ROBUSTNA DOLOČITEV PRIBLIŽNIH KOORDINAT V HORIZONTALNI GEODETSKI MREŽI

ROBUST DETERMINATION OF APPROXIMATE COORDINATES IN A HORIZONTAL GEODETIC NETWORK

Sandi Berk

UDK: 528.23:528.3

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.01

POVZETEK

Predstavljen je postopek robustne določitve približnih koordinat točk v horizontalni geodetski mreži. Primarni cilj ni natančnost, ampak čim večja zanesljivost pridobljenih koordinat. Razlog določitve je omogočiti nadaljnjo obdelavo po modelu Gauß-Markova. Ker gre za linearen matematični model, sodijo približne vrednosti neznank med nujno potrebne vhodne podatke. Obravnavane so razpoložljive metode določitve koordinat točk in kombinatorika predoločenosti rešitev v odvisnosti od nadštevilnih opazovanj. Uporabljen je geometrijski pristop k reševanju, ki sloni na dejstvu, da vsako točko mreže določa presek para krivulj. Geometrijska kakovost posamezne rešitve je ovrednotena na podlagi presečnega kota obeh krivulj. Posamezni rešitvi dodeljena utež je funkcija tega kota. Izračun koordinat je postopen; v vsakem koraku sta določeni koordinati ene nove točke. Algoritem vključuje iskanje tipične rešitve med vsemi rešitvami za posamezno točko. Zaradi izogibanja morebitnim grobim pogreškom temelji postopek na uporabi robustne statistike. Na praktičnem primeru je preizkušena učinkovitost treh osnovnih mer lokacije. Gre za posplošitve povprečja, mediane in modusa – težiščno, središčno in gostiščno točko. Grobi pogreški so v mrežo uvedeni z uporabo simulacije Monte Carlo.

ABSTRACT

A procedure of robust determination of the approximate coordinates of points in a horizontal geodetic network is presented. The primary aim is not accuracy but the reliability of the obtained coordinates. The motivation is to enable further processing according to the Gauss-Markov model. It is a linear mathematical model, thus the approximate values of unknowns are necessary input data. Disposable methods of determining coordinates of points and combinatorics of over-determined solutions dependent upon redundant observations are discussed. A geometrical approach is used, based on the fact that every point is an intersection of a pair of curves. The geometrical quality of each individual solution is evaluated from the intersection angle of both curves. A weight assigned to each solution is a function of that angle. Calculating coordinates is a successive procedure; each step assures the determination of one network point. The algorithm comprises searching for a typical solution among all solutions for an individual point. In order to avoid eventual gross errors, the procedure is based on robust statistics. The efficiency of three basic measures of location is tested on a practical example. The point is a generalization of mean, median, and mode i.e. the centre of mass, spatial median, and spatial mode. Gross errors are introduced into the network by using a Monte Carlo simulation.

KLJUČNE BESEDE

horizontalna geodetska mreža, mere lokacije, približne koordinate, robustna statistika, slabo pogojene rešitve, večvariantni modus

KEY WORDS

approximate coordinates, horizontal geodetic network, measures of location, multivariate mode, poor solutions, robust statistics

1 UVOD

Določitev približnih koordinat novih točk v klasični horizontalni geodetski mreži je nujen korak pri obdelavi horizontalne geodetske mreže. Razlog za to so nelinearne funkcijske zveze med opazovanji in neznankami v mreži – v nasprotju z nivelmansko mrežo, na primer. Dokončne koordinate točk v mreži so določene po modelu Gauß-Markova, ki je linearen matematični model (Caspary, 1988, 4–8). Linearizacija funkcijskih zvez zahteva približne vrednosti neznank v mreži, torej še ne določene koordinate točk. Za določitev približnih koordinat novih točk v mreži so na voljo metode urezov in presekov. Prispevek se omejuje na postopno določitev posameznih točk v mreži. Treba pa je omeniti, da so lahko nove točke določljive tudi le v skupinah (npr. dvojni notranji urez), vendar takšni primeri ne sledijo priporočilom dobrega načrtovanja mreže.

Kakšna so torej izhodišča za določitev približnih koordinat novih točk? V nasprotju z izravnavo, katere cilj je pridobitev najverjetnejših koordinat novih točk[1], je primarni cilj izračuna približnih koordinat predvsem njihova čim večja zanesljivost. Razloga za morebitne težave sta predvsem dva: grobi pogrešek (angl. gross error) in slabo pogojena rešitev (angl. poor solution), ki je lahko celo izrojena. Prvo izhodišče je čim manjša občutljivost postopka za morebitne grobe pogreške v mreži. Metode odkrivanja grobih pogreškov namreč praviloma temeljijo na rezultatih izravnave (npr. Caspary, 1988, 68–84; Grigillo in Stopar, 2003), izravnava pa je šele naslednji korak v obdelavi mreže. Tako naj bi se torej izognili morebitnim večjim odklonom (angl. outliers) med opazovanji brez ugotavljanja, ali gre za grobe pogreške ali ne. Drugo izhodišče je izogibanje slabo pogojenim rešitvam, tj. takšnim, ki so pridobljene ob neugodni geometrijski razporeditvi točk. Predlagani postopek vključuje postopno določitev posameznih točk v mreži na vse mogoče načine, ovrednotenje kakovosti (pogojenosti) posameznih rešitev v obliki dodelitve ustreznih uteži in končno izbor tipične rešitve, ki temelji na uporabi robustne statistike.

2 ROBUSTNA STATISTIKA

Pri določanju koordinat točke v mreži (na različne načine) se pojavi potreba po statističnih orodjih za ocenjevanje lokacije. Statistika pozna več pristopov. Omembe vredni so predvsem:

- aritmetična sredina (tudi povprečna vrednost, povprečje),
- mediana (tudi središčna vrednost, središčnica) in
- modus (tudi gostiščna vrednost, gostiščnica).

Aritmetična sredina je najpogosteje uporabljena cenilka srednje vrednosti in o njej ne gre izgubljati besed. Mediana vzorca ali populacije je na sredini vseh po velikosti razvrščenih vrednosti – polovica jih je od nje manjših, polovica pa večjih. Modus pa je definiran kot vrednost, pri kateri je gostitev enot po vrednosti največja (Košmelj in sod., 1993, 28–30). Obe zadnji definiciji nista matematično enoznačni. To zlasti velja za zvezno slučajno spremenljivko. Modus se običajno določi s histogramom. Vzeta je na primer sredina intervala histograma z najvišjo frekvenco.

V primerjavi z aritmetično sredino je mediana primernejša predvsem za nesimetrične porazdelitve

---

[1] *Izravnava po metodi najmanjših kvadratov (angl. least squares adjustment) izpolnjuje merilo za oceno po metodi največjega verjetja (angl. maximum likelihood estimation), če so opazovanja porazdeljena normalno; pogoj je torej tudi, da med njimi ni grobih pogreškov.*

in primere, ko želimo čimbolj izločiti vpliv morebitnih grobih pogreškov. Bistvena prednost mediane je njena robustnost. Mera za robustnost statistične cenilke je delež podatkov, ki so lahko »okuženi« – pri geodetskih opazovanjih torej grobi pogreški. Ta delež imenujemo tudi točka zloma (angl. breakdown point). Točka zloma je pri končnih populacijah običajno funkcija velikosti/številčnosti populacije (n). Za aritmetično sredino je točka zloma

$\frac{1}{n}$, asimptotična točka zloma ($n \to \infty$) pa 0;

za mediano je točka zloma

$\frac{n-1}{2 \cdot n}$, asimptotična točka zloma ($n \to \infty$) pa 0,5 (Lopuhaä in Rousseeuw, 1991).

Aritmetična sredina je torej primerna le za popolne podatke. Pri mediani pa lahko do 50 % vseh vrednosti sodi med grobe pogreške, a cenilka še vedno zagotavlja dobro oceno. Mediano množice vrednosti

$$X = \{ x_1, x_2 \ldots x_n \} \subset \Re$$

lahko definiramo kot vrednost, za katero je vsota absolutnih odstopanj od vrednosti iz množice najmanjša (Mishra, 2004)

$$\operatorname{med}(X) = \min_{y \in \Re} \sum_{i=1}^{n} | x_i - y | \quad .$$

2.1 Posplošitve osnovnih mer lokacije

Pri določanju približnih koordinat točk potrebujemo dve posplošitvi osnovnih mer lokacije. Prva se nanaša na privzem uteži za točke, ki predstavljajo možne rešitve. Posplošitev aritmetične sredine je splošna aritmetična sredina oziroma tehtana sredina[2]. Druga posplošitev se nanaša na prehod v več razsežnosti. Posplošitev aritmetične sredine je težišče točk (angl. center of mass, centroid). Za množico n-teric oziroma vektorjev

$$P = \{ p_1, p_2 \ldots p_n \} \subset \Re^r$$

z ustreznimi utežmi (u_i) je kombinacija obeh posplošitev

$$\operatorname{cen}(P) = \sum_{i=1}^{n} (u_i \cdot p_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} u_i \quad .$$

Analogija prve posplošitve za mediano je tehtana mediana, ki je na sredini vseh po velikosti razvrščenih vrednosti, pri čemer pa ne gre za njihovo štetje, ampak seštevanje njihovih uteži. Analogija druge posplošitve pa terja nadomestitev absolutnih vrednosti odstopanj z evklidsko normo razlik vektorjev. Tako posplošena mediana je znana kot prostorska mediana oziroma središče točk (angl. spatial median, centerpoint), v geometrijskem prostoru tudi geometrijska

---

[2] *Še bolj dosleden korak v tej smeri je posplošena aritmetična sredina (Mihailović, 1992, 28–30), ki upošteva tudi korelacije med vrednostmi, torej celotno korelacijsko matriko.*

mediana. Kombinacija obeh posplošitev je tako imenovana Fermat-Webrova točka (v r-razsežnem prostoru), pri kateri je vsota evklidskih norm razlik z vektorji iz množice, pomnoženih z ustreznimi utežmi, najmanjša (Chandrasekaran in Tamir, 1990)

$$\mathrm{med}(P) = \min_{q \in \Re^r} \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \| p_i - q \|_2 \; .$$

Fermat-Webrova točka na ravnini je uporabna tudi pri reševanju transportnih problemov, saj daje odgovor na vprašanje, kam postaviti skladišče, da bodo stroški dostave znanim odjemalcem najmanjši. Pomanjkljivosti prostorske mediane (in Fermat-Webrove točke) sta predvsem dve:

- obstaja možnost, da več točk hkrati ustreza merilu zanjo, in
- ni enostavne formule niti kombinatoričnega algoritma za njen izračun (Bajaj, 1988).

Prva možnost je sicer v praksi malo verjetna – na ravnini se to lahko zgodi v primeru kolinearnosti točk (Milasevic in Ducharme, 1987). Tudi to ni posebna ovira – dovolj dobra je katerakoli izmed točk, ki ustreza merilu. Druga pomanjkljivost je zahtevnost izračuna. Prostorska mediana je določljiva le z iterativnimi metodami. Najbolj znan je Weiszfeldov algoritem (Kärkkäinen in Äyrämö, 2005). Odgovor na omenjeni pomanjkljivosti je lahko redefinicija cenilke z dodatno zahtevo, da je iskana točka iz obravnavane množice točk. Tako definirano cenilko imenujejo nekateri avtorji tudi medoid (npr. Mouratidis in sod., 2005), posebej v povezavi z razvrščanjem v gruče (angl. cluster analysis). Primera iz enorazsežnega prostora sta spodnja in zgornja mediana. Naj bo medoid točka iz množice, ki je najboljši približek Fermat-Webrove točke, torej

$$\mathrm{med}'(P) = \min_{q \in P} \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \| p_i - q \|_2 .$$

Problem določanja koordinat nove točke v mreži na podlagi množice vseh možnih rešitev je, da so medsebojno odvisne. Posamezno opazovanje namreč sodeluje v neki podmnožici vseh možnih rešitev, ki je lahko včasih tudi sorazmerno velik del množice vseh rešitev. Tako se lahko zgodi, da en sam grobi pogrešek »okuži« več kot polovico vseh rešitev, kar pomeni, da tudi prostorska mediana oziroma Fermat-Webrova točka odpove.

V predstavljenem postopku je uporabljena cenilka, ki temelji na zgornji definiciji medoida, vendar z obrnjenim pristopom. Naj bo torej nasprotje medoida dane množice točk njen (prvi) antimedoid, definiran kot

$$\mathrm{amed}'(P)_1 = \max_{q \in P} \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \| p_i - q \|_2 \; .$$

Če je medoid točka iz množice, ki je kar najbolj na njeni sredini, je njeno nasprotje točka iz množice, ki je najbolj na njenem obrobju. Drugi antimedoid množice P je potem prvi antimedoid množice P brez njenega prvega antimedoida, torej

$$\mathrm{amed}'(P)_2 = \mathrm{amed}'(P \setminus \{\mathrm{amed}'(P)_1\})_1 \; .$$

Naivno gledano, je zadnja preostala točka v takšni rekurzivni definiciji točka na območju največje gostote, vse ostale točke so namreč izločene kot bolj obrobne. Dobljena točka je prostorski ali večvariantni modus (angl. multivariate mode) oziroma gostišče točk. Tudi tu gre za približek, saj je dobljena točka iz množice P. Gostišče točk množice P je edini preostali element dobljene podmnožice, torej

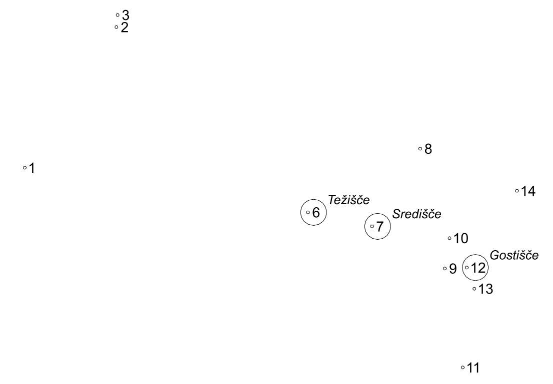
$$\operatorname{mod}'(P) \in P \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \operatorname{amed}'(P)_i \, .$$

Učinkovitost različnih pristopov k iskanju gostiščne točke je odvisna predvsem od stopnje konvergence. Praviloma gre za iterativne postopke, ki temeljijo na iskanju najmanjše konveksne podmnožice, ki še vsebuje določeno število točk (npr. Sager, 1979). Ob privzemu uteži seveda čista geometrijska interpretacija odpove. Predlagana rekurzivna definicija prostorskega modusa se je, kot bo predstavljeno v nadaljevanju, izkazala za dovolj učinkovito.

Po zgledu za središčno in gostiščno točko je bila zaradi večje robustnosti tudi za težišče vzeta točka iz množice, ki je njegov najboljši približek

$$\operatorname{cen}'(P) = \min_{q \in P} u \cdot \| \operatorname{cen}(P) - q \|_2 \, .$$

Po analogiji so bile za postopek določitve približnih koordinat točk prirejene tudi ustrezne srednje vrednosti. Namesto aritmetične sredine, mediane in modusa so bili torej uporabljeni njihovi najboljši približki, ki so hkrati vrednosti iz množice.



Slika 1: Obravnavane mere lokacije na ravnini: približki težišča, središča in gostišča množice točk.

Značaj vseh treh posplošitev mer lokacije na ravnini je prikazan na primeru (slika 1). Zaradi večje nazornosti so uteži za vse točke enake. Obkrožene so točke iz množice, ki so najboljši približki težišča, središča (prostorske mediane) in gostišča (prostorskega modusa) točk. Pri gostišču točk velja omeniti, da se predlagani postopek uspešno izogne pasti, ki jo predstavlja par med seboj najbližjih točk iz množice (slika 1, točki 2 in 3).

3 METODE IN KOMBINATORIKA DOLOČITVE KOORDINAT

Zaradi celovite obravnave določljivosti koordinat točk v klasični (kotno-dolžinski) horizontalni geodetski mreži so metode za določitev koordinat v tem prispevku razvrščene takole:

- zunanji urez (tudi sprednji urez),
- pol zunanji, pol notranji urez (poseben primer je stranski urez),
- posplošeni notranji urez (poseben primer je običajni notranji urez),
- pol zunanji urez, pol ločni presek (poseben primer je prva geodetska naloga),
- pol notranji urez, pol ločni presek in
- ločni presek.

Avtorju razpoložljiva literatura (npr. Smoltczyk, 2002) obravnava le prvo, zadnjo in posebne primere navedenih metod. Poimenovanja »pol zunanji, pol notranji urez«, »posplošeni notranji urez«, »pol zunanji urez, pol ločni presek« in »pol notranji urez, pol ločni presek« torej niso uveljavljena. Njihov pomen je pojasnjen v nadaljevanju. Navedenih šest metod predstavlja vsa možna orodja za določitev koordinat posamezne nove točke v mreži, torej ob vseh kombinacijah topoloških odnosov med točkami, ki jih tvorijo opazovanja ter dane in nova točka. Povsod gre za enostaven izračun koordinat (brez nadštevilnih opazovanj). Pred obravnavo posameznih metod ne bo odveč nekaj besed o ugotavljanju določljivosti nove točke in števila vseh možnih določitev nove točke. Primarna opazovanja v horizontalni geodetski mreži so kotna opazovanja (smeri) in dolžinska opazovanja. Kotna opazovanja so pri določitvi posamezne nove točke lahko orientacijske smeri (dana točka → dana točka), zunanje smeri (dana točka → nova točka) in notranje smeri (nova točka → dana točka). Osnovne količine za preverjanje določljivosti nove točke z navedenimi metodami so:

- število uporabnih zunanjih smeri (n_{zs}),
- število uporabnih notranjih smeri (n_{ns}) in
- število uporabnih dolžin (n_d).

Število uporabnih zunanjih smeri za določitev nove točke je število vseh smeri z danih točk na novo točko, ki jih je mogoče orientirati. Slednje pomeni, da mora biti v skupini kotnih opazovanj na dani točki, v kateri je tudi smer proti novi točki, vsaj še ena orientacijska smer, torej smer proti neki drugi dani točki. Če je orientacijskih smeri več, je takšna zunanja smer še vedno obravnavana kot ena sama uporabna zunanja smer, za njeno orientacijo pa je vzeta ustrezna robustna srednja vrednost orientacijskih kotov (približek povprečja, mediane oziroma modusa).

Število uporabnih notranjih smeri za določitev nove točke je število vseh smeri z nove točke proti danim točkam, če te v okviru iste skupine kotnih opazovanj nastopajo vsaj v parih. Za eno samo takšno notranjo smer v skupini kotnih opazovanj torej velja: ena ni nobena.

Število uporabnih dolžin za določitev nove točke je število vseh dolžin od nove točke do danih točk. Morebitno večkratno merjenje do iste dane točke je obravnavano kot ena sama uporabna dolžina; vzeta je ustrezna robustna srednja vrednost.

Količine za ugotavljanje števila vseh možnih določitev koordinat nove točke so še:

- število uporabnih smernih kotov (n_{sk}),
- število uporabnih notranjih kotov (n_{nk}) in
- število uporabnih dvojic notranjih kotov (n_{2nk}).

Število uporabnih smernih kotov za določitev nove točke je enako številu vseh uporabnih zunanjih smeri, pri čemer pa se morebiten niz smernih kotov z iste dane točke, dobljen iz več skupin kotnih opazovanj, obravnava kot en sam uporaben smerni kot; vzeta je ustrezna robustna srednja vrednost smernih kotov iz vseh skupin kotnih opazovanj. Praviloma je torej število uporabnih smernih kotov kar enako številu uporabnih zunanjih smeri, pri več skupinah kotnih opazovanj na danih točkah pa je število uporabnih smernih kotov lahko tudi manjše:

$$n_{sk} \leq n_{zs} \quad .$$

Število uporabnih notranjih kotov za določitev nove točke je enako številu vseh možnih dvojic uporabnih notranjih smeri (kot je razlika smeri) v okviru iste skupine kotnih opazovanj, torej številu kombinacij razreda 2 uporabnih notranjih smeri (brez ponavljanja):

$$n_{nk} = \binom{n_{ns}}{2} = \frac{n_{ns} \cdot (n_{ns} - 1)}{2} \ .$$

Pri več skupinah kotnih opazovanj na novi točki je morebiten niz identičnih dvojic smeri (proti istemu paru danih točk) obravnavan kot en sam uporaben notranji kot; vzeta je ustrezna robustna srednja vrednost. Skupno število uporabnih notranjih kotov je potem lahko[3] največ seštevek vseh kombinacij uporabnih notranjih smeri iz posameznih skupin kotnih opazovanj:

$$n_{nk} \leq \sum_{i=1}^{s} \binom{n_{ns_i}}{2} = \sum_{i=1}^{s} \frac{n_{ns_i} \cdot (n_{ns_i} - 1)}{2} \ ,$$

kjer sta:

s ... število skupin kotnih opazovanj na novi točki in

n_{ns_i} ... število uporabnih notranjih smeri v i-ti skupini kotnih opazovanj.

Število uporabnih dvojic notranjih kotov za določitev nove točke je enako vsoti števila vseh možnih trojic uporabnih notranjih smeri in vseh možnih dvojnih dvojic uporabnih notranjih smeri v okviru iste skupine kotnih opazovanj, torej vsoti števila kombinacij razreda 3 uporabnih notranjih smeri (brez ponavljanja) in trikratnika[4] števila kombinacij razreda 4 uporabnih notranjih smeri (brez ponavljanja):

$$n_{2nk} = \binom{n_{ns}}{3} + 3 \cdot \binom{n_{ns}}{4} = \frac{n_{ns} \cdot (n_{ns} - 1) \cdot (n_{ns} - 2) \cdot (3 \cdot n_{ns} - 5)}{24} \ .$$

[3] Večinoma je skupno število uporabnih notranjih kotov bistveno manjše. Enačaj v navedeni neenačbi velja le, če se v nobeni skupini kotnih opazovanj ne ponovi niti en identičen par viziranih danih točk iz katerekoli druge skupine.

[4] Število dvojnih dvojic je trikratnik števila vseh možnih četveric, poljubna četverica (npr. ABCD) namreč lahko tvori po tri pare dvojic (AB-CD, AC-BD in AD-BC).

Pri več skupinah kotnih opazovanj na novi točki je skupno število uporabnih dvojic notranjih kotov lahko[5] največ seštevek vseh uporabnih dvojic notranjih kotov iz posameznih skupin kotnih opazovanj, povečan za vse možne kombinacije uporabnih notranjih kotov med vsemi možnimi pari skupin kotnih opazovanj:

$$n_{2nk} \le \sum_{i=1}^{s}\left(\binom{n_{ns_i}}{3} + 3\cdot\binom{n_{ns_i}}{4}\right) + \sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=i+1}^{s}\left(\binom{n_{ns_i}}{2}\cdot\binom{n_{ns_j}}{2}\right),$$

kjer sta:

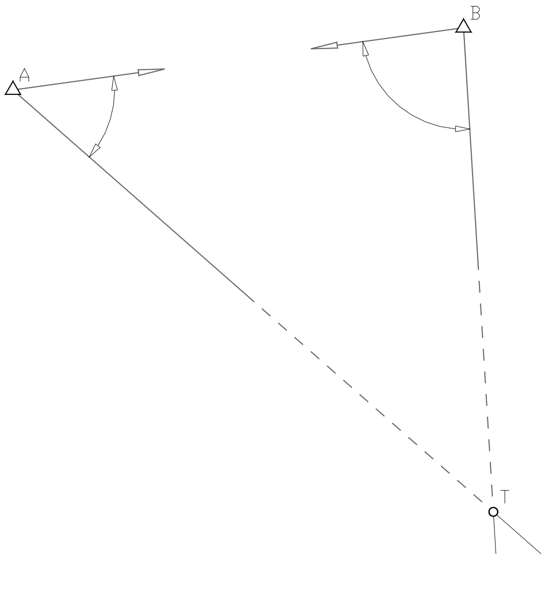
s ... število skupin kotnih opazovanj na novi točki in

$n_{ns_{i,j}}$ ... število uporabnih notranjih smeri v *i*-ti oziroma *j*-ti skupini kotnih opazovanj.

V nadaljevanju so predstavljene vse razpoložljive metode določitve koordinat posamezne točke v mreži. Geometrijski pristop k reševanju sloni na dejstvu, da je rešitev vedno presek para krivulj. Dani smerni kot določa premico, notranji kot določa krožni lok, dolžina pa krožnico, na kateri se nahaja nova točka.

3.1 Zunanji urez (sprednji urez)

Zunanji ali sprednji urez zahteva vsaj dve dani točki. V tem primeru sta hkrati druga drugi tudi orientacijski točki. Za izračun koordinat nove točke zadostujeta dve uporabni zunanji smeri. Nova točka je določena s presekom premic. Rešitev je enolična, vendar je lahko izrojena.



Slika 2: Zunanji urez; dani sta zunanji smeri s točk A in B.

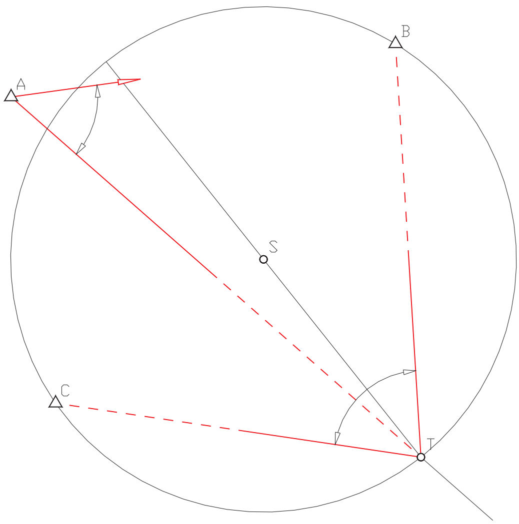
[5] *Velja isto kot za skupno število uporabnih notranjih kotov.*

Merilo kakovosti geometrije zunanjega ureza je velikost kota $\angle$ATB (slika 2), ki mora biti čim bližje 90°. Število vseh možnih določitev koordinat nove točke z zunanjim urezom je enako številu vseh kombinacij razreda 2 uporabnih smernih kotov (brez ponavljanja):

$$N = \binom{n_{sk}}{2} \leq \binom{n_{zs}}{2}.$$

3.2 Pol zunanji, pol notranji urez

Pol zunanji, pol notranji urez zahteva vsaj tri dane točke, pri čemer je ena tudi v vlogi orientacijske točke. Za izračun koordinat nove točke zadostujejo ena uporabna zunanja smer in dve uporabni notranji smeri iz iste skupine kotnih opazovanj. Nova točka je določena s presekom premice in krožnice. Izjemoma je določena s presekom premic, če ležijo nova točka in dani točki, za kateri sta na voljo notranji smeri, na premici. Rešitev je lahko enolična ali dvolična; lahko je tudi izrojena.

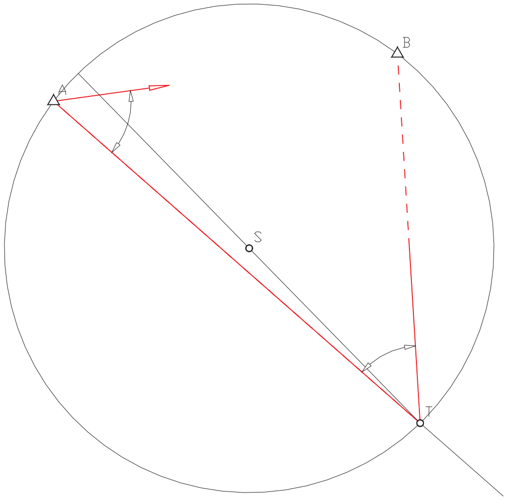


Slika 3: Pol zunanji, pol notranji urez; dane so zunanja smer s točke A ter notranji smeri na točki B in C.

Merilo kakovosti geometrije pol zunanjega, pol notranjega ureza je velikost kota $\angle$ATS (slika 3), ki mora biti čim bližje 0°. V tem primeru je presečni kot za določitev točke T blizu 90°. Število vseh možnih določitev koordinat nove točke s pol zunanjim, pol notranjim urezom je enako produktu števila vseh uporabnih smernih kotov in števila vseh uporabnih notranjih kotov:

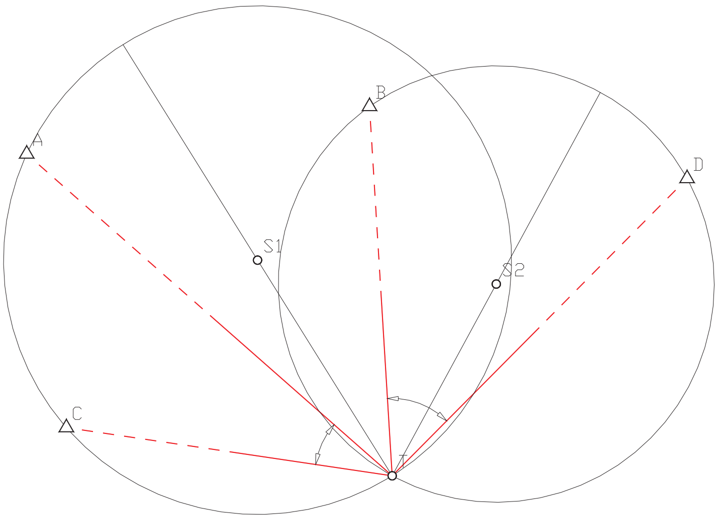
$$N = n_{sk} \cdot n_{nk} \leq n_{zs} \cdot \sum_{i=1}^{s} \binom{n_{ns_i}}{2}.$$

Poseben primer pol zunanjega, pol notranjega ureza je stranski urez. Stranski urez zahteva vsaj dve dani točki, pri čemer je ena tudi v vlogi orientacijske točke. Za izračun koordinat nove točke zadostujejo ena uporabna zunanja smer in dve uporabni notranji smeri, pri čemer ena izmed slednjih skupaj s prvo tvori obojestransko smer. Nova točka je določena s presekom premice in krožnice. Rešitev je enolična, vendar je lahko izrojena.



Slika 4: Stranski urez; dane so zunanja smer s točke A ter notranji smeri na točki A in B.

Merilo kakovosti geometrije stranskega ureza je velikost kota ∠ATS (slika 4), ki mora biti čim bližje 0°. V tem primeru je presečni kot za določitev točke T blizu 90°.



Slika 5: Posplošeni notranji urez; dana sta para notranjih smeri proti točkama A in C ter proti točkama B in D.

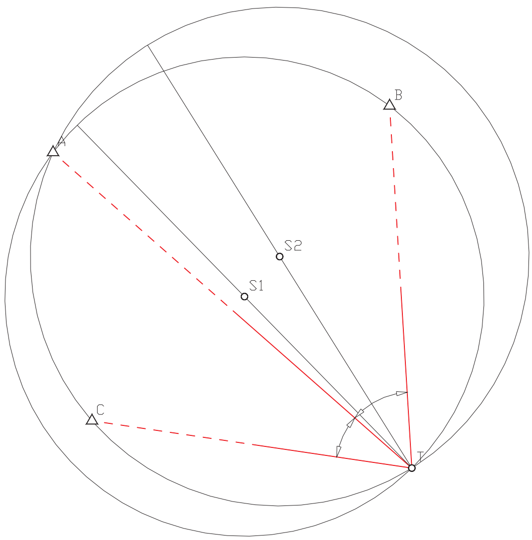
3.3 Posplošeni notranji urez

Posplošeni notranji urez zahteva štiri dane točke. Za izračun koordinat nove točke zadostujejo štiri uporabne notranje smeri iz iste skupine kotnih opazovanj, ali pa dve dvojici uporabnih notranjih smeri iz dveh različnih skupin kotnih opazovanj, pri čemer nobena dana točka za ti dve dvojici smeri ni skupna. Nova točka je določena s presekom krožnic. Izjemoma je določena s presekom premice in krožnice, če ležijo nova točka in eden izmed obeh parov danih točk na premici, ali pa celo s presekom premic, če leži nova točka v presečišču nosilk obeh parov danih točk. Rešitev je lahko enolična ali dvolična; lahko je tudi izrojena.

Merilo kakovosti geometrije posplošenega notranjega ureza je velikost kota $\angle$S1TS2 (slika 5), ki mora biti čim bližje 90°. Število vseh možnih določitev koordinat nove točke s posplošenim notranjim urezom je enako številu vseh uporabnih dvojic notranjih kotov:

$$N = n_{2nk} \leq \sum_{i=1}^{s}\left(\binom{n_{ns_i}}{3} + 3\cdot\binom{n_{ns_i}}{4}\right) + \sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=i+1}^{s}\left(\binom{n_{ns_i}}{2}\cdot\binom{n_{ns_j}}{2}\right).$$

Poseben primer posplošenega notranjega ureza je običajni notranji urez, ko sta oba notranja kota sosednja in ne zgolj sovršna, torej je eden izmed njunih krakov skupen. Običajni notranji urez zahteva tri dane točke. Za izračun koordinat nove točke zadostujejo tri uporabne notranje smeri iz iste skupine kotnih opazovanj, ali pa dve dvojici uporabnih notranjih smeri iz dveh različnih skupin kotnih opazovanj, pri čemer je ena dana točka za obe dvojici smeri skupna. Nova točka je določena s presekom krožnic. Izjemoma je določena s presekom premice in krožnice, če ležijo nova točka in dve izmed danih točk na premici. Rešitev je enolična, vendar je lahko izrojena.

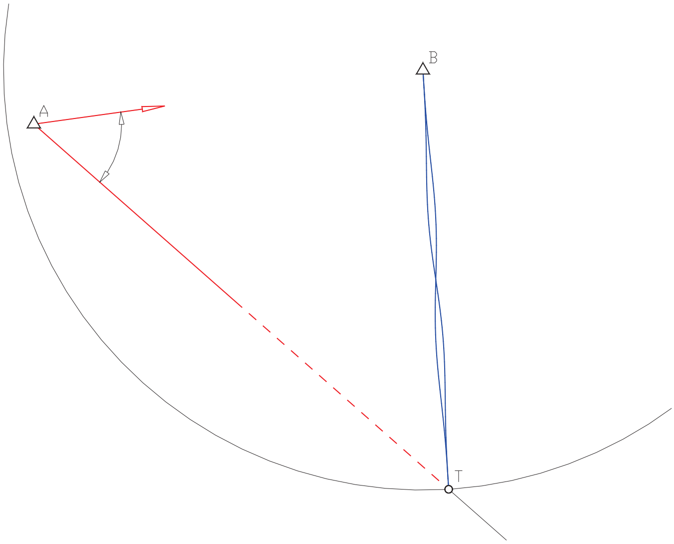


Slika 6: Običajni notranji urez; dane so notranje smeri proti točkam A, B in C; gre za primer slabih geometrijskih pogojev določitve.

Merilo kakovosti geometrije običajnega notranjega ureza je velikost kota $\angle$S1TS2 (slika 6), ki mora biti čim bližje 90°.

3.4 Pol zunanji urez, pol ločni presek

Pol zunanji urez, pol ločni presek zahteva vsaj dve dani točki, pri čemer je ena tudi v vlogi orientacijske točke. Za izračun koordinat nove točke zadostujeta ena uporabna dolžina in ena uporabna zunanja smer. Nova točka je določena s presekom premice in krožnice. Rešitev je lahko enolična ali dvolična; lahko je tudi izrojena.



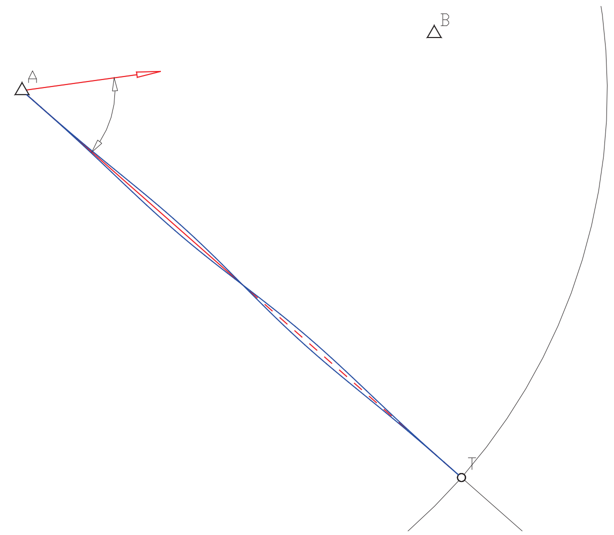
Slika 7: Pol zunanji urez, pol ločni presek; dani sta razdalja do točke B in zunanja smer s točke A.

Merilo kakovosti geometrije pol zunanjega ureza, pol ločnega preseka je velikost kota $\angle$ATB (slika 7), ki mora biti čim bližje 0°. V tem primeru je presečni kot za določitev točke T blizu 90°. Število vseh možnih določitev koordinat nove točke s pol zunanjim urezom, pol ločnim presekom je enako produktu števila vseh uporabnih smernih kotov in števila vseh uporabnih dolžin:

$$N = n_{sk} \cdot n_d \leq n_{zs} \cdot n_d .$$

Poseben primer pol zunanjega ureza, pol ločnega preseka je prva geodetska naloga, ki predstavlja polarno določitev nove točke. Prva geodetska naloga zahteva vsaj dve dani točki. Ena je zgolj v vlogi orientacijske točke. Za izračun koordinat nove točke zadostujeta ena uporabna dolžina in ena uporabna zunanja smer, in sicer z iste dane točke. Nova točka je določena s presekom premice in krožnice. Rešitev je vedno enolična in neizrojena.

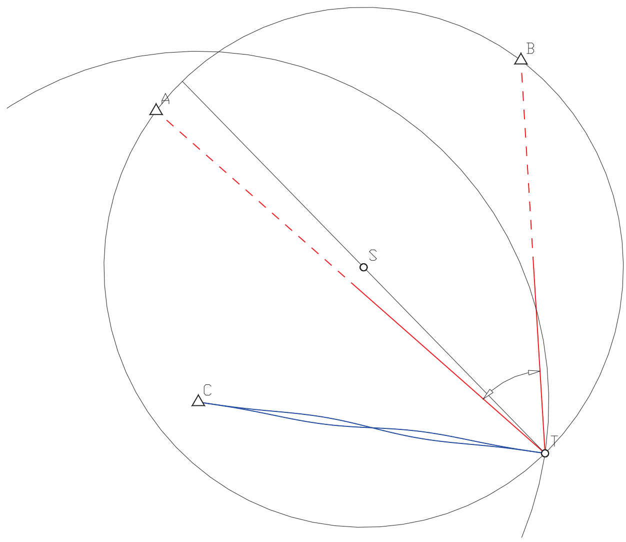
Kakovost določitve koordinat nove točke s stališča geometrije pri prvi geodetski nalogi ni vprašljiva (slika 8) – gre za izpolnitev merila optimalne geometrije pri pol zunanjem urezu, pol ločnem preseku.



Slika 8: Prva geodetska naloga; dani sta razdalja do točke A in zunanja smer z nje.

3.5 Pol notranji urez, pol ločni presek

Pol notranji urez, pol ločni presek zahteva dve ali tri dane točke. Za izračun koordinat nove točke zadostujejo dve uporabni notranji smeri iz iste skupine kotnih opazovanj in ena uporabna dolžina. Pri samo dveh danih točkah sovpadata točka, do katere je na voljo razdalja, in ena izmed notranjih smeri. Nova točka je določena s presekom krožnic. Izjemoma je določena s presekom premice in krožnice, če ležijo nova točka in dani točki, za kateri sta na voljo notranji smeri, na premici. Rešitev je lahko enolična ali dvolična; lahko je tudi izrojena.



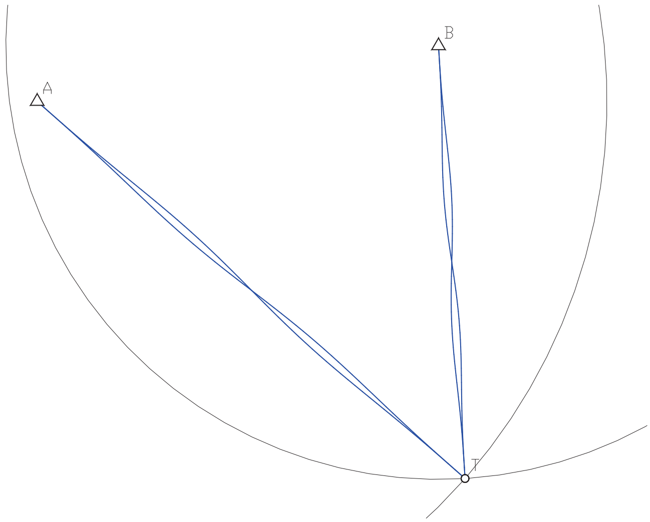
Slika 9: Pol notranji urez, pol ločni presek; dane so razdalja do točke C ter notranji smeri na točki A in B.

Merilo kakovosti geometrije pol notranjega ureza, pol ločnega preseka je velikost kota $\angle$CTS (slika 9), ki mora biti čim bližje 90°. Število vseh možnih določitev koordinat nove točke s pol notranjim urezom pol ločnim presekom je enako produktu števila vseh uporabnih dolžin in števila vseh uporabnih notranjih kotov:

$$N = n_d \cdot n_{nk} \le n_d \cdot \sum_{i=1}^{s} \binom{n_{ns_i}}{2}.$$

3.6 Ločni presek

Ločni presek zahteva dve dani točki. Za izračun koordinat nove točke zadostujeta dve uporabni dolžini. Nova točka je določena s presekom krožnic. Rešitev je dvolična in je lahko izrojena.



Slika 10: Ločni presek; dani sta razdalji do točk A in B.

Merilo kakovosti geometrije ločnega preseka je velikost kota $\angle$ATB (slika 10), ki mora biti čim bližje 90°. Število vseh možnih določitev koordinat nove točke z ločnim presekom je enako številu vseh kombinacij razreda 2 uporabnih dolžin (brez ponavljanja):

$$N = \binom{n_d}{2}.$$

3.7 Število vseh možnih določitev koordinat nove točke

Število vseh možnih določitev koordinat nove točke je seštevek možnih določitev po vseh navedenih metodah (podpoglavja 3.1–3.6):

$$N = \binom{n_{sk}}{2} + n_{sk} \cdot n_d + \binom{n_d}{2} + n_{nk} \cdot (n_{sk} + n_d) + n_{2nk}.$$

Če je tako na danih kot tudi na novi točki kvečjemu po ena skupina kotnih opazovanj, je število možnih določitev koordinat nove točke:

$$N = \binom{n_{zs}}{2} + n_{zs} \cdot n_d + \binom{n_d}{2} + \binom{n_{ns}}{2} \cdot (n_{zs} + n_d) + \binom{n_{ns}}{3} + 3 \cdot \binom{n_{ns}}{4}.$$

Število možnih določitev hitro narašča, če se povečujejo število uporabnih zunanjih smeri, število uporabnih notranjih smeri in število uporabnih dolžin za določitev nove točke. Če so v mreži merjene vse količine, so ta števila kar enaka številu danih točk[6] (n), s katerimi je določena nova točka. Število vseh možnih določitev koordinat nove točke je potem:

$$N = \frac{3 \cdot n^4 + 10 \cdot n^3 + 45 \cdot n^2 - 34 \cdot n}{24}.$$

Naraščanje predoločenosti nove točke v odvisnosti od števila danih točk, s katerimi je določena, je prikazano v preglednici 1. Gre za primere, ko so merjene vse smeri in vse dolžine v mreži.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u_{\max}$	2	6	9	12	15	18	21	24	27	30
$N_{\max}$	1	10	34	83	170	311	525	834	1263	1840

Preglednica 1: Največje število uporabnih količin ($u_{\max}$) in vseh določitev nove točke ($N_{\max}$) v odvisnosti od števila razpoložljivih danih točk (n).

Zaradi izrojenosti nekaterih rešitev se lahko pojavi razlika med predvidenim številom določitev nove točke in dejanskim številom določitev nove točke – slednje je lahko manjše.

4 VAREN IZRAČUN KOORDINAT NOVE TOČKE

Vprašanje varnosti izračuna koordinat se tu nanaša na možnost:

- da koordinat točke sploh ne bi bilo mogoče izračunati,
- da bi bili izračunani koordinati točke popolnoma napačni ali pa
- da bi bili izračunani koordinati točke zelo nenatančni.

Razlogi za morebitne težave pri izračunu približnih koordinat novih točk so predvsem:

- pojav grobih pogreškov,
- metode, ki dajo dvolične rešitve, in
- slaba pogojenost ali izrojenost rešitev.

Grobi pogrešek se največkrat pojavi med opazovanji, lahko pa tudi med koordinatami danih točk. Osnovna ideja tako imenovane varne postopne določitve približnih koordinat je:

- varen izbor prave rešitve za posamezno dvolično rešitev in

[6] *Pri tem niso upoštevane dane točke, ki nastopajo le v vlogi orientacijskih točk.*

- varen izbor tipične rešitve iz niza vseh rešitev za posamezno novo točko.

V obeh fazah je ključna uporaba robustne statistike. Varnost določitve posamezne rešitve je povezana z načinom (metodo) določitve, z geometrijskimi lastnostmi mreže v danem primeru ter seveda z morebitno prisotnostjo grobih pogreškov. Same metode določitve so glede varnosti uporabe ovrednotene v preglednici 2.

		Pol zunanji, pol notranji urez		Notranji urez		Pol zunanji urez, pol ločni presek			
	Zunanji urez	- splošni primer	Stranski urez	- posplošeni	- običajni	- splošni primer	Prva geodetska naloga	Pol notranji urez, pol ločni presek	Ločni presek
Neizrojenost	NE	NE	NE	NE	NE	NE	DA	NE	NE
Enoličnost	DA	NE	DA	NE	DA	NE	DA	NE	NE
Vrsta preseka	×	∅	∅	⚭	⚭	∅	∅	⚭	⚭
Razred	II.	III.		III.		III.	I.	III.	III.

Preglednica 2: Ovrednotenje varnosti posameznih metod določitve koordinat točk.

Oznake za vrsto preseka krivulj za določitev točke v preglednici 2 pomenijo:

× presek dveh premic,

∅ presek premice in krožnega loka ali krožnice ter

⚭ presek dveh krožnih lokov ali krožnic.

Metode določitve so glede na navedeni meri varnosti uvrščene v tri razrede:

- najprimernejša metoda (I.) je prva geodetska naloga, kjer je rešitev vedno enolična in neizrojena;
- druga najprimernejša metoda (II.) je zunanji urez, kjer je rešitev enolična, vendar je lahko izrojena;
- manj primerne metode (III.) so vse ostale metode, kjer so rešitve včasih enolične, drugič dvolične (pol zunanji, pol notranji urez, posplošeni notranji urez, splošni primer pol zunanjega ureza, pol ločnega preseka in pol notranji urez, pol ločni presek) ali pa so rešitve vedno dvolične (ločni presek), tudi tu pa so lahko rešitve še geometrijsko neugodne (slaba pogojenost) ter izrojene.

Pojem »slaba pogojenost« se nanaša na rešitev, pridobljeno ob neugodni geometrijski razporeditvi točk. Kakovost samih opazovanj tu ni upoštevana (npr. v obliki uteži opazovanj). Dobra pogojenost rešitve pomeni, da je presečni kot krivulj, s katerimi sta določeni koordinati nove točke, čim bližje 90°.

Pojem »izrojenost« se nanaša na primere, ko koordinat nove točke sploh ni mogoče izračunati. Pri zelo slabi pogojenosti je razlog za to lahko že manjši slučajni pogrešek (v okviru natančnosti opazovanj), ki povzroči deljenje z nič ali korenjenje negativnega števila – krivulji za določitev točke sta mimobežni.

5 ALGORITEM ROBUSTNE DOLOČITVE PRIBLIŽNIH KOORDINAT

Določitev koordinat novih točk v mreži je postopna. V vsakem koraku so določene koordinate ene nove točke. Pri tem so vse že določene nove točke obravnavane, kot da gre za dane točke. Vsak korak postopka vključuje:

- preverjanje določljivosti (preostalih) novih točk v mreži,
- iskanje najbolj predoločene nove točke med njimi,
- izbor tipične rešitve za najbolj predoločeno novo točko ter
- spremembo statusa novodoločene točke – ta postane enakovredna ostalim danim točkam.

Nova točka je določljiva, če ustreza merilom glede števila in vrste opazovanj za določitev po vsaj eni izmed razpoložljivih metod. Kot »najbolj predoločena« nova točka je obravnavana točka, ki je določljiva na največ različnih načinov. Če je takšnih točk več, sta upoštevani še dodatni merili:

- določljivost s prvo geodetsko nalogo (najprimernejša metoda) na čim krajši razdalji do dane točke in
- določljivost z zunanjim urezom (druga najprimernejša metoda) na čimveč različnih načinov.

V večini primerov, ko je hkrati po več najbolj predoločenih točk, so te točke določljive na en sam način (npr. v poligonu). Obe dodatni merili torej predvsem skrbita za enoličnost rešitve. Postopek določitve približnih koordinat izbrane najbolj predoločene nove točke (tj. izbor tipične rešitve) je:

- izračun koordinat izbrane točke na vse možne načine;
- poenoličenje morebitnih dvoličnih rešitev;
- izbor tipične rešitve ob upoštevanju uteži posameznih rešitev.

Za množico vseh možnih rešitev izbrane točke velja, da:

- lahko vsebuje enolične in dvolične rešitve,
- lahko vsebuje različno (dobro in slabo) pogojene rešitve,
- izrojene rešitve algoritem izloči.

---

[7] Primer mreže, kjer so vse rešitve vedno dvolične, je trilateracijska mreža; edino orodje za izračun koordinat točk je ločni presek.

[8] Za par rešitev je mogoče izvesti poenoličenje tudi, če sta obe rešitvi dvolični; vzeti sta tisti dve točki iz posameznih rešitev, ki sta si najbližje, tj. na najkrajši razdalji.

Poenoličenje rešitev se izvede z morebitnimi enoličnimi rešitvami, če predstavlja delež slednjih vsaj polovico vseh rešitev. V tem primeru je najprej izmed enoličnih rešitev izbrana tipična rešitev. Na podlagi te so določene prave rešitve v dvoličnih rešitvah. Če je dvoličnih več kot polovica izmed vseh rešitev,[7] se izvede najprej poenoličenje vsake druge rešitve – po parih,[8] nadaljnji postopek pa je enak. Če je nova točka določljiva na en sam način in je rešitev dvolična, je odločitev prepuščena operaterju (gre za ugibanje). Če ne gre v prvo, gre v drugo.

Za izbor tipične rešitve je uporabljena ena izmed opisanih mer lokacije. Uteži posameznih rešitev so pri tem odvisne od njihove pogojenosti. Rešitev z ugodnejšo geometrijo je tista, za katero je presečni kot krivulj bližje optimalnemu, tj. 90°. Uteži, uporabljene za statistično ocenjevanje, so določene z

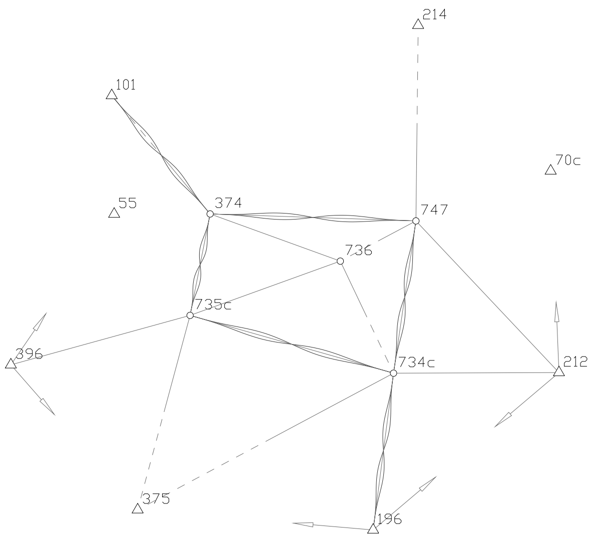
$$u = \sin\left(pk\right),$$

kjer je *pk* presečni kot krivulj za določitev koordinat nove točke. Uteži posameznih rešitev so torej z intervala [0, 1]. Dejstvo, da so nekatere rešitve tudi medsebojno stohastično odvisne, saj je lahko isto opazovanje uporabljeno v več rešitvah, ni upoštevano.

Algoritem za izračun približnih koordinat točk vključuje tudi izvedbo redukcij opazovanj, in sicer po merilih obdelave triangulacijskih mrež I. reda (Berk, 1996, 39–45). Ker so za izvedbo (nekaterih) redukcij potrebne tudi približne koordinate točk, je izračun izveden v dveh ponovitvah – natančne redukcije opazovanj so določene v drugi ponovitvi.

6 PREIZKUS PREDSTAVLJENEGA POSTOPKA

V prispevku predstavljeni algoritem za določitev približnih koordinat točk v horizontalni geodetski



Slika 11: Preizkusna kotno-dolžinska mreža.

mreži je vgrajen v programski paket TRIM (Berk in Janežič, 1995), in sicer v programski modul TRIM Izračuni (Berk, 2008). Za preizkus robustnosti postopka je bila izbrana kotno-dolžinska mreža na sliki 11.

Mrežo (slika 11) tvori pet novih točk (374, 734c, 735c, 736 in 747) in osem danih točk. V mreži je 38 opazovanj, in sicer šest dolžinskih in 32 kotnih. Slednja so izvedena na osmih stojiščih (s po eno skupino opazovanj). V mreži je tako osem orientacijskih neznank in $5 \times 2 = 10$ koordinatnih neznank, skupaj torej 18 neznank. Nadštevilnih opazovanj je 20, povprečno število nadštevilnosti pa je $20 / 38 \approx 0{,}54$. Gre za mrežo, ki zadošča (najosnovnejšim) merilom dobrega načrtovanja (npr. Caspary, 1988, 91).

Za preizkus robustnosti postopka določitve približnih koordinat točk v mreži je bila uporabljena simulacija Monte Carlo. Namen preizkusa je bil (na obravnavanem primeru) oceniti uspešnost postopka v odvisnosti od števila grobih pogreškov oziroma deleža grobih pogreškov med opazovanji. Naključno je bilo generiranih po 25 primerov mrež s po eno, dvema, tremi in štirimi grobimi pogreški.[9] Preverjena je bila uspešnost posameznih izračunov.[10] Vloga generatorja naključnih števil je bila določitev zaporednih številk grobo pogrešenih opazovanj. Opazovanje z ustrezno zaporedno številko je bilo spremenjeno, in sicer smeri za ± 90°, dolžine pa za ± 50 %. Za generiranje psevdonaključnih števil na intervalu [1, 38] je bil uporabljen Park-Millerjev generator (Press in sod., 1992, 279). Vsi preizkusi so bili izvedeni za vse tri obravnavane pristope k ocenjevanju lokacije:

- aritmetične sredine in težiščne točke – rezultati so v preglednici 3;
- mediane in središčne točke – rezultati so v preglednici 4;
- modusa in gostiščne točke – rezultati so v preglednici 5.

V vseh treh primerih gre za približke osnovnih mer, upoštevan je namreč dodatni pogoj, da gre za vrednost oziroma točko iz dane množice. Slednje precej izboljša tudi robustnost tako prirejene aritmetične sredine in težišča. Osnovne cenilke so uporabljene za določitev srednjih vrednosti (npr. srednjih orientacijskih kotov), cenilke lokacije na ravnini pa za določitev tipične rešitve iz množice vseh rešitev za posamezno točko v mreži. Za slednje so upoštevane tudi uteži posameznih rešitev.

Št. grobih pogr.	% grobih pogr.	Št. uspelih primerov	% uspelih primerov
1 (od 38)	2,6	34 (od 38)	89,5
2 (od 38)	5,3	18 (od 25)	72,0
3 (od 38)	7,9	18 (od 25)	72,0
4 (od 38)	10,5	16 (od 25)	64,0

Preglednica 3: Uspešnost določitve približnih koordinat ob uporabi aritmetične sredine in težiščne točke.

[9] *Izjema so primeri s po enim samim grobim pogreškom, kjer je bilo preverjenih kar vseh 38 možnosti.*

[10] *Kot uspešen je obravnavan tisti izračun, ki kljub prisotnosti grobih pogreškov da dobre približne koordinate vseh novih točk v mreži – torej brez iskanja in odpravljanja teh grobih pogreškov.*

Št. grobih pogr.	% grobih pogr.	Št. uspelih primerov	% uspelih primerov
1 (od 38)	2,6	38 (od 38)	100,0
2 (od 38)	5,3	25 (od 25)	100,0
3 (od 38)	7,9	23 (od 25)	92,0
4 (od 38)	10,5	21 (od 25)	84,0

Preglednica 4: Uspešnost določitve približnih koordinat ob uporabi mediane in središčne točke.

Št. grobih pogr.	% grobih pogr.	Št. uspelih primerov	% uspelih primerov
1 (od 38)	2,6	38 (od 38)	100,0
2 (od 38)	5,3	25 (od 25)	100,0
3 (od 38)	7,9	25 (od 25)	100,0
4 (od 38)	10,5	24 (od 25)	96,0

Preglednica 5: Uspešnost določitve približnih koordinat ob uporabi modusa in gostiščne točke.

Izvedena je še primerjava odstopanj dobljenih približnih koordinat od dokončnih koordinat točk v mreži, določenih z izravnavo opazovanj po metodi najmanjših kvadratov. V preglednici 6 so navedene absolutne vrednosti odstopanj približnih koordinat točk od dokončnih koordinat. Enota odstopanj je standardni odklon posameznih koordinat točk, ocenjen z izravnavo.

Uporabljeni meri lokacije	Odstopanje približnih od dokončnih koordinat	
	- povprečno	- največje
aritmetična sredina in težiščna točka	1,04 σ	2,89 σ
mediana in središčna točka	0,67 σ	1,27 σ
modus in gostiščna točka	0,43 σ	1,00 σ

Preglednica 6: Odstopanja približnih od dokončnih koordinat ob uporabi različnih mer lokacije za izračun približnih koordinat.

Iz obravnavanega praktičnega primera sledi, da je predlagana definicija tehtanega večvariantnega modusa oziroma gostiščne točke najbolj učinkovita mera lokacije (med preizkušenimi). To velja tako glede robustnosti kot glede dosežene natančnosti približnih koordinat. Za preizkusno mrežo je postopek praktično neobčutljiv za prisotnost tudi treh grobih pogreškov hkrati, natančnost dobljenih koordinat pa je reda velikosti standardnih odklonov koordinat, ocenjenih iz izravnave mreže.

7 SKLEP

Predstavljeni postopek določitve približnih koordinat točk v horizontalni geodetski mreži temelji na izračunu koordinat posamezne točke na vse možne načine in ocenjevanju lokacije iz tako dobljene množice točk. Cilj je čim večja zanesljivost dobljenih koordinat, zato je poudarek na robustnosti postopka. Preizkušene so tri mere lokacije, in sicer posplošitve aritmetične sredine, mediane in modusa. Rezultati so najboljši ob uporabi gostiščne točke (posplošitve modusa), katere definicija je podana v prispevku. Približne koordinate točk v mreži so določene z veliko zanesljivostjo, in sicer tudi v primerih, ko je v mreži po več grobih pogreškov. Ista cenilka da tudi najnatančnejše koordinate točk.

Grobim pogreškom se algoritem izogne, vendar jih ne izloči. Kakovostne metode odkrivanja grobih pogreškov namreč temelje na rezultatih izravnave, zato je ta naloga prepuščena nadaljnji obdelavi mreže. Algoritem ne vsebuje nobenih meril za razmejitev med večjimi odstopanji in grobimi pogreški (npr. velikosti dovoljenih odstopanj), zato ni vezan niti na natančnost izvedbe meritev, niti na velikost mreže, niti na red mreže (oz. dolžine stranic mreže). Primeren je tako za mikromreže kot tudi za mrežo I. reda.

Preizkus robustnosti je sicer predstavljen na enem samem primeru, vendar je bil izveden na več različnih tipih mrež. Poudariti je treba pomen kakovostnega načrtovanja mrež – pomembna je predoločenost točk v mreži (nadštevilna opazovanja), saj sicer uporaba robustne statistike ni možna. Hitra in zanesljiva določitev približnih koordinat točk v horizontalni geodetski mreži ponuja tudi možnost hkratne obdelave opazovanj iz mreže za izmero detajla in opazovanj iz izmere detajla. To prinaša večjo natančnost določitve koordinat detajlnih točk kot tudi možnost ocene njihove natančnosti z uporabo zakona o prenosu varianc in kovarianc.

Literatura in viri:

Bajaj, C. (1988). The Algebraic Degree of Geometric Optimization Problems. Discrete & Computational Geometry, 3(1), 177–191.

Berk, S., Janežič, M. (1995). TRIM – program za izravnavo triangulacijskih mrež. Geodetski vestnik, 39(4), 271–279.

Berk, S. (1996). Izravnava in statistična analiza temeljnih horizontalnih geodetskih mrež. Diplomska naloga. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Berk, S. (2008). Programski paket TRIM: TRIM Izračuni, različica 1.0. Uporabniški priročnik.

Caspary, W. F. (1988). Concepts of Network and Deformation Analysis. 2. (popravljeni) ponatis. Kensington: The University of New South Wales.

Chandrasekaran, R., Tamir, A. (1990). Algebraic Optimization: The Fermat-Weber Location Problem. Mathematical Programming, 46(1–3), 219–224.

Grigillo, D., Stopar, B. (2003). Metode odkrivanja grobih pogreškov v geodetskih opazovanjih. Geodetski vestnik, 47(4), 387–403.

Kärkkäinen, T., Äyrämö, S. (2005). On Computation of Spatial Median for Robust Data Mining. Proceedings of the 6th Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimisation and Control with Applications to Industrial and Societal Problems (EUROGEN 2005). Technische Universität München.

Košmelj, B., Arh, F., Doberšek - Urbanc, A., Ferligoj, A., Omladič, M. (1993). Statistični terminološki slovar. 1. izdaja. Ljubljana: Statistično društvo Slovenije in Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Lopuhaä, H. P., Rousseeuw, P. J. (1991). Breakdown Points of Affine Equivariant Estimators of Multivariate Location and Covariance Matrices. The Annals of Statistics, 19(1), 229–248.

Mihailović, K. (1992). Geodezija: Izravnanje geodetskih mreža. Beograd: Naučna knjiga in Građevinski fakultet.

Milasevic, P., Ducharme, G. R. (1987). Uniqueness of the Spatial Median. The Annals of Statistics, 15(3), 1332–1333.

Mishra, S. K. (2004). Median as a Weihted Arithmetic Mean of All Sample Observations. Economics Bulletin, 3(18), 1–6.

Mouratidis, K., Papadias, D., Papadimitriou, S. (2005). Medoid Queries in Large Spatial Databases. Proceedings of the 9th International Symposium on Spatial and Temporal Databases (Lecture Notes in Computer Science): Advances in Spatial and Temporal Databases. New York: Springer-Verlag.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (1992). Numerical Recipies in C: The Art of Scientific Computing. 2. izdaja. Cambridge University Press.

Sager, T. W. (1979). An Iterative Method for Estimating a Multivariate Mode and Isopleth. Journal of the American Statistical Association, 74(366), 329–339.

Smoltczyk, U. (2002). Geotechnical Engineering Handbook. Fundamentals. Berlin: Ernst & Sohn Verlag.

Prispelo v objavo: 30. december 2009
Sprejeto: 4. marec 2010

Sandi Berk, univ. dipl. inž. geod.
Geodetski inštitut Slovenije, Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana
e-pošta: sandi.berk@gis.si