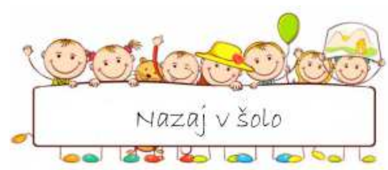
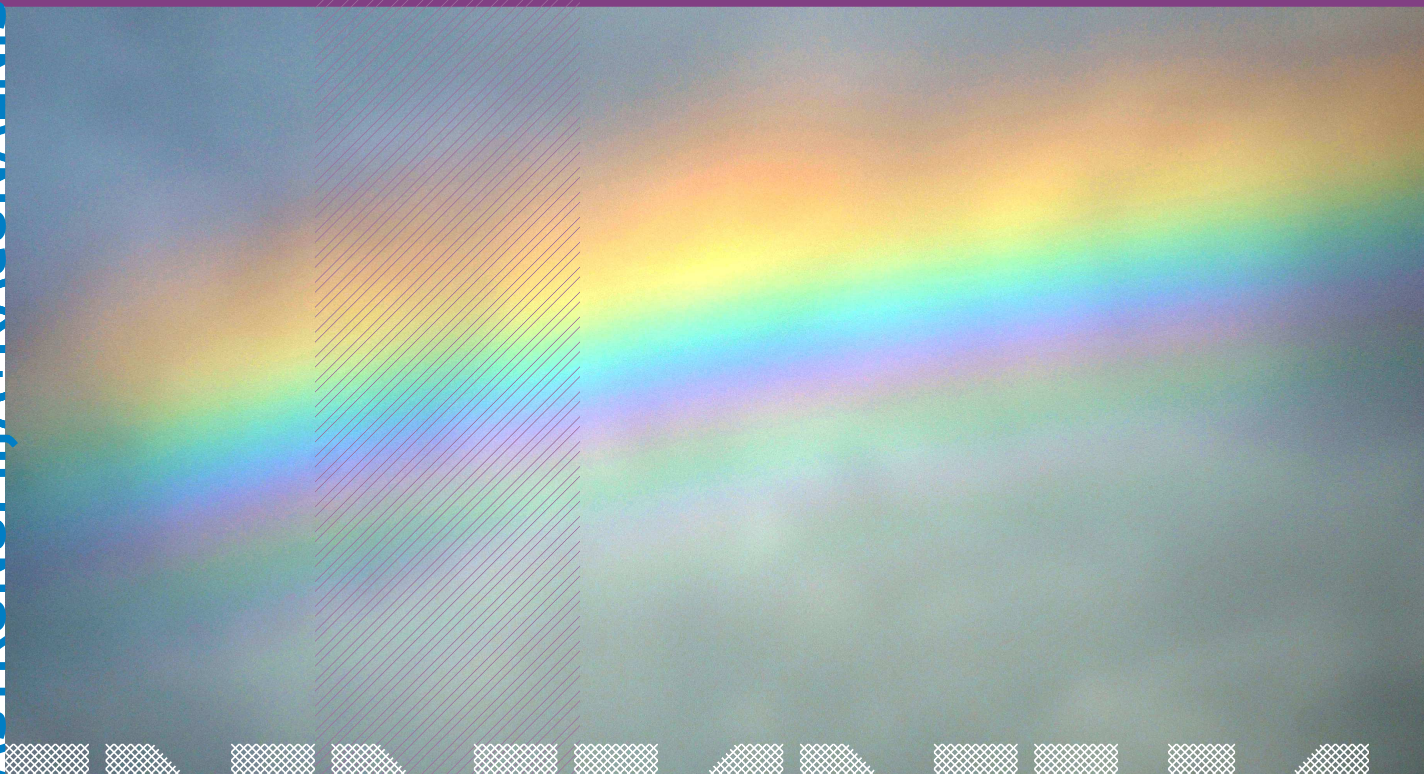
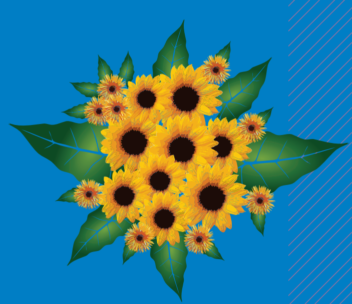


MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#1

PRESEK LETNIK 43 (2015/2016) ŠTEVILKA 1



PRESEK



- PROBLEM KITAJSKIH PRSTANOV
- ZAKLJUČEK ŠOLSKEGA LETA OB ZGODBI O ARHIMEDU IN ZLATI CARJEVI KRONI
- 9. OLIMPIJADA IZ ASTRONOMIJE IN ASTROFIZIKE
- PROBLEM NAJBLIŽJIH TOČK

ISSN 0351-6652

Preskrba z energijo

Tudi če niste superheroj, lahko le s pritiskom na stikalo električni napravi zagotovite potrebno energijo. Že to je čudež, še bolj presenetljivo pa je, da ta energija nastane skoraj isti trenutek, ko pritisnete na stikalo, pogosto celo v elektrarni, ki vam ni najbližja. Zelo povezano mrežo sestavljajo elektrarne, daljnovodi in uporabniki. Potrebno je veliko matematike, da pri upravljanju te mreže natančno uskladijo ponudbo in porabo. S pomočjo diferencialnih enačb, teorije grafov in linearne algebre si pomagajo pri simulaciji mreže, ki operaterjem omogoči spremljanje sistema in izračun njegovih potreb. Čeprav te simulacije vsebujejo milijone spremenljivk, so dostopne v nekaj mikrosekundah. Tako operaterji omogočajo neprekinjeno preskrbo in hitro ponovno vzpostavitev sistema v primeru težav.

Raziskovalci poskušajo upravljanje mreže posodobiti, tako da bodo tudi porabniki, ki hkrati proizvajajo energijo, redno obveščeni o svoji porabi in stroških. To bo mrežo veliko bolj zapletlo. Še posebej zato, ker bodo takšni porabniki proizvajali energijo iz različnih virov, npr. s pomočjo vetra in sonca, in na ta način v sistem vnesli še več negotovosti. Upravljanje bolj zapletene mreže z več negotovosti zahteva novo strojno opremo in nove matematične modele. Le tako bo zagotovljena ustrezna preskrba z energijo, katere poraba se bo po nekaterih ocenah več kot podvojila do leta 2050.

Več informacij lahko najdete v knjigi Mariese L. Crow, *Computational Methods for Electric Power Systems*, ki je izšla leta 2009.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 43, šolsko leto 2015/2016, številka 1

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2015/2016 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1900 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

SLIKA NA NASLOVNICI: Mavrico običajno vidimo kot barvni lok, ki je na vrhu rdeč na dnu pa vijoličen. Pogosto opazimo tudi večji in šibkejši drugi lok, ki ima obrnjen vrstni red barv. Redkeje opazimo nadštevilno mavrico. To so svetlejše proge pod prvim lokom, ki nastanejo zaradi interference svetlobe. Proge so bolj izrazite, kadar so kapljice enake velikosti. Razdalja med progami nadštevilne mavrice je odvisna od velikosti kapljic; manjše kot so, bolj so proge narazen. Foto: Aleš Mohorič

Problem kitajskih prstanov

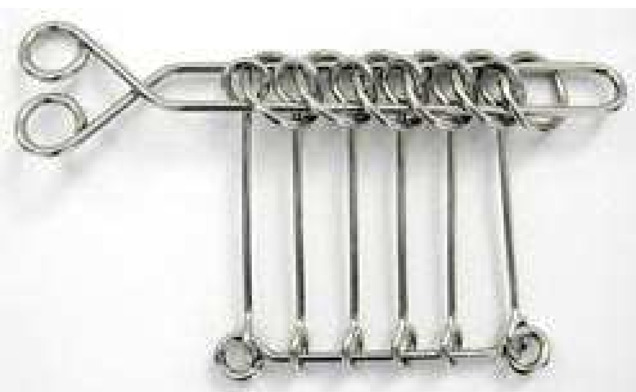
Tanja Gologranc

Zgodovina problema

Problem kitajskih prstanov je ena najbolj znanih matematičnih ugank. Prvotni problem sestavlja palica z devetimi povezanimi prstani, pri čemer lahko devet nadomestimo s poljubnim številom prstanov (glej sliko 1). Te prstane moramo s palice odstraniti. Nihče ne ve natančno, kdo je avtor sestavljanke in kdaj se je prvič pojavila; obstajajo le pripovedke. Ena izmed najbolj znanih govori o tem, da naj bi palico z devetimi povezanimi prstani za svojo ženo izumil kitajski strateg Zhuge Liang (181–234), in sicer z namenom, da bi si krajšala čas, ko je bil sam na vojnih pohodih. Drugi, prav tako nezanesljivi viri trdijo, da uganka izhaja iz dinastije Song (960–1129). Prvi zapis uganke tega tipa sega v 14. stoletje, njegov avtor pa je italijanski matematik Luca Pacioli (1445–1517).

Opis problema

Imamo palico in prstane, pri čemer se prstani ne prepletajo le med sabo ampak prepletajo tudi palico. Te prstane moramo s palice odstraniti. Tako kot za večino znamenitih ugank tudi za problem kitajskih prstanov velja, da ga rešujemo z upoštevanjem pravil.



SLIKA 1.
Kitajski prstani

Kljub temu, da so pravila enostavna, reševanje zahteva veliko razmisleka in predvsem potrpežljivosti.

Ves čas bomo obravnavali splošen primer, torej problem n kitajskih prstanov, pri čemer je n poljubno število iz množice $\{0, 1, \ldots\}$. Iz tehničnih razlogov, ki bodo omenjeni pozneje, je vključen tudi primer z 0 prstani. Za lažji opis rešitve problema bomo prstane označili. Prstane oštevilčimo naraščajoče, z oznakami od 1 do n tako, da prvi prstan na palici, torej prstan, ki je od držala palice najbolj oddaljen, dobi oznako 1.

Opis pravil za reševanje problema

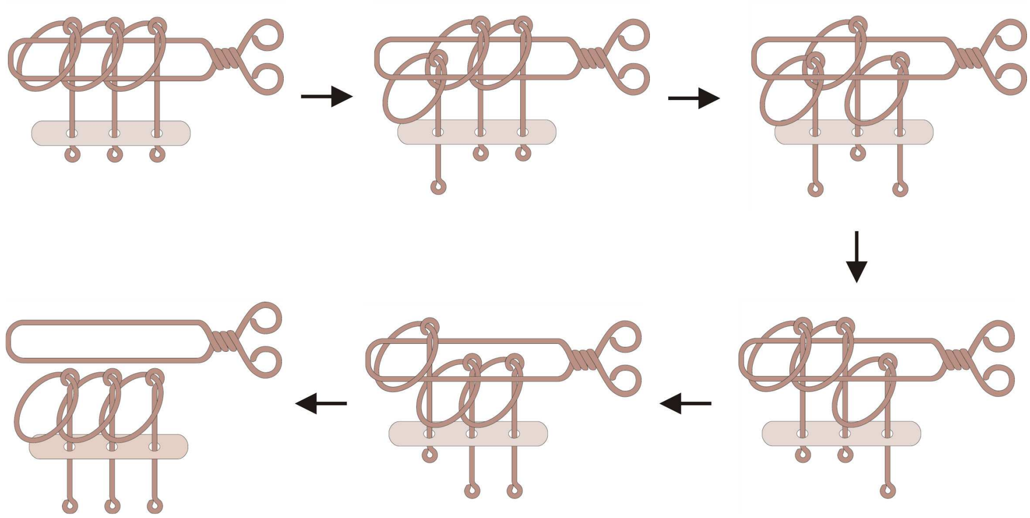
Začetno stanje je stanje, ko so vsi prstani na palici. Iz tega stanja lahko pridemo v katerokoli drugo stanje, in sicer z zaporedno uporabo le dveh potez. Premaknemo lahko:

- prstan z oznako 1 (poteza tipa 0);
- prstan z oznako $i+1$, če je prstan z oznako i na palici, prstanov z oznakami $1, \ldots, i-1$ pa na palici ni (poteza tipa 1).

Pri tem premik prstana pomeni, da mu zamenjamo položaj iz *je na palici* v *ni na palici* oziroma obratno.

Problem kitajskih prstanov porodi najprej vprašanje, ali rešitev sploh obstaja. Obstoj rešitve porodi nadaljna vprašanja; eno od teh je vprašanje o najmanjšem številu potez, potrebnih za rešitev problema.

Predpostavimo, da problem kitajskih prstanov začnemo reševati v začetnem stanju in da bomo problem rešili s kar najmanj potezami. Potem imamo za prvo potezo dve možnosti; bodisi iz palice odstranimo prstan z oznako 1 (poteza tipa 0) bodisi odstranimo prstan z oznako 2 (poteza tipa 1). Ker je naša rešitev najkrajša, ne bomo v nobeno stanje prišli več kot enkrat. Torej imamo za vse nadaljnje poteze samo še eno možnost, saj bi nas dve zaporedni potezi istega tipa pripeljali v že obiskano stanje. Zato bo naše zaporedje alternirajoče zaporedje potez tipa 0 in 1. Na sliki 2 je zaporedje potez, ki rešijo problem treh kitajskih prstanov.



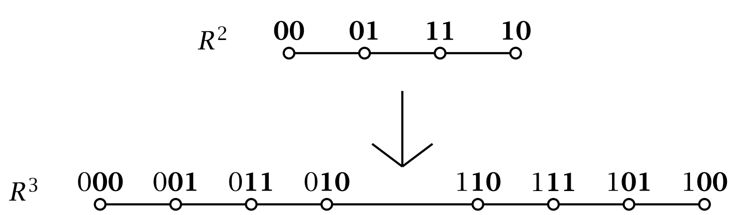
SLIKA 2.
Postopek reševanja problema treh kitajskih prstanov

Rešitev problema z grafi

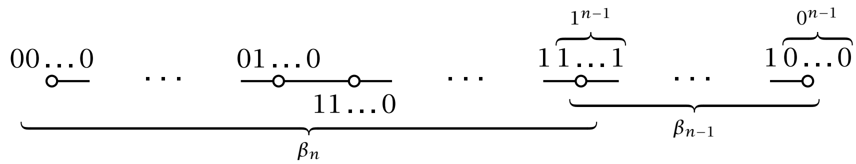
Za vsak prstan obstajata dve možnosti, in sicer, ali je prstan na palici ali pa ga ni. Če je na palici, potem mu priredimo vrednost 1, sicer mu priredimo vrednost 0. Potemtakem lahko vsako stanje problema $n \in \mathbb{N}_0$ kitajskih prstanov predstavimo kot $s = s_n \dots s_1$, pri čemer $s_i = 1(0)$ pomeni, da prstan z oznako i je(ni) na palici. Tukaj opozorimo še, da za $n = 0$ s predstavlja prazen niz. Glede na zgoraj omenjeni pravili, lahko bit s_{i+1} spremenimo, če je bodisi $i = 0$ (poteza tipa 0) bodisi je $s_i = 1$ in $s_j = 0$ za vsak $j \in \{1, \dots, i-1\}$ (poteza tipa 1). Za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ definirajmo $\overline{s}_i = 1 - s_i$. Potem lahko dovoljene premike opišemo tudi takole. Iz stanja $s_n \dots s_2 s_1$ lahko z eno potezo pridemo v stanje $s_n \dots s_2 \overline{s}_1$, iz stanja $s_n \dots s_i 10 \dots 0$ pa lahko prav tako z eno potezo pridemo v stanje $s_n \dots \overline{s}_i 10 \dots 0$.

Iz zgoraj opisanega postopka, kako iz danega stanja z eno potezo pridemo v drugo stanje, bomo konstruirali graf R^n. Vsako stanje problema predstavlja eno vozlišče grafa, dve vozlišči (stanji) sta povezani s povezavo natanko takrat, ko lahko iz enega stanja z eno potezo pridemo v drugo stanje. Zdaj lahko problem zapišemo z uporabo grafov: poišči (najkrajšo) pot med $1^n = \underbrace{1 \dots 1}_{n}$ in $0^n = \underbrace{0 \dots 0}_{n}$.

Graf R^n vsebuje natanko dve vozlišči, ki imata natanko enega soseda. To sta vozlišči, ki predstavljata stanji 0^n in $10^{n-1} = 1\underbrace{0 \dots 0}_{n-1}$, kjer je mogoča le po-



SLIKA 3.
Konstrukcija grafa R^3 iz grafa R^2



SLIKA 4.
Graf R^n

teza tipa 0. Vsa druga vozlišča imajo natanko dva soseda, saj za vsako tako stanje obstajata obe relaventni potezi (tipa 0 in tipa 1). Iz omenjenih lastnosti grafa R^n zlahka dokažemo, da je R^n pot na 2^n vozliščih, s krajiščema 0^n in 10^{n-1}, ki vsebuje stanje 1^n. Dokaz najenostavneje opravimo z indukcijo. Če vsakemu stanju poti R^{n-1} na levo stran pripnemo 0, dobimo pot od 0^n do 010^{n-2}. Ta vsebuje vsa stanja grafa R^n, ki se začnejo z 0. Enako velja, če vsakemu stanju poti R^{n-1} na levo stran pripnemo 1 in tako dobimo pot od 10^{n-1} do 110^{n-2}. Ta vsebuje vsa stanja grafa R^n, ki se začnejo z 1. Ker sta 010^{n-2} in 110^{n-2} edini stanji z različnima prvima bitoma, ki ju povezuje poteza tipa 1, sta vozlišči 010^{n-2} in 110^{n-2} sosednji v R^n, kar pomeni, da je R^n pot. Opazimo lahko, da graf R^n sestavljata dve disjunktni kopiji grafa R^{n-1}, pri čemer v prvi kopiji vsakemu vozlišču $s = s_{n-1}\ldots s_1$ dodamo $s_n = 0$ in dobimo vozlišče $0s_{n-1}\ldots s_1$. V drugi kopiji vsakemu vozlišču $s = s_{n-1}\ldots s_1$ dodamo $s_n = 1$, niz s pa obrnemo in dobimo $1s_1\ldots s_{n-1}$ (glej sliko 3).

Ker je R^n pot na 2^n vozliščih s krajiščema 0^n in 10^{n-1}, ki vsebuje stanje 1^n, za vsak n obstaja rešitev problema n kitajskih prstanov. Ker lahko od 0^n do 10^{n-1} pridemo v $2^n - 1$ potezah in ker 1^n leži na poti med 0^n in 10^{n-1}, za rešitev problema n kitajskih prstanov zadošča manj kot $2^n - 1$ potez.

Iz rešitve problema treh prstanov je razvidno, da je v najkrajši rešitvi treba začeti s potezo tipa 0, sicer nas alternirajoče zaporedje potez v R^3 vodi od 111 proti 100, s čimer se oddaljujemo od stanja 000. Ker je vsako najkrajše zaporedje potez za rešitev problema kitajskih prstanov alternirajoče zaporedje potez tipa 0 in 1, je za vsak lihi n prva poteza v najkrajši rešitvi poteza tipa 0. Za sode n velja ravno nasprotno, in sicer je v najkrajši rešitvi prva poteza vedno poteza tipa 1.

V nadaljevanju bomo iz zgoraj opisane konstrukcije grafa R^n izpeljali rekurzijo za najmanjše število potrebnih potez za rešitev n kitajskih prstanov. Z β_n označimo najmanjše število potez, potrebnih, da spraznimo palico z n prstani, to je, da pridemo iz stanja 1^n do stanja 0^n. Ker je R^n pot, je β_n ravno razdalja v grafu R^n med vozliščema 1^n in 0^n. Iz konstrukcije grafa R^n sledi, $\beta_{n-1} = (2^n - 1) - \beta_n$ (glej sliko 4). Na ta način dobimo rekurzivni zapis $\beta_n + \beta_{n-1} = 2^n - 1$, z začetnim pogojem $\beta_0 = 0$, s čimer lahko za poljubno število prstanov n pridemo do rešitve v končnem številu korakov. Iz rekurzije lahko s preprostim izračunom pridemo do eksplicitne formule za β_n.

Iz enačb $\beta_n + \beta_{n-1} = 2^n - 1$ in $\beta_{n-1} + \beta_{n-2} = 2^{n-1} - 1$ dobimo, da je $\beta_n - \beta_{n-2} = 2^{n-1}$. Če zaporedoma manjšamo indekse, za sodi n dobimo:

- $$\begin{aligned}\beta_n &= \beta_{n-2} + 2^{n-1}\\ &= \left(\beta_{n-4} + 2^{n-3}\right) + 2^{n-1} = \cdots\\ &= \beta_2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{n-1}\\ &= 2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}\\ &= 2\left(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{\frac{n-2}{2}}\right)\\ &= 2\frac{4^{\frac{n}{2}} - 1}{4-1} = \frac{2^{n+1} - 2}{3}.\end{aligned}$$

Podobno za lihe n dobimo, da je $\beta_n = \frac{2^{n+1}-1}{3}$.

S tem smo dobili formulo, z uporabo katere lahko, za poljubno naravno število n, izračunamo najmanjše število potrebnih potez, ki rešijo problem n kitajskih prstanov.

Literatura

[1] A. M. Hinz, S. Klavžar, U. Milutinović in C. Petr, *The Tower of Hanoi-Myths and Maths*, Birkhäuser 2013.

× × ×

Indijska konstrukcija kvadrata s ploščino danega pravokotnika

Marjan Jerman

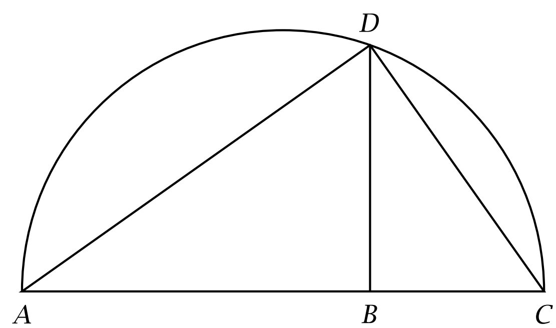
Ko preučujemo zgodovino matematike, ugotovimo, da so prav vse stare civilizacije poskušale najti metode, s katerimi bi danemu liku našli ploščinsko enak kvadrat. Razlogi so bili bodisi čisto praktični bodisi presenetljivo teoretični. Egipčani so, recimo, želeli bolj neobvladljive like preoblikovati v ploščinsko enake kvadrate zato, da bi lažje odmerili zemljiški davek. Če problema niso znali rešiti popolnoma natančno, so si pomagali s približki. Stare Grke pa so tovrstni problemi zanimali bolj abstraktno. Za pravilno rešitev so priznavali le konstrukcije, ki so bile možne samo z uporabo ravnila in šestila.

Najbolj znan je problem kvadrature kroga. Egipčani so ga rešili približno, brezplodni napori Grkov pa so se končali šele v devetnajstem stoletju, ko so moderni matematiki dokazali, da kvadratura kroga samo s pomočjo ravnila in šestila ni mogoča.

V tem prispevku si bomo pogledali, kako najti pravokotniku ploščinsko enak kvadrat. Bolj natančno: v ravnini je dan pravokotnik s stranicama a in b. Radi bi narisali stranico kvadrata x, ki ima ploščino enako ab.

Danes bi se problema lahko lotili na primer takole. Enačba

$$x^2 = ab$$



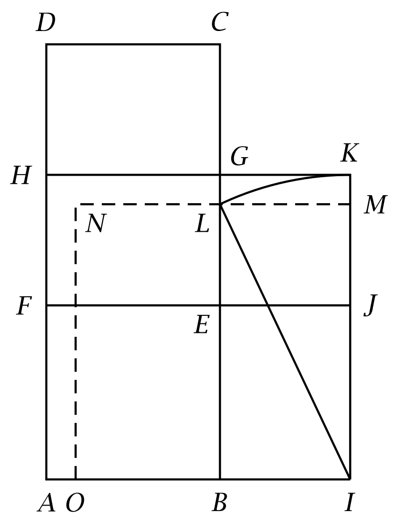
SLIKA 1.
Rešitev s pomočjo višinskega izreka

nas spomni na višinski izrek v pravokotnem trikotniku. Na isto premico zaporedoma narišimo točke A, B in C, tako da je $AB = a$ in $BC = b$ (glej sliko 1). Nad daljico AC narišimo polkrog. Potegnimo pravokotnico na premer AC v točki B. Presek pravokotnice s polkrogom označimo z D. Talesov izrek pove, da je kot $\angle ADC$ pravi. Zato velja

$$BD^2 = AB \cdot BC,$$

kar pomeni, da je stranica iskanega kvadrata enaka $x = BD$. Takšna rešitev je natančna in je možna le z uporabo ravnila in šestila.

Presenetljivo so ta problem znali natančno rešiti že Indijci. Za razliko od Grkov, Indijci svojih rezultatov niso dokazovali, za odmerjanje pa so namesto ravnila in šestila uporabljali vrvi. Njihovo rešitev najdemo v Sulbasutrah, dodatku Ved. *Vede* so obsežna zbirka religioznih in filozofskih besedil iz obdobja



SLIKA 2.
Indijska rešitev

med 1700–1100 pr. n. št. Kot pomemben dodatek vsebujejo *Sulbasutre* iz let med 1000–600 pr. n. št., ki opisujejo navodila za konstrukcijo oltarjev. V njih lahko opazimo presenetljiv uvid v različna področja matematike, npr. decimalni zapis, iracionalnost in aproksimacije korenov.

Indijska konstrukcija gre takole:

V ravnini je narisan pravokotnik $ABCD$ (glej sliko 2). Recimo, da je osnovnica AB krajša od stranice BC. (V nasprotnem primeru lahko pravokotnik zavrtimo ali pa preimenujemo njegova oglišča.) Na stranicah BC in AD zaporedoma izberimo točki E in F tako, da bo lik $ABEF$ kvadrat. Naj bosta G in H zaporedoma razpolovišči daljic EC in FD. Daljico AB podaljšamo do točke I, daljico HG pa do točke K, tako da bo lik $AIKH$ kvadrat. Podaljšek FE naj seka daljico IK v točki J. Sedaj s pomočjo vrvi, ki jo držimo v točki I, izberimo točko L na stranici BC, tako da bo $IK = IL$. Vzporednica stranici AB skozi L naj seka daljico IK v točki M. Na daljici AI izberimo točko O, tako da je $OI = IM$. Na koncu narišemo tako točko N, da bo $OIMN$ kvadrat.

Izračunajmo ploščino kvadrata $OIMN$ in tako pokažimo, da so imeli Indijci prav. Pred dokazom omenimo še eno zelo pomembno dejstvo iz zgodovine matematike: Prav vse stare civilizacije so že pred Pitagoro poznale kasneje poimenovani Pitagorov izrek.

Naj bo $AB = a$ in $BC = b$. Najprej izračunajmo dolžini daljic EG in IK:

- $EG = \frac{1}{2}(b-a), \quad IK = a + EG = \frac{1}{2}(a+b).$

Potem je po Pitagorovem izreku

- $IM^2 = IL^2 - LM^2.$

Zaradi konstrukcije je $IL = IK$ in $LM = EJ = EG$. Zato je

- $IM^2 = IK^2 - EG^2$

$$= \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2 = ab,$$

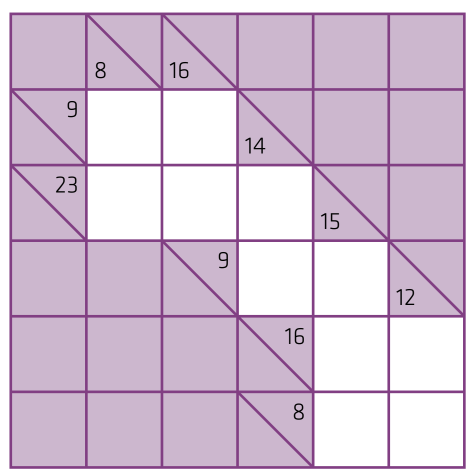
to pa je bilo treba dokazati.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

51. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

Klavdija Cof Mlinšek

Najboljši osnovnošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 18. aprila 2015, pomerili v sedmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po pravilniku uvrsti do 1% vseh sedmošolcev, osmošolcev in devetošolcev s posameznega področja ter še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija. Na šolah, kjer smo imeli izpeljano državno tekmovanje, so organizatorji pripravili prijetne prireditve.

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi Vegovimi priznanji. V sedmem razredu smo podelili 64, v osmem 64 in v devetem 64 zlatih Vegovih priznanj. Učenci, ki na tekmovanju Mednarodni matematični Kenguru dosežejo najboljši uspeh in hkrati dosežejo vsaj polovico točk na državnem tekmovanju, se udeležijo nagradnega izleta. V tem šolskem letu smo za najboljše učence zadnjih treh razredov osnovne šole organizirali nagradni izlet v Mozartovo mesto Salzburg. Ogledali smo si tudi rudnik soli v Berchtesadnu na Bavarskem. Povabili smo 111 najboljših učencev. Izlet je bil za učence nepozaben.

Nagrade, ki so bile podeljene v Grand hotelu Union, so prejeli najbolje uvrščeni tekmovalci, in sicer:

7. RAZRED

I. nagrada

- Urša Mati Djuraki, OŠ Franceta Bevka, Ljubljana

II. nagrada

- Simon Bukovšek, OŠ Škofja Loka – Mesto
- Tin Pavlinić, OŠ Prežihovega Voranca, Maribor
- Gal Zmazek, OŠ Ljudski vrt Ptuj

III. nagrada

- Hana Glumac, OŠ Domžale

8. RAZRED

I. nagrada

- Ema Kavčič, OŠ Rovte

II. nagrada

- Manca Dremelj, OŠ Log – Dragomer
- Tjaša Jecl, OŠ Šmarje pri Jelšah
- Marija Klemenčič, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka

III. nagrada

- Anamarija Mežnar, OŠ Karla Destovnika – Kajuha Šoštanj

9. RAZRED

I. nagrada

- Ana Meta Dolinar, OŠ Danile Kumar, Ljubljana
- Andraž Jelinčič, OŠ Danile Kumar, Ljubljana

II. nagrada

- Anamarija Uršič, OŠ Ljudski vrt Ptuj

III. nagrada

- Julij Mlinšek, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka

25. državno tekmovanje v razvedrilni matematiki

Klavdija Cof Mlinšek

→ **Najbolj uspešni osnovnošolci in srednješolci s šolskih tekmovanj so se v soboto, 29. novembra 2014, pomerili v šestih regijah na državnem tekmovanju za zlato priznanje iz razvedrilne matematike. V letošnjem šolskem letu so tekmovali učenci od šestega do devetega razreda, dijaki od prvega do četrtega letnika in študenti. Na državno tekmovanje se je uvrstilo 542 tekmovalcev.**

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi priznanji. V šestem razredu smo podelili 20, v sedmem razredu 20, v osmem 22 in v devetem 22 zlatih priznanj. V prvem letniku smo podelili 12, v drugem 16, v tretjem 16 in v četrtem 13 zlatih priznanj.

Nagrade, ki so bile podeljene na svečani DMFA podelitvi v Hotelu Union, prejmejo najboljši tekmovalci, in sicer:

6. RAZRED

I. nagrada

- Domen Jurkovič, OŠ Škofljica

II. nagrada

- Neli Crnkovič, OŠ Toma Brejca, Kamnik
- Peter Lekše, OŠ Šmartno pod Šmarno Goro

III. nagrada

- Lara Vettorazzi, OŠ Stranje

7. RAZRED

I. nagrada

- Luka Cvikl, II. OŠ Celje
- Mateo Filimonovič, OŠ Lucija
- Žiga Kmecl, OŠ Domžale
- Andraž Kovačič Pohorec, OŠ Sladki Vrh
- Sara Mihalič, OŠ Center, Novo mesto
- Martin Mlinšek, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka
- Mojca Novak, OŠ Stara Cerkev
- Ula Perovec, OŠ Podgorje pri Slovenj Gradcu
- Gregor Pogačar, OŠ Toma Brejca, Kamnik

8. RAZRED

I. nagrada

- Luka Korotaj, OŠ Martina Konšaka Maribor
- Blaž Krajnik, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka

II. nagrada

- Živa Uršič, OŠ Toma Brejca, Kamnik

III. nagrada

- Lucijan de Reggi, OŠ Lucija
- Ana Intihar Marulc, II. OŠ Celje
- Pija Kapš, OŠ Šmihel, Novo mesto
- Ana Kolenc Milavec, OŠ Miroslava Vilharja Postojna

9. RAZRED

I. nagrada

- Eva Brudar, OŠ Grm, Novo mesto
- Varja Čučulović, OŠ Sostro
- Žiga Mazej, OŠ Domžale
- Julij Mlinšek, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka
- Benjamin Poljanc, OŠ Križe
- Miha Radež, OŠ Otočec
- Jaka Šivavec, OŠ Domžale
- Anamarija Uršič, OŠ Ljudski vrt Ptuj
- Igor Zobovič, OŠ Franceta Prešerna, Maribor

1. LETNIK

I. nagrada

- Veronika Cvelbar, Gimnazija Vič, Ljubljana
- Urban Duh, II. gimnazija Maribor
- Miha Gjura, Gimnazija Vič, Ljubljana
- Luka Govedič, II. gimnazija Maribor
- Jakob Höfferle, Gimnazija Novo mesto
- Sara Klopčič, Gimnazija Bežigrad
- Gregor Mlinarič, II. gimnazija Maribor
- Zala Potočnik, Gimnazija Bežigrad
- Tim Štuhec, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

2. LETNIK

I. nagrada

- Žan Peter Černe, Gimnazija Bežigrad
- Klara Drofenik, I. gimnazija v Celju
- Klemen Gorše, Gimnazija in SŠ Kočevje
- Jan Ivkovič, Gimnazija Bežigrad
- Luka Kralj, Gimnazija Nova Gorica
- Martina Lokar, Škofijska Gimnazija Vipava
- Marija Marolt, Gimnazija in SŠ Kočevje
- Liza Mirtič, Gimnazija Novo mesto
- Timen Stepišnik Perdih, I. gimnazija v Celju
- Žiga Željko, Gimnazija Bežigrad

3. LETNIK

I. nagrada

- David Horvat, I. gimnazija v Celju
- Doris Keršič, Konservatorij za glasbo in balet Maribor
- Rok Krumpak, Šolski center Celje, Gimnazija Lava
- Goran Munđar, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer
- Uroš Prešern, Gimnazija Novo mesto

4. LETNIK

I. nagrada

- Polona Aupič, Gimnazija in srednja šola Kočevje
- Sandi Režonja, Gimnazija Murska Sobota

II. nagrada

- Ruben Kurinčič, Gimnazija Nova Gorica

III. nagrada

- Tina Šket, Gimnazija Bežigrad

Križne vsote

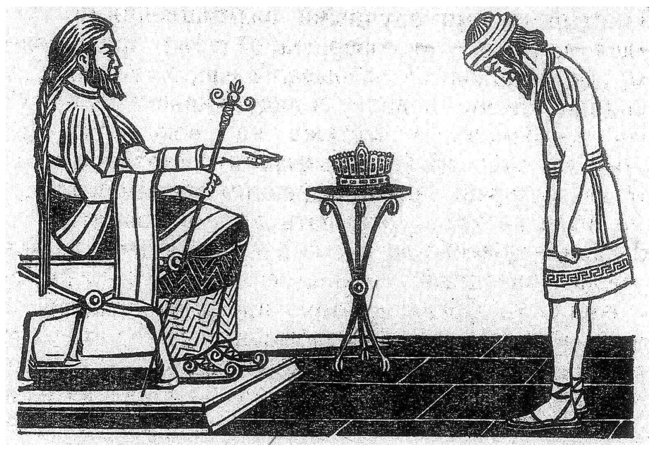
Rešitev s strani 8

	8	16			
9	**2**	**7**	14		
23	**6**	**9**	**8**	15	
		9	**6**	**3**	12
			16	**7**	**9**
			8	**5**	**3**

Zaključek šolskega leta ob zgodbi o Arhimedu in zlati carjevi kroni

Karel Šmigoc

Poučevanje fizike čestokrat popestrimo z njeno zgodovino ali vsaj z zanimivo zgodbo, ki je povezana z določeno osebo ali z okoljem, v katerem je nastajalo novo odkritje. Tak primer je tudi zgodba o Arhimedu in carjevi zlati kroni. Čeprav ne vemo natančno, kako je Arhimed ugotovil delež srebra v carjevi zlati kroni, lahko domnevamo in skušamo najti način, kako bi to najenostavneje ugotovili z današnjimi pripomočki. Poglejmo, kako so učenci osmega razreda OŠ Lesično doživeli to zgodbo pri zadnjih urah pouka ob koncu šolskega leta.



SLIKA 1.
K carju Hieronu v čudovit dvorec je bil poklican draguljar ... Bleščala se je zlata carjeva krona, počivala na mizi v pozlačeni dvorani. Slika in verzi so iz ruske pesnitve o Arhimedu in carju Hieronu [1].

Bil je lep sončen dan – poletni solsticij. Učenci so se sestali z mentorico gospo Mileno Grobelšek na travniku, na katerem je bila petstolitrska kad napolnjena s toplo vodo. Ker so zgodbo o Arhimedu in zlati kroni že poznali, so po navodilih mentorice začeli s potapljanjem in merjenjem telesne teže pod vodo (slika 2). S primerjanjem teže na zraku in pod vodo so določili vzgon, ki deluje na potopljeno telo. Delo so zaključili z malico in se odločili, da bodo nadaljevali razpravljanje o poskusu, ko bodo ponovno skupaj v fizikalni učilnici (slika 2 zgoraj).

Pomagajmo učencem nadaljevati zgodbo o Arhimedu in carjevi kroni tako, da bomo uporabili rezultate njihovih meritev. Krona iz naše zgodbe je bila domnevno sestavljena iz dveh snovi, zlata in dodanega srebra. Da bomo lažje spremljali potek določanja srebra v kroni in na koncu svoje sklepanje preverili s poskusom, zamenjajmo krono z modelom telesa, sestavljenega iz aluminija in lesa (slika 3). Način določanja sestave krone ali sestave modela je v obeh primerih enak, zamenjati moramo le ustrezne gostote.

Postopamo podobno, kot so merili naši učenci. Izmerimo težo sestavljenega telesa na zraku in v vodi. Težo na zraku označimo z F_g, v vodi z F_g' in vzgon z F_{vz}. Teža potopljenega telesa je rezultanta sil F_g in F_{vz}, $F_g' = F_g - F_{vz}$. Poznamo F_g, F_g', gostoto aluminija ρ_A, gostoto lesa ρ_L in gostoto vode ρ_V, iščemo

SLIKA 2.
Zgoraj: Začetek meritev, spodaj: udeleženci s kraljico dneva v ospredju

gostoto sestavljenega telesa. Težo sestavljenega telesa izrazimo z njegovo prostornino V, z gostoto ρ_t, z zemeljskim pospeškom g in enako tudi vzgon, le da upoštevamo pri zapisu vzgona gostoto vode. Razmerje sil F_g in F_{vz} izrazimo enkrat z razmerjem gostot, drugič z razmerjem, v katerem bosta samo sili F_g in F_{vz}: $\frac{F_g}{F_{vz}} = \frac{\rho_t g V}{\rho_V g V}$ in $\frac{F_g}{F_{vz}} = \frac{F_g}{F_g - F_{vz}}$. Na oba načina zapisani razmerji sil prikažemo z novim razmerjem:

$$\frac{\rho_t}{\rho_V} = \frac{F_g}{F_g - F_g'}. \tag{1}$$

aluminij	les
m_A, V_A	m_L, V_L

SLIKA 3.
$V = V_A + V_L$, $m = m_A + m_L$.
Model sestavljenega telesa iz aluminija in lesa.

Če označimo količnik $\frac{F_g'}{F_g}$ s k, lahko iz (1) izrazimo gostoto telesa:

$$\rho_t = \frac{\rho_V}{1-k}. \tag{2}$$

Iz izraza (2) je razvidno, da je gostota potopljenega telesa enaka gostoti vode, ko je $F_g' = 0$ oziroma $k = 0$. Dodatek srebra v carjevi kroni ugotovimo s primerjavo gostote čistega zlata z gostoto krone, ki jo dobimo po (2). Pri učencih, ki so sodelovali pri merjenju teže pod vodo, pa je mogoče po izrazu (2) določiti gostote njihovih teles. Na primer: količnik med težo v vodi in na zraku, F_g'/F_g, je bil od 1/18 do 1/16, kar ustreza gostoti teles od 18/17 do 16/15 gostote vode.

Vrnimo se k našemu modelu iz aluminija in lesa, ki po sestavi ponazarja zlato krono, kateri je dodano srebro. Po izrazu (2) določimo njegovo gostoto, z malo računske spretnosti pa lahko tudi določimo delež aluminija in lesa. Postopek je zanimiv in splošno uporaben za določanje deleža sestavin v telesu, če poznamo gostote posameznih snovi in gostoto telesa, ki je dobljena po izrazu (2). Po znanem obrazcu $\rho = \frac{m}{V}$ zapišimo gostoto sestavljenega telesa z njegovo maso m in prostornino V, gostoto aluminija z maso m_A in prostornino V_A, gostoto lesa z maso m_L in prostornino V_L ter izrazimo njihove prostornine z ustreznimi masami in gostotami. Ker je prostornina sestavljenega telesa enaka vsoti prostornin posameznih sestavin, lahko izraz za vsoto $V = V_A + V_L$ zapišemo:

$$\frac{m}{\rho_t} = \frac{m_A}{\rho_A} + \frac{m_L}{\rho_L}. \tag{3}$$

Delež aluminija m_A/m v sestavljenem telesu označimo z d_A, delež lesa $\frac{m_L}{m}$ pa z d_L. Masi m_A in m_L izrazimo z d_A, d_L in m. S temi oznakami zapišemo izraz (3) v obliki: $\frac{m}{\rho_t} = d_A \frac{m}{\rho_A} + d_L \frac{m}{\rho_L}$. Po deljenju obeh strani z m in upoštevanju, da je $d_A + d_L = 1$, dobimo delež lesa v sestavljenem telesu, odvisen od gostote obeh sestavin in od gostote telesa: $d_L = \frac{\frac{\rho_A}{\rho_t} - 1}{\frac{\rho_A}{\rho_L} - 1}$. Če zamenjamo gostoto telesa z izrazom (2), postane delež lesa odvisen od gostote aluminija, gostote lesa, gostote vode ter od izmerjenih tež F_g in F'_g:

$$d_L = \frac{\frac{\rho_A}{\rho_V}(1-k) - 1}{\frac{\rho_A}{\rho_L} - 1}. \tag{4}$$

Na podoben način, kot smo določili delež lesa, bi lahko ugotovili tudi delež srebra v carjevi kroni.

Poglejmo, kako lahko uporabimo izraz (4) pri meritvah naših učencev. Zlate krone nimamo, imamo pa meritve njihovih tež na zraku in v vodi. Človeško telo obravnavamo podobno, kot smo obravnavali sestavljeno telo iz aluminija in lesa. Snovi, ki sestavljajo človeško telo, razdelimo v dve skupini. V prvo skupino uvrstimo mišice, kosti in nekatere organe. Gostota teh snovi je malo večja od gostote vode, povprečna vrednost je okoli 1,1 gostote vode. V drugo skupino uvrstimo maščobe s povprečno vrednostjo 0,9 gostote vode. Gostoto snovi v prvi skupini primerjamo z gostoto aluminija, v drugi skupini pa z gostoto lesa. Razpolagamo tudi z meritvami teže telesa na zraku in v vodi, ki jih v izrazu (4) označimo s konstanto k. Ker se gostoti snovi v obeh skupinah zelo malo razlikujeta, morajo biti tudi meritve obeh tež, na zraku in v vodi, čim bolj natančne. Omenili smo že, da so bile v skupini učencev vrednosti za k od 1/18 do 1/16, kar pomeni, da je delež maščob v telesu od 14 do 18 odstotkov. Pri odraslih osebah je delež maščob navadno nad dvajset odstotkov. Če upoštevamo, da so našo skupino sestavljali zelo mladi ljudje in da tudi zbranost pri meritvah ni prispevala k posebni natančnosti, je dobljeni rezultat še vedno sprejemljiv. Dejavnosti učencev v naravi so bile namenjene predvsem doživljanju zgodbe o Arhimedu, določanje maščob pa je le dodatna zanimivost, ki nekaj pove tudi o človeškem telesu.

Literatura

[1] N. I. Kovancov, *Matematika i romantika*, Kiev, Višča škola, 1980, 48–54.

× × ×

Razmisli in poskusi

MITJA ROSINA

58. Poševni zvonik v Črnem Kalu

Ko smo se še vozili proti Kopru po stari cesti, mi je padel v oči poševni zvonik v Črnem Kalu. Mislil sem, da gre za iluzijo: zaradi centrifugalne sile, ki jo čutimo v avtu na ovinku, se nam zdi navpičnica nagnjena glede na pravo navpičnico. Vendar sem se nekoč ustavil in šel v vas pogledat, kaj je na stvari. Zvonik je res nagnjen! Domačini so mi povedali, da so namerili cel meter nagiba na vrhu zvonika. Če je vrh zvonika visok 20 metrov, to pomeni nagib 1:20, kar je 5 % ali 3°. Pozneje so zvonik nekoliko sanirali, toda še vedno je poševen.

NALOGA. Deloma pa gre res za iluzijo. Pri hitri vožnji okrog ovinka se zdi zvonik še mnogo bolj nagnjen. Izračunaj, kolikšen je navidezni nagib, če se pelješ s hitrostjo 50 km/h in je krivinski radij 200 metrov!

Če se kdaj ustaviš v Črnem Kalu, pa še sam izmeri nagib zvonika. Uporabi nekaj iznajdljivosti, kako boš to izmeril in napravi lepo fotografijo. Oceni tudi, koliko bolj se ti zdi zvonik nagnjen med vožnjo.

× × ×

Ena, dve, tri sence

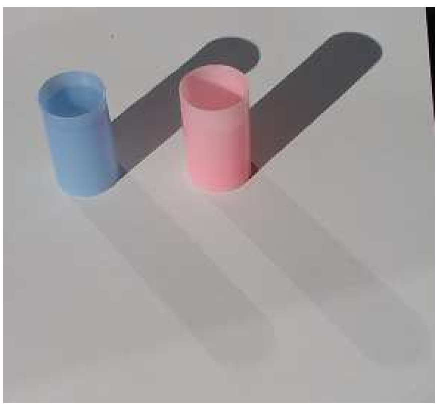
NADA RAZPET

V 5. številki Preseka (letnik 2014/2015) smo bralce v preizkuševalnici povabili na opazovanje večkratnih senc. In kaj vse smo opazili?

Na lep sončen dan smo na balkonski mizi opazili dve senci lončka (slika 1). Na drugo senco, imenovali jo bomo sekundarna senca (kjer je senca žličke), smo bili pozorni šele, ko je mimoidoči zastrl nekaj direktne svetlobe. Zato smo tudi pri vseh nadaljnjih fotografijah del direktne svetlobe zastrli.

SLIKA 1.
Ob lepem sončnem vremenu smo na balkonski mizi opazili dve senci lončka.

Da je sekundarna senca vidnejša, če del direktne svetlobe zastremo, kažeta sliki 2 in 3. Sliko 2 smo posneli brez zastirke, za sliko 3 pa smo del direktne svetlobe zakrili, zato se na podlagi vidi tudi senca zastirke.

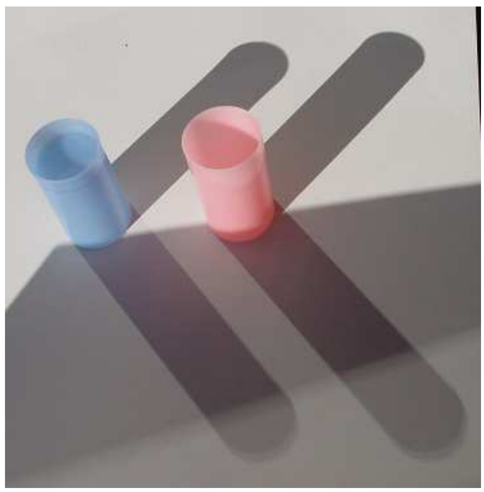


SLIKA 2.
Sekundarna senca je slabo vidna. Določite primarno in sekundarno senco.

Potem smo se opazovanja senc lotili načrtneje.

1. Najprej smo senci opazovali kratek čas (dopoldan). Lahko privzamemo, da se v tem času azimut in višinski kot Sonca za opazovalca nista spremenila. Primerjamo legi senc pri bolj in manj odprtih balkonskih vratih. Lega in velikost primarne sence, ki je posledica absorpcije direktne sončeve svetlobe, se ni spremenila. Vmesni kot med primarno in sekundarno senco, ki je posledica absorpcije od vrat odbite svetlobe, pa se je pri bolj zaprtih vratih povečal, tudi dolžina sekundarne sence se je spremenila. Lege senc kažeta sliki 4 in 5.

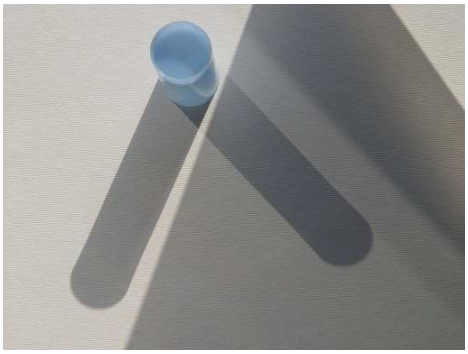
2. Da je sekundarna senca posledica absorpcije dela svetlobe, odbite od steklenih vrat, smo ugotovili tako, da smo vrata prekrili s papirjem. Sekundarna senca je izginila (slika 6). Sekundarna senca izgine tudi v primeru, ko vrata preveč odpremo ali zapremo. Iz tega sklepamo, da sekundarno senco vidimo le pri posebnih pogojih, o katerih bomo govorili kasneje.



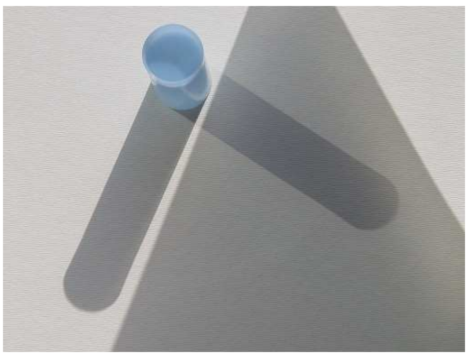
SLIKA 3.
Z uporabo zastirke se vidnost sekundarne sence izboljša.

18
nadaljevanje na strani

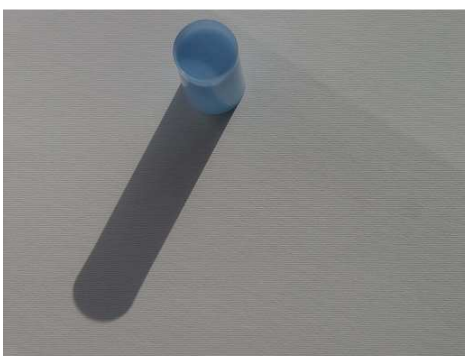
→ 15
nadaljevanje s strani



SLIKA 4.
Lega obeh senc na tleh ob balkonskih vratih.



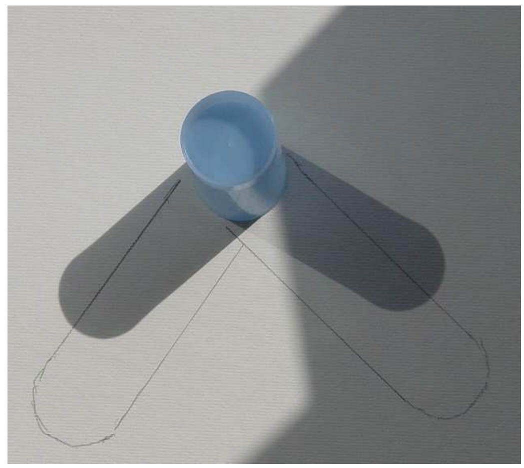
SLIKA 5.
Balkonska vrata smo nekoliko priprli. Lega sekundarne sence se je spremenila.



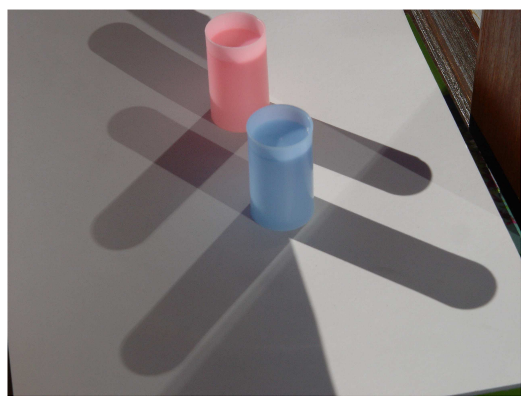
SLIKA 6.
Steklena vrata smo prekrili s papirjem. Sekundarna senca je izginila.

3. Nato smo senci opazovali še dlje. Najprej smo obrisali začetni legi obeh senc, nato smo počakali eno uro in senci fotografirali. Spremenili sta se legi in dolžini obeh senc (slika 7). Senci sta krajši, kar je logično, saj smo omenili, da smo opazovali dopoldan.

4. Še zadnjo serijo poskusov smo naredili tako, da sta na lonček padali direktna sončeva svetloba in svetloba, odbita od steklenih vrat in okna. Na sliki 8 so vidne sence dveh enako velikih predmetov.



SLIKA 7.
Lega senc po eni uri opazovanja.



SLIKA 8.
Vsak predmet meče tri sence.

Kaj iz omenjenih opazovanj lahko ugotovimo? Iz rezultatov prvega in drugega opazovanja sklepamo, katera senca je posledica absorpcije dela svetlobe, odbite od vrat. To je tista senca, katere lega (in seveda dolžina) se je spremenila, ko smo premaknili steklena vrata, oz. je ob prekritju vrat izginila. Ta senca je tudi nekoliko svetlejša.

Pri tretjem poskusu lege vrat nismo spreminjali. Ker pa se je vpadni kot svetlobe v eni uri že bistveno spremenil, se je tudi lega in dolžina obeh senc spremenila.

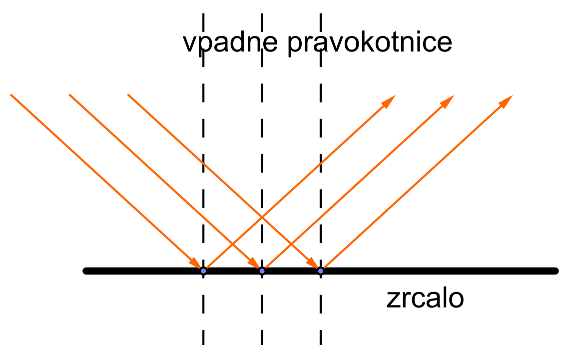
Iz četrtega poskusa pa sklepamo, da lahko ob primerni legi steklenih površin opazimo več senc.

Poglejmo še, če lahko vse poskuse tudi grafično predstavimo z enim od računalniških programov. Risali bomo s programom GeoGebra.

Ko rišemo sence, si mislimo, da svetlobo, ki pade na telo, razdelimo na ozke curke. Vsak curek upodobimo z žarki. Curki sončeve svetlobe so med seboj vzporedni, zato so tudi žarki med seboj vzporedni. Puščica kaže, iz katere smeri prihaja svetloba.

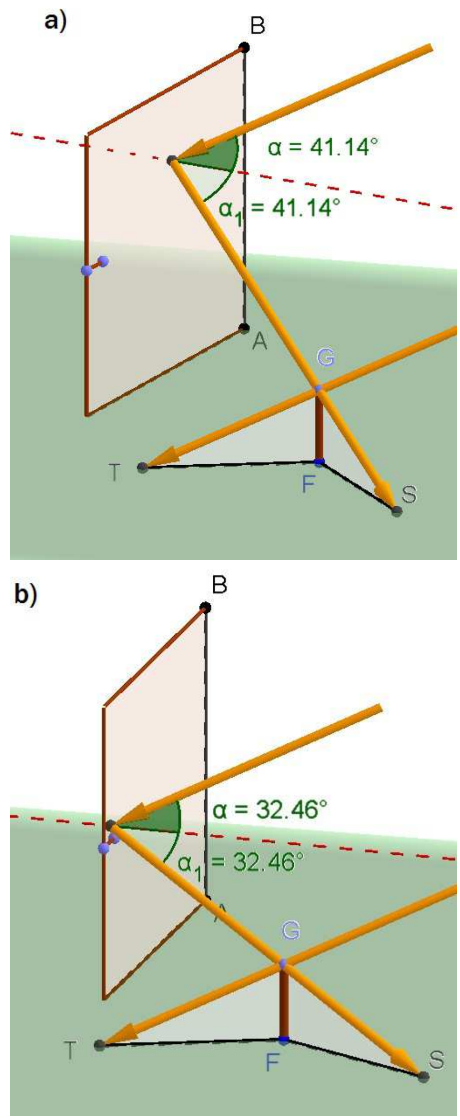
Ponovimo osnovne lastnosti odboja žarkov na ravnem zrcalu: vzporedni žarki so tudi po odboju od ravnega zrcala še vedno vzporedni. Vpadni, odbiti žarek in vpadna pravokotnica ležijo v isti ravnini. Vpadni kot je enak odbojnemu kotu. Navadno odboj žarkov na ravnem zrcalu rišemo tako, kot to kaže slika 9.

Narišimo še prostorsko sliko. Z rumeno barvo smo označili žarke, ki predstavljajo curke svetlobe. Daljica TF predstavlja primarno senco, daljica FS pa sekundarno senco.



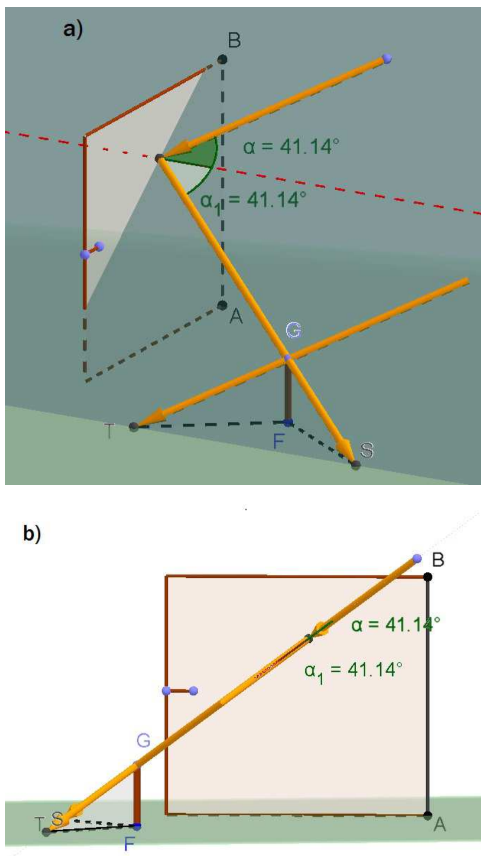
SLIKA 9.
Vpadni, odbiti žarek in vpadna pravokotnica ležijo v isti ravnini. Snop vzporednih žarkov je po odboju še vedno vzporeden.

Ko premaknemo steklena vrata in pri tem privzamemo, da se med tem lega Sonca ni bistveno spremenila, se lega in dolžina sekundarne sence spremenita, saj se je spremenil kot, pod katerim vpada svetloba na steklo, in z njim seveda tudi odbojni kot. Primer kažeta sliki 10a in 10b. Opazimo še, da se lega in dolžina primarne sence nista spremenili.



SLIKA 10.
a) Na tleh opazimo dve senci. b) Ko vrata premaknemo, se spremenita lega in dolžina sekundarne sence.

Če smo žarke risali pravilno, ležijo vpadni, odbiti žarek in vpadna pravokotnica v isti ravnini. Ker lahko z računalniškim programom GeoGebra koordinatni sistem vrtimo, prikažimo ravnino, v kateri ležijo omenjeni žarki, na dva načina. Na sliki 11a smo narisali ravnino, v kateri ležijo žarki (obarvana modro), na sliki 11b pa smo koordinatni sistem zavrteli tako, da gledamo v smeri vpadne pravokotnice (pravokotno na vrata). Zdaj je dobro vidno, da ležijo vsi žarki v isti ravnini. Slika seveda še ni dokaz, ampak računov na tem mestu ne bomo pisali.

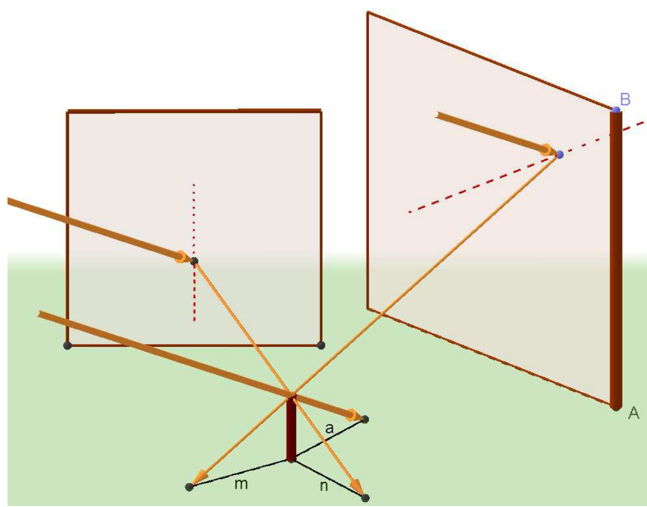


SLIKA 11.
Vpadni, odbiti in direktni žarek ter vpadna pravokotnica ležijo v isti ravnini, ki je na sliki a) obarvana modro. Na sliki b) gledamo v smeri vpadne pravokotnice, to je pravokotno na površino vrat. Vidimo, da se žarki prekrivajo, ležijo v isti ravnini.

Konstruirajmo še primer, ko predmet meče tri sence (slika 12).

Sence lahko opazujemo na prostem ves dan. Tudi opoldan pri nas predmeti mečejo sence. Če opazujemo na vzhodni ali zahodni strani hiše, nas pri opazovanju omejuje hiša sama in strešni napušči, ki zakrijejo del svetlobe, ki prihaja od Sonca. Teh težav pri opazovanje senc na južni strani hiše ni, vseeno pa vedno ne vidimo dveh oz. treh senc. Drugo (tretjo) senco vidimo le v primeru, če je medsebojna lega Sonca in steklene površine taka, da v oknu (v vratih) vidimo sliko Sonca. Seveda pa moramo poskrbeti tudi za primerno lego predmeta, saj mora odbita svetloba padati na predmet. Da bosta sekundarni senci bolje vidni, pa je potrebno zastreti del direktne svetlobe.

V naši okolici je dovolj pojavov, ki jih lahko opazujemo in fotografiramo. Z uporabo primernih računalniških programov lahko potem preverimo, če jih tudi razumemo. Bolj vztrajni opazovalci lahko opravijo še ustrezne meritve fizikalnih količin in v matematični obliki zapišejo povezave med njimi (recimo, kako se spreminja kot med primarno in sekundarno senco v odvisnosti od časa).



SLIKA 12.
Tri sence zaradi absorpcije direktne sončeve svetlobe in odbite svetlobe od okna in od vrat.

× × ×

35. tekmovanje iz znanja fizike za Stefanova priznanja v šolskem letu 2014/2015

Barbara Rovšek

Najprej zapišimo nekaj statističnih podatkov o 35. tekmovanju osnovnošolcev iz znanja fizike. Šolsko tekmovanje je bilo tokrat v tednu (ali dveh) pred zimskimi počitnicami. Tudi v preteklem letu se ga je udeležila približno četrtina generacij osmo in devetošolcev: vseh skupaj je bilo 7906. Vsak tretji udeleženec je osvojil bronasto Stefanovo priznanje, dva od devetih pa sta se prebila na področno tekmovanje, ki je potekalo v 17-ih regijah po Sloveniji. Od 1746 udeležencev področnega tekmovanja jih je 1092 osvojilo srebrno Stefanovo priznanje, vsak šesti udeleženec področnega tekmovanja (in vsak 25. udeleženec šolskega tekmovanja) pa se je uvrstil na državno tekmovanje.

Državno tekmovanje je bilo v soboto 11. aprila 2015 na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ter na Osnovni šoli Renče. Tekmovalo je 308 učencev, od katerih jih je 108 osvojilo zlata priznanja.

Pri eksperimentalnem delu tekmovanja so osmošolci opazovali in merili omočenje. V čašo z vodo so potopili eno krajišče traku iz papirnate brisače in potem merili, kako hitro se voda giblje po traku. Računali so povprečno in trenutno hitrost vode ter narisali graf poti v odvisnosti od časa. Razmisliti so morali, katere okoliščine vplivajo na pojav.

Merjenje, ki so ga opravili devetošolci, je bilo (že spet) iz elektrike. Sestavljali so galvanske člene iz različnih elektrod, jih povezovali zaporedno in merili napetosti takih členov. Bistveni del naloge je preverjal, ali so pri pojavu prepoznali vzorce in pravila, ki veljajo za napetosti posameznih in zaporedno vezanih galvanskih členov. Na koncu so na baterijo iz pravih treh členov vezali svetečo diodo in ugotovili barvo svetlobe, ki jo oddaja.

8. razred

V 8. razredu je prejelo nagrade sedem učencev in ena učenka. Vse tri prve nagrade so romale v Kranj na tri osnovne šole. Bravo Gorenjci!

1. nagrada

- David Ošlaj, OŠ Stražišče Kranj, mentorica Silva Majcen;
- Tevž Lotrič, OŠ Predoslje Kranj, mentorica Erna Fajfar;
- Bor Gazvoda, OŠ Simona Jenka Kranj, mentorica Irma Pustotnik.

2. nagrada

- Lucijan De Reggi, OŠ Lucija, mentorica Lijana Turk;
- Leo Ogrizek, OŠ Dušana Bordona Semedela – Koper, mentorica Vlasta Zrnec.

3. nagrada

- Tadej Strah, OŠ Ferda Vesela Šentvid pri Stični, mentorica Anica Vozel;
- Vladimir Smrkolj, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana, mentorica Sonja Koželj;
- Maša Žaucer, OŠ Poljane, Ljubljana, mentorica Tatjana Šeruga.

9. RAZRED

Tudi v 9. razredu je prejelo nagrade osem učencev. Dva izmed nagrajencev sta z iste osnovne šole.

1. nagrada

- Andraž Jelinčič, OŠ Danile Kumar, Ljubljana, mentorica Helena Leskovar;
- Marko Čmrlec, OŠ Dobrepolje, mentorica Renata Pelc.

2. nagrada

- Tim Kmecl, OŠ Domžale, mentorica Béla Szomi Kralj;
- Aljaž Simonič, OŠ Ljudski vrt Ptuj, mentorica Jasmina Žel;
- Jaka Šivavec, OŠ Domžale, mentorica Béla Szomi Kralj.

3. nagrada

- Aleš Globočnik, OŠ Šenčur, mentorica Andreja Jagodic;
- Jon Judež, OŠ Šmihel, Novo mesto, mentorica Milena Košak;
- Aleks Skok, OŠ Srečka Kosovela Sežana, mentorica Mojca Štembergar.

SLIKA 1.
Osmošolka na državnem tekmovanju v Ljubljani meri, do katere višine je po papirnatem traku prilezla voda (foto Jan Šuntajs).

Razpis tekmovanja za novo šolsko leto, v katerem so zapisane vsebine tekmovanja, pravilnik tekmovanja in bilten 35. državnega tekmovanja, kjer najdeš tudi naloge s tekmovanja z obširnimi rešitvami, so objavljeni na spletnih straneh DMFA Slovenije, `http://www.dmfa.si/fiz_OS/`.

SLIKA 2.
Nagrajenci 35. tekmovanja osnovnošolcev za Stefanova priznanja na prireditvi Bistroumi 2015, ki je potekala 24. maja 2015 v dvorani Union v Ljubljani. Na sliki so še častni podeljevalec nagrad prof. dr. Janez Strnad, povezovalec prireditve Nik Škrlec in avtorica tega prispevka. Edina nagrajenka se skriva za nagrajencem, ki drži v roki vrečko (foto: Jan Šuntajs).

× × ×

Misija Mumbaj: USPELA!

Tomaž Cvetko

V Indijskem Mumbaju je letos potekala 46. Mednarodna fizikalna olimpijada. V za nas neobicajnem okolju (vročina, vlaga, pekoča hrana in hotel, sicer s petimi zvezdicami, a z zelo omejenim izhodom) smo prebili deset dni. Končni rezultat? Pet bronastih kolajn za slovensko ekipo!

Priprave so letos potekale od 29. junija do 1. julija na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Tam smo se spoznali z malo bolj poglobljenimi koncepti nekaterih področij fizike, ki so v srednji šoli dokaj zanemarjena, predvsem pa bili deležni mnogoterih opozoril glede tveganja, ki ga predstavlja uživanje hrane v Indiji. Tako smo se polni previdnosti in novega znanja podali na pot v daljno Indijo.

Ob 10. uri dopoldan smo 3. julija poleteli z zagrebškega letališča, prestopili v Istanbulu in okoli 5. ure zjutraj naslednji dan po lokalnem času pristali v Mumbaju. Tam smo se že takoj soočili z mogočnostjo indijske birokracije in formalizma, ko smo se skozi vsaj tri preverjanja potnih listov in viz prebijali do naše prtljage, to pa so ob izhodu seveda še enkrat pregledali. Ob izhodu iz letališke stavbe nas je že navsezgodaj pozdravila soparna vročina, pričakali pa so nas tudi organizatorji tekmovanja.

Prvi dan smo porabili za to, da smo se nastanili v hotelu, spoznali z ogromnim kompleksom, ki je postal naše edino indijsko začasno bivališče, in si nabrali novih moči. Naslednji dan je bil posvečen predvsem otvoritvi olimpijade; žal pa je bila ta zelo dolga in se je mestoma večini prisotnih v avditoriju Homi Bhabhe zdela precej enolična in dolgovezna. Dan pred tekmovanjem smo obiskali planetarij, v katerem smo poleg dejstev o vesolju, izvedeli tudi nekaj o zgodovini indijske osamosvojitve. Natančneje rečeno: to so izvedeli tisti, ki si niso privoščili malo okrepčilnega spanca.

V torek, 7. julija, pa nas je čakal prvi izziv. Eksperimentalni del tekmovanja. Začetek je bil načrtovan za deseto uro dopoldne, a smo začeli »le« 45 minut kasneje. Nihče ni vedel, zakaj. Eksperimentalni del tekmovanja je dokaj pričakovano imel opraviti predvsem s svetlobo.

V prvem delu smo tekmovalci morali določati geometrijske parametre navadne vijačne vzmeti in dvojne vijačnice. Vzorec smo osvetlili z laserjem in potem opazovali uklon ter interferenco na oddaljenem zaslonu. Sam proces je zahteval veliko natančnost in pa hitrost, saj je bilo potrebno opraviti razmeroma veliko količino meritev in narisati pet grafov (za vsakega je bilo potrebno odčitati povprečno šest meritev), potem pa iz strmine grafov še določati geometrijske lastnosti obeh vzorcev. Na srečo se je postopek izkazal za dokaj ponovljivega za vseh pet primerov. Je pa prvi del eksperimenta vzel kar precejšen del petih ur, ki so bile na voljo (vsaj tri, meni celo kar štiri ure).

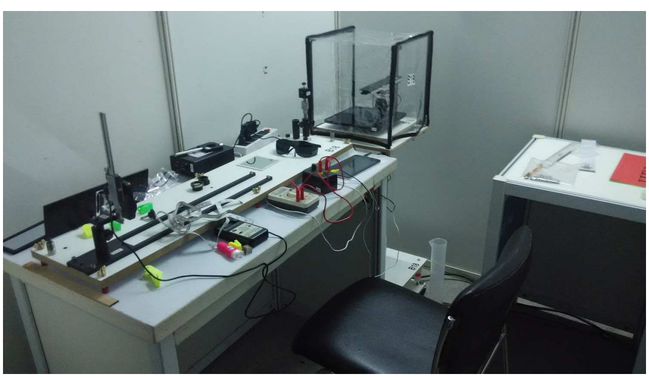
Drugi del eksperimenta je obravnaval interferenco laserske svetlobe na vzvalovani vodni gladini. Laserski žarek smo pod kotom usmerili na gladino vode, ki smo jo zbujali z generatorjem frekvenc in merili interferenčno sliko na zaslonu. Sama slika je bila odvisna od frekvence valov, površinske napetosti, gostote in viskoznosti vode ter valovne dolžine laserske svetlobe, ki pa je bila seveda konstantna in podana. Celoten drugi del je bil posvečen določanju koeficienta površinske napetosti in koeficienta visko-

znosti vode. Ta del je bil vsebinsko nekoliko bolj zahteven, pa tudi bolj zanimiv, toda zanj je ostalo bolj malo časa in večini (iz slovenske ekipe) se ni uspelo dobro poglobiti v ta izziv. Vsi pripomočki za eksperiment so bili brezhibni in vse meritve se je dalo izvesti brez tehničnih težav, tako da glede tega gredo vse pohvale organizatorjem.

Po eksperimentalnem dnevu je sledil dan premora, ki ga je zapolnil ogled raziskovalnega centra TIFR (Tata Institute of Fundamental Research). Prva nervoza se je že razkadila in kar prešerno smo si ogledali laboratorije, čeprav že malo naveličani čakanja, ki je postalo stalnica našega bivanja v Indiji. Na samem inštitutu smo ugotovili, da tam izvajajo brez dvoma zelo zanimive raziskave; nam pa kratek ogled ni potešil radovednosti, ki jo je zbudil v nas.

Po dnevu počitka je sledil teoretični preizkus znanja, za katerega je bilo na voljo prav tako pet ur, moč pa je bilo doseči 30 točk (eksperimentalni del je bil vreden 20 točk). V sklopu so bile tri naloge, vsaka vredna 10 točk.

Prva naloga je obravnavala delce s Sonca; v prvem delu Sončevo sevanje, v drugem pa nevtrine, ki priletijo s Sonca do Zemlje. Na začetku je bila obravnavana sončna celica z določeno površino, na katero vpadajo sončni žarki pravokotno, potem pa je bilo potrebno izračunati ali izraziti različne značilnosti tega sistema, kot na primer vpadni energijski tok, moč sočne celice in izkoristek sončne celice. V drugem delu smo obravnavali gostoto toka nevtrinov, ki vpadajo na Zemljo, trk nevtrina z mirujočim elektronom in berilijev atom kot gibajoči se vir nevtrinov. Druga naloga se je osredotočila na načelo minimalne akcije. V delu A smo obravnavali to načelo v mehaniki, v delu B izpeljali lomni zakon za svetlobo, del C se je »dotaknil« valovne narave delcev,



del D pa je podajal model prehajanja snopa elektronov s področja z manjšim potencialom na področje z večjim. Tretja naloga je bila s točkami najbolj radodarna in zato tudi nam, tekmovalcem, najljubša. Med reševanjem le-te smo se ukvarjali z modelom gorivne celice jedrskega reaktorja. V prvem delu smo odkrivali energijski aspekt gorivne celice, izračunali njeno moč na enoto prostornine in se ukvarjali s toplotnim ravnovesjem te celice. Drugi del nam je predstavil mehanizem delovanja reaktorja na atomski ravni, obravnavali smo trk nevtrona z atomom moderatorja v reaktorju. Zadnji del pa je spraševal po optimalnih dimenzijah reaktorja in masi uranovega oksida, potrebnega za stacionarno delovanje jedrskega reaktorja.

Razpoloženje po končanem teoretičnem delu v ekipi je bilo zelo različno, od neprikritega optimističnega navdušenja, mešanih občutkov, prek absolutne stoične drže do prvih znakov depresije. Toda kmalu smo se vsi zedinili, da je fizikalna olimpijada Vendarle za nami in da lahko olajšani začnemo uživati v Mumbaju. No, tako smo vsaj mislili. Naš poskus sprehoda po okolici hotela se je končal pri stražarnici na koncu dovoza do hotela. Izkazalo se namreč je, da je hotel varovalo nekaj sto policistov in da nam nikakor niso mogli dovoliti izhoda. Najbrž je temu botroval strah pred vsem, kar bi se nam utegnilo zgoditi na ulicah v spremstvu naših mladih vodičev. Naslednje dni smo tako posvetili počitku ob hotelskem bazenu in rekreaciji v fitnesu. Ekskurzijo v šest ur oddaljeno tovarno avtomobilov smo izpustili, ker smo se želeli izogniti zelo verjetnemu čakanju in zamudam.

Pa smo se vseeno še malo načakali. Na rezultate. Ti pa so bili vsekakor vredni čakanja. Da smo novico o kar petih bronastih medaljah premleli in popolnoma dojeli, je trajalo kar nekaj časa, nato pa smo proslavili v velikem slogu: z rižem in ustekleničeno vodo – pa tudi kakšna tortica se je našla.

Končna ugotovitev? Misija Mumbaj: USPELA! Olimpijade se je udeležilo 382 dijakov iz 82-ih držav. Prav vsi člani ekipe (poleg podpisanega še Jakob Jazbec, Aleksej Jurca, Blaž Karner in Žan Kokalj) pa smo se precej uspešno spopadli z nalogami in domov odnesli kar pet bronastih kolajn! To je izjemen ekipni uspeh za Slovenijo na fizikalni olimpijadi, saj še nikoli ni nobena ekipa osvojila petih kolajn.

× × ×

9. olimpijada iz astronomije in astrofizike

Tadeja Veršič in Andrej Guštin

Letošnja 9. olimpijada iz astronomije in astrofizike je potekala v Indoneziji v mestu Magelang. V času deset dnevnega tekmovanja so naši tekmovalci izkazali vse svoje znanje astronomije, ki so ga razvijali pod mentorstvom Andreja Guština, Dunje Fabjan, Uroša Kostića, Katje Bricman, Tadeje Veršič ter mentorjev na svojih srednjih šolah. Našo državo so na tekmovanju zastopali: Aleksej Jurca (Gimnazija Bežigrad), Jakob Jazbec (Šolski center Srečka Kosovela Sežana), Jakob Robnik (Gimnazija Bežigrad), Krištof Skok (I. gimnazija Celje) in Darko Kolar (Gimnazija Murska Sobota), na tekmovanju pa sta jih spremljala Andrej Guštin in Tadeja Veršič.

V tokratni številki Preseka predstavljamo kratke teoretične naloge iz letošnje mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike.

1. V sistemu Gliese 876 so opazili več planetov. Masa zvezde je ($M_G = 0.33 \pm 0.03 M_\odot$). Podatki za planete so predstavljeni v spodnji tabeli:

sistem Gliese	masa	velika polos (a.e.)
Gliese 876 b	2,276 M_J	0,2083
Gliese 876 c	0,714 M_J	0,1296
Gliese 876 d	6,8 $M_\oplus$	0,0208
Gliese 876 e	15 $M_\oplus$	0,3340

Z $M_\odot$ je označena masa Sonca, z M_J masa Jupitra ($M_J = 1{,}89813 \times 10^{27}$ kg) in z $M_\oplus$ masa Zemlje. Planeti krožijo okrog zvezde v isti smeri. Za dva planeta velja, da sta v resonančnih orbitah, kadar je sinodska obhodna doba enega planeta celoštevilski večkratnik sinodske obhodne dobe drugega planeta. Ugotovi, ali so nekateri od planetov sistema Gliese 876 v resonančnih orbitah.

2. Satelit nekega planeta ima obhodno dobo 7 dni 3 ure 43 minut okoli planeta, velika polos njegove orbite pa je 15,3-krat večja od povprečnega polmera planeta. Naša Luna ima obhodno dobo okoli Zemlje 27 dni 7 ur 43 minut, velika polos njenega tira pa je 60,3-krat večja od povprečnega polmera Zemlje. Predpostavi, da sta masi Lune in satelita zanemarljivi v primerjavi z maso planetov, okoli katerih krožita. Izračunaj razmerje povprečne gostote omenjenega planeta in Zemlje.

3. Iz templja Borobudur je opazovalec 27. maja 2015 ob 02:18:49 opazoval okultacijo asteroida 1258 Julietta zvezde HIP 89931 (δ-Sgr). Okultacija je trajala 6,201 s. Privzemi, da Zemlja kroži po krožni orbiti okrog Sonca, orbita Juliette pa leži v ekliptični ravnini in kroži v isti smeri kot Zemlja okrog Sonca. Ob okultaciji je Julietta blizu afelija in od Sonca oddaljena 3,076 a.e., od Zemlje pa 2,156 a.e. Velika polos Juliette je 2,9914 a.e. Izračunaj premer asteorida Julietta.

4. Zamislimo si, da astronom opazuje mirujočo masivno črno luknjo brez električnega naboja z maso $2{,}1 \times 10^{10}$ M_{Sonce} z orjaškim infrardečim teleskopom, katererega premer objektiva je enak premeru Zemlje. Infrardeči teleskop zaznava svetlobo v območju med 20 – 640 μm. Izračunaj največjo oddaljenost, pri kateri bo opazovalec s tem teleskopom še razločil črno luknjo.

5. Opazovalec poskuša določiti približno vrednost ekscentričnosti umetnega satelita. Ko je bil satelit v apogeju, je opazovalec izmeril, da se je satelit v kratkem času premaknil za kot $\delta\varphi_1 = 2'44''$. Ko je radij vektor med središčem Zemlje in satelitom pravokoten na veliko polos orbite (prava anomalija je 90 stopinj), se je v enakem časovnem intervalu, kot v prvem primeru satelit, premaknil za $\delta\varphi_2 = 21'27''$. Predpostavi, da je opazovalec v središču Zemlje. Izračunaj približno vrednost ekscentričnosti satelitove orbite.

6. Pred vsakim opazovanjem astronomi radioteleskop usmerijo k točkastemu radijskemu izvoru, za katerega je znano, da je njegova spektralna gostota svetlobnega toka (fluks) nad Zemljinim ozačjem vedno 21,86 Jy. Nekega dne, ko je bil ta izvor 35° nad obzorjem, so astronomi z radioteleskopom izmerili, da je njegova spektralna gostota svetlobnega toka (fluks) 14,27 Jy. Izračunaj zenitno optično globino ozračja τ_Z v tem delu EM spektra.

7. Ubežna hitrost iz roba jate galaksij polmera 10 Mpc je 700 km/s glede na središče jate. Izračunaj gostoto te jate galaksij.

8. Astronomi so opazovali močan zvezni radijski signal nekega vesoljskega telesa, ki je trajal 700 μs. Izmerjena spektralna gostota svetlobnega toka (fluks) pri frekvenci 1660 MHz je bila 0,35 kJy. Izračunaj efektivno temperaturo tega izvora, če je od nas oddaljen 2,3 kpc.

9. Predpostavimo, da Sonce seva kot idealno črno telo. Enako velja tudi za Venero, katere temperatura je T_V in je v toplotnem ravnovesju (to pomeni, da izseva enako količino energije, kot jo prejme od Sonca). Privzamemo, da je oddaljenost Venere od Sonca 0,72 a.e. Ko je Venera Zemlji najbliže, je njen navidezni premer na nebu 66″. Izračunaj spektralno gostoto svetlobnega toka (fluks) z Venere pri frekvenci 5 GHz, ko je ta Zemlji najbliže.

10. Oblak molekularnega vodika ima temperaturo $T = 115$ K. Vodikovi atomi (predpostavimo, da so krogelne oblike), imajo polmer $r_H = 0{,}37 \times 10^{-10}$ m, razdalja med jedroma vodika v molekuli pa je $d_{H_2} = 0{,}74 \times 10^{-10}$ m. Predpostavi, da so molekule v toplotnem ravnovesju. Izračunaj frekvenco, pri kateri vodikove molekule sevajo zaradi prehoda iz rotacijskega vzbujenega stanja (vrtenja molekul).

11. Gostota nekega vesoljskega telesa je obratnosorazmerna z oddaljenostjo od njegovega središča. Sorazmernostni faktor je $\alpha = 5{,}0 \times 10^{13}$ kg/m^3. Izračunaj maso telesa, če je ubežna hitrost na njegovem površju $v_0 = 1{,}5 \times 10^4$ m/s.

12. Proton s kinetično energijo 1 GeV potuje od površja Sonca proti Zemlji. Izračunaj čas potovanja protona od Sonca do Zemlje (gledano z Zemlje), če zanemarimo vplive magnetnega polja Sonca.

13. Jupitrova luna Io, katere vrtilna doba je sinhronizirana z obhodno dobo okoli Jupitra, je vulkansko zelo aktivna. Eden od možnih vzrokov je segrevanje njene notranjosti zaradi plimske sile, ki izvira predvsem od Jupitra. Plimska sila je rezultanta gravitacijskih sil, s katerimi Jupiter deluje na Io – na bližnje dele Io z večjo silo kot na dele Io, ki so dlje od planeta. Radarske meritve Io so pokazale, da se površje Io lahko dvigne in spusti do 100 m v času polovice njene obhodne dobe okoli Jupitra. S tolikšno amplitudo se dviga in spušča le površje, notranjost Io pa manj, zato lahko predpostavimo, da se celotna masa Io zaradi plime premakne za 50 m. Izračunaj povprečno moč, s katero plimske sile segrevajo Io.

Namig: Za majhne x lahko uporabiš približek:
$(1+x)^n \approx 1 + nx$
Masa Io $m_{io} = 8{,}931938 \times 10^{22}$ kg
Najmanjša razdalja Io od Jupitra $r_{peri} = 420000$ km
Največja razdalja Io od Jupitra $r_{apo} = 423400$ km
Obhodna doba Io okoli Jupitra 152853 s
Polmer Jupitra $R_{Io} = 1821{,}6$ km.

14. Zamislimo si, da živimo v statičnem in neskončno velikem vesolju, v katerem je povprečna gostota zvezd $n = 10^9$ 1/Mpc^3. Predpostavi, da v tem vesolju velja standardna evklidska geometrija. Izračunaj, kako daleč lahko v povprečju vidiš v vesolje, preden tvoj pogled v vseh smereh ne naleti na zvezdo. Povprečni polmer zvezd naj bo enak polmeru Sonca. Prosimo, da rezultat izraziš v Mpc.

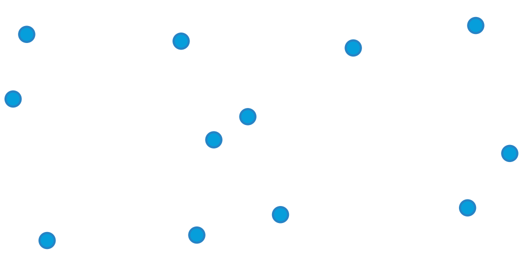
15. Letalo je letelo iz Lime, prestolnice Peruja (zemljepisna širina 12°2′ severno, zemljepisna dolžina 77°1′ zahodno), v Yogyakarto (zemljepisna širina 7°47′ južno, zemljepisna dolžina 110°26′ vzhodno). Letalo je izbralo najkrajšo pot med Limo in Yogyakarto. Izračunaj zemljepisno širino najbolj južne točke, skozi katero je letelo letalo.

× × ×

Problem najbližjih točk

Igor Pesek

V prispevku bomo predstavili problem najbližjih točk v množici P z $n \geq 2$ točkami. Rešitev problema je uporabna, ko moramo, denimo, odkriti oz. določiti, kateri dve osebi stojita najbližje ena drugi (otroška igra), pa tudi kateri dve letali sta si najbližje (preprečitev nesreče v letalskem prometu). Problem bomo opisali natančneje. Osebe bodo postale točke, igrišče pa bo postalo premica, ravnina ali prostor. Poiskati torej želimo najbližji točki v množici danih točk P, ki ležijo v N-dimenzionalnem prostoru. Najbližji v našem primeru pomeni običajno evklidsko razdaljo, kjer je razdalja med točkama v ravnini $p_1 = (x_1, y_1)$ in $p_2 = (x_2, y_2)$ enaka $dist_{p_1,p_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Grafična ponazoritev problema je prikazana na sliki 1.



SLIKA 1.
Množica točk v ravnini

Pregled vseh možnih razdalj

Problema se lahko lotimo s preiskovanjem vseh možnih razdalj med točkami. V eni dimenziji, na premici, tako pregledamo $\binom{n}{2}$ parov točk in med njimi določimo najbližji par. Če podane točke naraščajoče uredimo, lahko preiskovanje pohitrimo, saj moramo pregledati le pare točk p_i in p_{i+1} za $i = 1, \ldots, n-1$ in med njimi določiti najbližjega. Takšno preiskovanje zahteva linearni čas, vendar moramo upoštevati še čas za urejanje množice točk. V ravnini in višjih dimenzijah nam ta razmislek ne pomaga, zato moramo izračunati razdalje za približno $O(n^2)$ parov točk.

Iskanje s pomočjo strategije deli in vladaj

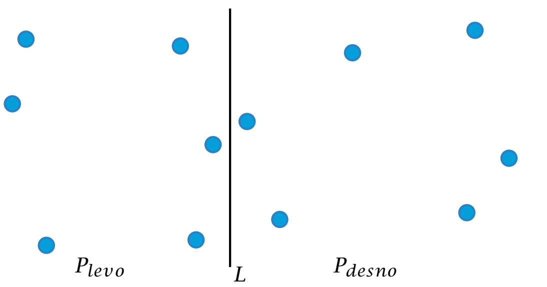
Problem lahko hitreje rešimo s pomočjo strategije deli in vladaj, ki smo jo v Preseku že predstavili. Pri tej strategiji se problem običajno rešuje s pomočjo rekurzivnih klicev v treh korakih; kar bomo predstavili za primer, ko točke ležijo v ravnini.

Deli. Poiščemo navpično premico L, ki deli množico točk na dva dela P_{levo} in P_{desno}. Ta sta po velikosti enaka oz. v primeru lihega števila točk v P je v P_{levo} ena točka več. Pri tem so vse točke iz P_{levo} levo od črte L in točke iz P_{desno} desno od črte L. Primer razdelitve s premico L je prikazan na sliki 2.

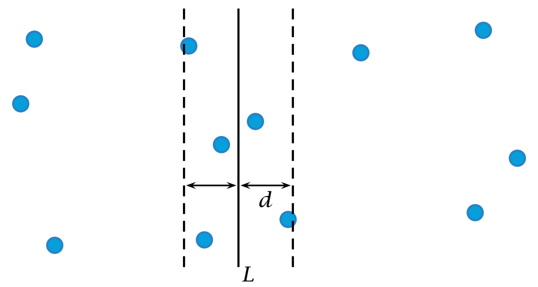
Vladaj. Izvedemo dva rekurzivna klica; s prvim poiščemo najbližji par točk v P_{levo} in z drugim klicem najbližji par točk v P_{desno}. Vsak klic vrne najkrajšo razdaljo d_{levo} oz. d_{desno} dane množice, kot je prikazano na sliki 3. V rekurzivnem klicu pazimo, da v primeru števila točk dane množice $|P| \leq 3$ za določitev najkrajše razdalje pregledamo vse možne razdalje. Sedaj določimo d, ki je enak

- $d = \min(d_{levo}, d_{desno})$.

Združi. Najbližji par točk je sedaj bodisi par z razdaljo d, ki smo jo določili z enim od rekurzivnih

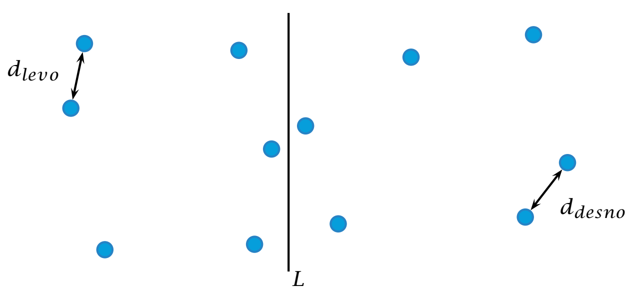


SLIKA 2.
Razdelitev na dve množici s premico L



SLIKA 4.
Navpični trak širine $2d$

klicev, bodisi par točk, kjer ena točka leži v P_{levo} in ena točka v P_{desno}. Le-teh z rekurzivnimi klici nismo zajeli. Vseh parov točk iz različnih množic nam ni potrebno preveriti. Zakaj ne? Iščemo namreč takšen par, katerega razdalja je krajša od d. Zadostuje torej da preverimo samo pare točk, kjer sta obe točki para znotraj navideznega navpičnega traku T, ki sega za razdaljo d na vsako stran od premice L. Skupaj je torej T širok $2d$, kot je prikazano na sliki 4. Zakaj je to dovolj? Če želimo najti krajšo razdaljo od d, je iskanje dlje od teh premic nesmiselno, ker bo razdalja zagotovo večja od d. V najslabšem primeru ena od točk leži na premici L, točka iz druge množice pa je največ za d oddaljena od prve točke. Torej nas vse točke, ki ležijo izven traku T, ne zanimajo in jih za ta korak v celoti pozabimo. Sledi pregled vseh parov točk, ki ležijo znotraj traku T. Ta korak lahko tudi pohitrimo. Kako? Točke uredimo naraščajoče



SLIKA 3.
Rezultat rekurzivnih klicev

po y-koordinati, kar nam pomaga pri preiskovanju, saj sedaj zadostuje, da pregledamo samo točke, ki tudi v navpični smeri niso oddaljene za več kot d od preiskovane točke. Primer je prikazan na sliki 5. Pregledamo vse točke znotraj traku T; če obstaja takšen $d_T < d$, potem smo našli novo najkrajšo razdaljo, sicer je najkrajša razdalja tista, ki smo jo dobili z enim od rekurzivnih klicev.

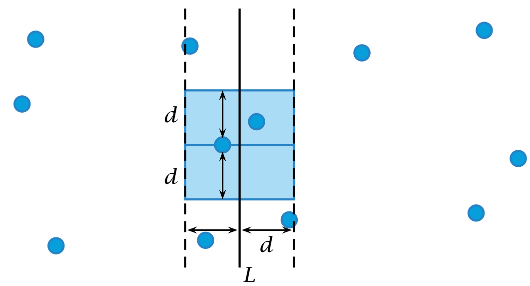
V nadaljevanju je predstavljen algoritem za iskanje najbližjega para točk. Nekatere funkcije v algoritmu so prepuščene bralcu, da jih napiše sam.

```
NajblizjiTocki (P, P_x ,n)
   if |P_x| <= 3: NajkrajsaRazdalja(P_x)
         //pregledamo vse pare

   Deli(P_x, P_levo, P_desno, L, n)
   d_levo = NajblizjiTocki(P, P_levo, n)
   d_desno = NajblizjiTocki(P, P_desno, n)
   d = min(d_levo, d_desno)

   //pregledamo vse točke znotraj traku T
   P_t = DoločiTočkeNaTraku(P_x, L, d)
   UrediPo_Y_Koordinati(P_t)
   d_t = PoisciNajkrajsoRazdaljo(P_t, d)

   return min(d, d_t)
```



SLIKA 5.
Področje iskanja v navpičnem traku T

Zaključek

Algoritem za iskanje najbližjega para po strategiji deli in vladaj ima časovno zahtevnost $O(n \cdot \log n)$, kar je precejšnja izboljšava v primerjavi z metodo preiskovanja vseh razdalj med pari točk, ki ima časovno zahtevnost $O(n^2)$. Predstavili smo delovanje algoritma v ravnini ($N = 2$), vendar se takoj postavi vprašanje, kaj pa v $3D$ prostoru ($N = 3$) ali kakšnem večdimenzionalnem prostoru ($N > 3$). Izkaže se, da algoritem deluje tako, da navpična premica ni več premica ampak ravnina oz. natančneje, delilna premica L je vedno prostor z eno dimenzijo manj, kot je N.

Literatura

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2009.

× × ×

Barvni sudoku

↓↓↓

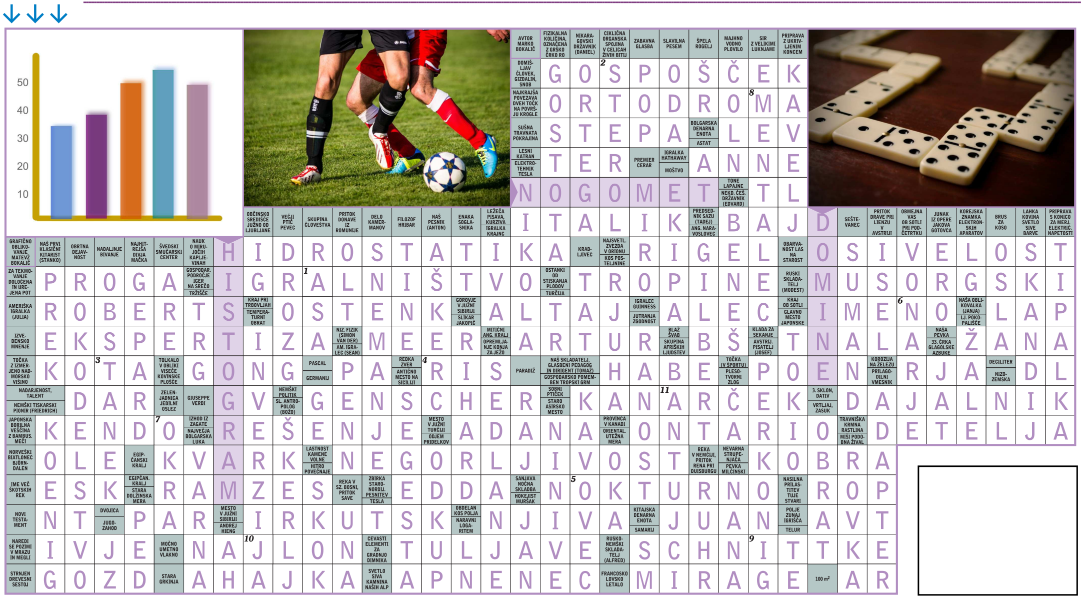
→ V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

	3				7	4	8
	4			5			
						3	1
			5			8	4
5			4				
	1		7				
	7	4				2	
1			8				

→→→ **REŠITEV BARVNI SUDOKU**

2	3	5	6	1	7	4	8
7	4	8	1	5	3	6	2
4	8	7	2	6	5	3	1
3	6	1	5	7	2	8	4
5	2	6	4	3	8	1	7
8	1	3	7	2	4	5	6
6	7	4	3	8	1	2	5
1	5	2	8	4	6	7	3

× × ×



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 42/6

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz šeste številke 42. letnika Preseka je **Astronomija**. Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Matej Langus iz Tržiča, Jaka Šikonja iz Metlike in Gregor Mlinarič iz Buč, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Sosonce

Nada Razpet

Ob mednarodnem letu svetlobe smo bolj pozorni na pojave v atmosferi. Tako smo 2. junija ob 6.15 pogledali skozi okno dnevne sobe in na nebu opazili svetlo pego. Bila je levo od Sonca, desno stran od Sonca so zakrivale hiše. To svetlo pego imenujejo tudi sosonce. Na spletu jo najdemo tudi pod drugimi imeni: pasonce, parhelij, v angleškem jeziku tudi Sun dog oziroma sundog.

Pojav nastane zaradi loma svetlobe na lebdečih ledenih kristalih v oblakih. Kristali imajo obliko pravilne šeststrane prizme. Če so kristali ledu naključno orientirani, potem nastaneta kroga, katerih polmer vidimo pod kotom 22°, lahko pa tudi pod kotom 46°. To sta 22° hálo in 46° hálo, pri čemer je središče krogov v navideznem središču Sonca. Če pa so kristali orientirani tako, da ima večina kristalov osnovno ploskev vodoravno, potem na obeh straneh Sonca opazimo na hálu dve svetli pegi, dve sosonci. Če natančneje pogledamo sliko 1, potem pod sosoncem opazimo še kratek lok, celotnega kroga pa na sliki ni in ga tudi nismo opazili. Torej je imela večina kristalov osnovo ploskev vodoravno. Podoben pojav se lahko opazi tudi pri Luni.

SLIKA 1.
Levo do Sonca, gledano s strani opazovalca, smo videli sosonce. Slika je posneta v Domžalah.

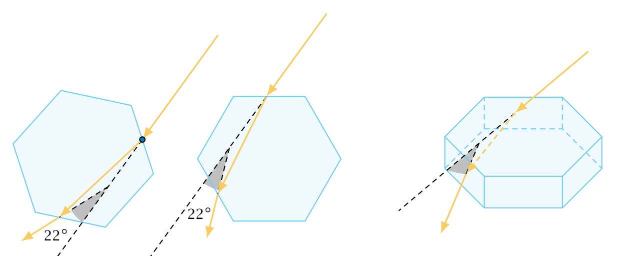
Svetlobni curek se pri prehodu skozi prizmo dvakrat lomi in gre skozi dve nesosednji stranski ploskvi prizme, kot kaže slika 2. Lomni količniki za različne valovne dolžine se med seboj razlikujejo, zato je sosonce obarvano. Del sosonca, ki je najbližji Soncu, je rdečkast (na sliki 1 desno) je rdečkast, sledi rumena brava, proti repu pa je zeleno moder. Več o tem pojavu si lahko preberete v starejših letnikih Preseka, [1] in [2] (dostopen tudi na spletu) ter v knjigi [3].

Literatura

[1] J. Rakovec, *Sosonce in 22° hálo*, Presek, **23** (1995–1996), 3, 140–141, DMFA – založništvo, Ljubljana.

[2] M. Rovšek, *Hálo, čudoviti naravni pojav – 1. del*, Presek **24** (1996–1997), 1, 6–13, DMFA – založništvo, Ljubljana.

[3] J. Rakovec in T. Vrhovec, *Osnove meteorologije za naravoslovce in tehnike*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2000, str. 243.



SLIKA 2.
Žarek se pri prehodu skozi prizmo na nesosednjih stranskih ploskvah dvakrat lomi. Kot med vpadnim žarkom in žarkom, ki izhaja iz prizme, na sliki označen sivo, meri 22°.

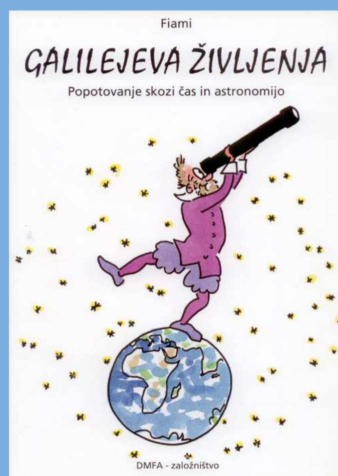
× × ×

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.

Nagradna križanka

AVTOR MARKO BOKALIČ

GLAVNI TRG STAROGRŠKIH MEST

LATINSKI IZRAZ ZA MORJE

ZAOSTAJANJE ROTORJA ZA VRTILN. POLJEM

KITAJSKA PEŠČENA PUŠČAVA

RAZLAGALEC SVETEGA PISMA

REPUBLIKA SLOVENIJA

RAZSEŽNOST

ARHEOLOŠKO NAJDIŠČE V INDIJI

RODITELJICA

GLAVNO MESTO NIZOZEMSKE

8

ZVEZDNI SESTAV, OSVETJE

KONJSKA ANTILOPA

9

17

ZMAGA PRI ŠAHU

7

PREDZADNJA GR. ČRKA

NITASTA LOVKA ALI TIPALKA

POKLICNA POT

AMERICIJ

USTALJENA OBLIKA, OBRAZEC, VZOREC

ZOPRNA POLETNA ŽUŽELKA

PRAKANTON V ŠVICI

AMERIŠKA IGRALKA NOVAK

POSREDNIK PRI KUPČIJAH

OKRASNI KAMEN

IT. PREDSEDNIK V 70. LETIH (GIOVANNI)

ETNIČNA SKUPINA NA POLJSKEM

MIKROB PRISKLEDNIK

ČEBELJI PRODUKT

10

11

NAŠA PISATELJICA V PARIZU (BRINA)

AMERIŠKA IGRALKA AVSTRIJ. RODU (HEDY)

NAŠ PESNIK (IVAN)

OBDOBJE PALEOZOIKA

4

BALTSKA DRŽAVA

KARIBSKA OTOŠKA DRŽAVICA

STARO SUMERSKO MESTO

NARAVOSLOVEC

HLAPLJIVA ORGANSKA TEKOČINA

SREDIŠČE VIPAVSKE DOLINE

K-MEZONI

MESTO NA OBROBJU JURE V ŠVICI

14

DRŽAVA V AFRIKI

GRŠKI PASTIRSKI BOG

FORDOV MALČEK

UČNA DOVZETNOST

SLIKAR JOŽE HORVAT

MIŠI PODOBEN LETEČI SESALEC

20

STROJENA ŽIVALSKA KOŽA

KVARNER. LETOVIŠČE

KOVINA

NAŠA EVROPSKA POSLANKA (TANJA)

23

PEVKA VRČKOVNIK

ŠTAJERSKI TV ODDAJNIK

NAJVEČJA REKA SEVEROVZHODNE ŠPANIJE

PEVEC NIPIČ

ZAŠČITNI KOS BLAGA PRI JEDI

KRAJ POD RIBNIŠKO MALO GORO

IGRALEC SWAYZE

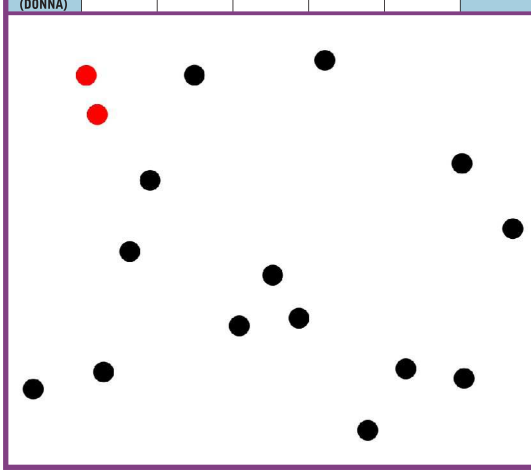
PRIPRAVA ZA DOZIRANJE

AMERIŠKA MODNA OBLIKOVALKA (DONNA)

SLOJ BARVE NA POVRŠINI

ELEKTRODA ZA DOVOD EL. TOKA

ŽIGA DEBELJAK



VODILA IZ TRAČNIC, PO KATERIH SE GIBLJEJO VOZILA

UTEMELJITEV IZREKA

FOTOGRAF HODALIČ

22

HIT HRV. SKUPINE DAVOLI (ŽENSKO IME)

21

OBIČAJ

TANKA MREŽASTA TKANINA

NORVEŠKI PISEC KRIMINALK NESBØ

ZLI DUH (MOŠKO IME)

TURČIJA

SOSEDNJI ČRKI

PREBIVALEC NAŠE ZAHODNE SOSEDE

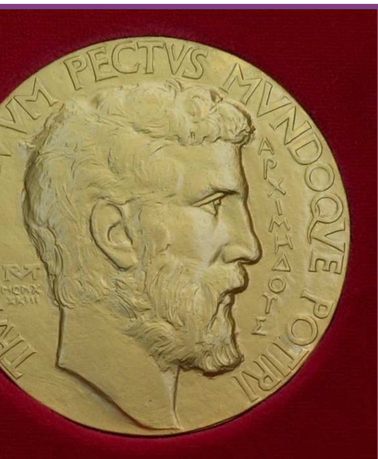
6

ČLOVEK ŠIBKE KONSTITUCIJE

IRSKI IGRALEC FARRELL

KOS DEBLA V VELIKOSTI POLENA (NAREČNO GORENJSKO)

BRUSELJSKA RTV DOPISNICA ŠTULAR



GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ

DOLOČITEV VIŠINE DAVKA

NEMŠKI PESNIK IN DRAMATIK (BERTOLT)

DEL TENIŠKE IGRE, NIZ

PEVKA ČERNE

KRAJ NA GORIŠKEM, V SPODNJI VIPAVSKI DOLINI

VALENTIN STANIČ

KONČNI DEL ČREVESA, ZADNJIK

KRAJ PRI NOVIGRADU V ISTRI

STANJE ČUTNEGA UGODJA, OPOJ

POMEMBNOST, BISTVENOST

DESNI ROKAV RENA NA NIZOZEMSKEM

INTENZIVNOST

USTANOVA ZA OPAZOVANJE NARAVNIH POJAVOV

NADMOR. VIŠINA, DO KATERE RASTEJO DREVESA

EKSPLOZIVEN JAMSKI PLIN

MESTO V KAZAHST. / DONAVSKI OTOK V DŽERDAPU

EVGEN CAR / OČE

PREBIVALEC EVROPSKE OTOŠKE DRŽAVE

KOLIČINA, KI SE MERI Z URO / MELODIKA

MIŠIČNO TKIVO ŽIVALI / KMEČKI VOZ

AM. FILM. REŽISER (DELMER) / DANILO TÜRK

TONE ŠKARJA

PRIPOMOČEK ZA SLABOVIDNE

STARO NASELJE PRI ZADRU

INDIJSKA DRŽAVNICA GANDHI

EVROPSKO GOROVJE / NAŠ PESNIK (URBAN)

PEVEC SMOLAR / HOMOGENOST

NIZEK ŽENSKI GLAS / NAŠA SLIKARKA (MOJCA)

ZEVSOV SIN, SODNIK V HADU, EAK

OSNOVNI DELEC Z NEGAT. NABOJEM / SAKSONEC

AFRIŠKA SREDOZEMSKA DRŽAVA

VELIK TROPSKI SADEŽ

LETOVIŠČE NA JUGU ŠVICE / KOŽNO VNETJE

BOLEZEN Z NAPADI DUŠENJA, NADUHA

BIATLONKA MALI / SEVERNOAMERIŠKI INDIJANEC

BELA ZAČIMBA / IZRAŽANJE ODKLONIL. STALIŠČA

JUDOV SIN, KI NI HOTEL OPLODITI VDOVE SVOJEGA BRATA / ENOLONČNICA IZ POLJŠČIN IN MESA

IZTRŽEK, IZKUPIČEK / SESTAV TREH GLASBENIKOV

TERMOELEKTRARNA / SPLAVARSKI DROG

GOSPA V DALMAT. OKOLJU / ARKTIČNI JELEN

NEKDANJI HRVAŠKI VLADAR

FR. LITER. ZGODOV. (GUSTAVE) / IGRALKA ZEMLJIČ

MLINSKA KORITA / ČEŠKI ARHITEKT (EMIL)

UMETNIŠKA UPODOBITEV GOLOTE

SKOPA ŽENSKA, SKOPULJA / ZEMLJEVID

NAPITEK IZ POSUŠENIH ZELIŠČ

DOLGOVLAKNAT EGIPTOVSKI BOMBAŽ

HRVAŠKO MESTO / NEKDANJI BURMANSKI "ŠEF" OZN

PREMICA, OKOLI KATERE SE KAJ SUČE

DRŽAJ / ŠPANSKI SLIKAR (SALVADOR)

PODATKI

LADIJSKA KABINA / ZIMSKA PADAVINA

PRVINE SOSEDNJEGA JEZIKA / HRVAŠKI NAFTAR

NEKDANJI KITAJSKI DRŽAVNIK PIAO

NAJVEČJI DESNI PRTIOK VOLGE

NA NJEM SEKAMO / PLESOTVORNI ZLOG

POLARNIK

NEKDANJI TURŠKI VELIKAŠ

AKTIVEN EVROPSKI VULKAN

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. oktobra 2015**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×