NEKA VERIŽNICA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 34A05, 49J05, 49S05, 53A04

V prispevku dokažemo, da obstajajo v polarni obliki zapisane ravninske krivulje, katerih dolžina med polarno osjo in poljubno točko je enaka produktu polarnega kota in polarnega polmera te točke. Zgleda za take krivulje sta krožnica in posebna vrsta prave verižnice.

A CATENARY

In the article it is proved that there exist planar curves whose length between the polar axis and any point is equal to the product of the polar angle and polar radius of this point. Examples of such curves are the circle and a special kind of the catenary.

Uvod

Pozorni bralec v članku [2], ki obravnava tako imenovane *prave verižnice*, med vsemi njenimi primeri opazi krivuljo, ki ima v polarnih koordinatah precej preprosto obliko. Izraža se namreč kar z racionalno funkcijo polarnega kota, medtem ko v preostalih nastopajo transcendentne funkcije. Verižnica, ki jo v prispevku obravnavamo, pa ima še neko posebno lastnost. Njen naravni parameter $s(\varphi)$ je namreč enak produktu polarnega kota φ in polarnega polmera $r(\varphi)$ za vsak φ z nekega intervala $(-\omega, \omega)$. Tako lastnost ima tudi krožnica, če pol polarnega sistema postavimo v njeno središče. Ogledali si bomo, kako poiščemo še druge take krivulje. Nekaj več o pravi verižnici je napisanega v zadnjem delu prispevka, podrobnosti pa najdemo v [2, 5].

Ravninske krivulje pogosto podajamo analitično v polarni obliki. Potem ko smo v ravnini izbrali točko O za pol in polarno os p, to je poltrak s krajiščem v O, je točka na krivulji določena s polarnim kotom φ in polarnim polmerom r, ki je vselej nenegativno število. Polarni polmer je razdalja točke na krivulji od pola, polarni kot pa merimo od polarne osi do polarnega polmera v pozitivni ali negativni smeri. V polarni obliki podana krivulja je določena z nenegativno odsekoma zvezno odvedljivo funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$. Pri tem je seveda $\alpha < \beta$. Ločno dolžino $\sigma[\alpha, \beta]$, ki ustreza spreminjanju kota φ po intervalu $[\alpha, \beta]$, izrazimo (glej npr. [6]) z integralom

$$\sigma[\alpha, \beta] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi.$$

Če vpeljemo za poljuben kot φ nekega intervala, ki vsebuje 0, tako imenovani *naravni parameter*

$$s(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi, \tag{1}$$

ki je pozitiven za pozitivne φ, negativen za negativne φ in enak 0 za $\varphi = 0$, potem smo na krivulji definirali naravni koordinatni sistem z izhodiščem v točki T, ki ustreza kotu $\varphi = 0$. Točki P, ki ustreza kotu φ, priredimo na krivulji naravno koordinato $s(\varphi)$. Po loku krivulje je P oddaljena od T za $|s(\varphi)|$. Za pozitivne φ imajo ustrezne točke pozitivno naravno koordinato s, za negativne φ pa negativno.

Nenavadna krivulja

Za krožnico, ki ima središče v polu O, je $r(\varphi) = r_0$, kjer je r_0 pozitivna konstanta, polmer krožnice. Za lok seveda dobimo tedaj po znani formuli $\sigma[\alpha, \beta] = r_0(\beta - \alpha)$ in za naravni parameter $s(\varphi) = r_0\varphi$. Za krožnico torej lahko zapišemo

$$s(\varphi) = \varphi r(\varphi). \tag{2}$$

Ali ima še kakšna krivulja, ki je dana v polarni obliki, lastnost (2)? Pri katerih krivuljah je naravni parameter $s(\varphi)$ enak produktu kota φ in polarnega polmera $r(\varphi)$ za vsak φ z nekega intervala $(-\omega, \omega)$, na katerem je funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ nenegativna in zvezno odvedljiva? Spoznali bomo, da obstaja poleg krožnice še ena taka krivulja, obstaja pa tudi zlepek, ki ima lastnost (2). Če pa vztrajamo le pri zveznosti funkcije $\varphi \mapsto r(\varphi)$ in se odpovemo zveznosti njenega odvoda v končno mnogo točkah, pa je takih krivulj nešteto. Po potrebi v takih primerih v krajiščih intervalov jemljemo za odvod ustrezni stranski odvod (levi, desni).

Poiščimo tako nenegativno zvezno odvedljivo funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$, za katero velja (2). Veljati mora enakost

$$\varphi r(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi$$

na nekem intervalu $(-\omega, \omega)$. Iz te zahteve dobimo diferencialno enačbo

$$r(\varphi) + \varphi r'(\varphi) = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}. \tag{3}$$

Pridružimo ji še začetni pogoj $r(0) = r_0 > 0$. V poštev pridejo rešitve $r(\varphi)$, za katere je izpolnjen pogoj

$$r(\varphi) + \varphi r'(\varphi) = [\varphi r(\varphi)]' \geq 0.$$

Po kvadriranju in preurejanju členov dobimo iz (3) diferencialno enačbo

$$r'(\varphi)[(1-\varphi^2)r(\varphi)]' = 0, \tag{4}$$

ki jo bomo reševali pri začetnem pogoju $r(0) = r_0 > 0$. V enačbi sta faktorja funkciji kota φ in njun produkt je lahko nič, čeprav faktorja nista identično enaka nič na intervalu $(-1, 1)$. Enačba pri začetnem pogoju ima zvezno odvedljivi rešitvi

$$r(\varphi) = r_0 \quad \text{in} \quad r(\varphi) = \frac{r_0}{1-\varphi^2}$$

na intervalu $(-1, 1)$, ki pa nista edini. Zvezno odvedljiva rešitev je na primer tudi funkcija, dana s predpisom

$$r_1(\varphi) = \begin{cases} r_0, & -1 < \varphi < 0, \\ \dfrac{r_0}{1-\varphi^2}, & 0 \le \varphi < 1. \end{cases}$$

Taka rešitev je tudi funkcija $\varphi \mapsto r_1(-\varphi)$. Interval $(-1, 1)$ lahko ali na levo ali na desno stran tudi podaljšamo, če izraz $1/(1-\varphi^2)$ to dopušča. S tem morda nismo našli vseh rešitev. Kolobar vseh zvezno odvedljivih funkcij na intervalu $(-1, 1)$ ima namreč delitelje niča. To pomeni, da v njem obstajata funkciji f_1 in f_2, ki nista na $(-1, 1)$ identično enaki 0, pa vendar je na $(-1, 1)$ njun produkt identično enak 0. Celo kolobar poljubno mnogokrat odvedljivih funkcij na vsej realni osi je tak. Funkciji g_1 in g_2, dani s predpisoma

$$g_1(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \le 0, \\ e^{-1/\varphi^2}, & \varphi > 0, \end{cases} \quad \text{in} \quad g_2(\varphi) = \begin{cases} e^{-1/\varphi^2}, & \varphi < 0, \\ 0, & \varphi \ge 0, \end{cases}$$

sta definirani na vsej realni osi, neničelni in imata povsod vse odvode, njun produkt pa je povsod nič.

Rešitev enačbe (4) bi bila potem tudi funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$, ki bi pri začetnem pogoju $r(0) = r_0$ hkrati rešila enačbi

$$r'(\varphi) = f_1(\varphi) \quad \text{in} \quad [(1-\varphi^2)r(\varphi)]' = (1-\varphi^2)r'(\varphi) - 2\varphi r(\varphi) = f_2(\varphi),$$

pri čemer sta f_1 in f_2 poljubni zvezni funkciji, ki nista na intervalu $(-1, 1)$ identično enaki 0, toda njun produkt je tam identično enak 0. Z integracijo sicer takoj izračunamo:

$$r(\varphi) = r_0 + \int_0^\varphi f_1(\phi)\,d\phi \quad \text{in} \quad r(\varphi) = (1-\varphi^2)^{-1}(r_0 + \int_0^\varphi f_2(\phi)\,d\phi).$$

Ker pa je $r'(0) = f_1(0) = f_2(0)$ in $f_1(0)f_2(0) = 0$, mora veljati $f_1(0) = f_2(0) = 0$, kar je v nasprotju s poljubnostjo funkcij f_1 in f_2.

Če bi za f_1 in f_2 izbrali vnaprej poljubni prej opisani funkciji, za kateri sicer velja $f_1(0) = f_2(0) = 0$, bi ugotovili, da obstaja tak interval $\mathcal{J}$, ki leži ali na intervalu $(-1, 0)$ ali na intervalu $(0, 1)$, tako da je na $\mathcal{J}$ ena od funkcij f_1 in f_2 različna od nič, ena pa identično enaka nič. Reševanje nas spet pripelje v nasprotje s poljubnostjo funkcij f_1 in f_2.

Da bi se izognili nadaljnjim zapletom, bomo zvezno odvedljive rešitve enačbe (4) iskali med funkcijami, ki so analitične v točki 0, ker nas rešitve naloge zaradi začetnega pogoja $r(0) = r_0$ zanimajo ravno v okolici te točke.

Po [1, 3] je realna ali kompleksna funkcija $\varphi \mapsto f(\varphi)$ (realno) analitična v točki φ_0, če je definirana na odprtem intervalu, ki vsebuje točko φ_0, in če jo lahko na intervalu $(\varphi_0 - \omega, \varphi_0 + \omega)$ za neki $\omega > 0$ zapišemo kot konvergentno potenčno vrsto

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi - \varphi_0)^n.$$

Taka funkcija ima na intervalu $(\varphi_0 - \omega, \varphi_0 + \omega)$ odvode poljubnega reda, ki so tudi analitične funkcije, in za koeficiente a_n, ki so realna ali kompleksna števila, velja formula:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\varphi_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pravimo, da je funkcija $\varphi \mapsto f(\varphi)$ analitična na odprtem intervalu $\mathcal{I}$, če je analitična v vsaki točki φ_0 tega intervala. Temu dodajmo še pomembno lastnost. Če je funkcija $\varphi \mapsto f(\varphi)$ analitična v točki φ_0, potem je analitična tudi na nekem dovolj majhnem odprtem intervalu, ki vsebuje φ_0. Analitična funkcija, ki ima vse koeficiente a_n enake 0, je ničelna funkcija. Identično je enaka 0 na poljubnem odprtem intervalu, ki vsebuje φ_0.

Vse funkcije, ki so analitične na odprtem intervalu $\mathcal{I}$, sestavljajo komutativen kolobar, ki nima deliteljev niča, kar je dokazano na primer v [1]. Tak kolobar imenujemo celi kolobar ali integritetno polje. To pomeni, da je produkt dveh funkcij tega kolobarja ničelna funkcija samo takrat, ko je vsaj ena od teh funkcij ničelna funkcija.

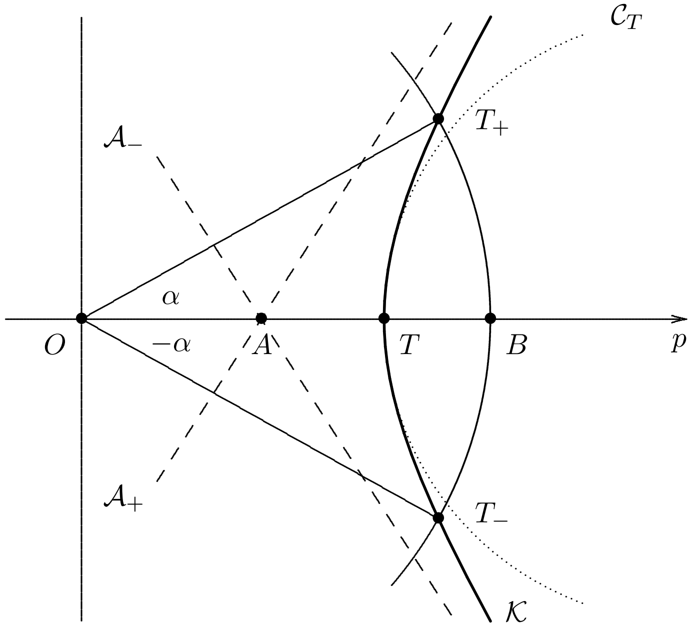
Če v točki 0 analitična funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ reši naš problem iskanja krivulje z lastnostjo (2), potem sta oba faktorja v enačbi (4) očitno tudi analitični funkciji v točki 0 in enačba razpade na dve:

$$r'(\varphi) = 0 \quad \text{in} \quad [(1 - \varphi^2)r(\varphi)]' = 0.$$

Njuni v točki 0 analitični rešitvi, ki zadoščata začetnemu pogoju $r(0) = r_0$, sta

$$r(\varphi) = r_0 \quad \text{in} \quad r(\varphi) = \frac{r_0}{1 - \varphi^2} = r_0(1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \ldots), \quad -1 < \varphi < 1. \tag{5}$$

Prva rešitev, $r(\varphi) = r_0$, predstavlja krožni lok s središčem v polu, kar smo pričakovali, druga rešitev, $r(\varphi) = r_0/(1 - \varphi^2)$, pa da bolj zapleteno krivuljo $\mathcal{K}$, ki ima asimptoto z naklonskim kotom ± 1 glede na polarno os (slika 1).



Slika 1. Prava simetrična verižnica.

Krivulja $\mathcal{K}$ (slika 1), ki ima v polarnih koordinatah drugo enačbo v (5), je lep zgled, pri katerem se nam posreči izračunati ločno dolžino neposredno z uporabo formule (1). Dobimo namreč

$$\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} = r_0 \frac{1+\varphi^2}{(1-\varphi^2)^2} = r_0 \left(\frac{\varphi}{1-\varphi^2}\right)'.$$

Zato je za (5):

$$\sigma[\alpha, \beta] = r_0 \left(\frac{\beta}{1-\beta^2} - \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\right), \quad -1 < \alpha \leq \beta < 1.$$

V posebnem primeru je

$$\sigma[-\alpha, \alpha] = \frac{2r_0\alpha}{1-\alpha^2} = 2r(\alpha)\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

kar pomeni, da je ločna dolžina na krivulji $\mathcal{K}$ med točkama T_- in T_+ enaka dolžini najkrajšega krožnega loka polmera $r(\alpha)$ s središčem v polu O med tema dvema točkama.

Polu O je na krivulji $\mathcal{K}$ najbližja točka T, ki ima polarni polmer r_0. Ploščino $S(\alpha)$ izseka, ki je omejen s poltrakovoma $\varphi = -\alpha$, $\varphi = \alpha$ in krivuljo $\mathcal{K}$, izračunamo s splošno formulo

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Če upoštevamo sodost funkcije pod integralskim znakom, dobimo najprej

$$S(\alpha) = r_0^2 \int\limits_{0}^{\alpha} \frac{d\varphi}{(1-\varphi^2)^2},$$

nato pa z razvojem na delne ulomke in integracijo še

$$S(\alpha) = r_0^2 \left[\frac{\varphi}{2(1-\varphi^2)} - \frac{1}{4}\ln\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right]\Bigg|_0^{\alpha}.$$

Rezultat še nekoliko preoblikujemo in nazadnje dobimo:

$$S(\alpha) = \frac{r_0^2}{4}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} - \ln\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right), \quad 0 \le \alpha < 1.$$

Ukrivljenost $\kappa(\varphi)$ polarno podane krivulje je v točki, ki ustreza polarnemu kotu φ, dana s splošnim izrazom (podrobnosti so npr. v [6], stran 448)

$$\kappa(\varphi) = \frac{r(\varphi)r''(\varphi) - r^2(\varphi) - 2r'^2(\varphi)}{\sqrt{(r^2(\varphi) + r'^2(\varphi))^3}}.$$

Po daljšem računu dobimo za obravnavano krivuljo $\mathcal{K}$ razmeroma preprost izraz

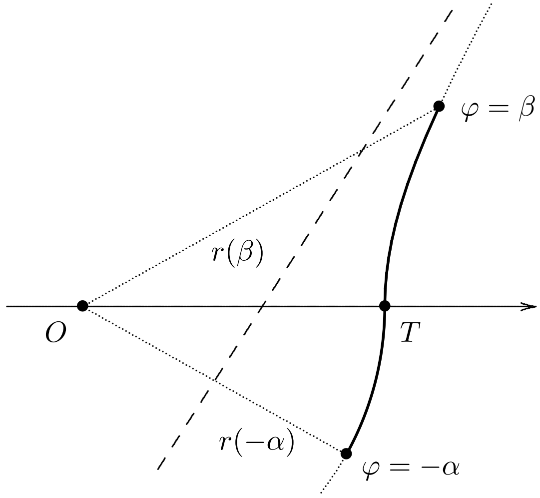
$$\kappa(\varphi) = \frac{(1-\varphi^2)^3}{r_0(1+\varphi^2)^2},$$

za krivinski polmer v temenu T pa $\varrho(0) = 1/\kappa(0) = r_0$. Pritisnjena krožnica $\mathcal{C}_T$ na $\mathcal{K}$ v temenu T ima torej polmer r_0. Krivulja $\mathcal{K}$ ima asimptoti $\mathcal{A}_\pm$, ki sekata polarno os pod kotoma ± 1 v točki A s polarnim polmerom $r_0/(2\sin 1)$.

Iz rešitev $r(\varphi) = r_0$ in $r(\varphi) = r_0/(1-\varphi^2)$, $-1 < \varphi < 1$, diferencialne enačbe (3) lahko sestavimo zvezno odvedljive funkcije, ki ustrezajo lastnosti (2), pa tudi samo odsekoma zvezno odvedljive funkcije. Poglejmo zgleda!

Zgled 1. Vzemimo najprej funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$, ki je za $-\alpha < 0 < \beta < 1$, kjer je $0 < \alpha < 2\pi - \beta$, dana s predpisom:

$$r(\varphi) = \begin{cases} r_0, & -\alpha \le \varphi < 0, \\ \dfrac{r_0}{1-\varphi^2}, & 0 \le \varphi \le \beta. \end{cases}$$



Slika 2. Krožni lok se gladko nadaljuje v lok prave verižnice.

Ustrezna krivulja je sestavljena iz krožnega loka polmera r_0 med kotoma $-\alpha$ in 0 ter loka krivulje $\mathcal{K}$ med kotoma 0 in β (slika 2). Funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ je zvezna na intervalu $[-\alpha, \beta]$ in njen naravni parameter je za $-\alpha \leq \varphi \leq 0$ enak

$$s(\varphi) = r_0\varphi$$

in za $0 \leq \varphi \leq \beta$ enak

$$s(\varphi) = \frac{r_0\varphi}{1-\varphi^2}.$$

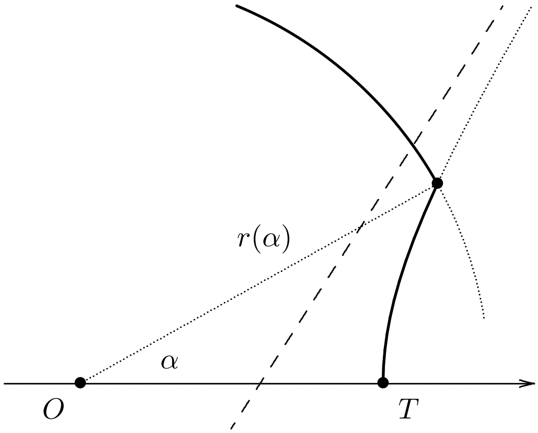
Zato lahko zapišemo:

$$s(\varphi) = \begin{cases} r_0\varphi, & -\alpha \leq \varphi \leq 0, \\ \dfrac{r_0\varphi}{1-\varphi^2}, & 0 \leq \varphi \leq \beta. \end{cases}$$

Funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ očitno ustreza tudi lastnosti (2).

Zgled 2. Omejimo se na $\varphi \geq 0$. Vzemimo še funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$, ki je za $0 < \alpha < 1$ dana s predpisom:

$$r(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{r_0}{1-\varphi^2}, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \\ \dfrac{r_0}{1-\alpha^2}, & \alpha \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$



Slika 3. Lok prave verižnice se nadaljuje v krožni lok.

Ustrezna krivulja je sestavljena iz loka krivulje $\mathcal{K}$, ki se nadaljuje s krožnim lokom (slika 3). Funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ je zvezna na intervalu $[0, 2\pi)$ in njen naravni parameter je za $0 \leq \varphi \leq \alpha$ enak

$$s(\varphi) = \frac{r_0\varphi}{1-\varphi^2}$$

in za $\alpha \leq \varphi$ enak

$$s(\varphi) = \frac{r_0\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{r_0(\varphi-\alpha)}{1-\alpha^2}.$$

Zato lahko zapišemo:

$$s(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{r_0\varphi}{1-\varphi^2}, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \\[2ex] \dfrac{r_0\varphi}{1-\alpha^2}, & \alpha \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ ustreza lastnosti (2).

Po opisanem vzorcu lahko sestavimo tudi zglede v več točkah neodvedljivih, sicer zveznih funkcij, ki ustrezajo lastnosti (2).

Prava verižnica

Krivulja $\mathcal{K}$, ki ima v polarnih koordinatah enačbo $r(\varphi) = r_0/(1-\varphi^2)$ (slika 1), je poseben primer prave verižnice, o čemer se sedaj lahko hitro prepričamo. Na splošno, obliko prave verižnice v gravitacijskem polju, ki ga ustvarja točkasta masa v točki O, zavzame v stacionarnem stanju idealna veriga (homogena, neraztegljiva, gibka, tanka), obešena v dveh točkah. Krivulja $\mathcal{K}$, kot bomo videli, je poseben primer, pri katerem sta to točki T_- in T_+, ki sta od O oddaljeni za r_1, daljici OT_- in OT_+ oklepata kot 2α, dolžina verige pa je enaka $2r_1\alpha$, kar je enako dolžini krožnega loka polmera r_1 pri središčnem kotu $2\alpha < 2$ (slika 1). Do konstantnega faktorja je potencialna energija verige

$$\mathcal{F}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{r}\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi \tag{6}$$

pri pogojih

$$\mathcal{P}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = 2r_1\alpha, \qquad r(\pm\alpha) = r_1. \tag{7}$$

V stacionarnem stanju je tedaj integral (6) minimalen. V izrazih (6) in (7) nastopajočo funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$ poiščemo z metodami variacijskega računa (glej npr. [4, 7, 8]). Kot je pokazano v [5], rešitev ustreza diferencialni enačbi

$$r(\varphi)(\lambda r(\varphi) - 1) = c\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}, \tag{8}$$

kjer sta c in λ konstanti. Sedaj je treba pogledati, kdaj $r(\varphi) = r_0/(1-\varphi^2)$ zadošča enačbi (8) za vsak kot φ na intervalu $(-\alpha, \alpha)$ pri pogoju (7). Iz prve zahteve dobimo enačbo

$$\lambda r_0 - (1 - \varphi^2) = c(1 + \varphi^2),$$

iz katere sledi $c = 1$ in $\lambda = 2/r_0$. Dolžina iskane krivulje je $2r_0\alpha/(1-\alpha^2) = 2r_1\alpha$, iz česar dobimo $r_0 = (1-\alpha^2)r_1$. Tako imamo nazadnje enačbo posebne prave verižnice: $r = r_1(1-\alpha^2)/(1-\varphi^2)$.

LITERATURA

[1] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Pariz, 1975.

[2] J. Denzler, A. M. Hinz, *Catenaria Vera – The True Catenary*, Expo. Math. **17** (1999), 117–142.

[3] S. G. Krantz, H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Verlag, Basel in drugje, 1992.

[4] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.

[5] M. Razpet, *Prava simetrična verižnica*, Obzornik mat. fiz. **57** (2010), št. 4, 121–133.

[6] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1994.

[7] I. Vidav, *Višja matematika III*, DZS, Ljubljana, 1976.

[8] E. Zakrajšek, *Analiza III*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2002.