacijo:

$$I-A=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{15}{8}\\ 0 & 1 & -\frac{15}{8}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Smiselne rešitve so torej

$$x=t\cdot\begin{bmatrix}15\\15\\8\end{bmatrix},\quad t>0.$$

Obseg proizvodnje posameznih panog mora biti torej v razmerju $15:15:8$.

4.1.5 Odprti model Leontijeva

V nadaljevanju se bomo osredotočili na primer, ko je vektor povpraševanja neničeln:

Definicija. *Odprti model Leontijeva* je sistem enačb

$$(I-A)x=d,$$

za katerega velja:

(a) Matrika A je nenegativna kvadratna matrika.

(b) Za vsak j obstaja i, da je $a_{ij}>0$.

(c) d je neničeln nenegativen vektor.

(d) A je *produktivna matrika*, t.j., obstaja vektor $y > 0$, da je $y > Ay$.

Smiselne rešitve (odprtega, zaprtega) modela Leontijeva so vsi pozitivni vektorji x, ki zadoščajo sistemu linearnih enačb $(I - A)x = d$.

Spet si oglejmo smiselnost predpostavk odprtega modela Leontijeva glede na ekonomski problem, ki smo ga opisali zgoraj. Predpostavki (a) in (b) smo utemeljili že zgoraj. Predpostavka (c) je očitno smiselna. Ostane še predpostavka (d), ki v nekem smislu nadomesti predpostavko (c) iz zaprtega modela Leontijeva; intuitivno namreč pomeni, da morajo panoge proizvesti več, kot porabijo, s tem pa ostane nekaj tudi za zunanje odjemalce. Za začetek si oglejmo primer, kaj se zgodi, če produktivnost izpustimo:

Primer 4.1.6. Dana je matrika Leontijeva

$$A = \begin{bmatrix} 1,1 & 1,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$$

in vektor povpraševanja

$$d = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Najprej pokažimo, da A ni produktivna matrika. Če bi bila, bi obstajal pozitiven vektor y, da bi veljalo $(I - A)y > 0$. To lahko na dolgo zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} -0,1 & -1,3 \\ -0,3 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} > 0,$$

kjer sta $y_1, y_2 > 0$. To pomeni

$$\begin{aligned} -0,1y_1 - 1,3y_2 &> 0, \\ -0,3y_1 + 0,8y_2 &> 0, \end{aligned}$$

kar je seveda nemogoče. Zato A ni produktivna matrika.

Sedaj rešimo sistem $(I - A)x = d$, torej

$$\begin{bmatrix} -0,1 & -1,3 \\ -0,3 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ker je 2×2 matrika na levi strani obrnljiva, dobimo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 & -1,3 \\ -0,3 & 0,8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0,47} \begin{bmatrix} 0,8 & 1,3 \\ 0,3 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -11,70 \\ 0,64 \end{bmatrix},$$

kar v našem primeru ni smiselna rešitev.

Zgornji primer nakazuje, kaj gre narobe, če matrika A ni produktivna. V tem primeru za vsak pozitiven vektor y velja, da je vsaj ena komponenta vektorja $(I - A)y$ nepozitivna, torej manjša ali enaka 0. Če si ogledamo sistem Leontijeva $(I - A)x = d$, pri katerem je $d > 0$, potem je jasno, da v tem primeru ne bo imel pozitivne rešitve. Ravno to se je zgodilo v Primeru 4.1.6.

Naš glavni cilj bo pokazati, da ima odprti model Leontijeva ob zgornjih predpostavkah vedno enolično določeno nenegativno rešitev x. To seveda ni popolnoma zadovoljivo, saj nas zanimajo le strogo pozitivne rešitve sistema $(I - A)x = d$. Dokazali bomo, da če je A še ireducibilna matrika, potem ima odprti model Leontijeva vedno enolično določeno strogo pozitivno rešitev.

4.2 Obstoj nenegativne rešitve odprtega modela Leontijeva

Oglejmo si nekaj lastnosti produktivnih matrik:

Lema 4.2.1. *Če je A produktivna matrika, elementi matrike A^k konvergirajo proti 0, ko $k \to \infty$.*

Dokaz. Naj bo y pozitiven vektor, za katerega velja $y > Ay$. Očitno je $Ay \geq 0$. Zaradi stroge potivnosti obstaja $\delta \in (0,1)$, da velja

$$\delta y > Ay \geq 0.$$

Pomnožimo to neenakost z leve z matriko A; to lahko storimo zaradi Trditve 3.0.2:

$$\delta Ay > A^2 y \geq 0.$$

Po drugi strani je tudi $\delta^2 y > \delta Ay \geq 0$, zato je $\delta^2 y > A^2 y \geq 0$. Podoben sklep z indukcijo pokaže

$$\delta^k y > A^k y \geq 0$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$. Pošljemo $k \to \infty$. Dobimo

$$\lim_{k\to\infty} A^k y = 0,$$

kar je krajši zapis za

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} y_j = 0 \text{ za vsak } i = 1, 2, \ldots, n,$$

pri čemer je $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$. Ker so $y_j > 0$, je to možno le, če

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = 0 \text{ za vsaka } i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

s tem pa je dokaz končan. □

Lema 4.2.2. *Če je A produktivna matrika in $x \geq Ax$, potem je $x \geq 0$.*

Dokaz. Iz $x \geq Ax$ sledi $x \geq Ax \geq A^2x$. Z indukcijo hitro vidimo, da $x \geq A^k x$. Pošljemo $k \to \infty$, uporabimo Lemo 4.2.1 in dobimo $x \geq 0$. □

Lema 4.2.3. *Če je A produktivna matrika, je matrika $I - A$ obrnljiva.*

Dokaz. Recimo da to ni res, torej je 1 lastna vrednost matrike A; naj bo x ustrezen lastni vektor. Ker je $x = Ax$, iz Leme 4.2.2 sledi $x \geq 0$. Oglejmo si vektor $-x$, ki je tudi lasten vektor za A pri lastni vrednosti 1. Isti sklep sedaj pokaže $-x \geq 0$. Edina možnost je $x = 0$, kar pa ne drži. Protislovje. □

Izrek 4.2.4. *Model Leontijeva ima za vsak $d \geq 0$ enolično določeno nenegativno rešitev.*

Dokaz. Po Lemi 4.2.3 je rešitev ena sama in je dana z $x = (I - A)^{-1}d$. Ker je $(I - A)x = d \geq 0$, oziroma $x \geq Ax$, Lema 4.2.2 implicira $x \geq 0$. □

Naslednji rezultat nam da uporaben pogoj za preverjanje produktivnosti dane nenegativne matrike:

Izrek 4.2.5 (Hawkins–Simonov pogoj)**.** *Naj bo A nenegativna matrika. Potem je A produktivna natanko tedaj, ko je $I - A$ obrnljiva matrika in $(I - A)^{-1} \geq 0$.*

Dokaz. Recimo, da je A produktivna. Potem je matrika $I - A$ obrnljiva po Lemi 4.2.3. Definirajmo matrike

$$B_k = I + A + A^2 + \cdots + A^k.$$

Potem je $(I - A)B_k = I - A^{k+1}$. Pošljemo $k \to \infty$ in uporabimo Lemo 4.2.1:

$$\lim_{k\to\infty} (I - A)B_k = I.$$

Zato je

$$\lim_{k\to\infty} B_k = (I - A)^{-1}.$$

Ker je A nenegativna matrika, so matrike B_k nenegativne, zato iz zadnje enakosti sledi $(I - A)^{-1} \geq 0$.

Recimo sedaj, da $(I - A)^{-1}$ obstaja in je nenegativna matrika. Potem ima sistem

$$(I - A)x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

enolično določeno rešitev, ki je po predpostavki nenegativna. Po opombi, ki sledi za Primerom 4.1.6, sledi, da mora biti A produktivna matrika. $\square$

Primer 4.2.6. Imejmo odprt model Leontijeva z vhodno–izhodno matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1/10 & 1/5 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

in vektorjem povpraševanja

$$d = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika A je po Hawkins–Simonovem pogoju produktivna, saj je

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 10/9 & 2/9 & 4/9 \\ 0 & 1 & 1/8 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Rešitev je

$$x = (I - A)^{-1}d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev je res nenegativna, vendar pa ni smiselna, ker pomeni, da proizvajalec 3 ne obratuje. Kot bomo videli v naslednjem razdelku, ta težava ne nastopi, če je vhodno–izhodna matrika ireducibilna.

4.3 Obstoj pozitivne rešitve odprtega modela Leontijeva

Izrek 4.3.1. *Naj bo A produktivna matrika. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(a) Odprti model Leontijeva $(I - A)x = d$ ima enolično določeno pozitivno rešitev za vsak neničeln $d \geq 0$.

(b) $(I - A)^{-1} > 0$.

(c) A je ireducibilna matrika.

Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$. Ker je A produktivna matrika, $(I - A)^{-1}$ obstaja po Lemi 4.2.3. Naj bo d vektor, ki ima i-to komponento enako 1, ostale pa so enake 0. Naj bo x pozitivna rešitev $(I - A)x = d$. Potem je $x = (I - A)^{-1}d$ ravno i-ti stolpec matrike $(I - A)^{-1}$. S tem smo pokazali, da so vsi stolpci matrike $(I - A)^{-1}$ pozitivni, zato velja (b).

$(b) \Rightarrow (a)$. Enostavno.

$(b) \iff (c)$. Kot v dokazu Izreka 4.2.5 definiramo

$$B_k = I + A + A^2 + \cdots + A^k.$$

Potem je

$$\lim_{k\to\infty} B_k = (I - A)^{-1}.$$

Ker je zaporedje matrik B_k po elementih matrik nepadajoče, velja še

$$(I - A)^{-1} \geq B_k \text{ za vsak } k \in \mathbb{N}.$$

Naj bo $(I - A)^{-1} = [c_{ij}]$ in $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$. Najprej opazimo, da $c_{ii} \neq 0$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Če je $i \neq j$, iz zgornje neenakosti sledi $c_{ij} \neq 0$ natanko tedaj, ko obstaja k, da je $a_{ij}^{(k)} \neq 0$. Zato je $(I - A)^{-1} > 0$ natanko tedaj, ko za vsaka $i, j = 1, 2, \ldots, n$ obstaja k, da je $a_{ij}^{(k)} \neq 0$. Po Izreku 3.1.9 to pomeni, da je $(I - A)^{-1} > 0$ natanko tedaj, ko je A ireducibilna matrika. $\square$

Primer 4.3.2. Imamo tri dejavnosti, naftno industrijo, električno industrijo in proizvodnjo tovornjakov. Za eno enoto nafte rabimo 0,5 enote elektrike in 0,6 enote tovornjakov. Za eno enoto elektrike rabimo 0,15 enot nafte in 0,1 enote elektrike. Za eno enoto tovornjakov rabimo 0,35 enot nafte, 0,1 enote elektrike in 0,1 enote tovornjakov. Zunanji trg potrebuje 250.000 enot nafte in 500.000 enot tovornjakov. Koliko enot morajo proizvesti posamezne panoge?

Ustrezna matrika Leontijeva je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0,15 & 0,1 & 0 \\ 0,35 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix},$$

vektor povpraševanja pa je

$$d = \begin{bmatrix} 250.000 \\ 0 \\ 500.000 \end{bmatrix}.$$

Po Hawkins-Simonovem pogoju je lahko preveriti, da je matrika A produktivna, saj je

$$(I - A)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1,4876 & 0,9366 & 0,9917 \\ 0,2479 & 1,2672 & 0,1653 \\ 0,6061 & 0,5051 & 1,5152 \end{bmatrix}.$$

Rešitev modela Leontijeva je

$$x = (I - A)^{-1}d = \begin{bmatrix} 867.769 \\ 144.628 \\ 909.091 \end{bmatrix}.$$

Proizvesti moramo torej 867.769 enot nafte, 144.628 enot elektrike in 909.091 enot tovornjakov.

Poglavje 5

Pozitivni funkcionali

Teorija pozitivnih funkcionalov je del linearne algebre, ki ima pomembne uporabe v ekonomiji, kjer takšni funkcionali nastopajo kot cenovni funkcionali trgov brez arbitraž, poleg tega pa so ključnega pomena pri linearnem programiranju. Tu si bomo ogledali le nekaj osnovnih pojmov in rezultatov.

V celotnem poglavju bomo obravnavali vektorski prostor $\mathbb{R}^n$, opremljen s standardnim skalarnim produktom.

5.1 Osnove o linearnih funkcionalih

Definicija. Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. *Linearen funkcional* je linearna preslikava $\pi : V \to \mathbb{R}$.

Primer 5.1.1. Naj bo V ravnina z enačbo $x + y + z = 0$ v $\mathbb{R}^3$. Preslikava $\pi : V \to \mathbb{R}$, dana z predpisom

$$\pi(x,\, y,\, -x-y) = 4x + y,$$

je linearen funkcional. Izberimo bazo prostora V:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\pi(v_1) = 4$ in $\pi(v_2) = 1$, ima π v tej bazi matriko $\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Izrek 5.1.2 (Rieszov izrek)**.** *Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ in $\pi : V \to \mathbb{R}$ linearen funkcional. Potem obstaja enolično določen vektor $y_\pi \in V$, da je*

$$\pi(x) = \langle x, y_\pi \rangle$$

za vsak $x \in V$.

Dokaz. Če je $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ ortonormirana baza prostora V, vektor

$$y_\pi = \pi(e_1)e_1 + \pi_(e_2)e_2 + \ldots + \pi(e_n)e_n$$

ustreza pogoju. Če sta $y, z \in V$ dva vektorja, ki ustrezata pogoju izreka, je

$$\langle x, y - z \rangle = 0$$

za vsak $x \in V$. Od tod hitro sledi $y = z$, kar nam da enoličnost. □

Vektorju y_π iz Izreka 5.1.2 pravimo *Rieszov vektor* linearnega funkcionala π.

Opomba 5.1.3. Če je π linearen funkcional na $\mathbb{R}^n$, potem ga lahko po Rieszovem izreku zapišemo v obliki

$$\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

za neke $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Če π gledamo kot funkcijo n spremenljivk, je to očitno zvezna funkcija na $\mathbb{R}^n$.

Primer 5.1.4. Naj bo π linearen funkcional iz Primera 5.1.1. Ortonormirano bazo prostora V lahko dobimo s pomočjo baze iz omenjenega primera in Gram–Schmidtovega postopka:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$e_2 = \left(v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1\right) \Big/ \left\| v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \right\| = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\pi(e_1) = 4/\sqrt{2},$$
$$\pi(e_2) = -2/\sqrt{6},$$

je Rieszov vektor za π enak

$$y_\pi = \pi(e_1)e_1 + \pi(e_2)e_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $\pi : V \to \mathbb{R}$ linearen funkcional. Iz definicije je jasno, da je $\dim \operatorname{im} \pi \le 1$; če je $\pi \ne 0$, potem je v resnici $\dim \operatorname{im} \pi = 1$ in zato $\dim \ker \pi = m - 1$, kjer je $\dim V = m$. Če izberemo bazo prostora V, potem lahko linearen funkcional predstavimo z matriko velikosti $1 \times m$.

Naslednji rezultat pove, da se linearna funkcionala na prostoru V, ki imata enaki jedri, skoraj ujemata:

Lema 5.1.5. *Naj bosta π in ψ linearna funkcionala na podprostoru V. Če je $\ker \pi = \ker \psi$, potem obstaja $\lambda \in \mathbb{R}$, da je $\pi = \lambda\psi$.*

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da sta π in ψ neničelna funkcionala. Označimo $\dim V = m$ in $K = \ker \pi = \ker \psi$. Potem je $\dim K = m - 1$. Dopolnimo bazo podprostora K do baze prostora V:

$$V = K \oplus \operatorname{Lin}\{v\}.$$

Označimo $\pi(v) = \mu_1$ in $\psi(v) = \mu_2$. Po konstrukciji sta $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Izberimo $x \in V$; zapišemo ga lahko na enoličen način kot

$$x = k + \mu v, \qquad k \in K,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Potem je $\pi(x) = \pi(k + \mu v) = \pi(k) + \mu\pi(v) = \mu\mu_1$. Podobno je $\psi(x) = \mu\mu_2$, torej je

$$\pi(x) = \frac{\mu_1}{\mu_2}\psi(x).$$

Ker to velja za vsak $x \in V$, je trditev dokazana. $\square$

Definicija. Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ in $\pi : V \to \mathbb{R}$. Linearen funkcional

$$\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

je *razširitev linearnega funkcionala* π, če velja

$$\tilde{\pi}(v) = \pi(v)$$

za vsak $v \in V$.

Očiten način, kako lahko linearen funkcional $\pi : V \to \mathbb{R}$ razširimo na celoten $\mathbb{R}^n$, je naslednji. Izberemo bazo $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ podprostora V in jo dopolnemo do baze celega $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}.$$

Razširitev $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sedaj definiramo tako, da predpišemo, kam se preslikajo bazni vektorji:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(v_1) &= \pi(v_1), \\ \tilde{\pi}(v_2) &= \pi(v_2), \\ &\vdots \\ \tilde{\pi}(v_m) &= \pi(v_m), \\ \tilde{\pi}(u_{m+1}) &= \alpha_{m+1} \\ &\vdots \\ \tilde{\pi}(u_n) &= \alpha_n, \end{aligned}$$

Kjer so $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ poljubna realna števila. V naslednji lemi pokažemo, da obstaja povezava med razširitvami funkcionala π in elementi $(\ker \pi)^\perp$:

Lema 5.1.6. *Naj bo $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ razširitev linearnega funkcionala π. Naj bo z Rieszov vektor funkcionala $\tilde{\pi}$. Potem je $z \in (\ker \pi)^\perp$.*

Obratno, naj bo $z \in (\ker \pi)^\perp$ poljuben vektor. Definirajmo

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{\psi}(x) = \langle x, z\rangle.$$

Potem obstaja enolično določen $\lambda \in \mathbb{R}$, da je $\lambda\tilde{\psi}$ razširitev linearnega funkcionala π.

Dokaz. Izberimo poljuben $u \in \ker \pi$. Potem je

$$\langle u, z\rangle = \pi(u) = 0,$$

torej je $z \in (\ker \pi)^\perp$.

Dokažimo še drugi del. Brez škode je $z \neq 0$. naj bo ψ zožitev linearnega funkcionala $\tilde{\psi}$ na podprostor V. Trdimo, da je $\ker \pi = \ker \psi$; od tod bo rezultat sledil s pomočjo Leme 5.1.5. Če vzamemo $x \in \ker \pi$, je $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) = \langle x, z\rangle = 0$, torej je $x \in \ker \psi$. Obratno, če je $x \in \ker \psi$, je $\langle x, z\rangle = 0$. Zapišimo

$$V = \ker \pi \oplus (\ker \pi)^\perp = \ker \pi \oplus \mathrm{Lin}\{z\}.$$

Vektor x torej lahko napišemo kot $x = k + \alpha z$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$ in $k \in \ker \pi$. Potem je

$$0 = \langle x, z\rangle = \langle k, z\rangle + \alpha\langle z, z\rangle = \alpha\|z\|^2.$$

Ker je $z \neq 0$, sledi $\alpha = 0$, torej $x = k \in \ker \pi$. S tem je dokaz končan. ☐

Primer 5.1.7. Oglejmo si linearen funkcional iz Zgleda 5.1.1. Naj bo torej V ravnina z enačbo $x + y + z = 0$ v $\mathbb{R}^3$, funkcional $\pi : V \to \mathbb{R}$ pa je definiran z predpisom

$$\pi(x,\, y,\, -x - y) = 4x + y.$$

Očitno je $\ker \pi$ presek ravnin $x + y + z = 0$ in $4x + y = 0$, kar je ravno premica skozi izhodišče in s smernim vektorjem

$$s = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zato je $\ker \pi = \mathrm{Lin}\{s\}$, torej je $(\ker \pi)^\perp$ ravnina z enačbo $x - 4y + 3z = 0$. Izberimo vektor iz $(\ker \pi)^\perp$:

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Kot v dokazu Leme 5.1.6 definiramo $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\tilde{\psi}(u) = \langle u, v \rangle,$$

kar lahko prepišemo na dolgo kot

$$\tilde{\psi}(x, y, z) = -2x + y + 2z.$$

Poiskati moramo $\lambda \in \mathbb{R}$, da se bo $\lambda\tilde{\psi}$ na V ujemal z π:

$$\lambda\tilde{\psi}(x, y, -x - y) = \lambda(-4x - y),$$

torej je $\lambda = -1$; funkcional $-\tilde{\psi}$ je ustrezna razširitev funkcionala π na cel $\mathbb{R}^3$.

5.2 Konveksne množice in stožci

V tem razdelku si bomo ogledali še nekaj stvari, ki jih rabimo v nadaljevanju, ko bomo vpeljali pojem pozitivnega linearnega funkcionala.

Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ ima standardno bazo, ki jo sestavljajo nenegativni vektorji. Prav lahko je najti bazo za $\mathbb{R}^n$, sestavljeno iz samih pozitivnih vektorjev. Po drugi strani obstajajo podprostori v $\mathbb{R}^n$, za katere ne moremo najti baze, katere elementi bi bili pozitivni vektorji; primer takšnega podprostora je $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 = 0\}$. Izkaže pa se, da če podprostor vsebuje vsaj en pozitiven vektor, potem lahko zanj najdemo bazo, sestavljeno iz samih pozitivnih vektorjev. To bomo dokazali, še prej pa rabimo pomožno trditev:

Lema 5.2.1. *Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Potem je množica vseh pozitivnih vektorjev v V odprta v $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Naj bo M množica vseh pozitivnih vektorjev v V. Izberimo

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M.$$

Ker je $a > 0$, obstaja $\epsilon > 0$, da je $a_i > \epsilon$ za vsak i. Naj bo $K(a, \epsilon)$ odprta krogla v $\mathbb{R}^n$ s središčem v a in polmerom ϵ. Vzemimo sedaj

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K(a, \epsilon).$$

Potem je

$$a_i - x_i \leq |a_i - x_i| \leq \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} = \|a - x\| < \epsilon,$$

torej $x_i > a_i - \epsilon > 0$. Zato je $x \in M$, torej $K(a, \epsilon) \subseteq M$. □

Izrek 5.2.2. *Naj bo V m-dimenzionalen podprostor v $\mathbb{R}^n$. Če obstaja pozitiven vektor v podprostoru V, potem lahko za V izberemo bazo, sestavljeno iz samih pozitivnih vektorjev.*

Dokaz. Naj bo v_1 pozitiven vektor v V. Dopolnimo ga do baze prostora V:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}.$$

Za $\lambda \in [0, 1)$ in $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ definirajmo

$$v_j(\lambda) = \lambda v_1 + (1 - \lambda) v_j.$$

Direktno lahko preverimo, da je

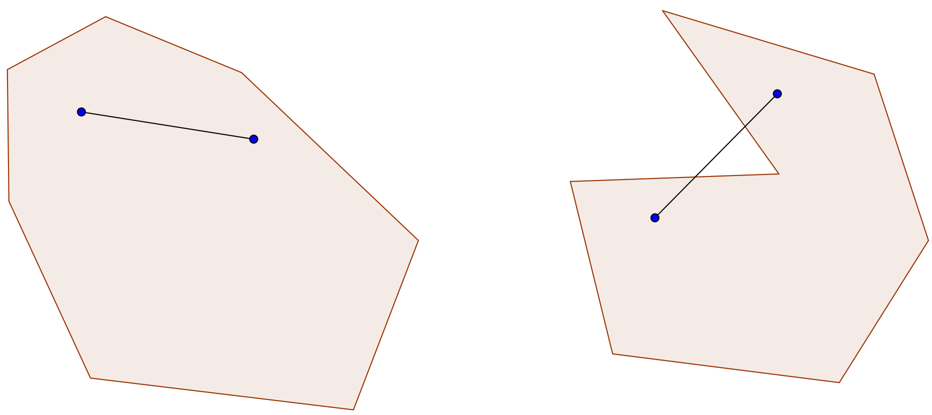
$$\mathcal{B}_\lambda = \{v_1, v_2(\lambda), \ldots, v_m(\lambda)\}$$

tudi baza prostora V, natančen dokaz prepuščamo bralcu. Če sedaj pošljemo $\lambda \to 1$, vsi vektorji $v_j(\lambda)$ konvergirajo proti v_1. Po Lemi 5.2.1 obstaja odprta krogla v $\mathbb{R}^n$ s središčem v_1, katere vsi elementi so pozitivni vektorji. Ko je λ blizu 1, vsi vektorji $z_j(\lambda)$ padejo v to kroglo in so zato pozitivni. □

Definicija. Podmnožica K v $\mathbb{R}^n$ je *konveksna*, če za vsaka $x, y \in K$ in vsak $\lambda \in [0, 1]$ velja tudi $\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$.

Primer 5.2.3. Po definiciji je množica K konveksna natanko tedaj, ko za vsak par točk iz K cela daljica med tema točkama leži v K. Na Sliki 5.1 je na levi primer konveksne, na desni pa nekonveksne podmnožice v ravnini.

Slika 5.1: Primera konveksne in nekonveksne množice



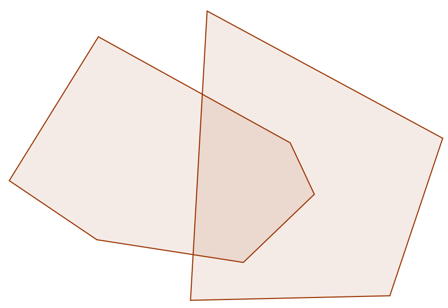
Lema 5.2.4. *Presek poljubne družine konveksnih množic v $\mathbb{R}^n$ je tudi konveksna množica.*

Dokaz. Naj bo $\{K_i \mid i \in I\}$ družina konveksnih množic in K njihov presek. Izberimo $x, y \in K$ in $\lambda \in [0, 1]$. Ker je za vsak $i \in I$ množica K_i konveksna in velja $x, y \in K_i$, je tudi $\lambda x + (1 - \lambda) y \in K_i$ za vsak $i \in I$. To pomeni, da je $\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$, kar smo hoteli dokazati. □

Definicija. Podmnožica K množice $\mathbb{R}^n$ je *stožec*, če za vsak $x \in K$ velja

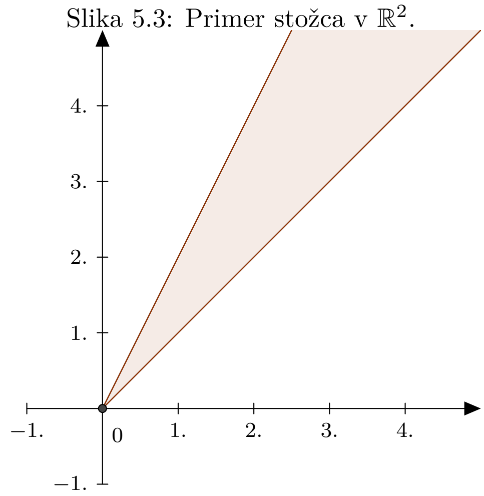
$$\{\lambda x \mid \lambda \geq 0\} \subseteq K.$$

Slika 5.2: Presek dveh konveksnih množic.



Primer 5.2.5. Množica
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x \leq y \leq 2x\}$$
je stožec v $\mathbb{R}^2$ (gl. tudi Sliko 5.3). Če namreč vzamemo
$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C,$$
in $\lambda \geq 0$, je tudi $\lambda x \geq 0$ in $\lambda x \leq \lambda y \leq 2\lambda x$, zato je $\lambda v \in C$.

Slika 5.3: Primer stožca v $\mathbb{R}^2$.



Postavimo sedaj
$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}.$$
Očitno je $\mathbb{R}^1_+ = [0, \infty)$, medtem, ko je $\mathbb{R}^2_+$ ravno prvi kvadrant v koordinatni ravnini.

Lema 5.2.6. *Množica $\mathbb{R}^n_+$ je zaprta, konveksna in je stožec.*

Dokaz. Po definiciji hitro preverimo, da je $\mathbb{R}^n_+$ konveksna množica in stožec. Dokažimo še, da je $\mathbb{R}^n_+$ zaprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Vzemimo zaporedje vektorjev $y_i \in \mathbb{R}^n_+$, ki konvergirajo proti vektorju x. Potem j-te komponente $y_{i,j}$ vektorjev y_i konvergirajo k j-ti komponenti x_j vektorja x. Ker so $y_{i,j} \geq 0$, je tudi $x_j \geq 0$, za vsak j, to pa pomeni, da je $x \in \mathbb{R}^n_+$. $\square$

Množico $\mathbb{R}^n_+$ imenujemo *pozitiven stožec* v $\mathbb{R}^n$. Na koncu tega razdelka le še vpeljimo oznako. Za poljubno podmnožico M v $\mathbb{R}^n$ naj bo

$$M_+ = M \cap \mathbb{R}^n_+$$

množica vseh nenegativnih vektorjev v M.

5.3 Pozitivni funkcionali

Definicija. Naj bo $\pi : V \to \mathbb{R}$ linearen funkcional. Pravimo, da je π *pozitiven*, če za vsak nenegativen neničeln vektor $x \in V$ velja $\pi(x) > 0$. Podobno je π *nenegativen linearen funkcional*, če je $\pi(x) \geq 0$ za vsak nenegativen vektor $x \in V$.

Primer 5.3.1. Na j bo V ravnina $x + y - z = 0$ v $\mathbb{R}^3$. Definiramo $\pi_1 : V \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\pi_1(x, y, x + y) = x + y.$$

Vektor

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} \in V$$

je nengativen natanko tedaj, ko je $x \geq 0$ in $y \geq 0$. Če je v neničeln in nenegativen, potem je $\pi_1(v) > 0$, torej je π_1 pozitiven linearen funkcional. Če pa definiramo $\pi_2 : V \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\pi_2(x, y, x + y) = x,$$

dobimo nenegativen funkcional na V, ki ni pozitiven; velja namreč $\pi_2(0, 1, 1) = 0$.

Lema 5.3.2. *Naj bo $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearen funkcional in $e_1, e_2, \ldots, e_n$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^n$. Potem je π pozitiven (nenegativen) linearen funkcional natanko tedaj, ko je $\pi(e_i) > 0$ ($\pi(e_i) \geq 0$) za vse $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Dokaz. Če je π pozitiven (nenegativen) funkcional, očitno velja $\pi(e_i) > 0$ ($\pi(e_i) \geq 0$) za vse $i = 1, 2, \ldots, n$. Obratno, če je $\pi(e_i) > 0$ in $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ neničeln nenegativen vektor, potem je $\pi(v) = \alpha_1 \pi(e_1) + \alpha_2 \pi(e_2) + \cdots + \alpha_n \pi(e_n)$ strogo pozitivno število, saj je vsaj eden od α_i strogo pozitiven. π je torej pozitiven funkcional. Dokaz za nenegativne funkcionale je podoben. $\square$

Trditev 5.3.3. *Naj bo $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearen funkcional in $y \in \mathbb{R}^n$ pripadajoči Rieszov vektor. Potem je π pozitiven (nenegativen) natanko tedaj, ko je $y > 0$ ($y \geq 0$).*

Dokaz. Ker je $y = \pi(e_1)e_1 + \pi(e_2)e_2 + \cdots + \pi(e_n)e_n$, trditev neposredno sledi iz Leme 5.3.2. $\square$

5.4 Separacijski izreki

Definicija. Naj bo $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearen funkcional in $y \in \mathbb{R}^n$ pripadajoči Rieszov vektor. Za $b \in \mathbb{R}$ definiramo

$$\begin{aligned} H_\pi(b) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pi(x) = \langle x, y \rangle = b\}, \\ H_\pi^+(b) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pi(x) = \langle x, y \rangle \geq b\}, \\ H_\pi^-(b) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pi(x) = \langle x, y \rangle \leq b\}. \end{aligned}$$

Lema 5.4.1. *Naj bo $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearen funkcional in $b \in \mathbb{R}$. Naj bo $x_b \in \mathbb{R}^n$ vektor, za katerega velja $\pi(x_b) = b$.*

(a) $H_\pi(0) = \ker \pi$,

(b) $H_\pi(b) = x_b + H_\pi(0)$,

(c) $H_\pi^+(b) = x_b + H_\pi^+(0)$,

(d) $H_\pi^-(b) = x_b + H_\pi^-(0)$.

Dokaz. Točka (a) sledi neposredno iz definicije. Dokažimo še točko (b), medtem, ko dokaza (c) in (d) izpustimo, saj sta podobna. Izberimo $x \in H_\pi(b)$. To pomeni, da je $\pi(x) = b$. Zato je $x - x_b \in \ker \pi = H_\pi(0)$. S tem smo dokazali, da je $x \in x_b + H_\pi(0)$. Obratno naj bo $x \in x_b + H_\pi(0)$. Potem lahko pišemo $x = x_b + x_0$, kjer je $x_0 \in \ker \pi$. Zato je $\pi(x) = \pi(x_b) + \pi(x_0) = b$, torej je $x \in H_\pi(b)$. □

Če je π neničeln linearen funkcional, potem je $H_\pi(0) = \ker \pi$ podprostor dimenzije $n-1$ v $\mathbb{R}^n$; takim podprostorom pravimo *hiperravnine*. V splošnem je po Lemi 5.4.1 množica $H_\pi(b)$ premaknjena hiperravnina. Takšnim množicam pravimo *afine hiperravnine*. Zaradi enostavnosti bo pojem hiperravnina predstavljal afino hiperravnino. Množici $H_\pi^+(b)$ pravimo *pozitivni polprostor*, množici $H_\pi^-(b)$ pa *negativni polprostor*, ki pripada π in b.

Primer 5.4.2. Oglejmo si funkcional $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiran z $\pi(x, y) = x - 2y$. Potem je $H_\pi(3)$ premica z enačbo $x - 2y = 3$, $H_\pi(3)^+$ je polravnina nad to premico, $H_\pi(3)^-$ pa polravnina pod premico.

Definicija. Naj bosta A in B podmnožici v $\mathbb{R}^n$ in π linearen funkcional na $\mathbb{R}^n$. Pravimo, da hiperravnina $H_\pi(b)$ *separira* množici A in B, če velja bodisi

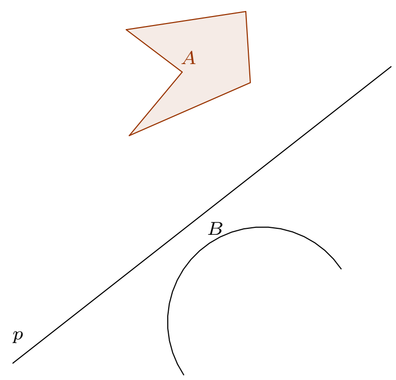
$$\pi(x) \geq b \geq \pi(y) \text{ za vsaka } x \in A,\ y \in B$$

bodisi

$$\pi(x) \leq b \leq \pi(y) \text{ za vsaka } x \in A,\ y \in B.$$

Če v zgornjem pogoju neenačaje zamenjamo s strogimi neenačaji, pravimo, da $H_\pi(b)$ *striktno separira* množici A in B. Poleg tega pravimo, da funkcional π *(striktno) separira* množici A in B, če obstaja $b \in \mathbb{R}$, da $H_\pi(b)$ (striktno) separira A in B.

Slika 5.4: Premica p striktno separira množici A in B.



Lema 5.4.3. *Naj bosta A in B podmnožici v $\mathbb{R}^n$.*

(i) Če sta A in B konveksni množici, je tudi množica $A + B$ konveksna.

(ii) Če je A kompaktna in B zaprta, je množica $A+B$ zaprta.

Dokaz. (a) Vzemimo $x, y \in A+B$ in izberimo $\lambda \in [0,1]$. Pišemo lahko $x = a_1 + b_1$ in $y = a_2 + b_2$, kjer $a_1, a_2 \in A$ in $b_1, b_2 \in B$. Ker sta A in B konveksni, je $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A$ in $\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in B$. Zato je $\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 + \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in A+B$.

(b) Naj zaporedje vektorjev $c_k = a_k + b_k \in A+B$, kjer $a_k \in A$ in $b_k \in B$, konvergira proti nekemu vektorju x. Ker je množica A kompaktna, obstaja podzaporedje a_{k_n}, ki konvergira k nekemu $a \in A$. Potem je

$$\lim_{n\to\infty} b_{k_n} = \lim_{n\to\infty}(c_{k_n} - a_{k_n}) = x - a.$$

Ker je množica B zaprta, je $x - a \in B$, zato je $x = a + (x-a) \in A+B$. □

Lema 5.4.4. *Množice $H_\pi(b)$, $H_\pi^+(b)$ in $H_\pi^-(b)$ so konveksne zaprte podmnožice v $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Dokažimo trditev za $H_\pi(b)^+$; dokaz za $H_\pi(b)^-$ je podoben, trditev za $H_\pi(b)$ pa sledi iz očitne zveze $H_\pi^+(b) \cap H_\pi^-(b) = H_\pi(b)$ in Leme 5.2.4.

Izberimo $x, y \in H_\pi(b)^+$ in $\lambda \in [0,1]$. Potem je

$$\pi(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda\pi(x) + (1-\lambda)\pi(y) \geq b,$$

torej je $\lambda x + (1-\lambda)y \in H_\pi(b)^+$. Preostane še dokaz, da je $H_\pi(b)^+$ zaprta v $\mathbb{R}^n$. Izberimo zaporedje vektorjev x_j v $H_\pi(b)^+$, ki konvergirajo k $x \in \mathbb{R}^n$. Potem velja $\pi(x_j) \geq b$, ker pa je funkcija π zvezna na $\mathbb{R}^n$, $\pi(x_j) \to \pi(x)$, zato je tudi $\pi(x) \geq b$. To pomeni, da je $x \in H_\pi(b)^+$. □

Naslednji izrek bo osnova za dokaze rezultatov o separaciji:

Izrek 5.4.5. *Naj bo C zaprta konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^n$, ki ne vsebuje 0. Potem obstaja $x_0 \in C$, da velja*

$$\langle x_0, x\rangle \geq \|x_0\|^2$$

za vsak $x \in C$.

Dokaz. Naj bo $\epsilon > 0$ takšen, da je

$$C_\epsilon = \{x \in C \mid \|x\| \leq \epsilon\} \neq \emptyset.$$

Množica C_ϵ je omejena in zaprta, zato je kompaktna. Poleg tega je tudi konveksna. Če namreč vzamemo $x, y \in C_\epsilon$ in $\lambda \in [0,1]$, potem je po trikotniški neenakosti

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leq \lambda\epsilon + (1-\lambda)\epsilon = \epsilon.$$

Ker je funkcija $x \mapsto \|x\|$ zvezna, zavzame minimum na C_ϵ, torej obstaja $x_0 \in C_\epsilon$, da velja $\|x\| \geq \|x_0\|$ za vsak $x \in C_\epsilon$. Po definiciji množice C_ϵ slednja neenakost velja za vsak $x \in C$. Če je $\lambda \in [0,1)$, je zaradi konveksnosti $\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in C$, zato je

$$\begin{aligned}\|x_0\|^2 &\leq \|x_0 + \lambda(x - x_0)\|^2 \\ &= \|x_0\|^2 + 2\lambda\langle x_0, x - x_0\rangle + \lambda^2\|x - x_0\|^2.\end{aligned}$$

Po preureditvi dobimo

$$0 \leq 2\langle x_0, x - x_0\rangle + \lambda\|x - x_0\|^2.$$

Pošljemo $\lambda \to 0$:

$$0 \leq 2\langle x_0, x - x_0\rangle = \langle x, x_0\rangle - \|x_0\|^2.$$

Od tod sledi rezultat. □

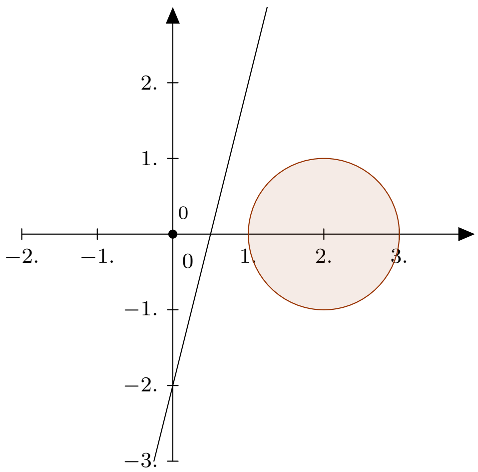
Kot posledico navedimo prvi separacijski rezultat:

Posledica 5.4.6. *Naj bo C zaprta konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^n$, ki ne vsebuje 0. Potem obstajata linearen funkcional $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $b \in \mathbb{R}$, da hiperravnina $H_\pi(b)$ striktno separira 0 in C.*

Dokaz. Definiramo $\pi(x) = \langle x, x_0 \rangle$, kjer je x_0 vektor, ki ga dobimo iz Izreka 5.4.5. Če postavimo $b = \|x_0\|^2/2$, potem $H_\pi(b)$ striktno separira množici $\{0\}$ in C. $\square$

Primer 5.4.7. Naj bo
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$
krog v ravnini, ki ima polmer 1 in središče v $(2, 0)$. Množica C je zaprta in konveksna ter ne vsebuje 0. Premica $y = 4x - 2$ separira 0 in C (Slika 5.5).

Slika 5.5: Premica separira 0 in konveksno množico.



Naslednji separacijski izrek pove, da za dani podprostor V v $\mathbb{R}^n$ in konveksno množico C, ki ne seka V, vedno lahko najdemo linearen funkcional, katerega jedro vsebuje V in ki separira $\mathbb{R}^n$ tako, da eden od polprostorov vsebuje celo množico C. Še prej nekoliko priredimo Izrek 5.4.5 za konkretno situacijo:

Izrek 5.4.8. *Naj bo C kompaktna konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$, za katerega velja $C \cap V = \emptyset$. Potem obstaja $x_0 \in C$, da velja*

$$\langle x_0, x \rangle \geq \|x_0\|^2$$

za vsak $x \in C$ in

$$\langle x_0, v \rangle = 0$$

za vsak $v \in V$.

Dokaz. Naj bo $A = C + V$. Po Lemi 5.4.3 je množica A zaprta in konveksna, očitno ne vsebuje 0. Po Izreku 5.4.5 obstaja $x_0 \in A$, da je

$$\langle x_0, x \rangle \geq \|x_0\|^2$$

za vse $x \in A$. Ker je $C \subseteq A$, smo s tem dokazali prvi del trditve. Po definiciji množice A velja

$$\|x_0\|^2 \leq \langle x + \alpha y, x_0 \rangle$$

za vse $x \in C$, $y \in V$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. To je ekvivalentno

$$\|x_0\|^2 - \alpha \langle y, x_0 \rangle \leq \langle x, x_0 \rangle.$$

Če fiksiramo x in y, je desna stran neenakosti konstantna, leva pa linearna funkcija parametra α. Zato je to možno le, če je $\langle y, x_0 \rangle = 0$ za vse $y \in V$. $\square$

Posledica 5.4.9. *Naj bo C kompaktna konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^n$, ki ne seka vektorskega podprostora V. Potem obstajata linearen funkcional $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $b \in \mathbb{R}$, da je $V \subseteq \ker \pi$ in hiperravnina $H_\pi(b)$ striktno separira V in C.*

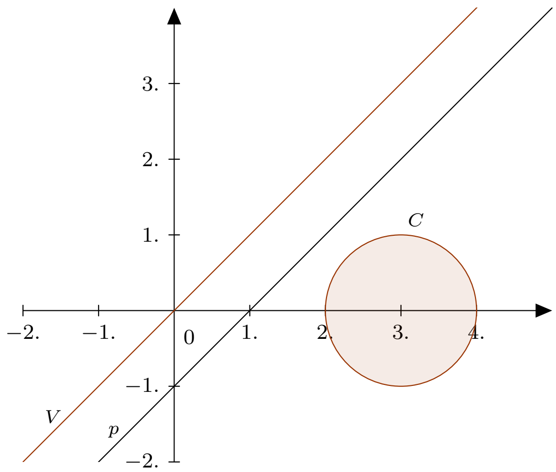
Dokaz. Dokaz je povsem enak kot dokaz Posledice 5.4.6, le da tu uporabimo Izrek 5.4.8. □

Primer 5.4.10. Naj bo V premica $x - y = 0$ v $\mathbb{R}^2$ in C krog s središčem v $(3, 0)$ in polmerom 1. Če definiramo linearen funkcional

$$\pi(x, y) = x - y,$$

potem je očitno $V = \ker \pi$, hiperravnina $p = H_\pi(1)$, ki je premica z enačbo $x-y = 1$, pa separira V in C; gl. Sliko 5.6.

Slika 5.6: Premica separira konveksno množico in vektorski podprostor v $\mathbb{R}^2$.



Posledica 5.4.11. *Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ in naj bo $y \in \mathbb{R}^n \setminus V$. Potem obstajata linearen funkcional $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da velja $\pi(y) = 1$ in $\pi(x) = 0$ za vse $x \in V$.*

Dokaz. Postavimo $C = \{y\}$ in uporabimo Izrek 5.4.8. Obstaja torej $x_0 \in \mathbb{R}^n$, da je $\langle x_0, y\rangle \geq \|x_0\|^2 > 0$ in $\langle x_0, x\rangle = 0$ za vse $x \in V$. Definirajmo

$$\pi(x) = \frac{\langle x_0, x\rangle}{\langle x_0, y\rangle}.$$

π je iskani linearen funkcional. □

5.5 Farkasova lema

Ena od uporab separacijskih izrekov je Farkasova lema, ki govori o obstoju nenegativnih rešitev sistema enačb $Ax = b$, kjer je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Definirajmo

$$K_A = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^m_+\}.$$

Množica K_A je torej množica tistih vektorjev b, za katero ima dani sistem kakšno nenegativno rešitev. V naslednji lemi bomo pokazali, da je ta množica zaprta in konveksna:

Lema 5.5.1. *Naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_n$ neničelni vektorji v $\mathbb{R}^m$. Potem je množica*

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}$$

zaprt konveksen stožec v $\mathbb{R}^m$.

Dokaz. Hitro se vidi, da je K konveksen stožec, dokaz prepustimo bralcu. Dokažimo, da je množica K zaprta. Najprej predpostavimo, da so vektorji $a_1, a_2, \dots, a_n$ linearno neodvisni. Označimo

$$V_j = \mathrm{Lin}\{a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n\}.$$

Ker $a_j \notin V_j$, po Posledici 5.4.9 obstaja linearen funkcional π_j, da je $\pi_j(a_j) \neq 0$ in $\pi_j(y) = 0$ za vse $y \in V_j$. Sedaj vzemimo zaporedje vektorjev

$$y_k = \alpha_{k,1} a_1 + \alpha_{k,2} a_2 + \cdots + a_{k,n} a_n$$

v K_A, ki konvergira proti nekemu vektorju $y \in \mathbb{R}^m$. Hitro opazimo, da je $\alpha_{k,i} = \pi_i(y_k)$, zato je

$$y_k = \pi_1(y_k) a_1 + \pi_2(y_k) a_2 + \cdots + \pi_n(y_k) a_n.$$

Ker so funkcionali π_i zvezne funkcije, sledi, da $\pi_i(y_k) \to \pi_i(y)$, zato je

$$y = \lim_{k \to \infty} y_k = \pi_1(y) a_1 + \pi_2(y) a_2 + \cdots + \pi_n(y) a_n \in K_A$$

.

V primeru, da so vektorji $a_1, a_2 \dots, a_n$ linearno odvisni, je

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j = 0$$

za neke $\alpha_j \in \mathbb{R}$, ki niso vsi enaki 0. Izberimo $x \in K$ in ga zapišimo v obliki

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j,$$

kjer so $\lambda_j \geq 0$. Naj bo j_0 takšen indeks, da je $\lambda_{j_0}/\alpha_{j_0}$ minimalen med vsemi števili λ_j/α_j, za katere je $\alpha_j > 0$. Potem je

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j - \frac{\lambda_{j_0}}{\alpha_{j_0}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j = \sum_{j \neq j_0} \left(\lambda_j - \frac{\lambda_{j_0}}{\alpha_{j_0}} \alpha_j \right) a_j.$$

Označimo $\mu_j = \lambda_j - \frac{\lambda_{j_0}}{\alpha_{j_0}} \alpha_j$. Če je $\alpha_j = 0$, je $\mu_j = \lambda_j \geq 0$. Če je $\alpha_j < 0$, je očitno $\mu_j \geq 0$, če pa je $\alpha_j > 0$, je $\mu_j \geq 0$ po definiciji indeksa j_0. S tem smo pokazali, da lahko v primeru, ko so vektorji $a_1, a_2, \dots, a_n$ linearno odvisni, izpustimo vsaj enega izmed njih iz definicije K. Če ta postopek zaporedoma ponovimo, lahko situacijo prevedemo na primer, ko so vektorji linearno neodvisni, za tega pa smo trditev že dokazali. □

Posledica 5.5.2. *Množica K_A je zaprt konveksen stožec v $\mathbb{R}^m$.*

Dokaz. To sledi direktno iz dejstva, da je

$$K_A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A e_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\},$$

kjer je $e_1, e_2, \dots, e_n$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^n$, in Leme 5.5.1. □

Primer 5.5.3. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$K_A = \left\{ \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix} \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

Naj bo C stožec iz Primera 5.2.5. Trdimo, da je $K_A = C$. Če vzamemo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in C,$$

potem je $2x - y \geq 0$ in $y - x \geq 0$. Zato je

$$\begin{bmatrix} 2x-y \\ y-x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2_+ \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 2x-y \\ y-x \end{bmatrix} \in K_A.$$

Obratno, za vektor

$$\begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix} \in K_A$$

veljajo omejitve $0 \leq x + y \leq x + 2y \leq 2(x + y)$, torej pripada stožcu C.

Izrek 5.5.4. *Naj bo K zaprt konveksen stožec v $\mathbb{R}^m$. Potem $b \in \mathbb{R}^m$ pripada K natanko tedaj, ko za vsak $y \in K$, za katerega velja $\langle x, y\rangle \geq 0$ za vsak $x \in K$, velja tudi $\langle b, y\rangle \geq 0$.*

Dokaz. „Če" del izreka je očiten. Za dokaz v nasprotno smer predpostavimo, da $b \notin K$. Definirajmo

$$K_b = K + \{-b\}.$$

Po Lemi 5.4.3 je množica K_b zaprta in konveksna. Ker b ne pripada K, sledi $0 \notin K$. Po Izreku 5.4.5 obstaja vektor $x_0 \in K_b$, da je

$$\langle x, x_0\rangle \geq \|x_0\|^2 > 0$$

za vse $x \in K_b$. To pomeni, da za vse $x \in K$ velja $\langle x - b, x_0\rangle > 0$, oziroma $\langle x, x_0\rangle > \langle b, x_0\rangle$. Če izberemo $x = 0$, dobimo $\langle b, x_0\rangle < 0$. Po drugi strani, če je $x \in K$ in $\lambda > 0$, je tudi $\lambda x \in K$, zato po zgornjem premisleku velja $\lambda\langle x, x_0\rangle > \langle b, x_0\rangle$, oziroma

$$\langle x, x_0\rangle > \frac{\langle b, x_0\rangle}{\lambda}.$$

Pošljemo $\lambda \to \infty$ in dobimo $\langle x, x_0\rangle \geq 0$. Če povzamemo, če $x \notin K$, potem obstaja takšen vektor $y = x_0 \in K$, da je $\langle x, y\rangle \geq 0$ za vsak $x \in K$ in $\langle b, y\rangle < 0$. S tem je dokaz končan. □

Izrek 5.5.4 ima naslednjo geometrijsko interpretacijo. Izberimo $y \in \mathbb{R}^m$ in naj bo $\pi(x) = \langle x, y\rangle$ pripadajoči linearen funkcional na $\mathbb{R}^m$. Spomnimo se, da $\langle x, y\rangle \geq 0$ pomeni, da je x vsebovan v pozitivnem polprostoru $H^+_\pi(0)$. Zato izrek pravi, da $b \in K$ natanko tedaj, ko je b vsebovan v vsakem polprostoru, ki vsebuje K. Velja torej:

Posledica 5.5.5. *Zaprt konveksen stožec je enak preseku vseh polprostorov, ki ga vsebujejo.*

Naslednji izrek je znan kot Farkasova lema:

Izrek 5.5.6. *Dan je sistem enačb $Ax = b$, kjer je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Ta sistem ima nenegativno rešitev natanko tedaj ko velja: za vsak $y \in \mathbb{R}^m$, za katerega je*

$$\langle Ax, y\rangle \geq 0 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}^m_+,$$

velja tudi $\langle b, y\rangle \geq 0$.

Dokaz. Sistem $Ax = b$ ima nenegativno rešitev natanko tedaj, ko je $b \in K_A$. Po Posledici 5.5.2 je K_A zaprt konveksen stožec. Po Izreku 5.5.4 je $b \in K_A$ natanko tedaj, ko velja pogoj iz izreka. □

5.6 Razširitve pozitivnih linearnih funkcionalov

Naj bo V m-dimenzionalen vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ in $\pi : V \to \mathbb{R}$ pozitiven linearen funkcional. V tem razdelku si bomo ogledali, kdaj lahko najdemo razširitve π, ki so tudi pozitivni linearni funkcionali.

Izrek 5.6.1. *Obstaja (pozitivna) nenegativna razširitev (pozitivnega) nenegativnega linearnega funkcionala π natanko tedaj, ko podprostor $(\ker \pi)^\perp$ vsebuje (pozitiven) nenegativen neničeln vektor.*

Dokaz. Naj bo $\tilde{\pi}$ pozitivna (nenegativna) razširitev funkcionala π na cel $\mathbb{R}^n$. Po Trditvi 5.3.3 je pripadajoči Rieszov vektor y pozitiven (nenegativen) in neničeln. Če vzamemo $x \in \ker \pi$, je $\langle x, y\rangle = \tilde{\pi}(x) = \pi(x) = 0$, torej je $y \in (\ker \pi)^\perp$.

Obratno, naj bo y pozitiven (nenegativen) neničeln vektor v $(\ker \pi)^\perp$. Po Lemi 5.1.6 obstaja $\lambda \in \mathbb{R}$, da je preslikava $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirana z

$$\tilde{\pi}(x) = \lambda\langle x, y\rangle,$$

razširitev pozitivnega (nenegativnega) funkcionala π. Očitno mora veljati $\lambda > 0$, zato je $\tilde{\pi}$ pozitiven (nenegativen) linearen funkcional po Trditvi 5.3.3. $\square$

Sedaj se bomo omejili na pozitivne funkcionale. Izrek 5.6.1 pravi, da obstaja pozitivna razšritev takšnega funkcionala natanko tedaj, ko $(\ker \pi)^\perp$ vsebuje pozitiven vektor. Da se to vedno zgodi, bo sledilo iz naslednjega rezultata:

Trditev 5.6.2. *Naj bo U pravi vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$, za katerega velja*

$$U \cap \mathbb{R}^n_+ = \{0\}.$$

Potem obstaja baza za $U^\perp$, sestavljena iz samih pozitivnih vektorjev.

Dokaz. Naj bo C najmanjša konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje vse bazne vektorje (v primeru $n = 2$ je to del premice $x + y = 1$ v prvem kvadrantu, v primeru $n = 3$ je C del ravnine $x + y + z = 1$ v prvem oktantu itd.). Množica C je konveksna in kompaktna ter ne vsebuje 0. Ker je $C \subseteq \mathbb{R}^n_+$, je $C \cap U = \emptyset$. Po Izreku 5.4.8 obstaja $x_0 \in C$, da velja

$$\langle x, x_0\rangle \geq \|x_0\|^2$$

za vsak $x \in C$ in

$$\langle x_0, u\rangle = 0$$

za vsak $u \in U$. Če je $x_{0,i}$ i-ta komponenta vektorja x_0, je $x_{0,i} = \langle x_0, e_i\rangle \geq \|x_0\|^2 > 0$, torej je x_0 pozitiven vektor. Poleg tega je $x_0 \in U^\perp$. Rezultat sedaj sledi iz Izreka 5.2.2. $\square$

Končajmo z glavnim rezultatom tega poglavja:

Posledica 5.6.3. *Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ in $\pi : V \to \mathbb{R}$ pozitiven linearen funkcional. Potem lahko π vedno razširimo do pozitivnega linearnega funkcionala na $\mathbb{R}^n$. Če je V pravi podprostor, je takšnih razširitev neskončno mnogo.*

Dokaz. Po predpostavki je

$$\ker \pi \cap \mathbb{R}^n_+ = \{0\}.$$

Zato po Trditvi 5.6.2 obstaja baza za $(\ker \pi)^\perp$, sestavljena iz samih pozitivnih vektorjev. Po Izreku 5.6.1 vsak od teh baznih vektorjev porodi pozitivno razširitev funkcionala π.

Naj bo V pravi podprostor dimenzije m. Potem ima $(\ker \pi)^\perp$ dimenzijo $n - (m - 1) \geq 2$. Torej ima π vsaj dve različni pozitivni razširitvi $\tilde{\pi}_1$ in $\tilde{\pi}_2$. Če je $\lambda \in [0, 1]$, je lahko preveriti, da je tudi $\lambda\tilde{\pi}_1 + (1 - \lambda)\tilde{\pi}_2$ pozitivna razširitev funkcionala π (z drugimi besedami, množica vseh pozitivnih razširitev π je konveksna). Takšnih razširitev je torej neskončno mnogo. $\square$

Primer 5.6.4. Naj bo V ravnina z enačbo $x - y = 0$ v $\mathbb{R}^3$. Definirajmo linearen funkcional $\pi : V \to \mathbb{R}$ s predpisom $\pi(x, x, z) = x + z$. Očitno je π pozitiven linearen funkcional na V. Jedro π je premica s smernim vektorjem $(1, 1, -1)$, ortogonalni komplement jedra pa je ravnina z enačbo $x + y - z = 0$. Pozitivna baza tega prostora je npr

$$(\ker \pi)^{\perp} = \operatorname{Lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Oglejmo si npr razširitev, ki jo porodi vektor $b = (1, 2, 3)$. Definiramo $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s predpisom $\psi(v) = \langle v, b \rangle$, kar lahko na dolgo napišemo kot

$$\psi(x, y, z) = x + 2y + 3z.$$

Določiti moramo še $\lambda \in \mathbb{R}$, da se bo $\lambda\psi$ na V ujemal s π:

$$\lambda\psi(x, x, z) = \lambda(3x + 3z).$$

Od tod sledi $\lambda = 1/3$; pozitivna razširitev funkcionala π, porojena z vektorjem b, je

$$\tilde{\pi}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x + 2y + 3z).$$