ttik

bra

Lehrbuch

der

Arithmetik und Algebra

nebst einer

Aufgaben-Sammlung

für die

oberen Classen der Mittelschulen.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Zwanzigste unveränderte Auflage.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1884.

Vorwort zur neunten Auflage.

Die vorliegende Auflage der Arithmetik und Algebra unterscheidet sich sowohl bezüglich der Anordnung des Lehrstoffes als der Behandlung desselben wesentlich von den früheren Ausgaben dieses Lehrbuches.

Eine durchgreifende Änderung in der Gliederung des Inhaltes erschien schon durch das Streben geboten, in dieser umgearbeiteten Ausgabe die organische Entwicklung des Zahlenbegriffes und die dadurch bedingte fortschreitende Erweiterung der Operationsbegriffe dem Schüler zu möglichst klarem Bewusstsein zu bringen. Indem naturgemäß zuerst die niederen Rechnungsarten mit absoluten ganzen Zahlen behandelt werden, wird, damit die inversen Operationen, die Subtraction und die Division, unter allen Umständen ausgeführt werden können, auf die Nothwendigkeit hingewiesen, die algebraischen, gebrochenen und irrationalen Zahlen in die Rechnung einzuführen. Eben so eröffnet bei den höheren Rechnungsarten die Radicierung, indem sie in der Reihe der ganzen, gebrochenen und irrationalen algebraischen Zahlen nicht immer ausführbar erscheint, das neue Gebiet der imaginären Zahlen. Jede neue Zahlform tritt dabei als eine höhere Stufe in der Erweiterung des Zahlengebietes auf, so zwar, dass der auf ihr gewonnene Begriff alle vorhergehenden in sich umfasst.

Mit der fortschreitenden Entwicklung des Zahlenbegriffes müssen auch die Begriffe der Operationen allmählich erweitert werden, so dass sie auch auf die neue Zahlform anwendbar werden und dass stets in der neuen Definition die früheren als besondere Fälle enthalten sind. Zugleich muss jedesmal nachgewiesen werden, dass die Lehrsätze, welche für die früheren Zahlen abgeleitet wurden, auch für die neue Zahlform giltig sind, wodurch denselben eine immer ausgedehntere Anwendbarkeit gesichert wird.

Sowie im ganzen, ist auch im einzelnen auf eine organische Gliederung des Stoffes Bedacht genommen worden. Bei jeder neuen Operation wurden zuerst die Verbindungen der neuen Rechnungsform mit sich selbst und mit der entgegengesetzten Operation derselben Stufe, wenn diese schon vorgekommen ist, sodann die Verbindungen der neuen Operation mit den Operationen der niedrigeren Stufen in Untersuchung gezogen. Die einzelnen Lehrsätze wurden dabei so geordnet, dass Zusammengehöriges in natürlicher Aufeinanderfolge zusammengestellt erscheint, und dass die Analogie der gleichartigen Sätze auf den verschiedenen Rechnungsstufen leicht überblickt werden kann.

Die Brüche erhielten, wiewohl das Rechnen mit denselben schon in dem Rechnen mit den Quotienten enthalten ist, ihre eigene Stelle, nicht nur, weil die besondere Auffassung der Quotienten als Brüche im Leben allgemein so geläufig geworden ist, dass von dieser Vorstellungsweise auch die Wissenschaft füglich nicht leicht Umgang nehmen kann, sondern auch darum, weil mehrere Sätze über Quotienten nur in dieser Form der Auffassung einen besonderen Wert erhalten.

Die Theorie der irrationalen und der imaginären Zahlen wurde gänzlich umgearbeitet. Auch werden die vielseitigen Verbesserungen, welche in den Abschnitten über die Gleichungen, Reihen und Combinationen vorgenommen wurden, dem aufmerksamen Leser nicht entgehen.

Graz, im September 1866.

Der Verfasser.

Vorwort zur neunzehnten Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch behandelt die Lehrstoffe der allgemeinen Arithmetik in der durch den Organisationsentwurf für Gymnasien vorgezeichneten Reihenfolge. Beim Gebrauche des Buches an Realschulen, für welche der neue Normallehrplan einzelnen Partien im Unterrichte eine von jener Reihenfolge abweichende Stelle anweist, werden daher die betreffenden Abschnitte entsprechend zu verschieben sein. Diese Verschiebungen lassen sich durchgängig ohne alle Änderung und ohne Störung des systematischen Zusammenhanges ausführen; nur in der Theorie der bestimmten Gleichungen des ersten Grades mit einer oder mit mehreren Unbekannten müssen, wenn dieselbe vor der Potenzlehre vorgenommen wird, jene wenigen Sätze und Aufgaben, welche sich auf die Rechnungsoperationen der dritten Stufe beziehen und in dem Lehrbuche selbst durch ein Sternchen als solche bezeichnet sind, vorläufig übergangen und erst später bei der Lehre von Potenzen, Wurzeln und Logarithmen an den entsprechenden Orten nachgeholt werden.

Was den Umfang und die Darstellung der behandelten Lehrstoffe betrifft, so sind dieselben bis auf folgende Punkte ungeändert geblieben. Die Lehre von der Convergenz unendlicher Reihen wurde weggelassen, und im Zusammenhange damit auch die Binomialreihe für negative und gebrochene Exponenten. Die imaginären und complexen Zahlen sind im Hinblick auf den Normallehrplan für Realschulen bei der Lehre von den Wurzelgrößen nur formal behandelt worden, während die geometrische Darstellung dieser Zahlen und der algebraischen Operationen mit denselben am Schlusse des theoretischen Theiles den Gegenstand eines besonderen Anhanges bildet. Außerdem erhielten die Artikel über die Theilbarkeit der Zahlen, über das Rechnen mit unvollständigen Decimalbrüchen, über die unbestimmten Gleichungen des ersten Grades, sowie über die Lebensversicherungsrechnung eine präcisere Fassung.

Graz, im Mai 1882.

Der Verfasser.

Sinnstörende Fehler,

welche man vor dem Gebrauche des Buches verbessern wolle.

Seite 62, Zeile 13 von unten, statt b) lies: 2).
„ 78, „ 11 v. u., statt $a + c$ lies: $a \pm c$.
„ 93, „ 11 v. oben, statt $\sqrt[m]{(a)^m}$ lies: $\sqrt[m]{(a^m)}$.
„ 124, „ 2 v. o., „ q_3 „ q_2.
„ 158, „ 1 v. o., „ x^m „ $a x^m$.
„ 167, „ 2 v. u., „ q „ q_1.
„ 169, „ 14 v. u., „ $\sqrt{\frac{a_n}{e^n}}$ „ $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a}}$.
„ 200, „ 10 v. o., „ 0·849 „ 0·949.
„ 219, Aufg. 16, statt $3ab^3$ lies: $3ab^2$.
„ 219, „ 32, „ $a^2 - 49a$ lies: $a^3 - 49a$.
„ 225, „ 140, „ $2a^2$ lies: $2a$.
„ 225, „ 156, „ a^3x^3 „ a^2x^3.
„ 226, „ 184, „ $\frac{3x^2}{a^4}$ „ $\frac{3x^4}{a^4}$.
„ 226, „ 185, „ $27y^1$ „ $27y^4$.

Inhalts-Verzeichnis.

Fünfter Abschnitt.

Progressionen.

Sechster Abschnitt.

Combinationslehre.

Anhang.

Aufgaben-Sammlung.

Einleitung.

§. 1. Jedes Object, das aus Theilen derselben Art besteht oder aus solchen bestehend gedacht werden kann, wird Größe genannt. Jede Größe ist einer Vermehrung oder Verminderung fähig. Die Wissenschaft von den Größen heißt Mathematik.

Die Menge der in einer Größe enthaltenen gleichartigen Theile nennt man die Quantität der Größe. Um eine Größe in Beziehung auf ihre Quantität zu bestimmen, nimmt man eine bekannte Größe derselben Art als Einheit an und untersucht, wie oft dieselbe in der zu bestimmenden Größe enthalten ist. Der Ausdruck, welcher dieses angibt, heißt Zahl. Insofern eine Größe durch eine Zahl ausgedrückt wird, nennt man sie eine Zahlgröße.

Jener Theil der Mathematik, welcher sich mit der Untersuchung der Zahlgrößen beschäftigt, heißt Arithmetik.

§. 2. Jede Zahlenbildung beginnt mit dem Setzen der Einheit. Indem man zu der Einheit noch eine Einheit, zu der dadurch gebildeten Zahl wieder eine Einheit und so fort hinzusetzt, erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen.

Man kann die natürliche Zahlenreihe bildlich darstellen, indem man auf eine gerade Linie von dem Punkte 0 aus nach einer bestimmten Richtung gleiche Strecken aufträgt; die Endpunkte dieser Strecken versinnlichen die auf einander folgenden natürlichen Zahlen.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Eine solche Linie soll Zahlenlinie heißen.

Wir werden später, so wie in dem Gebiete der Zahlen neue Zahlenformen auftreten werden, auch an der Zahlenlinie das angefangene Bild entsprechend vervollständigen.

Die Einheit selbst, sowie jede durch wiederholtes Setzen derselben gebildete Zahl wird eine ganze Zahl genannt. Um anzugeben, dass keine Einheit gesetzt sei, bedient man sich des Ausdruckes Null (0). Die Null ist daher als der Ausgangspunkt jeder Zahlenbildung zu betrachten.

In der natürlichen Zahlenreihe entsteht jede Zahl aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer Einheit, und aus der folgenden durch Wegnehmen einer Einheit. Durch das Hinzufügen, bezüglich Wegnehmen einer Einheit von einer Zahl zur andern fortschreiten, heißt zählen; das erstere vorwärtszählen, das letztere rückwärtszählen. Jenes kann an der natürlichen Zahlenreihe ohne Ende fortgesetzt werden, dieses nur, bis auch die erste Einheit weggenommen und man zur Null gelangt ist.

§. 3. Zahlen, welche eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken, heißen besondere Zahlen; sie werden durch Ziffern bezeichnet. Zahlen, welche irgend eine Menge von Einheiten darstellen, heißen allgemeine Zahlen; sie werden durch Buchstaben ausgedrückt. Zahlen, welche erst bestimmt werden sollen und daher noch unbekannt sind, bezeichnet man gewöhnlich mit den letzten Buchstaben des Alphabetes.

Je nachdem die Arithmetik nur besondere oder auch allgemeine Zahlen in Betrachtung zieht, heißt sie die besondere oder die allgemeine Arithmetik.

§. 4. Wird beim Zählen die Art der Einheit ganz unberücksichtigt gelassen, so heißen die dadurch gebildeten Zahlen reine oder unbenannte Zahlen; wird aber beim Zählen auch die Art der Einheit ausgedrückt, so entstehen benannte Zahlen. Man erhält demnach durch a maliges Setzen der unbenannten Einheit die unbenannte Zahl a, durch a maliges Setzen einer benannten Einheit E die benannte Zahl aE, in welcher E die Benennung heißt.

§. 5. Zwei Zahlen (überhaupt zwei Größen), welche dieselbe Menge von Einheiten enthalten, heißen einander gleich. Um anzuzeigen, dass a und b gleich sind, schreibt man $a = b$; in diesem Falle ist immer auch $b = a$. Ein Ausdruck von der Form $a = b$ heißt eine Gleichung; $b = a$ ist die Umkehrung der Gleichung $a = b$.

Zwei Zahlen (überhaupt zwei Größen), welche nicht dieselbe Menge von Einheiten enthalten, heißen ungleich, und zwar heißt diejenige, zu der noch etwas hinzugesetzt werden muss, um die andere hervorzubringen, die kleinere, die andere die größere. Dass a größer als b ist, drückt man durch $a > b$ aus; in diesem Falle ist auch b kleiner als a, was durch $b < a$ bezeichnet wird. Ausdrücke von der Form $a > b$ oder $b > a$ nennt man Ungleichungen.

Bezeichnen a und b zwei beliebige Zahlen (oder Größen), so muss entweder $a > b$, oder $a = b$, oder $a < b$ sein, wofür man auch schreibt $a \gtreqless b$.

§. 6. Von gegebenen Zahlen durch vorgeschriebene Verbindung derselben zu einer andern gesuchten Zahl übergehen und letztere dadurch bestimmen, heißt rechnen. Die Zahl, zu welcher man durch das Rechnen gelangt, heißt das Resultat der Rechnung. Jede Darstellung einer Rechnung in Zeichen heißt eine Formel. Jede Rechenvorschrift, für welche eine besondere Bezeichnung eingeführt ist, heißt eine Operation.

In eine Zahlenverbindung an die Stelle der allgemeinen Zahlen (Buchstaben) besondere Zahlenwerte setzen, und mit diesen die vorgeschriebenen Rechnungen ausführen, heißt **substituieren**.

Das **Zählen** ist die einfachste Art des Rechnens; alle anderen Rechnungsoperationen können daraus abgeleitet werden.

Das Fortschreiten in der natürlichen Zahlenreihe von einer gegebenen Zahl aus um eine gegebene Zahl von Einheiten heißt die **Addition**; die Umkehrung dieser Operation die **Subtraction**. Die Addition gleicher Zahlen heißt **Multiplication**, und die Umkehrung derselben **Division**. Die Multiplication gleicher Zahlen führt auf Zahlen höheren Ranges; die Rechnung, durch welche diese gefunden werden, heißt die **Potenzierung**, aus deren Umkehrung sich die **Radicierung** (das Wurzelausziehen) und die **Logarithmierung** ergeben.

Die Gesetze der hier angedeuteten Operationen zu untersuchen, bildet die Hauptaufgabe der **Arithmetik**. Die Lehre über die Anwendung dieser Gesetze auf die Lösung von Aufgaben, indem man die Beziehungen zwischen den unbekannten und bekannten Zahlen durch Gleichungen ausdrückt und aus diesen die Werte für die unbekannten Zahlen sucht, heißt **Algebra**.

Häufig werden diese beiden Theile der Mathematik als Ganzes mit dem gemeinschaftlichen Namen **allgemeine Arithmetik** bezeichnet.

§. 7. Die Mathematik stützt ihre Lehren auf gewisse Sätze, die man unmittelbar als wahr anerkennt, die daher nicht bewiesen zu werden brauchen, aber auch nicht bewiesen werden können. Solche Grundwahrheiten werden **Grundsätze** (Axiome) genannt.

Sätze, deren Richtigkeit erst aus andern, bereits als wahr anerkannten Sätzen hergeleitet werden muss, heißen **Lehrsätze**; diese müssen **bewiesen** werden.

Ein Satz, dessen Wahrheit sich aus der Erklärung eines Begriffes oder aus einem erwiesenen Satze unmittelbar ergibt, heißt ein **Folgesatz**.

§. 8. **Allgemeine mathematische Grundsätze.**

1. Jede Größe ist sich selbst gleich.

$$a = a$$

2. Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch unter einander gleich.

Ist $a = c$ und $b = c$, so ist auch $a = b$.

3. Werden mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vorgenommen, so erhält man gleiche Größen.

4. Das Ganze ist gleich allen seinen Theilen zusammengenommen.

5. Das Ganze ist größer als ein Theil desselben.

6. Ist eine Größe einer zweiten gleich, diese aber einer dritten ungleich, so ist auch die erste der dritten ungleich, und zwar mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a = b$,	Ist $a = b$,
$b > c$,	$b < c$,
so ist auch $a > c$.	so ist auch $a < c$.

7. Ist eine Größe größer (oder kleiner) als eine zweite und diese wieder größer (oder kleiner) als eine dritte, so ist um so mehr auch die erste Größe größer (oder kleiner) als die dritte.

Ist $a > b$,	Ist $a < b$,
$b > c$,	$b < c$,
so ist auch $a > c$,	so ist auch $a < c$.

Erster Abschnitt.

Addition und Subtraction.

I. Addition mit absoluten ganzen Zahlen.

§. **9.** 1. Zu einer Zahl a eine Zahl b addieren heißt, eine Zahl c suchen, welche so viele Einheiten enthält, als a und b zusammen. Man schreibt $a + b = c$ und nennt a und b die Summanden und $a + b$ die Summe; c heißt der Wert der Summe.

Um anzuzeigen, dass eine Zahlenform oder Zahlenverbindung als ein Ganzes, als eine einzige Zahl angesehen werden soll, schließt man dieselbe zwischen Klammern ein.

Der Wert der Summe $a + b$ kann hiernach auch durch den eingeklammerten Ausdruck $(a + b)$ dargestellt werden.

Um die Addition zweier Zahlen a und b auszuführen, schreitet man in der Zahlenreihe von a ausgehend um so viele Einheiten vorwärts, als ihrer b enthält; die Zahl, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Folgesatz. Ist ein Summand 0, so ist die Summe dem andern Summanden gleich.

$$0 + a = a,\ a + 0 = a,\ 0 + 0 = 0.$$

2. Unter der Summe mehrerer Zahlen versteht man die Summe, welche erhalten wird, indem man zu der Summe der beiden ersten Zahlen die dritte, zu der neuen Summe die vierte Zahl u. s. w. addiert. Es ist demnach

$$a + b + c = (a + b) + c,$$
$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d, \text{ u. s. f.}$$

§. **10.** Eine Summe, welche entsteht, indem man dieselbe allgemeine Zahl öfters als Summand setzt, wird abgekürzt dadurch bezeichnet, daß man die allgemeine Zahl nur einmal anschreibt und ihr die Zahl vorsetzt, welche anzeigt, wie vielmal die allgemeine Zahl als Summand vorkommt; z. B.

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

In dem Ausdrucke 5a heißt dann a die Hauptgröße und 5 der Coefficient.

Der Coefficient kann auch eine allgemeine Zahl sein; z. B.

$$ma = a + a + a + a + \ .. \ (m \text{ mal}).$$

Ausdrücke, welche dieselbe Hauptgröße haben, heißen gleichnamig, z. B. $5a$ und $6a$, $3x$ und x. Ausdrücke, welche verschiedene Hauptgrößen haben, heißen ungleichnamig, z. B. $3a$ und $7b$, $5x$ und $5y$.

§. **11.** Eine Summe bleibt unverändert, wenn man die Summanden unter einander vertauscht. (Das Commutationsgesetz der Addition.)

$$a + b = b + a.$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = \ldots$$

Denn die Anzahl der in den Summanden enthaltenen Einheiten bleibt dieselbe, in welcher Reihenfolge sie auch vorkommen mögen; es muss daher auch der Wert der Summe derselbe bleiben.

Verbindung der Addition mit sich selbst.

§. **12.** 1. Zu einer Summe wird eine Zahl addiert, indem man sie zu einem der Summanden addiert.

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

2. Zu einer Zahl wird eine Summe addiert, indem man die Summanden einzeln addiert.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b.$$

Die Richtigkeit dieser zwei Sätze, welche die Associationsgesetze der Addition bilden, folgt unmittelbar aus dem Commutationsgesetze in §. 11.

§. **13.** Gleichnamige Ausdrücke werden addiert, indem man ihre Coefficienten addiert und die erhaltene Summe der gemeinschaftlichen Hauptgröße vorsetzt.

$$ma + na = (m + n)\,a.$$

Beweis. $ma = a + a + a + \ldots$ (m mal),

$na = a + a + a + \ldots$ (n mal),

daher $ma + na = a + a + a + \ldots$ (m + n mal) $= (m + n)\,a$.

Z. B. $3a + 4a = (3 + 4)\,a = 7a$.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Addition.

§. **14.** 1. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.

Ist $a = b$, und $c = d$, so ist $a + c = b + d$.

Folgt unmittelbar aus §. 8, 3.

2. Gleiches zu Ungleichem addiert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$, und $c = d$, so ist $a + c > b + d$.

Beweis. Es sei w die Zahl, welche man zu b addieren muss, um a zu erhalten, also $a = b + w$, so ist nach 1. $a + c = b + w + d$. Nun ist $b + w + d > b + d$ (§. 8, 5), folglich auch $a + c > b + d$.

3. Ungleiches zu Ungleichem mit demselben Ungleichheitszeichen addiert gibt Ungleiches mit eben so gestelltem Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$, und $c > d$, so ist $a + c > b + d$.

Beweis. Es sei $c = d + w$, so hat man nach 2. $a + c > b + d + w$. Nun ist $b + d + w > b + d$ (§. 8, 5), folglich um so mehr $a + c > b + d$ (§. 8, 7).

II. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen.

§. 15. Von einer Zahl a eine Zahl b subtrahieren heißt, aus a als der Summe zweier Zahlen und b als dem einen Summanden den andern Summanden c suchen. Man schreibt $a - b = c$ und nennt a den Minuend, b den Subtrahend und $a - b$ die Differenz; c oder auch der eingeklammerte Ausdruck $(a - b)$ heißt der Wert der Differenz.

Eine Differenz ist also ein Ausdruck für diejenige Zahl, zu welcher der Subtrahend addiert den Minuend gibt; oder es ist

$$(a - b) + b = a.$$

Um die Subtraction zweier Zahlen a und b auszuführen, schreitet man in der Zahlenreihe vom Minuend a aus um so viele Einheiten zurück, wie der Subtrahend b anzeigt; die Zahl, zu welcher man dadurch gelangt, ist die gesuchte Differenz.

Die Subtraction kann an der natürlichen Zahlenreihe nur dann ausgeführt werden, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist, indem man sonst, weil die natürliche Zahlenreihe rückwärts mit 0 abbricht, vom Minuend nicht um so viele Einheiten zurückschreiten könnte, wie der Subtrahend anzeigt.

Bei den folgenden Sätzen werden wir daher vorläufig voraussetzen, dass die Subtrahenden der vorkommenden Differenzen nicht größer als ihre Minuenden sind.

§. 16. Aus dem Begriffe der Subtraction ergeben sich nachstehende

Folgesätze: 1. Addiert man zu der Differenz zweier Zahlen den Subtrahend, so erhält man den Minuend.

$$(a - b) + b = a.$$

2. Subtrahiert man von der Summe zweier Zahlen den einen Summanden, so erhält man den zweiten Summanden.

$$(a + b) - a = b, \qquad (a + b) - b = a.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man dieselbe Zahl zu ihr addiert und von ihr subtrahiert.

$$a = (a + b) - b, \qquad a = (a - b) + b.$$

Die Addition und die Subtraction sind demnach einander entgegengesetzt; letztere ist eine inverse Operation der ersteren. In der commutativen Eigenschaft der Addition liegt der Grund, dass es zu derselben nur eine inverse Operation gibt; es ist gleichviel, ob der erste oder der zweite Summand gesucht wird, da man beide unter sich vertauschen kann.

4. Ist der Subtrahend dem Minuend gleich, so ist die Differenz gleich Null.

$$a - a = 0.$$

5. Ist der Subtrahend 0, so ist die Differenz dem Minuend gleich.

$$a - 0 = a, \quad 0 - 0 = 0.$$

Verbindung der Subtraction mit sich selbst und mit der Addition.

§. **17.** 1. Von einer Summe wird eine Zahl subtrahiert, indem man sie von einem der Summanden subtrahiert.

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Beweis. a) Soll $(a - c) + b$ die richtige Differenz der Zahlen $a + b$ und c sein, so muss man, wenn man zu ihr den Subtrahend c addiert, den Minuend $a + b$ erhalten (§. 15). Nun ist wirklich
$\{(a - c) + b\} + c = \{(a - c) + c\} + b$ (§. 12, 1) $= a + b$ (§. 16, 1), also $(a - c) + b$ eine richtige Lösung der Aufgabe.

b) Ebenso ist
$\{a + (b - c)\} + c = a + \{(b - c) + c\}$ (§. 12, 1) $= a + b$ (§. 16, 1), also ist auch die zweite Form $a + (b - c)$ der Differenz richtig.

2. Zu einer Zahl wird eine Differenz addiert, indem man den Minuend addiert und den Subtrahend subtrahiert.

$$a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b.$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus der in 1. bewiesenen Gleichung.

Folgesatz. Soll zu einer Zahl eine zweite addiert, und eine dritte davon subtrahiert werden, so ist es für das Resultat gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man addiert oder subtrahiert.

§. **18.** 1. Von einer Zahl wird eine Summe subtrahiert, indem man die Summanden einzeln subtrahiert.

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b.$$

Beweis. Sowohl $(a - b) - c$ als $(a - c) - b$ entspricht der in §. 15 für die Differenz aufgestellten Erklärung. Denn es ist

$$\begin{aligned}\{(a - b) - c\} + (b + c) &= (b + c) + \{(a - b) - c\} \quad (\text{§. } 11)\\ &= \{(b + c) - c\} + (a - b) \quad (\text{§. } 17,\ 2)\\ &= b + (a - b) \quad (\text{§. } 16,\ 2) = a \quad (\text{§. } 16,\ 1).\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise erhält man auch

$$\{(a - c) - b\} + (b + c) = a.$$

2. Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahiert, indem man sie von dem Minuend subtrahiert, oder zu dem Subtrahend addiert.

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c).$$

Folgt durch Umkehrung aus 1.

Folgesatz. Sollen von einer Zahl zwei Zahlen subtrahiert werden, so darf man entweder dieselben einzeln in beliebiger Reihenfolge, oder auch sogleich ihre Summe subtrahieren.

§. **19.** 1. Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahiert, indem man den Minuend subtrahiert und den Subtrahend addiert.

$$a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b.$$

Beweis. Es ist sowohl

$$\{(a - b) + c\} + (b - c) = (a - b) + \{c + (b - c)\} \text{ (§. 12, 1)}$$
$$= (a - b) + b \text{ (§. 16, 1)} = a,$$

als auch

$$\{(a + c) - b\} + (b - c) = [\{(a + c) - b\} + b] - c \text{ (§. 17, 2)}$$
$$= (a + c) - c \text{ (§. 16, 1)} = a \text{ (§. 16, 2)}.$$

2. Zu einer Differenz wird eine Zahl addiert, indem man sie zu dem Minuend addiert, oder von dem Subtrahend subtrahiert.

$$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c).$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus 1.

§. **20.** 1. Eine Summe bleibt unverändert, wenn man zu dem einen Summanden eine Zahl addiert und von dem anderen Summanden dieselbe Zahl subtrahiert.

Es ist

$$a + b = a + \{(b - c) + c\} \text{ (§. 16, 3)} = (a + c) + (b - c) \text{ (§. 12, 2)};$$
$$a + b = a + \{(b + c) - c\} \text{ (§. 16, 3)} = (a - c) + (b + c) \text{ (§. 17, 2)}.$$

2. Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man zu dem Minuend und dem Subtrahend dieselbe Zahl addiert, oder von beiden dieselbe Zahl subtrahiert.

Es ist

$$a - b = a - \{(b + c) - c\} \text{ (§. 16, 3)} = (a + c) - (b + c) \text{ (§. 19, 1)};$$
$$a - b = a - \{(b - c) + c\} \text{ (§. 16, 3)} = (a - c) - (b - c) \text{ (§. 18, 1)}.$$

§. **21.** Gleichnamige Ausdrücke werden subtrahiert, indem man die Coefficienten subtrahiert und die erhaltene Differenz der gemeinschaftlichen Hauptgröße vorsetzt.

$$ma - na = (m - n)\, a.$$

Beweis. $ma = a + a + a + \ldots$ (m mal)

$na = a + a + a + \ldots$ (n mal)

daher $ma - na = a + a + a + \ldots$ (m — n) mal $= (m - n)\, a$.

Z. B. $5a - 2a = (5 - 2)\, a = 3a$.

§. 22. Sollen in einer durch die Zeichen $+$ und $-$ vorgeschriebenen Verbindung von Zahlen die dadurch angezeigten Operationen in der Reihenfolge, wie diese Zahlen mit ihren Zeichen von links nach rechts vorkommen, vollzogen werden, so kann man, ohne der Bestimmtheit dadurch Abbruch zu thun, die Klammern weglassen. Hiernach kann man

$$[(a + b) + c] + d = a + b + c + d,$$
$$[(a - b) + c] - d = a - b + c - d,$$
$$[(a - b) - c] - d = a - b - c - d \text{ setzen.}$$

Ein Zahlenausdruck, welcher mehrere durch Addition und Subtraction verbundene Bestandtheile enthält, heißt ein mehrgliedriger Ausdruck oder ein Polynom. Die einzelnen Bestandtheile heißen Glieder, und zwar die mit dem Zeichen $+$ versehenen die additiven, die mit dem Zeichen $-$ versehenen die subtractiven Glieder des Ausdruckes. Das mit keinem Zeichen versehene erste Glied wird als additiv angesehen.

Ein zweigliedriger Ausdruck wird insbesondere ein Binom, ein dreigliedriger ein Trinom genannt. Ein Ausdruck, welcher nur ein Glied enthält, heißt ein eingliedriger Ausdruck oder ein Monom.

Folgesätze. 1. In einem mehrgliedrigen Ausdrucke ist die Reihenfolge der additiven und subtractiven Glieder ganz willkürlich.

Folgt aus §. 11, §. 17, Folges. und §. 18, Folges.

2. Jeder mehrgliedrige Ausdruck läſst sich in eine Differenz verwandeln, deren Minuend die Summe aller additiven, und deren Subtrahend die Summe aller subtractiven Glieder ist.

$$a + b - c + d - e = a + b + d - c - e$$
$$= (a + b + d) - (c + e) \text{ (§. 18, Folges.).}$$

§. 23. 1. Zu einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck addiert, indem man die Glieder desselben einzeln zu der Zahl addiert oder von ihr subtrahiert, je nachdem sie in dem Ausdrucke additiv oder subtractiv vorkommen.

$$a + (b - c - d + e - f) = a + b - c - d + e - f.$$

Beweis. $a + (b - c - d + e - f)$
$= a + [(b + e) - (c + d + f)]$ (§. 22, Folges. 2)
$= [a + (b + e)] - (c + d + f)$ (§. 17, 2)
$= a + b + e - c - d - f$ (§. 12, 2 und §. 18, 1)
$= a + b - c - d + e - f$ (§. 22, Folges. 1).

2. Von einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck subtrahiert, indem man die Glieder desselben einzeln von der Zahl subtrahiert oder zu ihr addiert, je nachdem sie in dem Ausdrucke additiv oder subtractiv vorkommen.

$$a - (b - c - d + e - f) = a - b + c + d - e + f.$$

Der Beweis wird ähnlich, wie bei dem vorhergehenden Satze, geführt.

§. 24. 1. Jeder mit Klammern eingeschlossene Ausdruck kann ohne Klammern dargestellt werden, indem man, wenn vor der Klammer das Zeichen $+$ steht, die Klammern ohne alle weitere Veränderung weglässt, dagegen, wenn vor der Klammer das Zeichen $-$ steht, allen Gliedern, die eingeschlossen waren, die entgegengesetzten Zeichen gibt.

Man nennt diese Umformung das Auflösen der Klammern.

Z. B.
$$a - [2b + (3c - 4d)]$$
$$= a - [2b + 3c - 4d]$$
$$= a - 2b - 3c + 4d.$$

2. Umgekehrt können in jedem mehrgliedrigen Ausdruck mehrere Glieder in eine Klammer gesetzt werden, indem man, wenn die Klammer nach dem Zeichen $+$ beginnt, alle Glieder mit unveränderten Zeichen innerhalb derselben folgen lässt, dagegen, wenn die Klammer nach dem Zeichen $-$ beginnt, jedem der eingeschlossenen Glieder das entgegengesetzte Zeichen giebt.

3. Ein mehrgliedriger Ausdruck, in welchem gleichnamige Zahlen vorkommen, wird auf einen einfacheren Ausdruck reduciert, indem man zuerst die additiven, dann die subtractiven gleichnamigen Zahlen addiert, und die zweite Summe von der ersten subtrahiert. Z. B.
$$6a - 5a - 3a + 8a - 2a = (6a + 8a) - (5a + 3a + 2a)$$
$$= 14a - 10a = 4a.$$

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Subtraction.

§. 25. 1. Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist $a - c = b - d$.

Flogt unmittelbar aus §. 8, 3.

2. Gleiches von Ungleichem subtrahiert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und $c = d$, so ist $a - c > b - d$.

Beweis. Wäre nicht $a - c > b - d$, so müsste $a - c \leqq b - d$ sein; dann wäre bezüglich auch $(a - c) + c \leqq (b - d) + d$ (§. 14, 1 und 2), daher $a \leqq b$ (§. 16, 1), was gegen die Voraussetzung ist.

3. Ungleiches von Gleichem subtrahiert giebt Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen.

Ist $a = b$ und $c > d$, so ist $a - c < b - d$.

Beweis. Wäre $a - c \geqq b - d$, so müsste in beiden Fällen $(a - c) + c > (b - d) + d$ (§. 14, 2 und 3), daher $a > b$ (§. 16, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

4. Ungleiches von Ungleichem bei entgegengesetzten Ungleichheitszeichen subtrahiert gibt Ungleiches mit dem Ungleichheitszeichen des Minuends.

Ist $a > b$ und $c < d$, so ist $a - c > b - d$.

Beweis. Wäre $a - c \leqq b - d$, so müsste in beiden Fällen $(a - c) + c < (b - d) + d$ (§. 14, 2 und 3), daher $a < b$ (§. 16, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

III. Erweiterung des Zahlengebietes durch die Subtraction.

1. Negative Zahlen.

§. **26.** Bisher wurde (§. 15) bei jeder Differenz $a - b$ die Voraussetzung gemacht, dass der Subtrahend b nicht größer als der Minuend a ist. Ist $b > a$, so ist die gesuchte Differenz $a - b$ in der Reihe der natürlichen Zahlen nicht zu finden; die Subtraction ist in diesem Zahlengebiete unmöglich. Soll die Subtraction für ganz beliebige Werte des Minuends und des Subtrahends möglich gemacht werden, so sind wir genöthigt, unser Zahlengebiet zu erweitern und in dasselbe $a - b$ für den Fall, dass $b > a$ ist, als eine *neue Zahlenform* aufzunehmen. Dieser neuen Zahlenform werden wir eine solche Bedeutung geben, dass die Gesetze, welche bei der Subtraction für die als natürliche Zahlen vorausgesetzten Differenzen entwickelt wurden, auch für die neu eingeführten Zahlen ihre Giltigkeit behalten. (Princip der *Erhaltung der Operationsgesetze*.)

Wendet man auf die Differenz $a - b$, wo $b = a + n$ sei, den Satz in §. 18, 1. an, so erhält man

$$a - b = a - (a + n) = (a - a) - n = 0 - n,$$

oder, wenn man die Differenz $0 - n$ durch $-n$ ausdrückt,

$$a - b = -n.$$

Die mit dem *Vorzeichen* $-$ versehene Zahl $-n$ nennt man eine *negative Zahl*. Im Gegensatze zu den negativen Zahlen werden dann die bisherigen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe *positive Zahlen* genannt und als solche mit dem *Vorzeichen* $+$ versehen.

Die Bedeutung einer negativen Zahl ergibt sich aus der Gleichung $0 - n = -n$, aus welcher nach dem allgemeinen Begriffe einer Differenz

$$(-n) + n = 0$$

folgt (§. 15). Eine *negative Zahl* $-n$ bedeutet also eine Zahl, welche mit der natürlichen (positiven) Zahl n durch die Addition verbunden 0 gibt. Da sich hiernach die Zahlen $+n$ und $-n$ in ihrer Vereinigung durch die Addition gegenseitig aufheben, heißen sie einander *entgegengesetzt*.

Um die positiven und die negativen Zahlen an einer einzigen Zahlenreihe darzustellen, braucht man nur die ursprüngliche Reihe der Zahlen, welche von 0 aus durch das Vorwärtszählen gebildet wurden, so zu erweitern, dass das Zählen im entgegengesetzten Sinne, d. i. das Rückwärtszählen, welches bisher bei 0 seine Grenze fand, nun auch über 0 hinaus und zwar in den negativen Zahlen fortgesetzt wird. Dadurch entsteht die zweiseitige Zahlenreihe

$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots,$$

in welcher je zwei vorwärts und rückwärts von 0 gleichweit abstehende Zahlen einander entgegengesetzt sind.

Die hier begründete Erweiterung des Zahlengebietes lässt sich ganz einfach an der Zahlenlinie versinnlichen.

$$\begin{array}{ccccccccccc} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & +1 & +2 & +3 & +4 & +5 \\ \hline & & & y & & 0 & & x & & & \end{array}$$

Um von der Zahl 5 die Zahl 3 zu subtrahieren, schreitet man rechts in der Zahlenlinie von der Stelle 5 um 3 Einheiten zurück; man gelangt zu der Stelle x, und es ist $x = 5 - 3 = 2$.

Ist umgekehrt von der Zahl 3 die größere Zahl 5 zu subtrahieren, so müssten, damit die Subtraction ausgeführt werden könne, links von 0 noch Punkte liegen, zu welchen man dann durch das Fortschreiten nach rückwärts gelangen würde. Verlängert man daher die ursprüngliche Zahlenlinie über den Anfangspunkt 0 hinaus in der entgegengesetzten Richtung, trägt auch hier gleich große Strecken auf und schreitet sodann von 3 aus um 5 Einheiten zurück, so gelangt man zu der Stelle y, und es ist $y = 3 - 5$; zu derselben Stelle kommt man auch, indem man von 3 aus zuerst um 3, und dann noch um 2 Einheiten zurückschreitet; mithin ist auch $y = 3 - 3 - 2 = 0 - 2$, wofür man -2 schreibt; folglich $3 - 5 = -2$.

Durch dieselbe Schlussweise überzeugt man sich, dass je zwei gleichweit vom Nullpunkte entfernte Stellen der Zahlenlinie durch dieselbe Zahl bezeichnet werden, dass jedoch die Zahlen, welche auf derjenigen Seite, die der ursprünglichen Richtung entgegengesetzt ist, liegen, das beständige Vorzeichen — haben. Dann muss man aber den Zahlen in der ursprünglichen Richtung der Zahlenlinie das Vorzeichen + geben; denn schreitet man von 0 in der ursprünglichen Richtung um 2 Einheiten vorwärts, so gelangt man zu der Stelle $0 + 2 = +2$.

§. **27.** Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden relative oder algebraische Zahlen genannt, im Gegensatze zu den Zahlen ohne Vorzeichen, welche absolute Zahlen heißen.

Jede algebraische Zahl besteht aus einem Vorzeichen und einem absoluten Werte.

Das Vorzeichen + pflegt man als selbstverständlich dort wegzulassen, wo es ohne Störung des Sinnes und des Zusammenhanges einer Rechnung geschehen kann.

§. **28.** Größen, wie Bewegung nach vorwärts und nach rückwärts, Steigen und Fallen, Vermögen und Schulden, Höhe über und unter dem Meeresspiegel, Zeiten vor und nach Christi Geburt u. dgl., welche in dem einen und in dem entgegengesetzten Sinne gezählt werden können, so dass gleichviel von beiden Zählungen 0 gibt, heißen entgegengesetzte Größen. In der Mathematik bezeichnet man die eine von zwei entgegengesetzten Größen, gleichviel welche, aber consequent, mit $+$, die andere mit $-$.

Hätte man z. B. die Zeit, wann ein Ereignis C stattfand, aus folgender Angabe zu rechnen: a Jahre nach Christo fand ein Ereignis A statt, b Jahre später ein Ereignis B und c Jahre früher als B das Ereignis C; so wäre der gesuchte Zeitpunkt $x = a + b - c$. Käme nach Einsetzung der Werte für a, b, c ein Resultat $-n$ zum Vorschein, so hieße dies: das Ereignis C fand n Jahre vor Christo statt.

Allgemein: Ein negativer Wert $-n$ für eine gesuchte Größe x bedeutet stets, dass die Größe gemessen wird durch n Einheiten, aber in einem Sinne, welcher dem ursprünglich in die Rechnung eingeführten entgegengesetzt ist.

2. Addition und Subtraction mit algebraischen ganzen Zahlen.

§. 29. Der durch die Aufnahme der negativen Zahlen erweiterte Zahlbegriff hat zur Folge, dass auch die Begriffe der Operationen angemessen erweitert werden müssen, damit sie auch auf algebraische Zahlen anwendbar werden.

Zwei algebraische Zahlen addieren heißt diejenige Zahl suchen, welche so viele positive und so viele negative Einheiten enthält, als die beiden Summanden zusammen. Dieser Erkärung gemäß muss die in §. 9, 1. für die Ausführung der Addition gegebene Vorschrift bei algebraischen Zahlen dahin erweitert werden, dass man in der Zahlenreihe vom ersten Summand aus in derjenigen Richtung, welche das Vorzeichen des zweiten Summands angibt, um so viele Einheiten fortschreitet, wie der absolute Wert dieses zweiten Summands anzeigt.

Folgesätze. 1. Addition einer positiven Zahl ist Addition des absoluten Wertes derselben; Addition einer negativen Zahl ist Subtraction des absoluten Wertes derselben.

Bedeutet b eine absolute Zahl, so ist

$$a + (+b) = a + b, \qquad a + (-b) = a - b.$$

2. Zwei gleichbezeichnete Zahlen werden addiert, indem man ihre absoluten Werte addiert und dieser Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.

$$(+a) + (+b) = +(a + b), \qquad (-a) + (-b) = -(a + b).$$

3. Zwei ungleich bezeichnete Zahlen werden addiert, indem man den kleineren absoluten Wert von dem größeren subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen des größeren absoluten Wertes gibt.

$$(+a) + (-b) = +(a - b), \text{ oder } = -(b - a),$$
$$(-a) + (+b) = -(a - b), \text{ oder } = +(b - a).$$

4. Zwei entgegengesetzte Zahlen geben zur Summe Null (heben sich gegenseitig auf).

$$(+a) + (-a) = 0, \qquad (-a) + (+a) = 0.$$

§. **30.** Für das Subtrahieren algebraischer Zahlen bleibt die in §. 15 aufgestellte allgemeine Erklärung unverändert giltig. Es darf nur die dort für die Ausführung der Subtraction gegebene Vorschrift bei algebraischen Zahlen dahin ausgedehnt werden, daſs man in der Zahlenreihe vom Minuend aus in derjenigen Richtung, welche der durch das Vorzeichen des Subtrahends ausgedrückten entgegengesetzt ist, um so viele Einheiten fortschreitet, wie der absolute Wert des Subtrahends anzeigt.

Folgesätze. 1. Subtraction einer positiven Zahl ist Subtraction des absoluten Wertes derselben; Subtraction einer negativen Zahl ist Addition des absoluten Wertes derselben.

Bedeutet b eine absolute Zahl, so ist

$$a - (+b) = a - b, \qquad a - (-b) = a + b.$$

2. Zwei algebraische Zahlen werden subtrahiert, indem man zum unveränderten Minuend den Subtrahend mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

$$(+a) - (+b) = (+a) - b = (+a) + (-b) \text{ (§. 29, Folgeſ. 1)},$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + b = (+a) + (+b),$$
$$(-a) - (+b) = (-a) - b = (-a) + (-b),$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + b = (-a) + (+b).$$

§. **31.** Eine Summe, deren Summanden algebraische Zahlen sind, heißt eine algebraische Summe; z. B.

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (-f).$$

Die Differenz je zweier algebraischer Zahlen kann als eine algebraische Summe dargestellt werden (§. 30, Folgeſ. 2).

1. Jeder mehrgliedrige Ausdruck kann in eine algebraische Summe verwandelt werden, indem man die Rechnungszeichen als Vorzeichen betrachtet und dann die Zahlen als Summanden annimmt.

$$a - b - c + d = (+a) + (-b) + (-c) + (+d).$$

Folgt aus §. 29, Folgeſ. 1.

2. Jede algebraische Summe kann in einen mehrgliedrigen Ausdruck verwandelt werden, indem man die Additionszeichen und die Klammern wegläſst und dann die Vorzeichen als Rechnungszeichen ansieht.

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) = a - b - c + d.$$

Folgt aus 1.

3. Eine algebraische Summe bleibt unverändert, wenn man die Summanden unter einander vertauscht.

Folgt aus 2. und 1. mit Zuziehung des §. 22, Folgeſ. 1.

§. **32.** Man ist übereingekommen, bei algebraischen Summen die Additionszeichen und die Klammern für die einzelnen Summanden wegzulassen. In dieser Form unterscheidet sich eine algebraische Summe von einem mehrgliedrigen Ausdrucke nur dadurch, dass die Rechnungszeichen $+$ und $-$ des letzteren in der ersteren als Vorzeichen, d. i. die additiven und subtractiven Glieder des letzteren in der ersteren bezüglich als positive und negative Summanden zu betrachten sind. Auf den Wert beider hat diese verschiedene Bedeutung der Zeichen, wie aus §. 29, Folgesatz 1, erhellt, keinen Einfluss.

Daraus folgt mit Rücksicht auf §. 23, 1 und 2:

1. Zu einer Zahl wird eine algebraische Summe addiert, indem man ihre einzelnen Summanden mit unveränderten Vorzeichen zu der Zahl hinzufügt.

2. Von einer Zahl wird eine algebraische Summe subtrahiert, indem man ihre einzelnen Summanden mit entgegengesetzten Vorzeichen zu der Zahl hinzufügt.

§. **33.** Alle für die absoluten Zahlen abgeleiteten Sätze über die Summen und Differenzen lassen sich schließlich auf das Commutationsgesetz der Addition (§. 11) zurückführen. Dieses Gesetz gilt aber (nach §. 31, 3) auch für algebraische Zahlen; folglich gelten alle bisher für die absoluten ganzen Zahlen erwiesenen Sätze auch für die algebraischen ganzen Zahlen.

Zusätze. 1. Die Ungleichheit zweier Zahlen (§. 5) muss nun dahin erklärt werden, dass von zwei Zahlen diejenige die kleinere ist, zu welcher man eine positive Zahl addieren muss, um die andere zu erhalten. Ist $m > n$, so ist $-m < -n$. Ferner ist allgemein $+m > 0$, $-m < 0$ und $-m < +n$.

2. Die vorstehende Erklärung muss man festhalten, wenn die Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Addition und Subtraction (§§. 14 und 25) auf algebraische Zahlen ausgedehnt werden sollen.

Zweiter Abschnitt.

Multiplication und Division.

I. Multiplication mit absoluten ganzen Zahlen.

§. 34. 1. Eine Zahl a mit einer Zahl b multiplicieren heißt a so vielmal als Summand setzen, als b Einheiten enthält. Man nennt a den Multiplicand, b den Multiplicator und beide Factoren; die Zahl, welche man durch das Multiplicieren erhält, heißt das Product. Das Product ist demnach eine Summe gleicher Summanden; der Multiplicand ist einer dieser gleichen Summanden; der Multiplicator zeigt an, wie viele solche Summanden gesetzt werden sollen. Der Multiplicand kann eine benannte Zahl sein; der Multiplicator ist immer eine unbenannte Zahl. Das Product aus dem Multiplicand a und dem Multiplicator b bezeichnet man durch $a \times b$, oder $a . b$ (d. i. a b mal), oder, wenn beide Factoren allgemeine Zahlen sind, auch bloß durch $a b$.

Das Product zweier ganzer Zahlen wird auch ein Vielfaches des Multiplicands genannt. Z. B. $12 = 4 . 3$; 12 ist das 3fache von 4.

Folgesätze. a) Ist der Multiplicand 1, so ist das Product dem Multiplicator gleich.

b) Ist der Multiplicand 0, so ist auch das Product 0.

a) $1 . a = a$. b) $0 . a = 0$.

2. Unter dem Producte mehrerer Zahlen versteht man das Product, welches erhalten wird, indem man das Product der beiden ersten Zahlen mit der dritten, das neue Product mit der vierten Zahl, u. s. w. multipliciert. Hiernach ist

$$a . b . c = (ab) . c,$$
$$a . b . c . d = [(ab) . c] . d, \text{ u. s. w.}$$

§. 35. Ein Product, dessen Factoren einander gleich sind, wird abgekürzt dadurch bezeichnet, dass man nur einen Factor anschreibt und ihm rechts oben die Zahl beisetzt, welche anzeigt, wie vielmal derselbe vorkommt; z. B.:

$$a . a . a . a . a = a^5.$$

Ein Product gleicher Factoren heißt eine **Potenz**; die Anzahl der gleichen Factoren heißt der **Potenzexponent**, auch bloß **Exponent**, und der Factor, der so vielmal vorkommt, als der Exponent anzeigt, die **Basis** oder **Grundzahl**. In der Potenz a^m, welche gelesen wird: „a zur mten" (Potenz erhoben) oder „a mit m potenziert", ist a die Basis, m der Exponent. Die zweite Potenz a^2 nennt man insbesondere auch das **Quadrat**, die dritte a^3 den **Cubus** von a.

Wenn in einem mehrgliedrigen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Basis vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Übersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten zu **ordnen**, indem man entweder mit der höchsten Potenz anfängt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läßt, oder indem man von der niedrigsten Potenz der gemeinschaftlichen Basis zu immer höheren Potenzen übergeht. Im ersten Falle heißt der Ausdruck nach **fallenden**, im zweiten nach **steigenden** Potenzen der gemeinschaftlichen Basis geordnet. So ist z. B. der Ausdruck

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

nach fallenden Potenzen von x, und zugleich nach steigenden Potenzen von y geordnet.

§. **36.** **Ein Product bleibt unverändert, wenn man die Factoren unter einander vertauscht.** (Das **Commutationsgesetz der Multiplication.**)

Es sei a mit b zu multiplicieren. Bildet man b Reihen, deren jede a Einheiten enthält, nämlich

$$\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (a mal)} \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{(b mal),} \end{array}$$

so erhält man offenbar gleich viele Einheiten, ob man die Einheiten aller Horizontalreihen, oder die Einheiten aller Verticalreihen zählt. Im ersten Falle erhält man a b mal, also a.b, im zweiten b a mal, also b.a. Es ist daher

$$a.b = b.a.$$

Der Satz gilt auch für jede beliebige Zahl von Factoren. Da nämlich in dem Producte mehrerer Factoren je zwei auf einander folgende Factoren bei ungeänderter Stellung der übrigen vertauscht werden dürfen, so kann durch wiederholtes Vertauschen zweier solcher Factoren jeder Factor an jede vorgeschriebene Stelle gebracht werden. So ist z. B. für drei Factoren

$$a.b.c = a.c.b = c.a.b = c.b.a = b.c.a = b.a.c.$$

Hier wurde vorausgesetzt, dass die Factoren unbenannt sind. Ist der Multiplicand eine benannte Zahl aE, wo E die Benennung bezeichnet, so hat man $aE.b = (ab)E = (ba)E$; allein es ist auch $bE.a = (ba)E$, folglich $aE.b = bE.a$ (§. 8, 2). Man darf also auch in diesem Falle die Factoren verwechseln, sobald dabei die Benennung des Multiplicands auf den früheren Multiplicator, der nun als Multiplicand auftritt, übertragen wird. Z. B.: 8 fl. × 5 = 5 fl. × 8 = 40 fl.

Folgesatz. Der Coefficient kann als Factor der Hauptgröße, vor welcher er steht, betrachtet werden.

$$3a = a + a + a = a.3 = 3.a.$$

Zusatz. Damit dem Commutationsgesetze der Multiplication allgemeine Giltigkeit gewahrt bleibe, muss man auch

$$1.a = a.1 \qquad \text{und} \qquad 0.a = a.0$$

annehmen dürfen. Dadurch erhalten dann auch die Ausdrücke $a.1$ und $a.0$, welche nach der im §. 34 gegebenen Erklärung der Multiplication keinen Sinn haben, ihre ganz bestimmte Bedeutung. Es ist nämlich

$$a.1 = 1.a = a \qquad \text{und} \qquad a.0 = 0.a = 0; \text{ d. h.}$$

a) Eine Zahl mit 1 multipliciert gibt sich selbst zum Producte.

b) Eine Zahl mit 0 multipliciert gibt 0 zum Producte.

Verbindung der Multiplication mit sich selbst.

§. **37.** 1. Ein Product wird mit einer Zahl multipliciert, indem man einen Factor mit ihr multipliciert.

$$(ab).c = (ac).b = a.(bc).$$

2. Eine Zahl wird mit einem Producte multipliciert, indem man sie mit dem einen Factor, und das erhaltene Product mit dem andern Factor multipliciert.

$$a.(bc) = (ab).c = (ac).b.$$

Diese zwei Sätze, welche die Associationsgesetze der Multiplication heißen, folgen unmittelbar aus dem in §. 36 erwiesenen Commutationsgesetze.

§. **38.** Potenzen derselben Basis werden multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

$$a^m.a^n = a^{m+n}.$$

Beweis. $a^m.a^n = a.a.a....(m \text{ mal}).a.a.a....(n \text{ mal})$
$= a.a.a....(m + n) \text{ mal} = a^{m+n}.$

Verbindung der Multiplication mit der Addition und Subtraction.

§. **39.** 1. Eine Summe wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jeden Summanden mit dieser Zahl multipliciert und die Theilproducte addiert.

$$(a + b).c = ac + bc.$$

Beweis. $(a+b).c = (a+b)+(a+b)+(a+b)+\ldots$ (c mal)
$= a+a+a+\ldots$ (c mal) $+ b+b+b+\ldots$ (c mal) (§. 11)
$= ac + bc$.

2. Umgekehrt: Zwei Producte, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, werden addiert, indem man die Summe der nicht gemeinschaftlichen Factoren mit dem gemeinschaftlichen Factor multipliciert.

$$ac + bc = (a+b).c.$$

§. **40.** 1. Eine Differenz wird mit einer Zahl multipliciert, indem man den Minuend und den Subtrahend mit dieser Zahl multipliciert und das zweite Product vom ersten subtrahiert.

$$(a-b).c = ac - bc.$$

Der Beweis wird ähnlich wie zu §. 39, 1. geführt.

2. Umgekehrt: Zwei Producte, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, werden subtrahiert, indem man die Differenz der nicht gemeinschaftlichen Factoren mit dem gemeinschaftlichen Factor multipliciert.

$$ac - bc = (a-b).c.$$

Die durch §. 39, 2 und §. 40, 2 ausgedrückten Operationen nennt man das Herausheben des gemeinschaftlichen Factors.

§. **41.** 1. Eine Zahl wird mit einer Summe multipliciert, indem man sie mit jedem Summanden multipliciert und die Theilproducte addiert.

$$a.(b+c) = ab + ac.$$

Beweis. $a.(b+c) = (b+c).a$ (§. 36) $= ba + ca$ (§. 39, 1)
$= ab + ac$ (§. 36).

2. Eine Zahl wird mit einer Differenz multipliciert, indem man sie mit dem Minuend und dem Subtrahend multipliciert und von dem ersten Producte das zweite subtrahiert.

$$a.(b-c) = ab - ac.$$

Der Beweis ist dem vorigen analog.

Die in den §§. 39—41 angeführten Sätze heißen die Distributionsgesetze der Multiplication.

§. **42.** 1. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jedes Glied desselben mit dieser Zahl multipliciert und den einzelnen Producten die Zeichen der Glieder des Multiplicands gibt.

$$(a-b-c+d-e)\,f = af - bf - cf + df - ef.$$

Folgt aus §. 39, 1 und §. 40, 1.

2. Eine Zahl wird mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke multipliciert, indem man sie mit jedem Gliede desselben multipliciert und die einzelnen Producte additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem sie aus der Multiplication mit additiven oder subtractiven Gliedern hervorgehen.

$$a\,(b-c-d+e-f) = ab - ac - ad + ae - af.$$

Folgt aus §. 41.

3. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke multipliciert, indem man den ganzen Multiplicand, d. i. jedes Glied desselben, mit jedem Gliede des Multiplicators multipliciert und die einzelnen Producte additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem die bezüglichen Factoren gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben.

$$(a-b+c)\,(d-e-f)=ad-bd+cd-ae+be-ce-af+bf-cf.$$

Folgt aus 1. und 2.

§. **43.** Bei mehrgliedrigen Ausdrücken, welche nach den Potenzen derselben Basis fortschreiten, erhält man, wenn dieselben gleichartig geordnet sind, durch die Multiplication des Multiplicands mit den einzelnen Gliedern des Multiplicators Theilproducte, welche eben so geordnet sind. Man schreibt diese Theilproducte, um sie leichter zu reducieren, so an, dass ihre gleichnamigen Glieder unter einander zu stehen kommen. Z. B.:

$$\begin{array}{rrrrrl} 4a^2 & -\;3a & -\;4 & & & \text{Multiplicand} \\ 3a^2 & -\;7a & +\;5 & & & \text{Multiplicator} \\ \hline 12a^4 & -\;9a^3 & -\;12a^2 & & & \\ & -\;28a^3 & +\;21a^2 & +\;28a & & \\ & & +\;20a^2 & -\;15a & -\;20 & \\ \hline 12a^4 & -\;37a^3 & +\;29a^2 & +\;13a & -\;20 & \text{Product.} \end{array}$$

Zusatz. Insbesondere erhält man:

1. $(a+b)^2=(a+b)\,(a+b)=a^2+2ab+b^2$, und
$(a-b)^2=(a-b)\,(a-b)=a^2-2ab+b^2$; d. h.

Das Quadrat der Summe oder der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate dieser Zahlen, bezüglich vermehrt oder vermindert um das doppelte Product derselben.

2. $(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$; d. h.

Das Product aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

§. **44.** Aus den Sätzen der vorhergehenden Paragraphen lassen sich für die Bestimmung des Productes von irgend zwei Gliedern beliebiger Ausdrücke folgende Regeln zusammenfassen:

1. Rücksichtlich des Zeichens ist das Product zweier Glieder additiv oder subtractiv zu setzen, je nachdem diese Glieder gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben.

2. Der Coefficient des Productes zweier Glieder ist das Product aus den Coefficienten dieser Glieder; denn

$$3a.4b=3.a.4.b=3.4.a.b=12ab.$$

3. Die Hauptgröße des Productes zweier Glieder erhält man, indem man die Factoren, welche in den Hauptgrößen dieser Glieder vorkommen, (in alphabetischer Ordnung) neben einander stellt, somit bei Potenzen derselben Basis die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Multiplication.

§. **45.** 1. Gleiches mit Gleichem multipliciert gibt Gleiches.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist $ac = bd$.

Folgt unmittelbar aus §. 8, 3.

2. Gleiches mit Ungleichem multipliciert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a = b$ und $c > d$, so ist $ac > bd$.

Beweis. Es sei $c = d + w$, so ist (nach 1.) $ac = b(d + w)$, oder $ac = bd + bw$ (§. 41, 1). Nun ist $bd + bw > bd$ (§. 8, 5), somit auch $ac > bd$.

3. Ungleiches mit Ungleichem bei demselben Ungleichheitszeichen multipliciert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und $c > d$, so ist $ac > bd$.

Der Beweis ist unter Zuziehung von 2. und §. 41, 1 dem vorigen ähnlich.

II. Division mit absoluten ganzen Zahlen.

§. **46.** Eine Zahl a durch eine Zahl b dividieren heißt, aus a als dem Producte zweier Zahlen und b als dem einen der Factoren den andern Factor suchen. Man nennt das gegebene Product a den Dividend, den gegebenen Factor b den Divisor, den gesuchten Factor den Quotienten, und bezeichnet den letzteren mit $a : b$ oder $\frac{a}{b}$.

Ein Quotient ist also ein Ausdruck für diejenige Zahl, welche mit dem Divisor multipliciert den Dividend gibt; oder es ist

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Die Division ist, wenn der Multiplicator als Divisor gegeben ist, im Begriffe wesentlich verschieden von der Division, in welcher der Multiplicand als Divisor gegeben ist. Im ersten Falle ist die Division ein Theilen, wobei der Theil gesucht wird, welcher so vielmal genommen, wie der Divisor anzeigt, den Dividend hervorbringt; der Divisor ist in diesem Falle eine unbenannte Zahl, der Dividend kann auch eine Benennung haben, welche dann auch der Quotient erhält. Z. B. 15 fl. : 3 = 5 fl. Im zweiten Falle ist die Division ein Vergleichen oder Messen, wobei untersucht wird, wie vielmal der Divisor in dem Dividend enthalten ist; ist hier der Dividend benannt, so muss auch der Divisor benannt und zwar mit dem Dividend gleichnamig sein; der Quotient ist eine unbenannte Zahl. Z. B. 15 fl. : 3 fl. = 5.

Der Quotient, als reine Zahl betrachtet, ist jedoch bei gleichem Dividend und gleichem Divisor in beiden Fällen derselbe (§. 36), so dass man bei der Entwicklung der Divisionsgesetze diese beiden Arten der Division nicht weiter zu unterscheiden braucht.

Um die Division auszuführen, sucht man entweder in der Zahlenreihe diejenige Zahl auf, welche so vielmal gesetzt, wie der Divisor anzeigt, den Dividend gibt; oder man subtrahiert wiederholt den Divisor zuerst vom Dividend, dann von dem jedesmal erhaltenen Reste so oft als möglich; die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die Subtraction verrichtet werden kann, ist der Quotient. Die Division zweier Zahlen kann an der natürlichen Zahlenreihe nur dann ausgeführt werden, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors (§. 34, 1) ist.

Wir werden daher bei den folgenden Sätzen vorläufig voraussetzen, dass die Dividenden der vorkommenden Quotienten Vielfache ihrer Divisoren sind.

§. 47. **Folgesätze.** 1. Multipliciert man den Quotienten zweier Zahlen mit dem Divisor, so erhält man den Dividend.

$$(a : b) . b = a.$$

2. Dividiert man das Product zweier Zahlen durch den einen Factor, so erhält man den andern Factor.

$$a\,b : a = b; \qquad a\,b : b = a.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl multipliciert und durch dieselbe Zahl dividiert.

$$a = (ab) : b; \qquad a = (a : b) . b.$$

Die Multiplication und die Division sind demnach einander entgegengesetzt; letztere ist eine inverse Operation der ersteren, und zwar die einzige, da es wegen der Vertauschbarkeit zweier Factoren gleichgiltig ist, ob der erste Factor oder der zweite gesucht wird.

4. Jede Zahl durch sich selbst dividiert gibt 1 zum Quotienten.

$$a : a = 1 \text{; denn } 1 . a = a.$$

5. Jede Zahl durch 1 dividiert gibt sich selbst zum Quotienten.

$$a : 1 = a; \qquad 1 : 1 = 1.$$

6. Ein Quotient, dessen Dividend Null, und dessen Divisor von Null verschieden ist, ist gleich Null.

$$0 : a = 0; \text{ denn } 0 . a = 0.$$

7. Ein Quotient, dessen Dividend von Null verschieden, und dessen Divisor Null ist, ist unmöglich.

$a : 0$ oder $\frac{a}{0}$ ist, wenn a nicht Null ist, unmöglich; denn es gibt keine Zahl, welche mit 0 multipliciert das Product a gibt.

8. Ein Quotient, dessen Dividend und Divisor Null sind, ist unbestimmt.

$0 : 0 = a$, wo a eine beliebige Zahl bedeutet; den $a . 0 = 0$.

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist daher ein Symbol der Unbestimmtheit.

Verbindung der Division mit sich selbst und mit der Multiplication.

§. **48.** 1. Ein Product wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen der Factoren durch sie dividiert.

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}.b = a.\frac{b}{c}.$$

Beweis. a) Ist $\frac{a}{c}.b$ der richtige Quotient der Zahlen ab und c, so muss er mit dem Divisor c multipliciert, den Dividend ab geben (§. 46). Nun ist wirklich

$$\left\{\frac{a}{c}.b\right\}.c = \left\{\frac{a}{c}.c\right\}.b \text{ (§. 37, 1)} = a.b \text{ (§. 47, 1).}$$

b) Ebenso ist auch $a.\frac{b}{c}$ ein richtiger Ausdruck für den Quotienten $\frac{ab}{c}$; denn

$$\left\{a.\frac{b}{c}\right\}.c = a.\left\{\frac{b}{c}.c\right\} \text{ (§. 37, 1)} = a.b \text{ (§. 47, 1).}$$

2. Eine Zahl wird mit einem Quotienten multipliciert, indem man sie mit dem Dividend multipliciert und durch den Divisor dividiert.

$$a.\frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c}.b.$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus 1.

Folgesatz. Soll eine Zahl mit einer zweiten multipliciert und durch eine dritte dividiert werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man multipliciert und dividiert.

§. **49.** 1. Eine Zahl wird durch ein Product dividiert, indem man sie durch den einen Factor, und den erhaltenen Quotienten durch den andern Factor dividiert.

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

Beweis. Sowohl $\frac{a}{b} : c$ als $\frac{a}{b} : b$ entspricht der in §. 46 aufgestellten Erklärung des Quotienten. Denn es ist

$$\left\{\frac{a}{b}:c\right\}.bc = bc.\left\{\frac{a}{b}:c\right\} \text{ (§. 36)} = \frac{bc}{c}.\frac{a}{b} \text{ (§. 48, 2)}$$

$$= b.\frac{a}{b} \text{ (§. 47, 2)} = a \text{ (§. 47, 1).}$$

Ebenso erhält man

$$\left\{\frac{a}{c} : b\right\}.bc = a.$$

2. Ein Quotient wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Dividend durch sie dividiert oder den Divisor mit ihr multipliciert.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b = \frac{a}{bc}.$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus 1.

Folgesatz. Soll eine Zahl durch zwei Zahlen dividiert werden, so darf man entweder durch dieselben einzeln in beliebiger Reihenfolge, oder auch sogleich durch ihr Product dividieren.

§. **50.** 1. Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividiert, indem man sie durch den Dividend dividiert und mit dem Divisor multipliciert.

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b}.$$

Beweis. Es ist sowohl

$$\left\{\frac{a}{b} . c\right\} . \frac{b}{c} = \frac{a}{b} . \left\{c . \frac{b}{c}\right\} \text{ (§. 37, 1)} = \frac{a}{b} . b = a \text{ (§. 47, 1)},$$

als auch

$$\frac{ac}{b} . \frac{b}{c} = \left(\frac{ac}{b} . b\right) : c \text{ (§. 48, 2)} = ac : c \text{ (§. 47, 1)} = a \text{ (§. 47, 2)}.$$

2. Ein Quotient wird mit einer Zahl multipliciert, indem man den Dividend mit ihr multipliciert oder den Divisor durch sie dividiert.

$$\frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b} = a : \frac{b}{c}.$$

Folgt durch Umkehrung aus 1.

§. **51.** 1. Ein Product bleibt unverändert, wenn man den einen Factor mit einer Zahl multipliciert und den andern durch dieselbe Zahl dividiert.

$$ab = ac . (b : c) = (a : c) . bc.$$

Es ist

$$ab = a . \{(b : c) . c\} \text{ (§. 47, 3)} = ac . (b : c) \text{ (§. 37, 2)};$$
$$ab = a . \{(b . c) : c\} \text{ (§. 47, 3)} = (a : c) . bc \text{ (§. 48, 2)}.$$

2. Ein Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multipliciert oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a:c}{b:c}.$$

Es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{bc:c} \text{ (§. 47, 3)} = \frac{ac}{bc} \text{ (§. 50, 1)};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{(b:c).c} \text{ (§. 47, 3)} = \frac{a:c}{b:c} \text{ (§. 49, 1)}.$$

Die voranstehenden Sätze über die Division §§. 48—51 sind ganz analog den Sätzen über die Subtraction §§. 17—20.

§. **52.** Potenzen derselben Basis werden dividiert, indem man von dem Exponenten des Dividends den Exponenten des Divisors subtrahiert und die gemeinschaftliche Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Beweis. Damit hier die Division nach §. 46 ausführbar sei, muss vorausgesetzt werden, dass n nicht größer als m sei. Man setze $m = n + w$, oder $m - n = w$, wo auch $w = 0$ sein kann; dann ist

$$a^m : a^n = a^{n+w} : a^n = a^n \,.\, a^w : a^n \text{ (§. 39)}$$
$$= a^w \text{ (§. 47, 2)} = a^{m-n}.$$

Zusatz. Nach diesem Satze ist

$$a^{n+1} : a^n = a^1 \qquad \text{und} \qquad a^n : a^n = a^0.$$

Da aber die Ausdrücke a^1 und a^0 nach der in §. 35 gegebenen Erklärung einer Potenz keinen Sinn haben, so muss für dieselben, damit der obige Satz auch für die angeführten zwei Fälle Geltung behalte, erst die Bedeutung festgestellt werden. Nach den bisher entwickelten Divisionsgesetzen ist nun $a^{n+1} : a^n = a$ und $a^n : a^n = 1$; folglich ist a^1 gleichbedeutend mit a, und a^0 gleichbedeutend mit 1.

a) Die erste Potenz einer Zahl ist dieser Zahl selbst gleich.
b) Die nullte Potenz einer Zahl ist gleich 1.

Verbindung der Division mit der Addition und Subtraction.

§. 53. 1. Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch sie dividiert und die so erhaltenen Theilquotienten addiert.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Beweis. $\left\{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right\} . c = \frac{a}{c}. c + \frac{b}{c}. c$ (§. 39, 1) $= a + b$ (§. 47, 1).

2. Umgekehrt: Zwei Quotienten mit gleichem Divisor werden addiert, indem man die Summe ihrer Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividiert.

§. 54. 1. Eine Differenz wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Minuend und den Subtrahend durch dieselbe dividiert und von dem ersten Quotienten den zweiten subtrahiert.

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Beweis. $\left\{\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right\} . c = \frac{a}{c} . c - \frac{b}{c} . c$ (§. 40, 1) $= a - b$ (§. 47, 1).

2. Umgekehrt: Zwei Quotienten mit gleichem Divisor werden subtrahiert, indem man die Differenz ihrer Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividiert.

§. 55. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied desselben durch diese Zahl dividiert und den einzelnen Quotienten die Rechnungszeichen der Glieder des Dividends gibt.

$$\frac{a - b - c + d - e}{f} = \frac{a}{f} - \frac{b}{f} - \frac{c}{f} + \frac{d}{f} - \frac{e}{f}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich aus §. 53, 1 und 54, 1.

§. **56**. Es sei der Quotient $\frac{A}{B}$, wo A und B mehrgliedrige, und zwar gleichartig geordnete Ausdrücke bedeuten, zu entwickeln. Da der Dividend A das Product aus dem Divisor B und dem Quotienten ist, so ist nach §. 42, 3 und §. 43 das erste Glied in A das Product aus dem ersten Gliede in B und dem ersten Gliede im Quotienten. Man findet daher das erste Glied q des Quotienten, indem man das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors dividiert, und es ist

$$\frac{A}{B} = q + x,$$

wo x den noch fehlenden Theil des Quotienten vorstellt. Zur Bestimmung von x hat man

$$x = \frac{A}{B} - q = \frac{A}{B} - \frac{Bq}{B} \text{ (§. 47, 3)} = \frac{A - Bq}{B} \text{ (§. 54, 2)};$$

daher ist

$$\frac{A}{B} = q + \frac{A - Bq}{B}.$$

Man erhält also den noch fehlenden Theil des Quotienten, indem man mit dem ersten Gliede des Quotienten den Divisor multipliciert, das erhaltene Product von dem Dividend subtrahiert und den Rest durch den Divisor dividiert.

Auf der wiederholten Anwendung der Formel $\frac{A}{B} = q + \frac{A - Bq}{B}$ beruhet nun folgendes Verfahren für das Dividieren zweier mehrgliedriger Ausdrücke:

Man dividiere, nachdem die Glieder des Dividends und des Divisors gleichartig geordnet wurden, das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors; dadurch erhält man das erste Glied des Quotienten; mit diesem Theilquotienten multipliciere man den ganzen Divisor und subtrahiere das Product vom ganzen Dividend. Mit dem Reste verfahre man dann eben so, wie mit dem ursprünglichen Dividend, um das zweite Glied des Quotienten zu erhalten, u. s. f.

$$\begin{array}{lll}
\text{Z. B.:} & (3a^2 - 4ab - 4b^2) : (3a + 2b) = a - 2b \\
& 3a^2 + 2ab \\
& \underline{- \quad\; -} \\
& - 6ab - 4b^2 \\
& - 6ab - 4b^2 \\
& \underline{ + \qquad\; +} \\
& 0
\end{array}$$

Zusatz. Insbesondere erhält man:

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b, \text{ und}$$
$$(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b; \text{ d. h.}$$

Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen dividiert durch die Summe oder die Differenz dieser Zahlen gibt bezüglich die Differenz oder die Summe derselben Zahlen.

§. 57. Mit Rücksicht auf die vorhergehenden Sätze lassen sich zur Bestimmung des Quotienten zweier Glieder beliebiger Ausdrücke folgende Regeln zusammenstellen:

1. Bezüglich des Zeichens ist der Quotient zweier Glieder additiv oder subtractiv zu setzen, je nachdem die beiden Glieder gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben. (Folgt aus §. 42 und §. 47, 2.)

2. Der Coefficient des Quotienten zweier Glieder ist der Quotient der Coefficienten dieser Glieder.

3. Die Hauptgröße des Quotienten zweier Glieder ist die Hauptgröße des Dividends nach Weglassung derjenigen Factoren, welche auch im Divisor vorkommen, und zwar in gleicher Anzahl, als sie im Divisor enthalten sind, folglich bei Potenzen derselben Basis die gemeinschaftliche Basis mit einem Potenzexponenten, welcher gleich ist dem Exponenten des Dividends, vermindert um den Exponenten des Divisors.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Division.

§. 58. 1. Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$.

Folgt unmittelbar aus §. 8, 3.

2. Ungleiches durch Gleiches dividiert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und $c = d$, so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Beweis. Wäre nicht $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, so müsste $\frac{a}{c} \overline{\gtrless} \frac{b}{d}$ sein; dann wäre bezüglich auch $\frac{a}{c}.c \overline{\gtrless} \frac{b}{d}.d$ (§. 45, 1 und 2), daher $a \overline{\gtrless} b$ (§. 47, 1), was gegen die Voraussetzung ist.

3. Gleiches durch Ungleiches dividiert gibt Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen.

Ist $a = b$ und $c > d$, so ist $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Beweis. Wäre $\frac{a}{c} \overline{\gtrless} \frac{b}{d}$, so müsste in beiden Fällen $\frac{a}{c}.c > \frac{b}{d}.d$ (§. 45, 2 und 3), daher $a > b$ (§. 47, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

4. Ungleiches durch Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen dividiert gibt Ungleiches mit dem ersten Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und $c < d$, so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Beweis. Wäre $\frac{a}{c} \overline{\gtrless} \frac{b}{d}$, so müsste in beiden Fällen $\frac{a}{c}.c < \frac{b}{d}.d$ (§. 45, 2 und 4), daher $a < b$ (§. 47, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

III. Multiplication und Division mit algebraischen ganzen Zahlen.

§. **59.** Der für absolute Zahlen aufgestellte Begriff der Multiplication (§. 34) wird für positive und negative Zahlen mit Rücksicht auf deren Gegensatz dahin erweitert, dass man hier, je nachdem der Multiplicator positiv oder negativ ist, den Multiplicand selbst oder das Entgegengesetzte desselben so vielmal als Summand zu setzen hat, wie der absolute Wert des Multiplicators anzeigt.

Zwei gleich bezeichnete Factoren geben ein positives, zwei ungleich bezeichnete Factoren geben ein negatives Product.

$$(+a).(+b) = +ab,$$
$$(-a).(-b) = +ab,$$
$$(+a).(-b) = -ab,$$
$$(-a).(+b) = -ab.$$

Beweis. Um das Product $(+a).(+b)$ zu bilden, muss man den Multiplicand $+a$ selbst $b$mal als Summand setzen, wodurch man nach §. 29, Folges. 2, ein positives Resultat erhält.

$(-a).(-b)$ drückt die Forderung aus, dass man das Entgegengesetzte des Multiplicands $-a$, also $+a$, b mal als Summand zu setzen hat, wodurch man gleichfalls ein positives Resultat erhält.

Ähnlich sind die Beweise für den dritten und vierten Fall.

Folgesätze. 1. Das Product zweier algebraischer Zahlen bleibt ungeändert, wenn man dieselben unter einander vertauscht.

Es ist $\pm a . + b = \pm ab$, und $+ b . \pm a = \pm ba = \pm ab$ (§. 36); daher $\pm a . + b = + b . \pm a$. Ebenso folgt $\pm a . - b = - b . \pm a$.

2. Das Product von beliebig vielen positiven Zahlen ist positiv.

3. Das Product von lauter negativen Zahlen ist positiv, wenn die Anzahl der Factoren ein Vielfaches von 2 ist, sonst negativ.

§. **60.** Der in §. 46 für absolute Zahlen gegebene Begriff der Division gilt unverändert auch für algebraische Zahlen.

Der Quotient zweier algebraischer Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem dieselben gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

$$(+a) : (+b) = +q,$$
$$(-a) : (-b) = +q,$$
$$(+a) : (-b) = -q,$$
$$(-a) : (+b) = -q,$$

wo q den absoluten Wert des Quotienten vorstellt.

Beweis. Ist der Dividend (das Product) positiv, so müssen, wie aus §. 59 folgt, der Divisor und der Quotient (die beiden Factoren) gleich bezeichnet sein; also ist $(+ a) : (+ b) = + q$ und $(+ a) : (- b) = - q$.

Ist der Dividend negativ, so müssen Divisor und Quotient verschiedene Vorzeichen haben; also ist $(- a) : (+ b) = - q$ und $(- a) : (- b) = + q$.

§. **61.** Alle für die Producte und Quotienten absoluter Zahlen erwiesenen Sätze lassen sich aus den Commutationsgesetzen

$$a + b = b + a \text{ (§. 11) und}$$
$$a.b = b.a \text{ (§. 36),}$$

wo a und b absolute ganze Zahlen bedeuten, durch bloße Umformungen herleiten. Da nun diese zwei Gesetze auch für algebraische Zahlen richtig sind (§. 31, 3 und §. 59, Folgesatz 1), so gelten alle für absolute ganze Zahlen bewiesenen Sätze über die Producte und Quotienten auch für algebraische ganze Zahlen.

Insbesondere gelten die Sätze über die Multiplication und Division mehrgliedriger Ausdrücke (§§. 42—44 und 55—57) auch für algebraische Summen; nur müssen die additiven und subtractiven Glieder (mit Rücksicht auf §. 32) hier als positive und negative Summanden betrachtet werden.

In Beziehung auf die Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen (§. 45 und 58) gilt die in §. 33, Zusatz 1 gemachte Bemerkung.

IV. Dekadische ganze Zahlen.

1. Zahlensysteme.

Zahlensysteme überhaupt.

§. **62.** Unter einem Zahlensystem versteht man eine solche Darstellung der besonderen Zahlen, mittelst welcher nach einem bestimmten Gesetze durch verhältnismäßig wenige Zahlwörter und Zahlzeichen jede beliebig große Zahl ausgedrückt werden kann.

Um ein Zahlensystem zu bilden, zählt man in der natürlichen Zahlenreihe nur bis zu einer bestimmten, jedoch 1 überschreitenden Zahl b, welche man noch unmittelbar auffassen will, und welche die Grundzahl oder Basis des Zahlensystems heißt. Betrachtet man diese als eine neue Einheit und kommt dann beim weiteren Zählen auf eine Zahl, welche diese neue Einheit so vielmal enthält, wie die Basis anzeigt, also auf die Zahl $b.b = b^2$, so sieht man diese wieder als eine neue Einheit oder als Einheit der nächst höheren Ordnung an. Gelangt man bei fortgesetztem Zählen zu einer Zahl, welche die höhere Einheit b^2 so vielmal enthält, wie b anzeigt, also zu der Zahl $b^2.b = b^3$, so wird diese als Einheit einer noch höheren Ordnung angesehen. Durch Fortsetzung dieses Vorganges kann man neue Einheiten immer höherer Ordnungen bilden.

Die auf einander folgenden Einheiten b, b^2, b^3... erscheinen als Potenzen der Basis b und heißen, den Exponenten derselben gemäß, Einheiten der ersten, zweiten, dritten,... Ordnung, oder auch des ersten, zweiten, dritten,... Ranges, zum Unterschiede von der ursprünglichen Einheit, die man, weil $1 = b^0$ (§. 52, Zus.) ist, auch Einheit der nullten Ordnung nennen kann.

§. **63.** Jede Zahl kann als eine Summe von Theilen dargestellt werden, deren jeder die Einheit einer bestimmten Ordnung, versehen mit einem Coefficienten, welcher kleiner als die Basis ist, enthält.

Beweis. Ist b^n die höchste Einheit, welche in der ganzen Zahl N vorkommt, so kann man

$$N = a_n b^n + N_1$$

setzen, wo $a_n < b$ und $N_1 < b^n$ sein muss. Ebenso kann man weiter setzen

$$N_1 = a_{n-1} b^{n-1} + N_2, \text{ wo } a_{n-1} < b,\ N_2 < b^{n-1};$$
$$N_2 = a_{n-2} b^{n-2} + N_3, \text{ wo } a_{n-2} < b,\ N_3 < b^{n-2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_{n-2} = a_2 b^2 + N_{n-1}, \text{ wo } a_2 < b,\ N_{n-1} < b^2;$$
$$N_{n-1} = a_1 b + a_0, \text{ wo } a_1 < b,\ a_0 < b.$$

Substituiert man nach und nach die Werte von N_1, N_2,...N_{n-2}, N_{n-1} in N, so erhält man

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0,$$

wobei übrigens von den Coefficienten a_{n-1}, a_{n-2},... a_1, a_0 einige oder auch alle 0 sein können.

Dieser Ausdruck ist daher die allgemeine Form für jede beliebige ganze Zahl in dem Zahlensysteme, dessen Basis b ist.

Um nun in diesem Systeme alle beliebigen ganzen Zahlen zu benennen, genügt es, bloß denjenigen Zahlen, welche kleiner als b sind, so wie den auf einander folgenden Potenzen von b besondere Namen zu geben. Um in diesem Systeme alle beliebigen Zahlen schriftlich darzustellen, bedarf es nur besonderer Zeichen (Ziffern) für die Zahlen, welche kleiner als b sind, und des Zeichens 0 für das Nichtvorhandensein einer bestimmten Potenz von b, somit zusammen so vieler Ziffern, wie die Basis b anzeigt.

Da man jede ganze Zahl, die größer als 1 ist, als Basis eines Zahlensystems wählen kann, so lassen sich unzählig viele verschiedene Zahlensysteme herstellen. Die wenigsten Zeichen verlangt das dyadische Zahlensystem mit der Basis zwei, indem man darin jede Zahl durch die zwei Zeichen 0 und 1 darstellen kann; dasselbe führt jedoch die Unbequemlichkeit mit sich, dass auch kleine Zahlen schon mit vielen Ziffern geschrieben werden müssen.

Dekadisches Zahlensystem.

§. **64.** Das gegenwärtig allgemein gebräuchliche Zahlensystem ist das dekadische, dessen Basis zehn (deka) ist.

In diesem drückt man die ersten neun Zahlen, Einer, mit den bekannten Zahlwörtern eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun aus und nennt die Einheit der ersten, zweiten, dritten, vierten, ... Ordnung bezüglich einen Zehner, ein Hundert, ein Tausend, ein Zehntausend, ... Verbindet man mit jenen Zahlwörtern die Benennungen der auf einander folgenden dekadischen Einheiten, so kann dadurch jede beliebig große Zahl benannt werden.

Um die dekadischen Zahlen schriftlich darzustellen, genügen die Ziffern für die ersten neun Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zu denen noch die 0 kommt.

Bezeichnet man mit a, b, c, ... p, q, r irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, ... 8, 9, so ist der Ausdruck

$$r.10^n + q.10^{n-1} + p.10^{n-2} + \ldots + c.10^2 + b.10 + a$$

die allgemeine Form einer dekadischen ganzen Zahl. Man kürzt aber diese Form dahin ab, dass man die Additionszeichen und die dekadischen Einheiten $10, 10^2, 10^3$, weglässt und nur die Coefficienten (Ziffern) anschreibt, und jeder Ziffer einen zehnfachen Wert anweist, wenn man sie in die nächste Rangstelle nach links versetzt. In diesem Sinne ist z. B.

$$35684 = 3.10^4 + 5.10^3 + 6.10^2 + 8.10 + 4, \text{ oder}$$
$$= 30000 + 5000 + 600 + 80 + 4.$$

§. **65.** Der Rang jeder einzelnen Ziffer wird durch den Exponenten derjenigen Potenz von 10 bestimmt, welche die dekadische Einheit jener Stelle ist; man kann daher diesen Exponenten von 10 den Rangexponenten der Ziffer nennen. Z. B. in 35684 hat die Ziffer 6 den Rangexponenten 2, die höchste Ziffer 3 den Rangexponenten 4.

Folgesätze. 1. Der Rangexponent der höchsten Ziffer einer dekadischen ganzen Zahl ist um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern.

2. Bedeutet N eine dekadische ganze Zahl, deren höchste Ziffer den Rangexponenten n hat, also eine (n + 1) ziffrige ganze Zahl, so ist

$$N \geqq 10^n \text{ und } N < 10^{n+1}.$$

2. Das Rechnen mit dekadischen Zahlen.

§. **66.** Das Rechnen mit dekadischen ganzen Zahlen beruht auf den Vorschriften, welche für das Rechnen mit mehrgliedrigen Ausdrücken, die nach den Potenzen derselben Basis geordnet sind, gelten; nur muss dabei wegen der einfacheren Darstellung der dekadischen Zahlen durch neben einander geschriebene Ziffern auf den Rang dieser Ziffern Rücksicht genommen werden.

$$\begin{array}{rlllll} \text{Ist } M = & d.10^3 + & c.10^2 + & b.10 + & a, & \text{und} \\ N = & & r.10^2 + & q.10 + & p, & \text{so ist} \\ \hline M + N = & d.10^3 + & (c+r).10^2 + & (b+q).10 + & (a+p). & \end{array}$$

Dekadische Zahlen werden demnach addiert, indem man die Ziffern von gleicher Rangstelle addiert.

Ist die Summe der Ziffern einer Rangstelle zweiziffrig, z. B. $b + q = 1.10 + m$, so behalte man an dieser Stelle nur die niedrigere Ziffer m, und addiere die höhere zu den Ziffern dieser höheren Rangstelle. Die obige Summe nimmt in diesem Falle die Gestalt an:

$$M + N = d.10^3 + (c + r + 1).10^2 + m.10 + (a + p).$$

§. **67.** Ist

$$\begin{array}{rl} M = d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a, & \text{und} \\ N = \quad\quad r.10^2 + q.10 + p, & \text{so ist} \\ \hline M - N = d.10^3 + (c - r).10^2 + (b - q).10 + (a - p). & \end{array}$$

Beim Subtrahieren dekadischer Zahlen werden daher die Ziffern derselben Rangstelle subtrahiert.

Ist in einer Rangstelle die Ziffer des Subtrahends größer als die des Minuends, so vermehrt man die letztere, um subtrahieren zu können, um 10, und vermehrt, damit die Differenz unverändert bleibe (§. 20, 2), auch den Subtrahend um 10 Einheiten in derselben oder um 1 Einheit in der nächst höheren Rangstelle. Ist z. B. $q > b$, so nimmt die Differenz die Gestalt an:

$$M - N = d.10^3 + [c - (r + 1)].10^2 + [(b + 10) - q].10 + (a - p).$$

§. **68.** Wenn $M = e.10^4 + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$, so ist

$$M.p = ep.10^4 + dp.10^3 + cp.10^2 + bp.10 + ap.$$

Eine mehrziffrige Zahl wird daher mit einer einziffrigen multipliciert, indem man die Einer, Zehner, Hunderte,... des Multiplicands mit dem Multiplicator multipliciert und die einzelnen Producte folgeweise als Einer, Zehner, Hunderte,... zusammenstellt.

Ist eines dieser Producte zweiziffrig, z. B. $cp = r.10 + s$, so behalte man an dieser Stelle nur die niedrigere Ziffer s, und zähle die höhere r zu dem Producte in dieser höheren Rangstelle.

§. **69.** Ist M irgend eine mehrziffrige Zahl und

$$N = p.10^3 + q.10^2 + r.10 + s, \text{ so ist}$$

$$M.N = M\,p.10^3 + M\,q.10^2 + M\,r.10 + M\,s.$$

Um daher zwei mehrziffrige Zahlen mit einander zu multiplicieren, multipliciert man den Multiplicand mit jeder Ziffer des Multiplicators, von der höchsten angefangen, multipliciert dann die erhaltenen Theilproducte der Ordnung nach mit den fallenden Potenzen von 10, was dadurch geschieht, dass man jedes folgende Product um eine Stelle weiter gegen die Rechte rückt, und addiert die unter einander stehenden Ziffern der Theilproducte.

Z. B.
$$\begin{array}{r} 7318 \times 473 \\ \hline 2927200 \\ 512260 \\ 21954 \\ \hline 3461414 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{l} 7318 \times 473 \\ \hline 29272 \\ \;\;51226 \\ \;\;\;\;21954 \\ \hline 3461414 \end{array}$$

§. **70.** Aus den §§. 55 und 56 ergibt sich, wenn die dort betrachteten mehrgliedrigen Ausdrücke dekadische Zahlen, d. i. nach den fallenden Potenzen von 10 geordnete Polynome sind, für das *Dividieren dekadischer Zahlen* folgendes Verfahren:

Man nimmt so viele höchste Ziffern des Dividends, als der Divisor hat, oder wenn diese kleiner wären als der Divisor, um eine mehr als ersten Theildividend an, multipliciert mit der dadurch gefundenen höchsten Ziffer des Quotienten den Divisor und subtrahiert das Product von dem ersten Theildividend. Zu dem Reste setzt man die nächstfolgende Ziffer des Dividends, bestimmt aus diesem neuen Theildividend die zweite Ziffer des Quotienten und setzt dieses Verfahren fort, bis alle Ziffern des Dividends in Rechnung gezogen wurden. Dabei ist zu beachten, dass der Rest, der aus der Subtraction der Theilproducte entsteht, immer kleiner sein muss als der Divisor, da man sonst im Quotienten eine zweite Ziffer desselben Ranges erhielte.

Z. B. $43741 : 83 = 527$, oder kürzer $43741 : 83 = 527$

$$\begin{array}{r} 415 \\ \hline 224 \\ 166 \\ \hline 581 \\ 581 \\ \hline 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 224 \\ 581 \\ 0 \end{array}$$

Bei der zweiten Form wurden die Theilproducte sogleich während der Multiplication subtrahiert und nur die Reste angeschrieben.

V. Theilbarkeit der Zahlen.

§. **71.** Eine Zahl a heißt durch eine andere Zahl b *theilbar*, wenn sie durch dieselbe dividiert eine ganze Zahl zum Quotienten gibt. Der Dividend a heißt in diesem Falle ein *Vielfaches* (§. 34, 1) von b, und b ein *Maß* von a.

Eine Zahl, welche nur durch die Einheit und durch sich selbst theilbar ist, wird eine *absolute Primzahl*, auch bloß *Primzahl* genannt; jede andere Zahl heißt eine *zusammengesetzte Zahl*.

Eine Zahl, durch welche zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar sind, wird ein *gemeinschaftliches Maß* dieser Zahlen genannt. Unter dem *größten gemeinschaftlichen Maße* mehrerer Zahlen versteht man die *größte Zahl*, durch welche diese Zahlen theilbar sind. Zahlen, welche außer der Einheit kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen *Primzahlen gegen einander* oder *relative Primzahlen*.

Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen. Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen versteht man die kleinste Zahl, welche durch alle jene Zahlen theilbar ist.

Ist eine Zahl a durch eine andere b nicht theilbar, so heißt die Zahl r, welche erhalten wird, wenn man von dem Dividende a das größte Vielfache von b, welches darin vorkommt, z. B. bq, subtrahiert, der Rest der Division. Es ist also $r = a - bq$, und daher $a = bq + r$.

1. Gemeinschaftliches Maß der Zahlen.

§. 72. 1. Jedes gemeinschaftliche Maß zweier oder mehrerer Zahlen ist auch ein Maß ihrer Summe.

Beweis. Es sei m ein Maß der Zahlen a, b, c. Setzt man $a : m = \alpha$, $b : m = \beta$, $c : m = \gamma$, wo α, β, γ ganze Zahlen bedeuten, so ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, $c = m\gamma$, und $a + b + c = m\alpha + m\beta + m\gamma$; folglich $(a + b + c) : m = \alpha + \beta + \gamma$, somit m ein Maß von $a + b + c$.

2. Jedes gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen ist auch ein Maß ihrer Differenz.

Beweis. Es sei $a : m = \alpha$ und $b : m = \beta$; dann ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, und $a - b = m\alpha - m\beta$; folglich $(a - b) : m = \alpha - \beta$.

3. Jedes Maß einer Zahl ist auch ein Maß jedes Vielfachen der Zahl.

Beweis. Es sei $a : m = \alpha$; dann ist $a = m\alpha$ und $ap = mp\alpha$; folglich $ap : m = p\alpha$.

§. 73. **Aufgabe.** Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

Man dividiere die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, sodann den Divisor durch den Divisionsrest, den neuen Divisor durch den neuen Rest, u. s. f., bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht; der letzte Divisor ist das größte gemeinschaftliche Maß der zwei gegebenen Zahlen.

Beweis. Sind a und b, wo $a > b$, die zwei gegebenen Zahlen und gibt

$a : b$	den Quotienten	q_1	mit dem Reste r_1,
$b : r_1$	„ „	q_2	„ „ „ r_2,
$r_1 : r_2$	„ „	q_3	„ „ „ r_3,
$r_2 : r_3$	„ „	q_4	„ „ „ r_4, u. s. w.,

so hat man, wenn $r_4 = 0$ angenommen wird,

$a = b\,q_1 + r_1$	und	$a - b\,q_1 = r_1$
$b = r_1 q_2 + r_2$	„	$b - r_1 q_2 = r_2$
$r_1 = r_2 q_3 + r_3$	„	$r_1 - r_2 q_3 = r_3$
$r_2 = r_3 q_4$	„	$r_2 - r_3 q_4 = 0.$

Zunächst ist klar, dass man bei fortgesetztem Dividieren endlich auf einen Rest $= 0$ kommen müsse, weil der jedesmalige Rest eine ganze Zahl und wenigstens um 1 kleiner als der Divisor, welcher der vorhergehende Rest war, sein muss.

Ist nun $r_4 = 0$, so folgt, wenn man die oben links stehenden Gleichungen von unten anfangend betrachtet, dass r_3 ein Maß von r_2, daher (nach §. 72) auch von dem Vielfachen $r_2 q_3$, also auch ein Maß von der Summe $r_2 q_3 + r_3$, d. i. von r_1 ist; dass r_3 ferner ein Maß von $r_1 q_2$, also auch von $r_1 q_2 + r_2$, d. i. von b, und endlich auch ein Maß von $b q_1$, somit auch von $b q_1 + r_1$, d. i. von a ist. r_3 ist demnach ein gemeinschaftliches Maß von a und b.

Es sei andererseits m irgend ein gemeinschaftliches Maß von a und b. Dann folgt durch Betrachtung der oben rechts stehenden Gleichungen: m ist ein Maß von dem Vielfachen $b q_1$, also auch von der Differenz $a - b q_1$, d. i. von r_1; daher ist m auch ein Maß von $r_1 q_2$, also auch von $b - r_1 q_2$, d. i. von r_2; dann ist m auch ein Maß von $r_2 q_3$, also auch von $r_1 - r_2 q_3$, d. i. von r_3. Hieraus folgt, dass m nicht größer als r_3 sein kann, dass mithin r_3 das größte gemeinschaftliche Maß von a und b ist.

Das hier angegebene Verfahren, zu a und b das größte gemeinschaftliche Maß zu finden, pflegt man die Kettendivision für a und b zu nennen.

Beispiele.

1) Um das gr. g. Maß von 1134 und 3654 zu finden, hat man

$$\begin{array}{rcll} 3654 : 1134 = 3 & \text{mit dem Reste} & 252 \\ 1134 : 252 = 4 & \text{„ \quad „ \quad „} & 126 \\ 253 : \mathbf{126} = 2 & \text{„ \quad „ \quad „} & 0 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r|r|l} 1134 & 3654 & 3 \\ \mathbf{126} & 252 & 4 \\ & 0 & 2 \end{array}$$

$$\text{gr. g. Maß} = 126.$$

2) Es soll das gr. g. Maß von $3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b$ und $a^2 - b^2$ gesucht werden.

$$\begin{array}{l} (3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b) : (a^2 - b^2) = 3a - 2 \\ \underline{\begin{array}{ll} 3a^3 & \quad - 3ab^2 \\ - & \quad + \end{array}} \\ \quad - 2a^2 + a + 2b^2 + b \\ \underline{\begin{array}{ll} \quad - 2a^2 & \quad + 2b^2 \\ \quad + & \quad - \end{array}} \\ \qquad + a + b \ \text{Rest.} \end{array}$$

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b.$$

Das gesuchte gr. g. Maß ist also der letzte Divisor $a + b$.

Bei allgemeinen Zahlenausdrücken muss man oft, um die Division ausführen zu können, den Dividend mit einem Nichtfactor des Divisors multiplicieren, oder den Divisor durch einen Nichtfactor des Dividends dividieren. Dass dadurch das gr. g. Maß der beiden Ausdrücke nicht geändert wird, folgt unmittelbar aus dem Begriffe des gr. g. Maßes zweier Zahlen.

Beispiel. Man suche das gr. g. Maß von

$$10x^2 + 14x - 12 \text{ und } 7x^2 + 22x + 16.$$

Damit die Division der beiden Ausdrücke in ganzen Zahlen ausgeführt werden könne, multipliciere man den ersten mit 7, welche Zahl kein Maß des zweiten Ausdruckes ist; man hat dann

$$\begin{array}{l}
(70x^2 + 98x - 84) : (7x^2 + 22x + 16) = 10 \\
\;\;70x^2 + 220x + 160 \\
\;\;\;\;- \;\;\;\;\;\;- \;\;\;\;\;\;- \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; - 122x - 244.
\end{array}$$

Wird der Rest $-122x - 244$ durch die Zahl -122, welche kein Maß des früheren Divisors ist, dividiert, wodurch man $x + 2$ erhält, so ergibt sich als weitere Rechnung:

$$\begin{array}{l}
(7x^2 + 22x + 16) : (x + 2) = 7x + 8 \\
\;\;7x^2 + 14x \\
\;\;\;\;- \;\;\;\;\;\;- \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;+ 8x + 16 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;+ 8x + 16 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;- \;\;\;\;\;\;- \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}$$

Das gr. g. Maß ist also $x + 2$.

§. **74.** Aus der in §. 73 begründeten Kettendivision zwischen zwei Zahlen ergeben sich nachstehende Folgesätze:

1. Jedes gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen ist auch ein Maß des größten gemeinschaftlichen Maßes derselben.

Folgt aus dem zweiten Theile des Beweises zu §. 73.

2. Ist bei der Kettendivision für a und b der letzte Divisor gleich 1, so sind a und b relative Primzahlen; und umgekehrt.

3. Sind a und b relative Primzahlen, so ist das größte gemeinschaftliche Maß von ap und bp gleich p.

Denn die Kettendivision für a und b gibt als letzten Divisor 1; setzt man nun in dieser Kettendivision statt a und b die Zahlen ap und bq, d. i. multipliciert man jede der in §. 73 angeführten Gleichungen mit p, so wird der letzte Divisor, also das größte gemeinschaftliche Maß von ap und bq, gleich p.

§. **75.** 1. Ein Quotient, welcher mit jeder von zwei relativen Primzahlen multipliciert eine ganze Zahl zum Producte gibt, ist selbst eine ganze Zahl.

Beweis. Es seien a und b relative Primzahlen und die Producte (p : q) a und (p : q) b ganze Zahlen. Dann sind auch ap : q und bp : q ganze Zahlen und ist somit q ein gemeinschaftliches Maß von ap und bp. Zwischen den Zahlen ap und bp ist aber, da a und b relativ prim sind, p das größte gemeinschaftliche Maß (§. 74, 3); mithin ist q ein Maß von p (§. 74, 1), und daher der Quotient p : q eine ganze Zahl.

2. Ist eine Zahl durch zwei relative Primzahlen theilbar, so ist sie auch durch das Product derselben theilbar.

Beweis. Es seien a und b relative Primzahlen und $p:a$ und $p:b$ ganze Zahlen. Dann sind auch $(p:ab)b$ und $(p:ab)a$ ganze Zahlen; also muss nach 1. auch der Quotient $p:ab$ eine ganze Zahl sein.

3. Ist ein Product zweier Factoren durch eine Zahl theilbar, welche gegen den einen Factor eine relative Primzahl ist, so muss der zweite Factor durch diese Zahl theilbar sein.

Beweis. Es sei ap durch b theilbar und b gegen a eine relative Primzahl. Da $ap:b$ und $bp:b$, oder $(p:b)a$ und $(p:b)b$ ganze Zahlen sind, muss nach 1. auch $p:b$ eine ganze Zahl sein.

4. Ist eine Zahl gegen zwei oder mehrere andere Zahlen eine relative Primzahl, so ist sie es auch gegen das Product derselben.

Beweis. Es sei m eine relative Primzahl gegen a, b und c. Wäre $abc:m$ eine ganze Zahl, so müsste nach 3. auch $bc:m$, und dann aus demselben Grunde auch $c:m$ eine ganze Zahl sein, was jedoch der Annahme widerspricht.

5. Die Potenzen zweier relativer Primzahlen sind selbst relative Primzahlen.

Beweis. Sind a und b relative Primzahlen, so muss nach 4. auch a gegen bb, ferner bb gegen aa, ebenso aa gegen bbb, u. s. w., allgemein a^m gegen b^n eine relative Primzahl sein.

§. 76. Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß mehrerer Zahlen zu finden.

Ist das gr. g. Maß der Zahlen a, b, c und d zu finden, so suche man zuerst das gr. g. Maß von a und b, dieses sei m; dann suche man das gr. g. Maß von m und c, dieses sei n; endlich suche man das gr. g. Maß von n und d, dieses sei p; p ist dann das gr. g. Maß von a, b, c, d.

Beweis. Nach der Voraussetzung enthält m alle gemeinschaftlichen Factoren von a und b; n enthält alle gemeinschaftlichen Factoren von m und c, also auch von a, b und c; p endlich enthält alle gemeinschaftlichen Factoren von n und d, folglich auch von a, b, c und d; p ist also das gr. g. Maß von a, b, c und d.

Beispiele. 1) Man suche das gr. g. Maß von 1554, 3552 und 5143.

1554	3552	2	222	5143	23
222	444	3	0	703	
	0	2		**37**	6

222 ist das gr. g. Maß von 1554 und 3552.

37 ist das gr. g. Maß von 222 und 5143, also auch von 1554, 3552 und 5143.

2) Man suche das gr. g. Maß von

$$3x^2 - 2xy - 5y^2,\ 2x^2 + 9xy + 7y^2 \text{ und } 2x^2 - 2y^2.$$

Als das gr. g. Maß von $3x^2 - 2xy - 5y^2$ und $2x^2 + 9xy + 7y^2$ erhält man $x + y$.

Von $x + y$ und $2x^2 - 2y^2$ ist ferner $x + y$ das gr. g. Maß, welches daher zugleich das gr. g. Maß der gegebenen drei Ausdrücke ist.

2. Gemeinschaftliches Vielfaches der Zahlen.

§. **77. Aufgabe.** Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen zu finden.

Man suche zu den zwei gegebenen Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß, dividiere durch dieses eine der beiden Zahlen und multipliciere mit dem Quotienten die andere; das Product ist das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Beweis. Es seien a und b die gegebenen Zahlen. Haben diese kein gemeinschaftliches Maß, so ist ihr Product ab selbst zugleich ihr kl. g. Vielfaches. Sind aber a und b nicht relative Primzahlen, so sei m ihr gr. g. Maß und zwar $a : m = \alpha$, $b : m = \beta$, wo α und β keinen gemeinschaftlichen Factor mehr enthalten können; man hat dann $a = m\alpha$, $b = m\beta$. Jedes Vielfache von a muss also die Factoren m und α, jedes Vielfache von b muss die Factoren m und β, und daher jedes gemeinschaftliche Vielfache von a und b die Factoren m, α und β enthalten; das Product nun, welches nur diese drei Factoren enthält, wird das kleinste g. Vielfache von a und b sein. Das kl. g. Vielfache von a und b ist also

$$\begin{aligned} m\alpha\beta &= m\alpha.\beta = a\,(b : m) \\ &= m\beta.\alpha = b\,(a : m). \end{aligned}$$

Beispiele. 1) Man suche das kl. g. Vielfache von 648 und 972.

$$\begin{array}{r|r|l} 648 & 972 & 1 \\ 0 & \mathbf{324} & 2 \end{array}$$

324 ist das gr. g. Maß.

$648 : 324 = 2;\ 972 . 2 = 1944$, oder

$972 : 324 = 3;\ 648 . 3 = 1944;$

kl. g. Vielfaches $= 1944$.

2) Es soll das kl. g. Vielfache von $9a^4x^2 - 4b^2y^4$ und $9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4$ gefunden werden.

Das gr. g. Maß dieser Ausdrücke ist $3a^2x - 2by^2$. Man hat dann

$$(9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4) : (3a^2x - 2by^2) = 3a^2x - 2by^2;$$

daher ist $(9a^4x^2 - 4b^2y^4)\,(3a^2x - 2by^2)$

$$= 27a^6x^3 - 18a^4bx^2y^2 - 12a^2b^2xy^4 + 8b^3y^6$$

das gesuchte kl. g. Vielfache.

§. 78. Aufgabe. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden.

Man suche zuerst das kl. g. Vielfache zweier Zahlen, dann das kl. g. Vielfache des eben gefundenen Vielfachen und der dritten Zahl, und fahre auf diese Art bis zur letzten gegebenen Zahl fort. Das zuletzt gefundene kl. g. Vielfache ist zugleich das kl. g. Vielfache aller gegebenen Zahlen.

Beweis analog mit dem Beweise in §. 76.

3. Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

§. 79. Eine dekadische Zahl N ist durch p theilbar, wenn die Summe der Producte aus ihren einzelnen Ziffern und denjenigen Resten, welche aus der Division ihrer dekadischen Einheiten durch p entstehen, durch p theilbar ist.

Beweis. Es sei die dekadische Zahl

$$N = a + b.10 + c.10^2 + \ldots + k.10^n$$

gegeben, in welcher a, b, c,..k die aufeinander folgenden Ziffern von der Rechten gegen die Linke bezeichnen. Dann ist

$$\frac{N}{p} = a.\frac{1}{p} + b.\frac{10}{p} + c.\frac{10^2}{p} + \ldots + .k\frac{10^n}{p}$$

Ist nun $\frac{10}{p} = q_1 + \frac{r_1}{p}, \frac{10^2}{p} = q_2 + \frac{r_2}{p}, \ldots$

$$\frac{10^n}{p} = q_n + \frac{r_n}{p},$$

so hat man

$$\frac{N}{p} = a.\frac{1}{p} + b\left(q_1 + \frac{r_1}{p}\right) + c\left(q_2 + \frac{r_2}{p}\right) + \ldots + k\left(q_n + \frac{r_n}{p}\right)$$

oder

$$\frac{N}{p} = b\,q_1 + c\,q_2 + \ldots + k\,q_n + \frac{a.1 + b\,r_1 + cr_2 + \ldots + k\,r_n}{p}.$$

Die Zahl N ist also durch p theilbar, wenn die Productensumme

$$S = a.1 + b\,r_1 + c\,r_2 + \ldots + k\,r_n$$

durch p theilbar ist.

Ist z. B. zu untersuchen, ob 415702 durch 7 theilbar sei, so findet man für $p = 7$ nach der Ordnung die Reste 1, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 6$, $r_4 = 4$, $r_5 = 5$, u. s. w. Man hat also

415702 ... Zahl,
546231 ... Reste.

Da nun $S = 2.1 + 0.3 + 7.2 + 5.6 + 1.4 + 4.5 = 70$ durch 7 theilbar ist, so ist auch die Zahl 415702 durch 7 theilbar.

Besondere Regeln.

§. 80. Eine dekadische Zahl ist durch 2 oder durch 5 theilbar, wenn ihre niedrigste Ziffer bezüglich durch 2 oder 5 theilbar ist.

Denn sowohl für $p = 2$ als für $p = 5$ wird $r_1 = r_2 = .. = 0$, also $S = a$.

Zusatz. Zahlen, welche durch 2 theilbar sind, heißen gerade, alle übrigen ungerade Zahlen. Die allgemeine Form für die geraden Zahlen ist $2m$, für die ungeraden $2m + 1$ oder $2m - 1$, wo m irgend eine ganze Zahl sein kann.

§. 81. Eine dekadische Zahl ist durch 4 theilbar, wenn ihre niedrigsten zwei Ziffern als Zahl betrachtet durch 4 theilbar sind.

Denn für $p = 4$ wird $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = .. = 0$, also $S = a + 2b$. $a + 2b$ ist aber (nach §. 72, 2) durch 4 theilbar, wenn die um $8b$ vergrößerte Zahl $a + 10b$ durch 4 theilbar ist.

§. 82. Eine dekadische Zahl ist durch 3 oder durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme bezüglich durch 3 oder durch 9 theilbar ist.

Denn sowohl für $p = 3$ als für $p = 9$ ist $r_1 = r_2 = r_3 = .. = 1$, daher $S = a + b + c + \ldots$

Zusatz. Ist eine Zahl durch 2 und durch 3 theilbar, so ist sie auch durch 6 theilbar (§. 75, 2).

§. 83. Eine dekadische Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Differenz zwischen den Ziffernsummen in den ungeraden und in den geraden Stellen durch 11 theilbar ist.

Für $p = 11$ ist $r_1 = r_3 = r_5 = .. = 10$ und $r_2 = r_4 = .. = 1$, also

$$S = a + 10b + c + 10d + e + 10f + \ldots$$

Diese Summe ist aber (nach §. 72, 1) durch 11 theilbar, wenn die um $11b + 11d + 11f + ..$ verminderte Zahl

$$a - b + c - d + e - f + \ldots,$$

$$\text{oder } (a + c + e + ..) - (b + d + f + ..)$$

durch 11 theilbar ist.

4. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen.

§. 84. Ist eine Zahl n kleiner als das Quadrat einer andern Zahl a und ist n mit Ausschluss der Einheit durch keine Zahl unter a theilbar, so ist n eine Primzahl.

Beweis. Gesetzt, n sei durch irgend eine Zahl p theilbar, so könnte nur $p \overline{\gtrless} a$ sein. Es sei nun $n : p = x$, also $n = px$, wo x eine ganze Zahl bezeichnet; dann wäre auch $n : x = p$, also n durch x theilbar. Aus $n < a^2$, und $p \overline{\gtrless} a$ folgt aber $n : p < a$, oder $x < a$. Es müsste daher unter der obigen Annahme n durch eine Zahl $x < a$ theilbar sein, was gegen die Voraussetzung ist. n muss also eine Primzahl sein.

§. 85. **Aufgabe.** Alle Primzahlen bis zu einer gegebenen Grenze zu bestimmen.

Man bilde die Quadrate der natürlichen Zahlen, bis das letzte Quadrat die gegebene Grenze überschreitet:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots$$

Es sind dann Primzahlen diejenigen Zahlen zwischen 1 und 4, welche mit Ausschluss der 1 durch keine Zahl unter 2 theilbar sind, also 1, 2 und 3; ferner diejenigen Zahlen zwischen 4 und 9, die mit Ausschluss der 1 durch keine Zahl unter 3 theilbar sind, also 5 und 7; u. s. w.

Die Richtigkeit folgt aus §. 84.

§. 86. Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich, und zwar nur auf **eine** Art, in lauter Primfactoren zerlegen.

Beweis. Jede zusammengesetzte Zahl a muss wenigstens in zwei Factoren zerlegt werden können, wobei der Factor 1 ausgeschlossen bleibt; diese lassen sich, wenn sie zusammengesetzte Zahlen sind, wieder in Factoren zerlegen, die entweder schon Primzahlen oder selbst wieder zusammengesetzte Zahlen sind; wird im letzteren Falle das Zerlegen fortgesetzt, so muss man, da die Factoren immer kleiner werden, endlich lauter Primzahlen als Factoren erhalten. Sind nun m, n, p, q, r die gefundenen Primfactoren, von denen einige auch gleich sein können, so sind dieselben auch die einzigen absoluten Primzahlen, deren Product die Zahl a ist. Denn ließe sich a auch in die Primfactoren s, t, u, v, die von m, n, p, q, r verschieden sind, zerlegen, so müsste $mnpqr = stuv$, und daher $mnpqr : s = tuv$, also mnpqr durch s theilbar sein, was jedoch, da absolute Primzahlen auch relativ prim sind, nach §. 75, 4 nicht möglich ist.

§. 87. **Aufgabe.** Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfactoren zu zerlegen.

Man dividiere die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividiere man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man endlich auf einen Quotienten kommt, der selbst eine Primzahl ist. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quotient sind die Primfactoren, aus denen die vorgelegte Zahl besteht.

Ist z. B. 630 in Primfactoren zu zerlegen, so hat man:

$$\begin{array}{rcl} 630 : 2 = 315 & \text{oder} & \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array} \\ 315 : 3 = 105 & & \\ 105 : 3 = 35 & & \\ 35 : 5 = 7 & & \end{array}$$

also $630 = 2.315 = 2.3.105 = 2.3.3.35 = 2.3.3.5.7$.

Zusatz. Um alle Factoren einer Zahl zu finden, zerlege man dieselbe in ihre Primfactoren, multipliciere mit dem zweiten Primfactor den ersten, dann mit dem dritten Primfactor die vorhergehenden zwei Primfactoren und den erhaltenen zusammengesetzten Factor, und so fort mit jedem folgenden Primfactor alle vorhergehenden Prim- und zusammengesetzten Factoren. Z. B.

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3,\ 6 \\ 35 & 5,\ 10,\ 15,\ 30 \\ 7 & 7,\ 14,\ 21,\ 42,\ 35,\ 70,\ 105,\ 210. \end{array}$$

§. 88. **Aufgabe.** Einen allgemeinen Zahlenausdruck in Factoren zu zerlegen.

1. Bei eingliedrigen Ausdrücken stellen die einzelnen Buchstaben selbst die Primfactoren vor; enthalten sie Potenzgrößen, so wird die Basis so oft als Factor gesetzt, als der Exponent anzeigt. Z. B.

$$abc = a.b.c;\ ab^2m^3 = a.b.b.m.m.m;$$
$$21\,a^2mx^2 = 3.7.a.a.m.x.x.$$

2. Für die Zerlegung der Polynome in Factoren lassen sich keine allgemeinen Regeln geben; es sollen daher hier nur häufiger vorkommende specielle Fälle betrachtet werden.

a) Ein Polynom, dessen alle Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, wird nach §. 39, 2 und §. 40, 2 in zwei Factoren zerlegt, indem man das gemeinschaftliche Maß als den einen Factor heraushebt und als den andern Factor den Quotienten setzt, welcher aus der Division des gegebenen Ausdruckes durch jenes gemeinschaftliche Maß hervorgeht. Z. B.:

1) $3ax - 4bx = x(3a - 4b)$,

2) $20x^4 - 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(5x^2 - 4x + 3)$.

b) Insbesondere folgt aus §. 43, Zusatz:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$,

2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$,

3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

c) Ein Trinom von der Form $x^2 \pm mxy \pm ny^2$ kann in zwei Factoren häufig dadurch zerlegt werden, daß man den Coefficienten m des zweiten Gliedes, je nachdem n positiv oder negativ ist, als die Summe oder als die Differenz zweier Zahlen darstellt, die als Product n geben, und hierauf die gemeinschaftlichen Factoren heraushebt. Z. B.:

1) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + (4 + 2)x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8$
$= x(x + 4) + 2(x + 4) = (x + 4)(x + 2)$.

2) $x^2 - 5xy + 6y^2 = x^2 - (3 + 2)xy + 6y^2 = x^2 - 3xy - 2xy + 6y^2$
$= x(x - 3y) - 2y(x - 3y) = (x - 3y)(x - 2y)$.

3) $a^2 + 3a - 10 = a^2 + (5 - 2)a - 10 = a^2 + 5a - 2a - 10$
$= a(a + 5) - 2(a + 5) = (a + 5)(a - 2)$.

§. **89.** Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier oder mehrerer Zahlen mittelst deren Zerlegung in Primfactoren zu finden.

Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und hebe unter diesen diejenigen Factoren heraus, welche in allen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen, und zwar jeden so oft, als er in jeder der gegebenen Zahlen enthalten ist; das Product dieser Factoren ist das gesuchte gr. g. Maß.

Beweis. Das so gebildete Product ist, da alle Factoren desselben in sämmtlichen gegebenen Zahlen enthalten sind, gewiss ein gemeinschaftliches Maß derselben; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen Factor hinzufügen würde, durch dieses Product nicht mehr alle gegebenen Zahlen theilbar wären.

Beispiel. Suche das gr. g. Maß von 300 und 420.

$$300 = 2.2.3.5.5,$$
$$420 = 2.2.3.5.7;$$
$$\text{gr. g. Maß} = 2.2.3.5 = 60.$$

§. **90.** Aufgabe. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen mittelst deren Zerlegung in Primfactoren zu finden.

Man zerlege alle gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und nehme aus diesen alle verschiedenen Factoren, und zwar jeden so oft, als er in irgend einer gegebenen Zahl am öftesten vorkommt; das Product dieser Factoren ist das gesuchte kl. g. Vielfache.

Beweis. Das so gebildete Product ist, da es alle Factoren einer jeden der gegebenen Zahlen enthält, offenbar ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben; es ist aber auch das kleinste g. Vielfache, weil man keinen jener Factoren weglassen darf, ohne dass das Product aufhören würde, durch alle gegebenen Zahlen theilbar zu sein.

Beispiel. Man suche das kl. g. Vielfache von 60, 108 und 1050.

$$60 = 2.2.3.5,$$
$$108 = 2.2.3.3.3,$$
$$1050 = 2.3.5.5.7;$$
$$\text{kl. g. Vielfaches} = 2.2.3.3.3.5.5.7 = 18900.$$

§. **91.** Haben von einer Reihe gegebener Zahlen zwei oder mehrere ein gemeinschaftliches Maß, so kann man, ohne das kl. g. Vielfache zu ändern, anstatt dieser Zahlen ihr gemeinschaftliches Maß nur einmal, und zugleich die Quotienten setzen, welche aus der Division jener Zahlen durch das gemeinschaftliche Maß hervorgehen (Beweis zu §. 77). Ist ferner eine der gegebenen Zahlen ein Maß von einer andern größeren, so kann die kleinere Zahl ohne Änderung des kl. g. Vielfachen ganz unberücksichtigt gelassen werden.

Auf diesen Erwägungen beruht folgende praktische Anordnung des Verfahrens, das kl. g. Vielfache mehrerer Zahlen mittelst Zerlegung in Primfactoren zu finden:

1. Man lasse in der Reihe der gegebenen Zahlen diejenigen weg, welche in anderen größeren ohne Rest enthalten sind, und dividiere von den übriggebliebenen Zahlen so viele als möglich durch irgend eine Primzahl als gemeinschaftliches Maß; dieses Maß schreibt man seitwärts, die erhaltenen Quotienten sowie die nicht theilbaren Zahlen werden unter die früheren Zahlen gesetzt.

2. Mit dieser neuen Reihe von Zahlen verfahre man ebenso wie mit der ursprünglich gegebenen und wiederhole dieses Verfahren, bis man zuletzt eine Reihe erhält, in welcher lauter relative Primzahlen vorkommen.

3. Multipliciert man dann die in der letzten Reihe befindlichen relativen Primzahlen und die seitwärts herausgehobenen Maße mit einander, so ist das Product das gesuchte kl. g. Vielfache der gegebenen Zahlen.

Beispiel. Man suche das kl. g. Vielfache von 2, 3, 4, 18, 24, 32, 45, 50.

~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, 18, 24, 32, 45, ~~50~~	
~~9~~, 12, 16, 45, 25	2
6, 8, 45, 25	2
~~3~~, 4, 45, 25	2
4, 9, 5	5

kl. g. Vielfaches $= 4.9.5.2.2.2.5 = 7200$.

VI. Erweiterung des Zahlengebietes durch die Division als Theilung.

Gebrochene Zahlen.

§. 92. Bisher wurde (§. 46) bei jedem Quotienten $\frac{a}{b}$ vorausgesetzt, dass der Dividend a ein Vielfaches des Divisors b, dass also a eine der Zahlen b, 2b, 3b, 4b,... ist, weil nur in diesem Falle die Division an der Reihe der ganzen Zahlen ausgeführt werden konnte. Soll die Division für ganz beliebige Werte des Dividends und des Divisors möglich gemacht werden, so ist man genöthigt, $\frac{a}{b}$ für den Fall, wo a kein Vielfaches von b ist, als eine neue Zahlenform in die Arithmetik einzuführen.

Man nennt in diesem allgemeinen Sinne, wo a kein Vielfaches von b ist, den Quotienten $\frac{a}{b}$ im Gegensatze zu den bisher betrachteten ganzen Zahlen eine gebrochene Zahl oder einen Bruch; a heißt der Zähler, b der Nenner des Bruches.

Die neue Zahlenform wird nun so definiert werden, dass den Gesetzen, welche bei der Division für die als ganze Zahlen vorausgesetzten Quotienten abgeleitet wurden, auch für die Brüche die Giltigkeit gewahrt bleibe.

Wendet man auf den Quotienten $\frac{a}{b}$, dem man auch die Form $\frac{1.a}{b}$ geben kann, den Satz in §. 48, 1 an, so erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{1.a}{b} = \frac{1}{b}.a.$$

Die Bedeutung des Bruches ergibt sich dann aus dem durch die Gleichung $\frac{a}{b}.b = a$ ausgedrückten Begriffe eines Quotienten. Setzt man $a = 1$, so ist

$$\frac{1}{b}.b = 1,$$

d. i. $\frac{1}{b}$ bedeutet eine Zahl, welche b mal als Summand gesetzt 1 gibt. Theilt man daher eine Einheit in b gleiche Theile, so stellt ein solcher Theil, da er b mal als Summand gesetzt wieder die Einheit gibt, die Zahl $\frac{1}{b}$ vor. $\frac{a}{b} = \frac{1}{b}.a$ bedeutet dann eine Zahl, welche entsteht, indem man die Einheit in b gleiche Theile theilt, und einen solchen Theil a mal als Summand setzt.

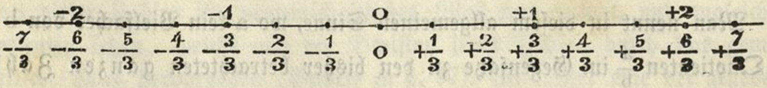
Brüche sind daher Zahlen, deren Einheit ausdrücklich als ein Theil der ursprünglichen Einheit angegeben ist. Der Nenner zeigt an, in wie viele gleiche Theile die ursprüngliche Einheit getheilt werden soll, damit ein solcher Theil die neue Einheit des Bruches gebe; der Zähler zeigt an, wie vielmal der Bruch die durch den Nenner gegebene Einheit enthält.

Um den gebrochenen Zahlen auch in der Zahlenreihe ihre entsprechende Stellung anzuweisen, muss man für einen bestimmten Nenner b die Reihe der ganzen Zahlen in sich dadurch erweitern, dass man den Abstand je zweier auf einander folgender Zahlen dieser Reihe, d. i. jede ursprüngliche Einheit, durch Einschaltung neuer Zahlen in so viele gleiche Theile theilt, wie der Nenner b anzeigt, und einen solchen Theil als eine neue Einheit annimmt, um mit ihr zu zählen; man erhält dadurch die Zahlenreihe

$$\ldots -\frac{5}{b}, -\frac{4}{b}, -\frac{3}{b}, -\frac{2}{b}, -\frac{1}{b}, 0, +\frac{1}{b}, +\frac{2}{b}, +\frac{3}{b}, +\frac{4}{b}, +\frac{5}{b}, \ldots$$

welche die Zahlenreihe der b tel genannt wird.

Die durch Einschaltung von Brüchen ausgefüllte Zahlenreihe heißt die Bruchzahlenreihe für den bezüglichen Nenner. Solche Reihen können durch Zahlenlinien versinnlicht werden. So hat man für die Reihe der Drittel:



§. 93. Ein Bruch, welcher kleiner als 1, dessen Zähler also kleiner als der Nenner ist, heißt ein echter Bruch, jeder andere ein unechter Bruch.

Ein Bruch, dessen Zähler eine dekadische ganze Zahl, und dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, wird ein Decimalbruch genannt; jeder andere Bruch heißt ein gemeiner Bruch.

Eine eigene Art der gemeinen Brüche bilden die Kettenbrüche, von denen weiter unten besonders die Rede sein wird.

1. Gemeine Brüche.

Allgemeine Sätze.

§. **94**. Aus dem Begriffe eines Bruches folgt:

1. Jeder Bruch gibt mit seinem Nenner multipliciert den Zähler zum Producte.

$$\frac{1}{b} \cdot b = 1, \quad \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

2. Von zwei Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist jener der größere, welcher den größeren Zähler hat.

3. Von zwei Brüchen, die gleiche Zähler haben, ist jener der größere, welcher den kleineren Nenner hat.

§. **95**. 1. Jeder unechte Bruch kann in eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche verwandelt werden.

Ist $a > b$, so ist $\frac{a}{b} = a : b = q + \frac{r}{b}$, wo q die größte ganze Zahl, welche in dem Quotienten $a : b$ vorkommt, und r den Divisionsrest, daher $\frac{r}{b}$, weil $r < b$ sein muss, einen echten Bruch vorstellt.

Ein Ausdruck von der Form $q + \frac{r}{b}$ heißt eine gemischte Zahl.

2. Jede ganze Zahl kann in der Form eines Bruches mit gegebenem Nenner dargestellt werden, indem man das Product aus der ganzen Zahl und dem gegebenen Nenner als den Zähler des Bruches annimmt.

Es ist $a = \frac{an}{n}$ (§. 47, 3).

Ein Bruch, dessen Zähler ein Vielfaches des Nenners, der also einer ganzen Zahl gleich ist, heißt ein uneigentlicher Bruch.

3. Ein Bruch bleibt (seinem Werte nach) unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a:n}{b:n} \text{ (§. 51, 2).}$$

§. **96**. Aufgaben. 1. Einen gegebenen Bruch auf einen gegebenen neuen Nenner zu bringen, welcher ein Vielfaches des früheren Nenners ist.

Man dividiere den neuen Nenner durch den früheren Nenner, und multipliciere mit dem Quotienten den früheren Zähler; das Product ist der gegesuchte neue Zähler.

Die Richtigkeit der Auflösung folgt aus §. 95, 3.

Um z. B. $\frac{a}{b}$ auf den Nenner bm zu bringen, hat man

$$bm : b = m; \ a.m = am; \text{ also } \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

2. Zwei oder mehrere Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Man suche das kl. g. Vielfache der Nenner der gegebenen Brüche, welches zugleich der neue kl. g. Nenner ist, und bringe (nach Aufg. 1) die gegebenen Brüche auf diesen neuen Nenner.

Beispiel. Es sollen die Brüche $\frac{a}{2b}, \frac{3m}{4bc}, \frac{4n}{c^2d}$ auf den kl. g. Nenner gebracht werden.

Das kl. g. Vielfache aller Nenner, somit der kl. g. Nenner, ist $4bc^2d$. Man erhält dann

$$\frac{a}{2b} = \frac{2ac^2d}{4bc^2d}, \ \frac{3m}{4bc} = \frac{3cdm}{4bc^2d}, \ \frac{4n}{c^2d} = \frac{16bn}{4bc^2d}.$$

3. Einen Bruch, dessen Zähler und Nenner ein gemeinschaftliches Maß haben, abzukürzen, d. i. ohne Änderung des Wertes durch kleinere Zahlen auszudrücken.

Man dividiere Zähler und Nenner durch ihr gemeinschaftliches Maß.

Z. B. $\frac{4am}{6bn} = \frac{2am}{3bn}$; $\frac{12a^2bx^2}{15acx^3} = \frac{4ab}{5cx}$.

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, heißt auf die einfachste Form gebracht.

Zusatz. Durch das Abkürzen allgemeiner Brüche kann häufig die für besondere Substitutionen in denselben auftretende Unbestimmtheit behoben werden. So gibt der Bruch $\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a}$ für $x = a$ den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$. Durch das Abkürzen aber erhält man

$$\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a} = \frac{(x + a)(x - a)}{2(x - a)} = \frac{x + a}{2},$$

welcher Bruch für $x = a$ den bestimmten Wert $\frac{2a}{2} = a$ annimmt.

Wenn allgemein ein Bruch, dessen Zähler und Nenner nach x geordnete Polynome sind, für einen bestimmten Wert von x, z. B. für $x = a$, die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so liegt darin die Andeutung, dass Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $x - a$ enthalten, welcher für $x = a$ Null wird, und durch welchen daher der Bruch abzukürzen ist. Nimmt der dadurch vereinfachte Bruch für $x = a$ noch immer die Form $\frac{0}{0}$ an, so wiederholt man das Abkürzen durch $x - a$.

Rechnungsoperationen mit gemeinen Brüchen.

§. 97. Brüche mit gleichen Nennern werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und dieser Summe den gemeinschaftlichen Nenner gibt.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m} \text{ (§. 53).}$$

Sind Brüche mit ungleichen Nennern, oder eine ganze Zahl und ein Bruch zu addieren, so stellt man die Summanden mit einem gemeinschaftlichen Nenner dar und verfährt dann nach dem vorigen Satze.

Z. B. $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}$.

$$a+\frac{m}{n}=\frac{an}{n}+\frac{m}{n}=\frac{an+m}{n}.$$

§. 98. Die Summe zweier Brüche bleibt unverändert, wenn man die Summanden mit einander vertauscht.

Es ist $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}+\frac{bm}{mn}=\frac{an+bm}{mn}$ (§. 97)

$$=\frac{bm+an}{mn} \text{ (§. 11)} \quad =\frac{bm}{mn}+\frac{an}{mn} \text{ (§. 53)}$$

$$=\frac{b}{n}+\frac{a}{m} \text{ (§. 95, 3).}$$

§. 99. Zwei Brüche mit gleichen Nennern werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner gibt.

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m} \text{ (§. 54).}$$

Sind Brüche mit ungleichen Nennern, oder eine ganze Zahl und ein Bruch zu subtrahieren, so stellt man die beiden Zahlen mit einem gemeinschaftlichen Nenner dar und verfährt dann nach dem vorhergehenden Satze.

Z. B. $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=\frac{1}{8}$.

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}-\frac{bm}{mn}=\frac{an-bm}{mn}.$$

$$a-\frac{m}{n}=\frac{an}{n}-\frac{m}{n}=\frac{an-m}{n}.$$

Zusatz. Insbesondere erhält man

$$a-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2} \text{ und auch } \frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}.$$

$\frac{a+b}{2}$ liegt also mitten zwischen den Zahlen a und b, von beiden um dieselbe Differenz verschieden, und heißt deshalb das arithmetische Mittel zwischen a und b.

§. 100. 1. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man den Zähler mit ihr multipliciert oder den Nenner durch sie dividiert.

$$\frac{a}{b}\cdot m=\frac{am}{b}=\frac{a}{b:m} \text{ (§. 50, 2).}$$

2. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler durch sie dividiert oder den Nenner mit ihr multipliciert.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a:m}{b} = \frac{a}{bm} \text{ (§. 49, 2).}$$

§. **101.** Die Multiplication einer Zahl mit einem Bruche hat nach den in §§. 34 und 59 aufgestellten Erklärungen der Multiplication keinen Sinn. Dieselben müssen, damit auch die Multiplication mit einem Bruche Bedeutung erhalte, entsprechend erweitert werden, was mit Rücksicht auf §. 48, 2 in folgender Weise geschieht: Eine Zahl a mit einem Bruche $\frac{m}{n}$ multiplicieren heißt, den sovielten Theil von a, wie der Nenner n des Bruches anzeigt, sovielmal als Summand setzen, wie der Zähler m des Bruches anzeigt.

Aus dieser Erklärung ergeben sich folgende Sätze:

1. Eine Zahl wird mit einem Bruche multipliciert, indem man sie durch den Nenner dividiert und den Quotienten mit dem Zähler multipliciert.

$$a . \frac{m}{n} = \frac{a}{n} . m = \frac{am}{n}.$$

2. Ein Bruch wird mit einem Bruche multipliciert, indem man dem Producte der Zähler das Product der Nenner als Nenner gibt.

$$\frac{a}{b} . \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : n\right) . m = \frac{a}{bn} . m \text{ (§. 100, 2)} = \frac{am}{bn} \text{ (§. 100, 1).}$$

3. Das Product zweier Brüche bleibt unverändert, wenn man die Factoren unter einander vertauscht.

$$\frac{a}{b} . \frac{m}{n} = \frac{am}{bn} = \frac{ma}{nb} \text{ (§. 36)} = \frac{m}{n} . \frac{a}{b} \text{ (nach 2).}$$

Folgesatz. Multipliciert man eine Zahl mit einem echten oder unechten Bruche, so ist das Product bezüglich kleiner oder größer als der Multiplicand.

§. **102.** Wenn zwei Zahlen zum Producte 1 gehen, so heißt jede der umgekehrte oder reciproke Wert der andern.

So ist $a . \frac{1}{a} = 1$, $\frac{m}{n} . \frac{n}{m} = 1$, daher $\frac{1}{a}$ der umgekehrte Wert von a, $\frac{n}{m}$ der umgekehrte Wert von $\frac{m}{n}$.

§. **103.** Für die Division durch einen Bruch ergeben sich aus dem im §. 46 aufgestellten allgemeinen Begriffe der Division folgende Sätze:

1. Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie durch den Zähler dividiert und den Quotienten mit dem Nenner multipliciert, oder indem man sie mit dem umgekehrten Bruche multipliciert.

$$a : \frac{m}{n} = \frac{a}{m} . n = a . \frac{n}{m}.$$

Beweis. Es ist $\left(\frac{a}{m} . n\right) . \frac{m}{n} = a$, und auch $\left(a . \frac{n}{m}\right) . \frac{m}{n} = a$.

Zusatz. Da $1 : \frac{m}{n} = 1 . \frac{n}{m} = \frac{n}{m}$ ist, so kann man allgemein den reciproken Wert einer Zahl a durch $1 : a$ oder $\frac{1}{a}$ bezeichnen.

2. Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man ihn mit dem umgekehrten Bruche multipliciert, oder indem man dem Quotienten der Zähler den Quotienten der Nenner als Nenner gibt.

Es ist $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} . \frac{n}{m}$ (nach 1); oder

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : m\right) . n \text{ (nach 1)} = \frac{a:m}{b} . n \text{ (§. 100, 2)}$$
$$= \frac{a:m}{b:n} \text{ (§. 100, 1).}$$

Hiernach ist

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b,$$

d. h. der Quotient zweier Brüche mit gleichen Nennern ist gleich dem Quotienten ihrer Zähler.

Folgesatz. Dividiert man eine Zahl durch einen echten oder unechten Bruch, so ist der Quotient bezüglich größer oder kleiner als der Dividend.

§. **104.** Ein Bruch, dessen Zähler oder Nenner, oder beide zugleich wieder Brüche sind, heißt ein gebrochener Bruch. Er ist nichts anderes, als eine angezeigte Division von Brüchen, und kann daher in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, indem man diese Division wirklich ausführt. Z. B.

$$\frac{\frac{a}{m}}{b} = \frac{a}{m} : b = \frac{a}{bm}; \quad \frac{a}{\frac{m}{n}} = a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}; \quad \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}.$$

§. **105.** Alle bisher für die ganzen Zahlen erwiesenen Lehrsätze gelten auch für die gebrochenen Zahlen.

Denn alle jene Lehrsätze beruhen auf den Commutationsgesetzen

$$a + b = b + a \text{ und}$$
$$a \,.\, b = b \,.\, a;$$

diese zwei Gesetze aber gelten, wie in §. 98 und §. 101, 3 bewiesen wurde, auch für Brüche.

2. Decimalbrüche.

§. **106.** Die allgemeine Form eines Decimalbruches (§. 93) ist $\frac{A}{10^m}$, wo A und m beliebige dekadische ganze Zahlen bezeichnen. Die Decimalbrüche nennt man auch Decimalzahlen.

Die Decimalzahlen werden ohne Nenner angeschrieben; man braucht nur im Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern durch einen Punkt, den Decimalpunkt, abzuschneiden, als der Potenzexponent von 10 im Nenner Einheiten enthält, oder was gleichviel ist, als im Nenner Nullen vorkommen. Sollten nicht genug Ziffern vorhanden sein, um sie abschneiden zu können, so werden die fehlenden links durch Nullen ersetzt;

ebenso ergänzt man auch die Stelle vor dem Decimalpunkte, wenn für dieselbe keine Ziffer übrig bleibt, durch die Null. Z. B.

$$\frac{78317}{10^3} = \frac{78317}{1000} = 78{\cdot}317,\ \frac{5483}{10^4} = \frac{5483}{10000} = 0{\cdot}5438,$$

$$\frac{37}{10^5} = \frac{37}{100000} = 0{\cdot}00037.$$

Die Ziffern rechts nach dem Decimalpunkte werden Decimalen genannt. $\frac{A}{10^m}$ stellt demnach einen Decimalbruch mit m Decimalen vor.

Um die Bedeutung der Ziffern eines Decimalbruches kennen zu lernen, betrachten wir den Decimalbruch $\frac{A}{10^4}$, welcher 4 Decimalen enthält; die Zahl vor dem Decimalpunkte heiße m, und die Decimalziffern in der Ordnung gegen die Rechte seien a, b, c, d; dann ist

$$A = m\,.\,10^4 + a\,.\,10^3 + b\,.\,10^2 + c\,.\,10 + d,$$

daher

$$\frac{A}{10^4} = \frac{m.10^4 + a\;10^3 + b.10^2 + c.10 + d}{10^4}$$

$$= m + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4}.$$

Es bedeutet also die Zahl, welche links vor dem Decimalpunkte steht, eine ganze Zahl; die erste Decimale bedeutet Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel, die vierte Zehntausendtel u. s. w.

Z. B. $$34{\cdot}781 = \frac{34781}{1000} = \frac{34000 + 700 + 80 + 1}{1000}$$

$$= 34 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{1000}.$$

In einer nach dem dekadischen Zahlensysteme (§. 64) geschriebenen ganzen Zahl bedeutet jede Ziffer an der nächstfolgenden Stelle gegen die Rechte den 10ten Theil von dem, was sie an der vorhergehenden Stelle gilt. Dasselbe Gesetz findet auch bei den Decimalen statt, da ein Zehntel der 10te Theil von einem Einer, ein Hundertel der 10te Theil von einem Zehntel u. s. w. ist. Die Decimalbrüche sind also eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems in der Art, dass die Reihe der dekadischen Zahlenordnungen.... Tausende, Hunderte, Zehner, Einer nicht mehr mit den Einern abbricht, sondern sich nach demselben Gesetze, indem jede niedrigere Einheit als der zehnte Theil einer Einheit der nächst höheren Ordnung angenommen wird, noch unter die Einer hinab in Zehnteln, Hunderteln, Tausendteln,... fortsetzt. Der Decimalpunkt scheidet die ursprüngliche Reihe der Zahlenordnungen von dieser Fortsetzung.

Hiernach ist.

$$\ldots c\,.\,10^3 + b\,.\,10^2 + a\,.\,10 + E + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} \ldots$$

die allgemeine Form einer Zahl des dekadischen Systems, wo E, a, b, c... die Ziffern der Einer, Zehner, Hunderte, Tausende,..., und α, β, γ,... die Ziffern der Zehntel, Hundertel, Tausendtel,... bezeichnen.

Folgesätze. 1. Der Wert eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man den Decimalen rechts beliebig viele Nullen anhängt. Z. B.

$$0{\cdot}23 = 0{\cdot}230 = 2{\cdot}2300 = 2{\cdot}23000.$$

2. Der Wert jeder Decimalzahl ist kleiner als eine Einheit der ihrer höchsten geltenden Ziffer unmittelbar vorausgehenden höheren Stelle; z. B. $0{\cdot}00783 < \frac{1}{10^2}$. Denn hätte jede Ziffer der Decimalzahl auch den höchsten möglichen Wert 9, so müsste man noch eine Einheit der niedrigsten Stelle dazu addieren, um eine Einheit jener höheren Stelle zu erhalten.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch.

§. **107.** Um einen gemeinen Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, dividiere man den Zähler a durch den Nenner b und bringe im Quotienten nach den Ganzen, an deren Stelle bei einem echten Bruche eine Null gesetzt wird, den Decimalpunkt an. Dem Reste hänge man hierauf eine Null an, dividiere wieder und schreibe die erhaltene Quotientenziffer nach dem Decimalpunkte hin; hänge dann eben so jedem etwa weiter folgenden Reste eine Null an und setze die Division fort, bis diese endlich ohne Rest aufgeht oder, wenn dieses nicht eintritt, bis man die gewünschte Anzahl Decimalen erhalten hat.

Beweis. Es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a.10^m}{b.10^m} = \frac{a.10^m : b}{10^m} \quad (§.\ 49,\ 1).$$

Wenn man nun bei dem oben vorgezeichneten Divisionsverfahren an die betreffenden Reste nach und nach m Nullen anhängt, was dasselbe ist, als wenn man zu dem Zähler a auf einmal m Nullen hinzugefügt hätte, so wird dadurch a mit 10^m multipliciert; und indem man dann die im Quotienten $a.10^m : b$ erhaltenen letzten m Ziffern als Decimalen annimmt, wird dieser Quotient durch 10^m dividiert.

Z. B. $\frac{3}{4} = 3{\cdot}0 : 4 = 0{\cdot}75$

$$\begin{array}{l} 20 \\ \;0 \end{array}$$

$\frac{329}{125} = 329 : 125 = 2{\cdot}632$

$$\begin{array}{r} 790 \\ 400 \\ 250 \\ 0 \end{array}$$

Zusätze. 1. Damit sich ein gemeiner Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Decimalbruch genau verwandeln lasse, muss $a.10^m$ bei hinreichend großem m durch b theilbar sein. Dieses ist aber, wenn a und b relative Primzahlen sind, nach §. 75, 3 nur dann möglich, wenn 10^m durch b theilbar ist, d. h. wenn b keinen von 2 und 5 verschiedenen Factor enthält.

In allen Fällen, wo der Nenner b entweder die Factoren 2 und 5 gar nicht, oder außer denselben noch andere davon verschiedene Primfactoren enthält, kann der auf die einfachste Form gebrachte Bruch $\frac{a}{b}$ durch keinen endlichen Decimalbruch dargestellt werden. Es lässt sich jedoch immer näherungsweise ein Decimalbruch entwickeln, welcher von dem gegebenen gemeinen um weniger verschieden ist, als jede noch so kleine gegebene Zahl. Denn ist $a.10^m$ durch b nicht theilbar, so kann der Quotient als eine gemischte Zahl angesehen werden. Setzt man also

$$\frac{a.10^m}{b} = p + \frac{r}{b},$$

wo $r < b$ ist, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{10^m} + \frac{r}{b.10^m}, \text{ also } \frac{a}{b} - \frac{p}{10^m} = \frac{r}{b.10^m}.$$

Da nun $r < b$, also $\frac{r}{b} < 1$, so muss $\frac{r}{b.10^m} < \frac{1}{10^m}$ sein. Der Unterschied zwischen dem gemeinen Bruche $\frac{a}{b}$ und dem Decimalbruche $\frac{p}{10^m}$ ist also kleiner als $\frac{1}{10^m}$, d. i. kleiner als eine Einheit der letzten noch entwickelten Decimalstelle; er lässt sich daher, da m beliebig groß, daher $\frac{1}{10^m}$ beliebig klein gemacht werden kann, kleiner machen, als jede noch so kleine angebbare Zahl.

Z. B. $\frac{23}{78} = 23{\cdot}0 : 78 = 0{\cdot}29478\ldots.$

Bleibt man hier bei der 5ten Decimale stehen, so ist der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{10^5}$.

2. Wird ein Bruch, der sich nicht genau durch einen Decimalbruch darstellen lässt, näherungsweise in einen solchen verwandelt, so müssen bei der Entwicklung einige Decimalziffern in derselben Ordnung immer wiederkehren. Denn bei der Division ist der Rest immer kleiner als der Divisor; man kann daher nur so viele verschiedene Reste erhalten, als es ganze Zahlen gibt, welche kleiner sind als der Divisor, so dass im ungünstigsten Falle wenigstens unter so vielen Resten, als der Divisor Einheiten enthält, wieder einer der vorigen Reste zum Vorschein kommt, von welchem an sich dann weiter die nämlichen Ziffern im Quotienten und dieselben Reste wie vorher ergeben müssen. Z. B.

$\frac{18}{37} = 18{\cdot}0 : 37 = 0{\cdot}486\ 486\ldots$	$\frac{56}{75} = 56{\cdot}0 : 75 = 0{\cdot}74\ 666\ldots$
3 20	3 50
240	500
180	500
320	500
240	50
81	

Decimalbrüche, in denen sich eine bestimmte Anzahl von Ziffern in derselben Ordnung wiederholt, nennt man **periodische**, und die immer wiederkehrende Ziffernreihe die **Periode**.

Bei den periodischen Decimalbrüchen sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder beginnt die Periode unmittelbar nach dem Decimalpunkte, oder es gehen der Periode noch andere Decimalen voraus. Im ersten Falle heißt der Decimalbruch **rein periodisch**, im zweiten **gemischt periodisch**.

Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und letzte Ziffer derselben mit darüber gesetzten Punkten zu bezeichnen; hiernach ist

$$\frac{18}{37} = 0{\cdot}\dot{4}8\dot{6}, \qquad \frac{56}{75} = 0{\cdot}74\dot{6}.$$

Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch.

§. **108.** 1. **Ein endlicher Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt**, indem man denselben in der Form eines gemeinen Bruches anschreibt und diesen, wenn es angeht, abkürzt. Z. B.

$$0{\cdot}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}, \qquad 31{\cdot}325 = 31\,\frac{325}{1000} = 31\,\frac{13}{40}.$$

2. **Ein rein periodischer Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt**, indem man als Zähler die Ziffern der Periode und als Nenner eine Zahl setzt, welche mit so vielen 9 geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat.

Beweis. Drückt man die Ziffern der Periode durch b und ihre Anzahl durch n aus, so ist der gesuchte periodische Decimalbruch

$$x = \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \frac{b}{10^{4n}} + \dots$$

Multipliciert man diesen Ausdruck mit 10^n, so erhält man

$$x.10^n = b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{12^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \dots$$

Subtrahiert man nun den früheren Ausdruck von dem letzten, so folgt

$$x.10^n - x = b, \text{ oder } (10^n - 1)\,x = b,$$

und daraus

$$x = \frac{b}{10^n - 1}.$$

Z. B. $\quad 0{\cdot}\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \qquad 0{\cdot}\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11};$

$\qquad 2{\cdot}\dot{3}0\dot{1} = 2\frac{301}{999}; \qquad 15{\cdot}\dot{3}5\dot{1} = 15\frac{351}{999} = 15\frac{13}{37}.$

3. **Ein gemischt periodischer Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt**, indem man die der Periode vorangehenden Decimalen sammt der Periode als ganze Zahl zusammenstellt, davon die der Periode vorangehenden Decimalen, ebenfalls als ganze Zahl betrachtet, subtrahiert und diese Differenz als Zähler, als Nenner aber eine Zahl annimmt,

die mit so vielen 9, als die Periode Ziffern enthält, und so vielen rechts folgenden Nullen, als Decimalen der Periode vorangehen, geschrieben ist.

Beweis. Es seien b die Ziffern der Periode, n die Anzahl derselben, ferner a die der Periode vorangehenden Decimalen und m ihre Anzahl; dann ist der gesuchte Decimalbruch

$$x = \frac{a}{10^m} + \frac{b}{10^{m+n}} + \frac{b}{10^{m+2n}} + \frac{b}{10^{m+3n}} + \ldots$$

Multipliciert man diesen Ausdruck zuerst mit 10^{m+n}, dann mit 10^m, so erhält man

$$x.10^{m+n} = a.10^n + b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \ldots$$

$$x.10^n \quad = a \quad + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \ldots$$

Durch Subtraction der letzten zwei Ausdrücke ergibt sich

$$x.10^{m+n} - x.10^m = a.10^n + b - a,$$

$$\text{oder } x.10^m(10^n - 1) = (a.10^n + b) - a,$$

und daraus

$$x = \frac{(a.10^n + b) - a}{(10^n - 1).10^m}.$$

Z. B. $\quad 0{\cdot}2\dot{1}\dot{5} = \frac{215 - 2}{990} = \frac{213}{990} = \frac{71}{330},$

$$0{\cdot}31\dot{7}0\dot{8} = \frac{31708 - 31}{99900} = \frac{31677}{99900} = \frac{10559}{33300}.$$

Rechnungsoperationen mit vollständigen Decimalbrüchen.

§. **109.** Das Rechnen mit Decimalbrüchen beruhet auf denselben Gesetzen, wie das mit ganzen Zahlen, und fordert nur die genaue Rücksicht auf den Rang der einzelnen Ziffern, d. i. auf die Stellung des Decimalpunktes.

D e c i m a l b r ü c h e w e r d e n a d d i e r t o d e r s u b t r a h i e r t, indem man, wie bei ganzen Zahlen, die Ziffern derselben Rangstelle, von der niedrigsten angefangen, addiert oder subtrahiert. Haben die Decimalbrüche nicht gleich viele Decimalstellen, so denkt man sich die fehlenden Stellen durch Nullen ersetzt. Z. B.

	35·312		215·3456
	0·5678		91·45923
	39·28	Differenz	123·88637
Summe	75·1598		

§. **110.** 1. E i n D e c i m a l b r u c h w i r d m i t e i n e r P o t e n z v o n 10 m u l t i p l i c i e r t, indem man den Decimalpunkt um so viele Stellen weiter gegen die Rechte rückt, als der Multiplicator Nullen hat. Denn

$$\frac{a}{10^m}.10^n = \frac{a}{10^m : 10^n} = \frac{a}{10^{m-n}}.$$

2. **Decimalbrüche werden multipliciert**, indem man sie ohne Rücksicht auf die Decimalpunkte wie ganze Zahlen multipliciert (§. 69) und im Producte von der Rechten angefangen so viele Ziffern als Decimalen abschneidet, als deren in beiden Factoren zusammen enthalten sind. Denn

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}.$$

Z. B. $8\cdot056 \times 53\cdot1$ — $13\cdot7934 \times 0\cdot00156$

```
8·056 × 53·1           13·7934 × 0·00156
40 280                 13 7934
 2 4168                 6 89670
   8056                  827604
427·7736               0·021 517704
```

§. **111.** 1. **Ein Decimalbruch wird durch eine Potenz von 10 dividiert**, indem man den Decimalpunkt um so viele Stellen weiter gegen die Linke rückt, als der Divisor Nullen enthält. Denn

$$\frac{a}{10^m} : 10^n = \frac{a}{10^{m+n}}.$$

2. **Decimalbrüche werden dividiert**, indem man Dividend und Divisor durch Anhängung von Nullen mit gleich vielen Decimalen darstellt und dann mit Weglassung der Decimalpunkte die Division wie bei ganzen Zahlen verrichtet. Denn

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a : b}{10^m : 10^m} = a : b.$$

Praktisch verfährt man einfacher nach folgenden Regeln:

a) **Ein Decimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividiert**, indem man ihn wie eine ganze Zahl dividiert und im Quotienten den Decimalpunkt setzt, bevor man die erste Decimalziffer des Dividends in Rechnung zieht.

Z. B. $487\cdot75 : 25 = 19\cdot51$

```
487·75 : 25 = 19·51
237
 12 7
   25
```

b) **Eine Zahl wird durch einen Decimalbruch dividiert**, indem man im Dividend und im Divisor durch Multiplication mit der entsprechenden Potenz von 10 den Decimalpunkt so verschiebt, daß der Divisor eine ganze Zahl wird, und dann die Division nach der Regel a) ausführt.

Z. B. $0\cdot22984098 : 6\cdot134 = 229\cdot84098 : 6134 = 0\cdot03747$

```
229·84098 : 6134 = 0·03747
  45 820
   2 8829
    42938
        0
```

Rechnungsoperationen mit unvollständigen Decimalbrüchen.

§. **112.** Stellt ein Decimalbruch irgend einen Zahlenwert, der entweder aus der Rechnung selbst oder aus einer angestellten Messung hervorgegangen ist, nicht völlig genau, sondern bloß näherungsweise dar, so heißt er ein unvollständiger Decimalbruch, im Gegensatze zu einem vollständigen oder geschlossenen, der in seinen Zahlen vollkommen genau ausgedrückt ist.

Dass ein Decimalbruch unvollständig ist, wird durch angehängte Punkte angedeutet; z. B. 3·14...

Auch ein geschlossener Decimalbruch kann, wenn für einen bestimmten Zweck eine geringere Genauigkeit genügt, zu einem unvollständigen abgekürzt werden, wenn man eine oder mehrere seiner letzten Decimalziffern weglässt.

Die Differenz zwischen einem unvollständigen Decimalbruche und dem genauen Zahlenwerte, den er angenähert darstellt, heißt der Fehler des Decimalbruches; derselbe ist positiv oder negativ, je nachdem der darzustellende Zahlenwert größer oder kleiner als der Decimalbruch ist. In den meisten Fällen ist der Fehler selbst nicht genau bestimmbar; er wird dann dadurch beurtheilt, dass man eine Größe angibt, welche der Fehler nicht erreichen oder wenigstens nicht überschreiten kann. Diese Größe heißt eine Fehlergrenze des genäherten Decimalbruches.

Werden z. B. in einer Decimalzahl eine oder mehrere Endziffern weggelassen, so ist der Fehler in jedem Falle kleiner als eine Einheit der letzten beibehaltenen Stelle; eine Einheit dieser Stelle ist dann eine Fehlergrenze der abgekürzten Decimalzahl.

In Beziehung auf die Fehlergrenze beim Abkürzen eines Decimalbruches ergibt sich aus dem 2. Folgesatze zu §. 106 Nachstehendes:

1. Ist die erste weggelassene Ziffer kleiner als 5, so beträgt der Fehler weniger als eine halbe Einheit der letzten noch beibehaltenen Stelle.

2. Ist die erste weggelassene Ziffer größer als 5, oder 5 mit nachfolgenden geltenden Ziffern, so ist der Fehler größer als eine halbe, aber kleiner als eine ganze Einheit der letzten beibehaltenen Stelle. Man kann daher auch in diesem Falle den absoluten Fehler des abgekürzten Decimalbruches kleiner als eine halbe Einheit der letzten beizubehaltenden Stelle machen, indem man die Ziffer an dieser Stelle um 1 erhöht (corrigiert).

3. Ist die erste weggelassene Ziffer 5 mit nachfolgenden Nullen, so ist es gleichgiltig, ob man die letzte beibehaltene Ziffer unverändert lässt oder um 1 erhöht; der absolute Fehler ist in beiden Fällen eine halbe Einheit dieser letzten Stelle.

Ein unvollständiger Decimalbruch kann daher immer durch einen geschlossenen m stelligen Decimalbruch a so genau dargestellt werden, daß der Fehler eine halbe Einheit der m ten Stelle nicht überschreitet, dass also a.. zwischen $a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$ und $a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$ liegt. Unter dieser Voraussetzung bedeutet z. B.

5·83.. eine Zahl zwischen 5·825 und 5·835,

5·830.. „ „ „ 5·8295 „ 5·8305.

Im Nachfolgenden soll bei gegebenen unvollständigen Decimalbrüchen stets eine halbe Einheit ihrer niedrigsten Stelle als Fehlergrenze vorausgesetzt werden.

Der *Grad der Genauigkeit einer angenäherten Zahl* hängt nicht allein von der Fehlergrenze, sondern auch von der Größe der Zahl ab; er wird gewöhnlich durch die Angabe bestimmt, wie oft die doppelte Fehlergrenze, d. i. eine Einheit der niedrigsten Stelle der angenäherten Zahl in dieser enthalten ist. Hiernach ist die Genauigkeit der Zahl 9·32.. gleich 9·32 : 0·01 = 932.

Von zwei angenäherten Zahlen heißt daher diejenige die *genauere*, welche in Einheiten ihrer niedrigsten Stelle ausgedrückt eine größere Gesammtzahl dieser Einheiten darstellt. So sind z. B. die Zahlen 5·74.. und 0·574.., wiewohl sie nicht dieselbe Fehlergrenze haben, gleich genau, da jede 574 Einheiten ihrer niedrigsten Stelle enthält; dagegen ist 6·825.. genauer als 43·9.., da 6825 > 439 ist. Jede vollständige Zahl ist genauer als irgend eine angenäherte.

Beim Rechnen mit unvollständigen Decimalbrüchen ist es von Wichtigkeit, zu wissen, mit welchem Grade der Zuverlässigkeit das Rechnungsresultat in jedem Falle bestimmt werden könne, woraus sich dann auch umgekehrt folgern läſst, welche Genauigkeit die gegebenen Zahlen haben müssen, damit das Resultat bis zu einer bestimmten Decimalstelle verläſslich gefunden werde.

Addition und Subtraction unvollständiger Decimalbrüche.

§. **113.** 1. Da die *Summe* mehrerer unvollständiger Decimalbrüche nur in jenen Stellen verläſslich sein kann, welche in jedem Summanden verbürgt sind, so kürzt man alle Summanden auf gleich viele Decimalstellen ab. Die *Fehlergrenze der Summe* ist dann, da die Fehler aller Summanden möglicher Weise in demselben Sinne wirken können, gleich so vielen halben Einheiten der letzten Stelle, als die Zahl der Summanden angibt.

Ist z. B. die Summe der Zahlen 2·4568.., 0·709.., 6·424.., 8·05236.. zu berechnen, so erhält man nach Abkürzung des ersten und des vierten Summanden auf je drei Decimalstellen die Summe 17·642.. mit der Fehlergrenze ± 0·002; die erhaltene Summe ist daher nur auf 2 Decimalstellen verbürgt.

2. Auch beim *Subtrahieren* unvollständiger Decimalbrüche kürzt man dieselben auf so viele Decimalstellen ab, als in jeder der beiden Zahlen verbürgt sind. Die *Fehlergrenze der Differenz* beträgt dann eine Einheit der letzten Stelle.

Abgekürzte Multiplication.

§. **114.** Will man das Product zweier mehrstelliger Decimalzahlen nicht vollständig, sondern nur bis zu einer bestimmten Stelle entwickeln und in die

Rechnung keine überflüssigen Ziffern einbeziehen, so wendet man die **abgekürzte Multiplication** an. Darunter versteht man folgendes Verfahren:

1. Man setzt die Einer des Multiplicators unter die niedrigste Decimalstelle des Multiplicands, welche im Producte noch angestrebt wird, und schreibt daneben die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Reihenfolge; dann haben die Producte aus je zwei unter einander stehenden Ziffern gleichen Rang mit der niedrigsten im Producte verlangten Ziffer.

2. Man multipliciert mit jeder Ziffer des umgekehrten Multiplicators die gerade darüber stehende sowie die weiter folgenden höheren Ziffern des Multiplicands und schreibt die dadurch erhaltenen abgekürzten Theilproducte so an, dass ihre niedrigsten Ziffern, da sie von gleichem Range sind, unter einander zu stehen kommen. Um jedoch die niedrigste Ziffer eines jeden Theilproductes möglichst sicher zu erhalten, multipliciert man bei der Entwicklung desselben zunächst noch die erste im Multiplicand weggelassene Ziffer und addiert die daraus sich ergebenden Zehner als **Correctur** zu der niedrigsten Ziffer des Theilproductes.

3. Die abgekürzten Theilproducte werden addiert.

Die Fehlergrenze des abgekürzten Productes beträgt so viele halbe Einheiten der niedrigsten Stelle, als die Anzahl der Theilproducte angibt. Man kann aber die Fehlergrenze meist bis auf eine halbe Einheit dieser Stelle herabdrücken, wenn man in jedem Theilproducte nicht die niedrigste verlangte Stelle corrigiert, sondern noch die ihr folgende niedrigere Ziffer möglichst genau entwickelt und die aus der Summe dieser Ziffern sich ergebende Correctur erst im Endproducte berücksichtiget.]

Es sei z. B. das Product $48 \cdot 179 \times 13 \cdot 5645$ bis auf 3 Decimalstellen zu entwickeln.

a)		b)	c)
4 8·179		48·179	48·179
13·5 645		54 6531	54 6531
24	0 895	48 1790	48 1790
192	7 16	14 4537	14 4537
2 890	7 4	2 4090	2 4089 5
24 089	5	2891	2890 5
144 537		193	192 7
481 79		24	24 1
653·524	0 455	653·525..	653·524..

In a) ist die Multiplication vollständig ausgeführt, in b) abgekürzt auf 3 Decimalstellen mit der Correctur der einzelnen Theilproducte (Fehlergrenze 0·003), in c) abgekürzt mit der Entwicklung der 4ten Decimalstelle und mit entsprechender Correctur des Endproductes (Fehlergrenze 0·0002).

§. **115.** Das Product zweier unvollständiger Decimalzahlen kann höchstens mit derjenigen Genauigkeit angegeben werden, welche das Product des minder genauen Factors mit der höchsten Ziffer des andern Factors erhält; dieses Product aber ist in der niedrigsten Stelle unsicher und erst in der vorletzten Stelle bis auf eine halbe Einheit derselben verbürgt.

Um daher das Product zweier unvollständiger Decimalzahlen mit erreichbarer Genauigkeit zu bestimmen, nehme man den ungenaueren Factor zum Multiplicand, setze unter seine vorletzte Ziffer die höchste geltende Ziffer des andern Factors, die übrigen Ziffern desselben aber in umgekehrter Ordnung und multipliciere sodann abgekürzt. Z. B.

1) $2{\cdot}916.. \times 4{\cdot}378..$	2) $4{\cdot}517 \times 68{\cdot}63..$
$87\,34$	$715\,4$
$11\,66_4$	$374\,5_2$
87_5	$34\,3_2$
20_4	6_9
2_3	4_8
$12{\cdot}77..$	$310{\cdot}0..$

Zur Bestimmung der Fehlergrenze des Productes zweier unvollständiger Decimalzahlen a.. und b.., deren Fehlergrenzen bezüglich α und β sind, hat man

$$(a \pm \alpha)(b \pm \beta) - ab = \pm a\beta \pm b\alpha \pm \alpha\beta.$$

Die Fehlergrenze ist also, da das Glied $\alpha\beta$ als gegen die übrigen verschwindend klein weggelassen werden kann, im ungünstigsten Falle, wo α und β gleichbezeichnet sind, gleich

$$a\beta + b\alpha.$$

Um demnach die Fehlergrenze des Productes zu erhalten, multipliciert man jeden Factor (in der Praxis gewöhnlich nur dessen höchste Stelle) mit der Fehlergrenze des andern Factors und addiert diese Producte.

Ist der eine Factor a eine vollständige Zahl, also $\alpha = 0$, so ist die Fehlergrenze des Productes gleich $a\beta$.

In dem obigen Beispiele 1) ist die Fehlergrenze des Productes $= 3 \times 0{\cdot}0005 + 4 \times 0{\cdot}0005 = 0{\cdot}0035$; in dem Beispiele 2) ist die Fehlergrenze $5 \times 0{\cdot}005 = 0{\cdot}025$.

Abgekürzte Division.

§. **116**. Will man den Quotienten zweier mehrstelliger Decimalzahlen mit Vermeidung jeder überflüssigen Rechnung nur bis zu einer bestimmten Decimalstelle entwickeln, so bedient man sich der abgekürzten Division. Diese ist die Umkehrung der abgekürzten Multiplication und besteht in folgendem Verfahren:

1. Man sucht die erste Ziffer des Quotienten und bestimmt ihren Rang. Aus dem Range dieser Ziffer und aus der Anzahl der im Quotienten ver-

langten Decimalen ergibt sich, wie viele geltende Ziffern des Quotienten man im ganzen zu bestimmen hat. Man nimmt dann so viele höchste Ziffern des Divisors, als ihrer der Quotient enthalten soll, als ersten Divisor an.

2. Bei jeder folgenden Division lässt man, anstatt zu dem Rest eine neue Ziffer oder eine Null dazu zu setzen, im Divisor rechts eine Ziffer weg, multipliciert jedoch mit jeder neuen Ziffer des Quotienten zunächst die erste im Divisor weggelassene Ziffer und nimmt aus dem Ergebnisse die Correctur für das Product aus dem abgekürzten Divisor und der entsprechenden Ziffer des Quotienten.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis mit der Division durch die erste Ziffer des Divisors die Rechnung abschließt.

Es sei z. B. der Quotient 125·083563 : 8·195 bis auf 2 Decimalstellen zu entwickeln.

a) Vollständige Division.

125·08	3563 : 8·195 = 15·2634
43 13	3
2 15	85
51	956
2	7863
	32780
	0

b) Abgekürzte Division.

125·08	3563 : 8·$\underline{19}$5 = 15·26..
43 13	
2 15	
52	
3	

§. **117**. Der Quotient zweier unvollständiger Decimalzahlen kann nicht genauer sein als die ungenauere dieser Zahlen.

Um daher den Quotienten zweier unvollständiger Decimalzahlen mit erreichbarer Genauigkeit zu bestimmen, nimmt man im Divident und im Divisor nur so viele Stellen in Betracht, als die ungenauere der beiden Zahlen gestattet, und dividiert abgekürzt. Z. B.

1) 148·47.. : 6·$\underline{24}$5.. = 23·77..
23 47
4 83
46
1

b) 17·837.. : 5·$\underline{27}$4|36 = 3·382..
2 014
432
10

Sind allgemein a.. und b.. zwei unvollständige Decimalbrüche, α die Fehlergrenze des ersten, β die Fehlergrenze des zweiten, so hat man zur Bestimmung der Fehlergrenze des Quotienten $\frac{a..}{b..}$ den Ausdruck

$$\frac{a \pm \alpha}{b \pm \beta} - \frac{a}{b} = \frac{ab \pm b\alpha - ab \mp a\beta}{b\,(b \pm \beta)} = \frac{\pm b\alpha \mp a\beta}{b\,(b \pm \beta)}.$$

Im ungünstigsten Falle sind α und β entgegengesetzt bezeichnet; dann ist, wenn man im Nenner β als gegen b verschwindend klein vernachlässiget, die Fehlergrenze gleich

$$\frac{b\alpha + a\beta}{b^2}, \text{ oder } \left(\alpha + \frac{a}{b} \cdot \beta\right) : b.$$

Um daher die Fehlergrenze des Quotienten zu erhalten, multipliciert man in der Praxis den auf seine höchste Stelle abgekürzten Quotienten mit der Fehlergrenze des Divisors, addiert zum Producte die Fehlergrenze des Dividends und dividiert die Summe durch die höchste Stelle des Divisors.

Ist der Dividend a eine vollständige Decimalzahl, also $\alpha = 0$, so ist die Fehlergrenze des Quotienten $\frac{a}{b}\beta : b$.

Ist der Divisor b eine vollständige Decimalzahl, also $\beta = 0$, so ist $\alpha : b$ die Fehlergrenze des Quotienten.

In dem obigen Beispiele 1) ist die Fehlergrenze des Quotienten $(20 \times 0{\cdot}0005 + 0{\cdot}005) : 6 = 0{\cdot}0025$; in dem Beispiele 2) ist $0{\cdot}0005 : 5 = 0{\cdot}0001$ die Fehlergrenze.

3. Kettenbrüche.

§. 118. Ein Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, von welchem der Nenner, wenn er nicht der letzte ist, wieder dieselbe Eigenschaft hat, heißt ein **Kettenbruch**. Die allgemeine Form eines Kettenbruches ist

$$\cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \ldots}}} \quad \text{oder kürzer geschrieben:} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \ldots$$

Die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \ldots$ heißen **Glieder** des Kettenbruches. Je nachdem der Kettenbruch eine bestimmte Anzahl von Gliedern hat oder ins Unendliche fortschreitet, heißt er ein **endlicher** oder **unendlicher Kettenbruch**.

Besonders wichtig sind solche Kettenbrüche, deren Glieder sämmtlich positiv sind und 1 zum Zähler haben; ihre allgemeine Form ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots$$

Nur von solchen Kettenbrüchen soll hier die Rede sein.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Kettenbruch und umgekehrt.

§. 119. Aufgabe. **Einen gemeinen echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.**

Man dividiere den Nenner durch den Zähler, dann den früheren Divisor durch den Rest, den neuen Divisor durch den neuen Rest, u. s. w., bis eine dieser Divisionen ohne Rest aufgeht; die einzelnen Quotienten sind die Nenner der aufeinander folgenden Glieder des Kettenbruches.

Beweis. Ist $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, also $a < b$, so hat man

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b:a} = \frac{1}{q_1} + \frac{r_1}{a}$$

$$= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{a:r_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{r_2}{r_1}$$

$$= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{r_1:r_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{r_3}{r_2} \text{ u. s. w.,}$$

wenn

$b \;: a$ den Quotienten q_1 mit dem Reste r_1,
$a \;: r_1$ „ „ q_2 „ „ „ r_2,
$r_1 : r_2$ „ „ q_3 „ „ „ r_3,

u. s. w. gibt.

Der hier begründete Rechnungsgang ist übereinstimmend mit der in §. 73 zur Auffindung des größten gemeinschaftlichen Maßes von b und a angegebenen Kettendivision, woraus folgt, dass man auch hier, wie dort, endlich auf einen Rest = 0 kommen müsse. Wäre in der obigen allgemeinen Entwicklung z. B. $r_3 = 0$, so hätte man den endlichen Kettenbruch

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}.$$

Der gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ wird in Bezug auf den erhaltenen Kettenbruch der Erzeugungsbruch genannt.

Ist z. B. $\frac{69}{151}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hat man folgende Rechnung:

151 : 69 = 2 mit dem Reste 13 oder	69	151	$2 = q_1$
69 : 13 = 5 „ „ „ 4	4	13	$5 = q_2$
13 : 4 = 3 „ „ „ 1		1	$3 = q_3$
4 : 1 = 4			$4 = q_4$

daher $\frac{69}{151} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Zusatz. Um einen unechten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, stelle man denselben als eine gemischte Zahl dar, verwandle dann den angehängten echten Bruch in einen Kettenbruch und setze diesem noch die erhaltene ganze Zahl voraus. Der Kettenbruch hat in diesem Falle die Form

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3 + \cdot\cdot}$$

§. 120. Aufgabe. Einen endlichen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Man vereinige das letzte Glied des Kettenbruches mit dem Nenner des vorletzten zu einem unechten Bruche und dividiere dadurch den Zähler 1 dieses vorletzten Gliedes; den erhaltenen Bruch vereinige man wieder mit dem Nenner des vorhergehenden Gliedes und dividiere dadurch den Zähler 1 desselben, und setze dieses Verfahren bis zum ersten Gliede fort.

Z. B. $\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{5}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{41}{5}}}} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \frac{5}{41}}}$

$$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{128}{41}}} = \cfrac{1}{4 + \frac{41}{128}} = \cfrac{1}{\frac{553}{128}} = \frac{128}{553}.$$

Ein anderes Verfahren, einen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, wird weiter unten (§. 122) angegeben werden.

Näherungsbrüche und ihre Eigenschaften.

§. **121.** Bricht man einen Kettenbruch bei irgend einem Gliede ab, und verwandelt den bis dahin reichenden Kettenbruch mit Vernachlässigung der folgenden Glieder in einen gemeinen Bruch, so heißt dieser ein Näherungsbruch des ganzen Kettenbruches, und zwar der erste, zweite, dritte,..., je nachdem man nur das erste, oder die ersten zwei, drei, ... Glieder in Anspruch nimmt. Bezeichnet man für den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ldots}}}}$$

die aufeinander folgenden Näherungsbrüche durch $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \ldots\ldots$, so ist

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1},\ \frac{Z_2}{N_2} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}},\ \frac{Z_3}{N_3} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}},\ \text{u. s. w.}$$

Bei einem endlichen Kettenbruche stellt der letzte Näherungsbruch zugleich den Erzeugungsbruch selbst dar.

§. **122.** Der Zähler eines Näherungsbruches (vom dritten an) ist gleich dem Producte aus dem Zähler des vorhergehenden Näherungsbruches und dem Nenner des neu hinzukommenden Gliedes, vermehrt um den Zähler des zweitvorhergehenden Näherungsbruches; ebenso ist der Nenner eines Näherungsbruches gleich dem Producte aus dem Nenner des vorhergehenden Näherungsbruches und dem Nenner des neu zugezogenen Gliedes, vermehrt um den Nenner des zweitvorhergehenden Näherungsbruches.

Beweis. Für die ersten Näherungsbrüche erhält man:

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1},\ \text{daher } Z_1 = 1,\ N_1 = q_1.$$

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{\frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}, \text{ daher}$$

$$Z_2 = q_2, \quad N_2 = q_1 q_2 + 1.$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{\frac{q_2 q_3 + 1}{q_3}} = \frac{1}{q_1} + \frac{q_3}{q_2 q_3 + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}{q_2 q_3 + 1}} = \frac{q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3} = \frac{q_2 q_3 + 1}{(q_1 q_2 + 1) q_3 + q_1}.$$

oder $\frac{Z_3}{N_3} = \frac{Z_2 q_3 + Z_1}{N_2 q_3 + N_1}$, daher

$$Z_3 = Z_2 q_3 + Z_1, \quad N_3 = N_2 q_3 + N_1;$$

woraus hervorgeht, dass das obige Gesetz für den dritten Näherungsbruch richtig ist.

Gesetzt nun, dasselbe Gesetz gelte für den $n$ten Näherungsbruch, so dass

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} q_n + Z_{n-2}}{N_{n-1} q_n + N_{n-2}}$$

sei. Um aus dem $n$ten Näherungsbruche den $(n + 1)$ten zu erhalten, darf man mit Rücksicht auf die Glieder des Kettenbruches, welche zu $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ gehören, nur in dem ersteren $q_n + \frac{1}{q_{n+1}}$ statt q_n setzen. Man erhält dann

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + Z_{n-2}}{N_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + N_{n-2}} = \frac{Z_{n-1}(q_n q_{n+1} + 1) + Z_{n-2} q_{n+1}}{N_{n-1}(q_n q_{n+1} + 1) + N_{n-2} q_{n+1}}$$

$$= \frac{(Z_{n-1} q_n + Z_{n-2}) q_{n+1} + Z_{n-1}}{(N_{n-1} q_n + N_{n-2}) q_{n+1} + N_{n-1}}, \text{ somit}$$

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_n q_{n+1} + Z_{n-1}}{N_n q_{n+1} + N_{n-1}}.$$

Gilt daher das obige Bildungsgesetz für den $n$ten Näherungsbruch, so ist es auch für den $(n + 1)$ten richtig. Nun gilt dieses Gesetz, wie gezeigt wurde, für den dritten Näherungsbruch, also gilt es auch für den vierten, folglich auch für den fünften, u. s. w.; folglich gilt dasselbe allgemein.

Mit Rücksicht auf die hier nachgewiesene Eigenschaft lassen sich aus den zwei ersten Näherungsbrüchen ohne Schwierigkeit alle nach einander folgenden Näherungsbrüche und daher bei einem endlichen Kettenbruche auch der Erzeugungsbruch bestimmen.

Z. B. Für den Kettenbruch $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

hat man $$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{3}{7};$$

daher

$$Z_3 = 3.4 + 1 = 13,\ N_3 = 7.4 + 2 = 30;\ \frac{Z_3}{N_3} = \frac{13}{30};$$
$$Z_4 = 13.5 + 3 = 68,\ N_4 = 30.5 + 7 = 157;\ \frac{Z_4}{N_4} = \frac{68}{157};$$
$$Z_5 = 68.6 + 13 = 421,\ N_5 = 157.6 + 30 = 972;\ \frac{Z_5}{N_5} = \frac{421}{972};$$

oder

Nenner 2, 3, 4, 5, 6,

Näherungsbrüche $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{13}{30}, \frac{68}{157}, \frac{421}{972}$.

Der letzte Näherungsbruch stellt zugleich den Erzeugungsbruch des gegebenen Kettenbruches dar.

Zusatz. Aus dem Bildungsgesetze der Näherungsbrüche folgt, dass sowohl die Zähler als die Nenner derselben immer größer werden müssen.

§. **123.** Die Näherungsbrüche mit ungeradem Stellenzeiger sind größer, die Näherungsbrüche mit geradem Stellenzeiger sind kleiner als der vollständige Wert des Kettenbruches.

Beweis. Drückt man die nach dem ersten, zweiten, dritten, ... Gliede weggelassenen Theile des Kettenbruches durch $x_1, x_2, x_3, \dots$ aus, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + x_1} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + x_2}} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + x_3}}} = \dots$$

Nun ist $q_1 < q_1 + x_1$ daher $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_1 + x_1}$, oder $\frac{Z_1}{N_1} > \frac{a}{b}$.

Ferner ist $q_2 < q_2 + x_2$, daher $\frac{1}{q_2} > \frac{1}{q_2 + x_2}$, somit auch $q_1 + \frac{1}{q_2} > q_1 + \frac{1}{q_2 + x_2}$; folglich $\frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} < \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + x_2}}$, oder $\frac{Z_2}{N_2} < \frac{a}{b}$.

Durch dieselbe Schlussweise ergibt sich

$$\frac{Z_3}{N_3} > \frac{a}{b}, \qquad \frac{Z_4}{N_4} < \frac{a}{b}, \text{ u. s. w.};$$

daher allgemein

$$\frac{Z_{2m-1}}{N_{2m-1}} > \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \frac{Z_{2m}}{N_{2m}} < \frac{a}{b}.$$

Folgesatz. Der vollständige Wert eines Kettenbruches liegt immer zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen.

§ **124.** 1. Die Differenz zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen ist gleich einem Bruche, dessen Zähler ± 1 und dessen Nenner das Product der Nenner der beiden Näherungsbrüche ist.

Beweis. Es ist

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1}\,N_n - Z_n\,N_{n-1}}{N_{n-1}\,N_n}, \text{ und}$$

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_n\,q_{n+1} + Z_{n-1}}{N_n\,q_{n+1} + N_{n-1}}$$

$$= \frac{Z_n\,N_{n-1} - Z_{n-1}\,N_n}{N_n\,(N_n\,q_{n+1} + N_{n-1})} = \frac{-(Z_{n-1}\,N_n - Z_n\,N_{n-1})}{N_n\,N_{n+1}}.$$

Hiernach ist allgemein der Zähler des Bruches, welcher die Differenz $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ ausdrückt, das Entgegengesetzte des Zählers von dem Bruche für die Differenz $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n}$, also für die nächstvorhergehende Differenz. Nun ist dieser Zähler für die erste Differenz, d. i. für

$$\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{q_2}{q_1\,q_2 + 1} = \frac{+1}{q_1\,(q_1\,q_2 + 1)} = \frac{+1}{N_1\,N_2}$$

gleich $+1$, demnach für die zweite Differenz -1, und sofort für die aufeinander folgenden Differenzen abwechselnd $+1$ und -1. Der dazu gehörige Nenner aber ist gleich dem Producte der Nenner der beiden Näherungsbrüche.

2. **Die Differenz zwischen einem Näherungsbruche und dem vollständigen Werte eines Kettenbruches ist absolut genommen kleiner als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Quadrat des Nenners des Näherungsbruches ist.**

Da der vollständige Wert $\frac{a}{b}$ des Kettenbruches immer zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen liegt, so ist der Unterschied $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b}$ absolut genommen kleiner als der Unterschied $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$, somit

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n\,N_{n+1}}.$$

Wegen $N_{n+1} > N_n$ ist nun $N_n\,N_{n+1} > N_n^2$, und $\frac{1}{N_n\,N_{n+1}} < \frac{1}{N_n^2}$, daher auch

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n^2}.$$

Zusatz. Da $N_1^2 < N_2^2 < N_3^2 < N_4^2 < \ldots$, daher

$$\frac{1}{N_1^2} > \frac{1}{N_2^2} > \frac{1}{N_3^2} > \frac{1}{N_4^2} > \ldots \text{ ist,}$$

so folgt, dass jeder folgende Näherungsbruch von dem vollständigen Werte des Kettenbruches um weniger verschieden ist, als der vorhergehende, dass sich also die aufeinander folgenden Näherungsbrüche diesem Werte immer mehr nähern, bis der letzte, wenn es einen gibt, mit ihm zusammenfällt.

§. **125. Zähler und Nenner eines jeden Näherungsbruches sind relative Primzahlen.**

Für die Näherungsbrüche $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ und $\frac{Z_n}{N_n}$ ist (§. 124, 1) absolut genommen

$$Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1} = 1.$$

Wären nun Z_n und N_n nicht relative Primzahlen, sondern sie hätten ein gemeinschaftliches Maß m, so wäre m auch ein Maß von $Z_{n+1} N_n - Z_n N_{n-1}$ (§. 72) und folglich ein Maß von 1, was nicht möglich ist.

§. **126.** Zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgende Näherungsbrüche läſst sich kein Bruch einschalten, dessen Nenner nicht größer ist, als der größere Nenner der beiden Näherungsbrüche.

Gesetzt, es würde der gemeine Bruch $\frac{p}{q}$ zwischen den Näherungsbrüchen $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ liegen, so müſste absolut genommen

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{p}{q} < \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}, \text{ oder } \frac{Z_n q - N_n p}{N_n q} < \frac{1}{N_n N_{n+1}}, \text{ daher}$$

$$\frac{Z_n q - N_n p}{q} < \frac{1}{N_{n+1}}$$

sein, was nur möglich ist, wenn der Nenner $q > N_{n+1}$ ist, weil $Z_n q - N_n p$ eine von 0 verschiedene ganze Zahl, also $\overline{\overline{>}}\ 1$ sein soll.

Folgesatz. Jeder Näherungsbruch drückt den vollständigen Wert des Kettenbruches genauer aus als jeder andere Bruch, der einen kleineren Nenner hat.

Zusatz. Diese Eigenschaft der Näherungsbrüche ist von großer praktischer Wichtigkeit. Will man nämlich den Quotienten (das Verhältnis) zweier großer Zahlen durch kleinere möglichst genau darstellen, so verwandelt man denselben in einen Kettenbruch und bestimmt dessen Näherungsbrüche; diese drücken den gesuchten Quotienten in den kleinsten Zahlen mit der größten Annäherung an dessen wahren Wert aus.

Beispiele. 1. Man soll den Bruch 3·1415926 durch kleinere Zahlen möglichst genau ausdrücken.

Man hat

$$3{\cdot}1415926 = \frac{31415926}{10000000} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{243} + \ldots$$

Näherungsbrüche:

$$3, \quad 7, \quad 15, \quad 1, \quad 243, \ldots$$

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{86598}{27565}, \ldots$$

2. Der frühere Wiener Fuß ist = 0·316081 Meter; man soll die Näherungswerte bestimmen.

Es ist

$$0{\cdot}316081 = \frac{316081}{1000000} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \ldots$$

Näherungsbrüche:

$$3,\quad 6,\quad 9,\quad 2,\quad 1,\quad 9,\ldots$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{6}{19},\ \frac{55}{174},\ \frac{116}{367},\ \frac{171}{541},\ \frac{1655}{5236},\ \ldots$$

VII. Unendlich große und unendlich kleine Größen und Grenzwerte der Veränderlichen.

§. 127. Größen, denen man während einer Rechnung oder Entwicklung einen bestimmten unveränderlichen Wert beilegt, heißen constant, im Gegensatze zu den veränderlichen oder variablen Größen, welche jeden beliebigen, ihrer Natur angemessenen Wert annehmen können.

Eine veränderliche Größe (Zahl), deren absoluter Wert so im Wachsen begriffen ist, dass er größer wird, als jede beliebige absolute Constante, heißt unendlich groß. Man bezeichnet sie durch ∞.

Eine veränderliche Größe (Zahl), deren absoluter Wert so im Abnehmen begriffen ist, dass er kleiner wird, als jede beliebige absolute Constante, heißt unendlich klein.

Lehrsätze. 1. Die Summe einer endlichen Anzahl von unendlich kleinen Summanden ist unendlich klein.

Sind ξ, v, ζ ... unendlich kleine Größen, und ist ihre Anzahl m eine endliche Zahl, so ist auch $\xi + v + \zeta + \ldots$ unendlich klein, d. i. kleiner als jede beliebige Constante c. Denn theilt man c in m beliebige constante Theile α, β, γ, ..., so wird

$$\xi < \alpha,\ v < \beta,\ \zeta < \gamma, \ldots,\ \text{also}\ \xi + v + \zeta + \ldots < c.$$

2. Ein Product, dessen Multiplicand unendlich klein, und dessen Multiplicator eine constante von Null verschiedene Zahl ist, ist unendlich klein.

Folgt aus 1.

3. Ein Product, dessen Multiplicand constant und von Null verschieden, und dessen Multiplicator unendlich klein ist, ist unendlich klein.

Um zu beweisen, dass für ein unendlich kleines n das Product An kleiner als eine beliebige Constante C wird, darf man nur $n < \frac{C}{A}$ wählen; dann wird $An < C$.

4. Ein Quotient, dessen Dividend constant und von Null verschieden, und dessen Divisor unendlich groß ist, ist unendlich klein.

Um zu beweisen, dass $\frac{A}{n}$ für ein unendlich großes n kleiner als irgend eine Constante C wird, wähle man $n > \frac{A}{C}$; dann wird $\frac{A}{n} < C$.

5. Ein Quotient, dessen Dividend constant und von Null verschieden, und dessen Divisor unendlich klein ist, ist unendlich groß.

Der Beweis ist analog dem Beweise zu 4.

§. **128.** Wenn eine veränderliche Größe X bei fortwährendem Zu- oder Abnehmen sich einer constanten Größe A, ohne dieselbe zu erreichen, so nähert, dass die Differenz zwischen ihnen unendlich klein wird, so heißt A der Grenzwert (limes) von X. Diese Beziehung wird ausgedrückt durch

$$\lim X = A.$$

Der Grenzwert einer unendlich kleinen Größe ist Null. Jedoch ist Null selbst nicht unendlich klein, da Null nicht veränderlich, sondern constant ist.

Lehrsätze. 1. Der Grenzwert einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden.

2. Der Grenzwert eines Productes ist gleich dem Producte der Grenzwerte der Factoren.

3. Der Grenzwert eines Quotienten ist gleich dem Quotienten des Grenzwertes des Dividends durch den Grenzwert des Divisors.

Sind A und B die Grenzwerte zweier zusammengehöriger Veränderlichen X und Y, und sind ξ und v positive oder negative Zahlen, die sich der Null nähern, wenn X und Y sich den Grenzwerten A und B nähern, so kann man

$$X = A + \xi \text{ und } Y = B + v$$

setzen. Dann ist

$$X + Y = A + B + (\xi + v),$$
$$XY = AB + (Av + B\xi + \xi v),$$
$$\frac{X}{Y} = \frac{A}{B} + \frac{B\xi - Av}{B(B + v)}.$$

Nähern sich nun X und Y ihren Grenzwerten A und B, also ξ und v der Null, so werden (§. 127, 1 und 3) $\xi + v$, $Av + B\xi + \xi v$, $B\xi - Av$ unendlich klein; daher ist

1) $\lim (X + Y) = \lim X + \lim Y,$

2) $\lim XY = \lim X \lim Y,$

3) $\lim \frac{X}{Y} = \frac{\lim X}{\lim Y}.$

§. **129**. Sind zwei constante Größen Grenzwerte derselben Veränderlichen, so sind sie einander gleich.

Ist $A = \lim X$ und $B = \lim X$, so ist $A = B$.

Denn wäre dem absoluten Werte nach $A > B$, so müsste dem absoluten Werte nach $A > X > B$ sein. Man theile nun $A - B$ in zwei ungleiche Theile, von denen der kleinere m sei; dann wird

$$A - X < m,$$
$$X - B < m, \text{ daher}$$

$$A - B < 2m, \text{ und um so mehr}$$
$$A - B < A - B, \text{ was unmöglich ist.}$$

Folgesatz. Eine constante Größe ist als Grenzwert einer veränderlichen Größe vollständig bestimmt.

VIII. Verhältnisse und Proportionen.

1. Verhältnisse.

Zahlenverhältnisse.

§. **130**. Unter dem Verhältnisse zweier Zahlen a und b versteht man den Quotienten derselben im Sinne der messenden Division (§. 46), d. i. die Angabe, wie vielmal b in a enthalten ist. Der Quotient $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ wird als Verhältnis gelesen: a verhält sich zu b, oder kürzer: a zu b. Den Dividend a nennt man das Vorderglied, den Divisor b das Hinterglied des Verhältnisses.

Zwei Verhältnisse, welche denselben Zahlenwert haben, sind einander gleich.

Das durch Vertauschung der Glieder eines Verhältnisses $a : b$ entstehende Verhältnis $b : a$ heißt das umgekehrte oder reciproke Verhältnis der Zahlen a und b; im Gegensatze zu demselben wird dann $a : b$ das gerade Verhältnis dieser Zahlen genannt.

Aus dem Begriffe eines Verhältnisses folgt:

1. Das Vorderglied eines Verhältnisses ist gleich dem Hintergliede multipliciert mit dem Quotienten. (§. 47, 1.)

2. Das Hinterglied eines Verhältnisses ist gleich dem Vordergliede dividiert durch den Quotienten. (§. 47, 2.).

3. Ein Verhältnis bleibt (seinem Werte nach) unverändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert. (§. 51, 2.)

Durch Anwendung des 3. Satzes kann man a) jedes Verhältnis, dessen Glieder Brüche enthalten, mit ganzen Zahlen darstellen; b) jedes Verhältnis, dessen Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, durch dieses abkürzen.

§. **131.** Multipliciert man in zwei oder mehreren Verhältnissen alle Vorderglieder, und ebenso alle Hinterglieder mit einander, so bilden die Producte ein neues Verhältnis, welches im Gegensatze zu den gegebenen einfachen Verhältnissen ein zusammengesetztes Verhältnis genannt wird.

Sind z. B. $a : b$
$c : d$
$e : f$ einfache Verhältnisse,

so ist $ace : bdf$ ein zusammengesetztes Verhältnis.

Größenverhältnisse.

§. **132.** Zwischen zwei Größen kann nur dann ein Verhältnis stattfinden, wenn dieselben gleichartig sind. Das Verhältnis zweier gleichartiger Größen ist gleichbedeutend mit dem Verhältnisse zweier unbenannter Zahlen, welche ausdrücken, wie vielmal eine dritte Größe derselben Art als Maß in jeder der beiden Größen enthalten ist.

Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier gleichartiger Größen zu finden.

Man nehme, wenn A und B die gegebenen Größen sind, von der größeren A die kleinere B so oft weg, als es angeht; sodann in gleicher Weise von B den etwa gebliebenen Rest R_1, von diesem Reste R_1 wieder den neuen Rest R_2, u. s. w. Kommt man bei einer dieser Messungen auf einen Rest $R_n = 0$, so ist der letzte nicht verschwindende Rest R_{n-1} das gr. g. Maß der beiden gegebenen Größen.

Die Begründung dieses Verfahrens, das mit dem in §. 73 angegebenen Vorgange bei der Auffindung des gr. g. Maßes zweier Zahlen übereinstimmt, ist analog mit dem dort geführten Beweise.

Hier werden zwar auch, wie bei der Aufsuchung des gr. g. Maßes zweier ganzer Zahlen, die Reste stets kleiner, man muss jedoch nicht immer, wie dort, schließlich einen Rest $= 0$ erhalten. Wenn man bei dem obigen Verfahren niemals auf einen Rest $= 0$ kommt, so weit man die Messungen auch fortsetzen würde, so haben die beiden Größen kein gemeinschaftliches Maß. Ein Beispiel zweier solcher Größen bieten die Hypotenuse und die Kathete eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes (Geometrie §. 107).

Zwei Größen, welche ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen commensurabel; zwei Größen, welche kein gemeinschaftliches Maß haben, incommensurabel.

§. **133.** 1. Das Verhältnis zweier commensurabler Größen ist entweder eine ganze oder eine gebrochene Zahl.

Sind die Größen A und B commensurabel, und ist ihr gemeinschaftliches Maß in A m mal, in B n mal enthalten, so ist $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, wo $\frac{m}{n}$ für den Fall, dass m durch n theilbar ist, eine ganze Zahl, sonst einen Bruch darstellt.

2. Das Verhältnis zweier incommensurabler Größen kann a) weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl sein; es läst sich jedoch b) als Grenzwert eines veränderlichen Bruches mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit bestimmen.

a) Sind A und B zwei incommensurable Größen, so kann weder $\frac{A}{B} = m$, noch $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ sein; denn im ersten Falle wäre dann B selbst, im zweiten $\frac{B}{n}$ ein gemeinschaftliches Maß von A und B, was gegen die Voraussetzung ist.

b) Theilt man B in n gleiche Theile und nimmt einen solchen Theil $\frac{B}{n}$ wiederholt von A weg, bis der letzte Rest kleiner wird als $\frac{B}{n}$, so hat man, wenn dies nach m maligem Wegnehmen der Fall ist,

$$A > m \cdot \frac{B}{n} \text{ und } A < (m + 1) \cdot \frac{B}{n},$$

folglich nach §. 58, 2

$$\frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{n}.$$

In diesem Falle liegt also das Verhältnis $\frac{A}{B}$ zwischen zwei Brüchen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$, wenn man n hinlänglich groß annimmt, beliebig klein gemacht werden kann. Das Verhältnis $\frac{A}{B}$ ist demnach der Grenzwert, dem sich der veränderliche Bruch $\frac{m}{n}$ um so mehr nähert, je größer n wird; also

$$\frac{A}{B} = \lim \frac{m}{n}, \text{ wenn } n = \infty \text{ wird.}$$

2. Erweiterung des Zahlengebietes durch die Division als Messung.

Irrationale Zahlen.

§. **134.** Das Messen zweier incommensurabler Größen führt auf Verhältnisse, die sich durch die bisher betrachteten Zahlen nicht ausdrücken lassen; man ist deshalb genöthigt, den Zahlenbegriff entsprechend zu erweitern. Dieses geschieht durch Einführung der irrationalen Zahlen.

Eine irrationale Zahl ist eine Zahl, welche sich weder durch eine ganze noch durch eine gebrochene Zahl, sondern nur als Grenzwert eines veränderlichen Bruches ausdrücken läst. Die Werte, welche dieser veränderliche Bruch annimmt, indem er sich der Grenze nähert, heißen Näherungswerte der irrationalen Zahl. Im Gegensatze zu den irrationalen Zahlen werden die bisher betrachteten Zahlen, die ganzen und gebrochenen, *rationale Zahlen* genannt.

Hiernach ist (§. 133) das Verhältnis zweier Größen A und B, wenn sie commensurabel sind, eine rationale Zahl, dagegen, wenn sie incommensurabel sind, eine irrationale Zahl. Das Zeichen für die irrationale Zahl $\frac{A}{B}$ ist $\lim \frac{m}{n}$, wo n ohne Ende zunimmt und m die größte ganze Zahl angibt, welche für den jedesmaligen Wert von n in dem Quotienten $A : \frac{B}{n}$ enthalten ist. Die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ sind für irgend einen besonderen Wert von n auf $\frac{1}{n}$ genaue Näherungswerte dieser irrationalen Zahl.

Ein periodischer Decimalbruch ist eine rationale Zahl. (§. 108, 2 und 3.)

Auch die irrationalen Zahlen können durch eine Zahlenlinie versinnlicht werden. Eine unbegrenzte gerade Linie stellt durch die von einem ihrer Punkte, dem Anfangspunkte, zu beiden Seiten gleich weit abstehenden Punkte die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen dar. Werden zwischen je zwei Punkte dieser Linie beliebig viele ebenfalls gleich weit von einander entfernte Punkte eingeschaltet, so wird durch diese die Reihe der Brüche mit beliebigen Nennern dargestellt. Je mehrere solche Punkte man einschaltet, desto näher rücken sie aneinander, bis sie bei einer ins Unendliche fortschreitenden Einschaltung, wie die irrationalen Zahlen es fordern, in eine *stetige* Zahlenlinie übergehen. So lange man sich auf die rationalen Zahlen beschränkte, hatte man immer noch nicht alle Punkte der Linie; erst die irrationalen Zahlen in Verbindung mit den rationalen lassen jeden Punkt der Linie als die Versinnlichung einer Zahl erscheinen.

§. **135.** *Mit irrationalen Zahlen rechnen* heißt, mit ihren Näherungswerten rechnen und den Grenzwert suchen, von welchem das Resultat unendlich wenig differiert, wenn die Näherungswerte von ihren irrationalen Grenzwerten selbst unendlich wenig differieren.

Da nach dieser Erklärung die Resultate der Rechnungen mit irrationalen Zahlen durch die bezüglichen Rechnungsresultate ihrer Näherungswerte bestimmt werden, diese aber rationale Zahlen sind, so *gelten alle für rationale Zahlen erwiesenen allgemeinen Operationsgesetze auch für die irrationalen Zahlen.*

3. Proportionen.

§. **136.** Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine *Proportion*. Ist $a : b = q$ und $c : d = q$, so ist auch $a : b = c : d$; dieser Ausdruck ist eine Proportion und wird gelesen: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält, oder kürzer: a zu b, wie c zu d. Das erste Glied a und das vierte d nennt man die äußeren, das zweite b und das dritte c die inneren Glieder; auch heißen a und c die Vorderglieder, b und d die Hinterglieder der Proportion. Das vierte Glied insbesondere wird die vierte Proportionale zu den drei ersten Gliedern genannt.

Sind in einer Proportion die inneren Glieder gleich, so heißt dieselbe eine stetige Proportion, z. B. $a : b = b : c$. Das innere Glied b wird die mittlere (geometrische) Proportionale oder das geometrische Mittel zu a und c, und c die dritte stetige Proportionale zu a und b genannt

Sind die Glieder einer Proportion lauter unbenannte Zahlen, so heißt dieselbe eine Zahlenproportion, sonst heißt sie eine Größenproportion.

Wenn zwei Arten von Größen so von einander abhängen, dass zu einer m fachen Größe der einen Art auch eine m fache Größe der andern Art gehört, so heißen die beiden Arten von Größen gerade proportioniert (proportional); z. B. Ware und Preis. Wenn dagegen zu der m fachen Größe der einen Art nur der m te Theil von der Größe der andern Art gehört, so heißen die beiden Arten von Größen verkehrt proportioniert; z. B. die Zahl der Arbeiter und die Arbeitszeit bei gleicher Leistung.

In den hier folgenden Untersuchungen können wir uns auf Proportionen beschränken, deren Verhältnisse rational sind, da die für diese erwiesenen Sätze nach §. 135 auch für irrationale Verhältnisse giltig sind.

Beziehungen unter den Gliedern einer Proportion.

§. **137.** In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Es sei $a : b = c : d$. Multipliciert man die Quotientengleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mit bd, so erhält man $\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d}$, und folglich $ad = bc$.

Folgesätze. 1. In einer stetigen Zahlenproportion ist das Quadrat der mittleren Proportionale gleich dem Producte der beiden anderen Glieder.

Ist $a : b = b : c$, so ist $b^2 = ac$.

2. Jedes äußere Glied einer Zahlenproportion ist gleich dem Producte der beiden inneren Glieder dividiert durch das andere äußere Glied; und jedes innere Glied ist gleich dem Producte der beiden äußeren Glieder dividiert durch das andere innere Glied.

Ist $a : b = c : d$, daher $ad = bc$, so ist

$$a = \frac{bc}{d},\ d = \frac{bc}{a},\ \text{und}\ b = \frac{ad}{c},\ c = \frac{ad}{b}.$$

§. **138.** Aus zwei gleichen Producten läßt sich eine Proportion bilden, indem man die Factoren des einen Productes zu äußeren, die Factoren des andern Productes zu inneren Gliedern macht.

Es sei $ad = bc$, daher auch $bc = ad$. Dividiert man diese gleichen Ausdrücke folgeweise durch bd, cd, ab und ac, so ergeben sich folgende Proportionen:

$$a : b = c : d, \qquad c : d = a : b,$$
$$a : c = b : d, \qquad b : d = a : c,$$
$$d : b = c : a, \qquad c : a = d : b,$$
$$d : c = b : a, \qquad b : a = d : c.$$

§. **139.** Eine Proportion auflösen heißt, aus drei gegebenen Gliedern einer Proportion das noch unbekannte Glied finden.

a) Eine Proportion wird aufgelöst, indem man aus dem Verhältnisse, dessen beide Glieder gegeben sind, den Quotienten sucht und aus diesem und dem gegebenen Gliede des andern Verhältnisses (nach §. 130, 1 oder 2) das unbekannte Glied bestimmt.

b) Eine Zahlenproportion wird am einfachsten nach §. 137, Folges. 2 aufgelöst.

Aus $x : 2 = 15 : 3$ findet man

a) $15 : 3 = 5$, $x = 2 . 5 = 10$; oder

b) $x = \frac{2 . 15}{3} = 10$; daher

$10 : 2 = 15 : 3$ die vollständige Proportion.

Umformung von Proportionen.

§. **140.** 1. Jede Zahlenproportion bleibt richtig, wenn man a) die inneren Glieder unter sich, b) die äußeren Glieder unter sich, c) die inneren Glieder mit den äußeren vertauscht.

Es sei $a : b = c : d$, daher $ad = bc$. Dann finden nach §. 138 auch folgende Proportionen statt:

a) $a : c = b : d$,

b) $d : b = c : a$,

c) $b : a = d : c$.

Die Umformung c) kann man auch mit jeder Größenproportion, die Umformungen a) und b) nur mit solchen Größenproportionen vornehmen, in denen alle Glieder gleichartig sind.

2. Eine Proportion bleibt richtig, wenn man ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

Folgt aus §. 130, 3 und §. 140, 1.

Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen; b) jede Proportion, in welcher ein äußeres und ein inneres Glied ein gemeinschaftliches Maß haben, durch dieses abkürzen.

§. **141.** 1. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der ersten zwei Glieder zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz der letzten zwei Glieder zum dritten oder vierten.

Ist $a : b = c : d$, $a = bq$, $c = dq$, so hat man

$$(a \pm b) : a = (bq \pm b) : bq = (q \pm 1) : q,$$
$$(c \pm d) : c = (dq \pm d) : dq = (q \pm 1) : q; \text{ daher}$$
$$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d.$$

2. In jeder Proportion verhält sich die Summe der ersten zwei Glieder zu deren Differenz, wie die Summe der letzten zwei Glieder zu deren Differenz.

Es ist

$$(a + b) : (a - b) = (bq + b) : (bq - b) = (q + 1) : (q - 1),$$
$$(c + d) : (c - d) = (dq + d) : (dq - d) = (q + 1) : (q - 1);$$

daher

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

3. In jeder Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Vertauscht man in der Proportion $a : b = c : d$ die inneren Glieder, so erhält man $a : c = b : d$. Nach 1. ist dann

$$(a \pm c) : a = (b \pm d) : b,$$

und nach Vertauschung der inneren Glieder

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b; \text{ folglich auch}$$
$$(a \mp c) : (b \pm d) = c : d.$$

Verbindung mehrerer Proportionen.

§. **142.** Werden mehr als zwei Verhältnisse einander gleichgesetzt, so entsteht eine fortlaufende Proportion; z. B.

$$a : m = b : n = c : p = \ldots$$

Diese fortlaufende Proportion schreibt man auch so an:

$$a : b : c \ldots = m : n : p \ldots,$$

wobei alle Vorderglieder auf einer, alle Hinterglieder auf der andern Seite des Gleichheitszeichens stehen.

In jeder fortlaufenden Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie irgend ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Hat man die fortlaufende Proportion

$$a : m = b : n = c : p,$$

so ist

$$\begin{aligned}(a + b + c) : (m + n + p) &= a : m \\ &= b : n \\ &= c : p.\end{aligned}$$

Folgt aus §. 141, 3.

§. **143**. 1. Wenn man in zwei oder mehreren Zahlenproportionen die gleichstelligen Glieder mit einander multipliciert, so bilden die Producte wieder eine Proportion.

Sind die Proportionen

$$\begin{aligned}a : b &= c : d, \\ f : g &= h : k, \\ m : n &= p : r\end{aligned}$$

gegeben, so ist $ad = bc$, $fk = gh$, $mr = np$. Multipliciert man diese Productengleichungen mit einander, so ergibt sich

$$adfkmr = bcghnp, \text{ oder } afm \,.\, dkr = bgn \,.\, chp,$$

und hieraus nach §. 138

$$afm : bgn = chp : dkr.$$

Man sagt, die letzte Proportion sei aus den gegebenen zusammengesetzt.

Zusatz. Sind die Proportionen

$$\begin{aligned}a : b &= m : n, \\ b : c &= p : r, \\ c : d &= s : t\end{aligned}$$

gegeben, so erhält man durch Multiplication der gleichstelligen Glieder

$$\begin{aligned}a : c &= mp : nr, \\ b : d &= ps : rt, \\ a : d &= mps : nrt.\end{aligned}$$

2. Wenn man die gleichstelligen Glieder zweier Zahlenproportionen durch einander dividiert, so bilden die Quotienten wieder eine Proportion.

Ist

$$\begin{aligned}a : b &= c : d \text{ und} \\ f : g &= h : k,\end{aligned}$$

so hat man $ad = bc$ und $fk = gh$. Dividiert man die erste Productengleichung durch die zweite, so erhält man

$$\frac{ad}{fk} = \frac{bc}{gh}, \text{ oder } \frac{a}{f} \cdot \frac{d}{k} = \frac{b}{g} \cdot \frac{c}{h},$$

und hieraus

$$\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{k}.$$

Harmonische Proportionen.

§. **144.** Drei Zahlen a, b, c bilden eine harmonische Proportion, wenn $(a - b) : (b - c) = a : c$ ist; b heißt dann die mittlere harmonische Proportionale oder das harmonische Mittel zwischen a und c.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen die dritte harmonisch proportionierte zu finden.

Aus $(a - b) : (b - c) = a : c$ folgt $ac - bc = ab - ac$, daher

$$1)\quad a = \frac{bc}{2c - b},$$

$$2)\quad c = \frac{ab}{2a - b}, \text{ und}$$

$$3)\quad b = \frac{2ac}{a + c}.$$

Die dritte Gleichung gibt den Satz:

Das harmonische Mittel zwischen zwei Zahlen ist gleich dem doppelten Producte derselben dividiert durch ihre Summe.

Vergleichung zwischen dem arithmetischen (§. 99, Zusatz), dem geometrischen (§. 136 und §. 137, Folges. 1) und dem harmonischen Mittel.

4. Anwendung der Proportionen.

Angewandte Aufgaben mit einfachen Verhältnissen.

§. **145.** Die Lösung von Proportionsaufgaben, deren Größen in einfachen Verhältnissen stehen, — die sogenannte einfache Regeldetri —, beruht auf folgendem Satze:

Sind zwei Arten von Zahlen gerade oder verkehrt proportioniert, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art bezüglich gleich dem geraden oder dem umgekehrten Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art.

Es seien A und a zwei Zahlen der einen Art, B und b die zugehörigen Zahlen einer zweiten Art, und diese beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert. Ist nun $A = ma$, so muss dann auch $B = mb$ sein; man hat daher $A : a = m$ und $B : b = m$, und somit

$$A : a = B : b.$$

Sind dagegen die beiden Arten von Zahlen verkehrt proportioniert und ist $A = ma$, so muß $B = \frac{b}{m}$, also $b = mB$ sein. Man hat daher

$$A : a = m \text{ und } b : B = m; \text{ folglich}$$

$$A : a = b : B.$$

Beispiele. 1. 7 Meter Tuch kosten 30 fl., wie viel kosten 42 Meter von demselben Tuche?

Da hier die beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so hat man

7 Meter 30 fl.	$x : 30 = 42 : 7$
42 „ x „	also $x = 180$ fl.

2. 16 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 6 Tagen; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müssen, damit sie dieselbe Arbeit in 4 Tagen zustande bringen?

Die beiden Arten von Zahlen sind hier verkehrt proportioniert; man hat also

16 Arb. 6 Tage	$x : 16 = 6 : 4$
x „ 4 „	$x = 24$ Arbeiter.

146. Ein Betrag, der sich auf die Zahl 100 bezieht, wird Procent genannt. Bei der Procentrechnung rechnet man entweder von, oder auf, oder in Hundert, je nachdem die Menge, von welcher die Procente bestimmt werden, mit der Grundzahl 100 selbst, oder mit 100 vermehrt um das Procent, oder mit 100 vermindert um das Procent gleichartig ist.

Bezeichnet p das Procent und b den Ertrag von der Menge m, so hat man folgende Proportionen:

a) bei der Rechnung von Hundert $b : p = m : 100$, also $b = \frac{mp}{100}$;

b) „ „ „ auf Hundert $b : p = m : (100+p)$, „ $b = \frac{mp}{100+p}$;

c) „ „ „ in Hundert $b : p = m : (100-p)$, „ $b = \frac{mp}{100-p}$.

Angewandte Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen.

§. **147.** Die Lösung von Aufgaben, deren Größen in zusammengesetzten Verhältnissen stehen, — die sogenannte zusammengesetzte Regeldetri —, beruht auf folgendem Satze:

Hängt eine Art von Zahlen von mehreren anderen Arten so ab, dass sie mit denselben einzeln genommen theils gerade, theils verkehrt proportioniert ist, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den einfachen bezüglich gerade oder umgekehrt genommenen Verhältnissen zwischen den zugehörigen Zahlen jeder andern Art.

Es sei die Zahl A von den Zahlen B, C so abhängig, wie
„ „ a „ „ „ b, c,

wo die mit gleichlautenden Buchstaben bezeichneten Zahlen zu derselben Art gehören, und es seien die Zahlen der ersten Art mit den Zahlen der zweiten Art gerade, mit den Zahlen der dritten Art verkehrt proportioniert. Heißt α

eine Zahl der ersten Art, welche zu den Zahlen b, C gehört, so hat man folgende Reihen zusammenhängender Zahlen:

$$A,\ B,\ C;$$
$$\alpha,\ b,\ C;$$
$$a,\ b,\ c.$$

Da die Zahl α aus A entsteht, indem sich B in b ändert, und die Zahlen dieser zwei Arten gerade proportioniert sind, so hat man

$$A : \alpha = B : b.$$

Da ferner a aus α hervorgeht, wenn sich C in c verändert, und die Zahlen dieser zwei Arten verkehrt proportioniert sind, so hat man

$$\alpha : a = c : C.$$

Durch Multiplication dieser beiden Proportionen ergibt sich

$$A\alpha : a\alpha = Bc : bC,$$
oder $$A : a = Bc : bC,$$

in welcher Proportion der oben aufgestellte Satz enthalten ist.

Man pflegt diese letztere Proportion wegen der leichteren Übersicht auch so zu schreiben:

$$\begin{array}{rl} A : a = & B : b \\ & c : C, \end{array}$$

wobei man sich denken muss, dass die unter einander stehenden Zahlen zu multiplicieren sind.

Z. B. Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Damm von 375 Meter Länge zustande bringen; in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, einen eben solchen Damm von 600 Meter vollenden?

20 Arb.	12 Std. tägl.	5 Woch.	375 Meter Länge	
12 „	10 „ „	x „	600 „ „	

$$\begin{array}{rr} x : 5 = 20 : & 12 \\ 12 : & 10 \\ 600 : & 375 \\ \hline \end{array}$$
$$x : 1 = 16 : 1;\ \text{daher}\ x = 16\ \text{Wochen}.$$

§. **148.** Bezeichnet Z die e i n f a c h e n Z i n s e n, welche ein Capital C in J Jahren zu P Procent gibt, so hat man zur gegenseitigen Bestimmung dieser Größen folgende zusammengesetzte Regeldetri:

100 fl. Cap.	in 1 Jahr.	P fl. Zins	
C „ „	„ J „	Z „ „	

$$\begin{array}{rl} Z : P = & C : 100 \\ & J : 1 \\ \hline \end{array}$$
$$\text{also}\ Z : P = CJ : 100\ \text{und}$$
$$100\,Z = CPJ.$$

Werden diese letzten zwei gleichen Ausdrücke zuerst durch 100, dann durch PJ, ferner durch CJ, endlich durch CP dividiert, so erhält man beziehungsweise

$$Z = \frac{CPJ}{100}, \quad C = \frac{100\,Z}{PJ}, \quad P = \frac{100\,Z}{CJ}, \quad J = \frac{100\,Z}{CP},$$

welche Formeln in die gewöhnliche Wortsprache übertragen, die Sätze für die Lösung der Aufgaben über die einfache Zinsrechnung enthalten.

Die Theilregel.

§. **149.** Soll eine gegebene Zahl in mehrere Theile, welche sich wie andere gegebene Zahlen verhalten, getheilt werden, so geschieht dieses durch die Theilregel oder Gesellschaftsrechnung. Die Zahlen, durch welche das Verhältnis der Theile ausgedrückt wird, heißen Verhältniszahlen.

Ist nur eine Reihe von Verhältniszahlen gegeben, so wird die einfache, sind mehrere Reihen von Verhältniszahlen gegeben, so wird die zusammengesetzte Theilregel angewendet.

Es seien bei der einfachen Theilregel s die zu theilende Zahl, a, b, c und d die Verhältniszahlen. Werden die gesuchten Theile durch u, x, y und z bezeichnet, so hat man die fortlaufende Proportion:

$$u : x : y : z = a : b : c : d,$$

oder

$$u : a = x : b = y : c = z : d,$$

daher nach §. 142

$$\begin{aligned}(u + x + y + z) : (a + b + c + d) &= u : a\\ &= x : b\\ &= y : c\\ &= z : d.\end{aligned}$$

Da nun $u + x + y + z = s$ sein muss, so erhält man aus dem letzten Ausdrucke

$$u = \frac{s}{a+b+c+d}\,.\,a; \quad x = \frac{s}{a+b+c+d}\,.\,b;$$

$$y = \frac{s}{a+b+c+d}\,.\,c; \quad z = \frac{s}{a+b+c+d}\,.\,d.$$

Bei der einfachen Theilregel dividiert man daher die zu theilende Zahl durch die Summe aller Verhältniszahlen und multipliciert den Quotienten mit jeder Verhältniszahl; die Producte sind die gesuchten Theile.

Wenn die Verhältniszahlen Brüche enthalten, so werden sie zuerst in ganzen Zahlen dargestellt, indem man sie mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multipliciert. Haben alle Verhältniszahlen ein gemeinschaftliches Maß, so werden sie durch dasselbe abgekürzt.

Z. B. Es sollen 2155 fl. unter drei Personen nach dem Verhältnisse der Zahlen 5, 3, 2 vertheilt werden.

5	$215\frac{1}{2} . 5 = 1077\frac{1}{2}$	
3	$215\frac{1}{2} . 3 = 646\frac{1}{2}$	
2	$215\frac{1}{2} . 2 = 431$	
$2155 : 10 = 215\frac{1}{2}$	2155	

§. **150.** Die zusammengesetzte Theilregel lässt sich auf die einfache zurückführen.

Es sei eine Zahl s mit Bezugnahme auf mehrere Umstände in drei Theile zu theilen, die sich in einer Beziehung wie $a : b : c$, in einer zweiten Beziehung wie $d : e : f$, und in einer dritten Beziehung wie $g : h : k$ verhalten. Heißen x, y, z die noch unbekannten Theile, so muss sich $x : y$ nicht nur wie $a : b$, sondern auch wie $d : e$ und wie $g : h$ verhalten; es muss also das Verhältnis $x : y$ gleich sein dem zusammengesetzten Verhältnisse aus $a : b$, $d : e$, $g : h$, also dem Verhältnisse $adg : beh$. Ebenso muss $y : z = beh : cfk$ sein. Es besteht demnach die Forderung, die Theile x, y, z so zu bestimmen, dass der Bedingung

$$x : y : z = adg : beh : cfk$$

Genüge geleistet werde, was eine Aufgabe der einfachen Theilregel ist.

Bei der zusammengesetzten Theilregel multipliciert man daher die auf denselben Theil Bezug habenden Verhältniszahlen mit einander und betrachtet die Producte als Verhältniszahlen einer Aufgabe der einfachen Theilregel, nach welcher dann die weitere Auflösung erfolgt.

Z. B. Zu einer Unternehmung vereinigen sich drei Personen; A gibt 8000 fl. auf 5 Monate, B 4000 fl. auf 6 Monate, C 2000 fl. auf 8 Monate her. Die Unternehmung wirft einen reinen Gewinn von 460 fl. ab; wie viel davon wird jede der drei Personen erhalten?

A 8000 fl. durch 5 Mon.	$40\cancel{000}$	5	$46 . 5 = 230$ fl.
B 4000 „ „ 6 „	$24\cancel{000}$	3	$46 . 3 = 138$ „
C 2000 „ „ 8 „	$16\cancel{000}$	2	$46 . 2 = 92$ „
	$460 : 10 = 46$		460 fl.

Die Kettenregel.

§. **151.** Wenn die Beziehung zwischen zwei Größen nicht unmittelbar bekannt ist, sondern erst durch eine zusammenhängende Aufstellung bekannter Zwischenbestimmungen gesucht werden muss, so wendet man die Kettenregel an.

Es sei folgende Aufgabe zu lösen:

Wie viel (x) Einheiten von der Art M betragen a Einheiten von der Art A,
wenn a′ Einheiten von der Art A b Einheiten von der Art B,
b′ „ „ „ „ B c „ „ „ „ C,
c′ „ „ „ „ C m „ „ „ „ M
betragen?

Diese Aufgabe kann kürzer so angeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} xM &= aA, \\ \text{wenn } a'A &= bB, \\ b'B &= cC, \\ c'C &= mM, \end{aligned}\right\}\ldots 1)$$

wo x, a, a′, b, b′ c, c′, m unbenannte Zahlen, und A, B, C, M die Arten oder Benennungen derselben vorstellen.

Um das gesuchte Resultat zu erhalten, verwandelt man die gegebenen a Einheiten der Art A zunächst in (y) Einheiten der Art B, dann die gefundenen Einheiten der Art B in (z) Einheiten der Art C, und diese endlich in (x) Einheiten der Art M. Dabei ergeben sich nach den angegebenen Bedingungen folgende Proportionen:

$$\begin{aligned} y : b &= a : a', \\ z : c &= y : b', \\ x : m &= z : c', \text{ woraus nach §. 143, 1 folgt:} \\ \hline x : bcm &= a : a'b'c', \text{ und} \\ x &= \frac{abcm}{a'b'c'}\ldots 2) \end{aligned}$$

Aus dem in 1) angegebenen Ansatze der Aufgabe und dem in 2) für x erhaltenen Ausdrucke ergibt sich für die **Kettenrechnung** folgendes **praktisches Verfahren**:

1. Man schreibe x mit seiner Benennung an und rechts daneben die gegebene Größe, deren Betrag gesucht wird und die daher mit x gleichen Wert hat. Darunter setze man alle Mittelbeziehungen, und zwar fange man jedesmal links mit einer Größe an, welche mit der nächst vorhergehenden rechts von gleicher Art ist; rechts neben jede Größe kommt diejenige Größe, welche mit ihr gleichwertig ist. So wird fortgefahren, bis man rechts eine Größe erhält, die mit x gleichnamig ist.

2. Man dividiere das Product aller rechts stehenden unbenannten Zahlen durch das Product aller links unter x stehenden; der Quotient gibt den gesuchten Wert von x.

Z. B. Wenn in England 1 Quarter Weizen 52 Shilling kostet, welches ist der entsprechende Preis für 1 Hektoliter in fl. ö. W.? (11 Quarter = 32 Hektoliter, 20 Shilling = 1 Pfund Sterling, 10 Pfd. Sterl. = 117 fl. ö. W.)

x fl. ö. W.	1 Hektoliter
32 Hektol.	11 Quarter
1 Quarter	52 Shilling
20 Shilling	1 Pfd. Sterl.
10 Pfd. Sterl.	117 fl. ö. W.

$$x = \frac{11.52.117}{32.20.10}$$
$$= 10{\cdot}46 \text{ fl. ö. W.}$$

Dritter Abschnitt.

Potenzieren, Radicieren und Logarithmieren.

I. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§. 152. Eine Zahl a zur nten Potenz erheben oder mit n potenzieren heißt, a n mal als Factor setzen (§. 35). a ist die Grundzahl oder Basis, n der Potenzexponent und das erhaltene Product p die nte Potenz von a. Man schreibt $a^n = p$. Eine Potenz ist demnach ein Product gleicher Factoren.

Folgesätze. a) $1^n = 1$. b) $0^n = 0$.

Zusatz. Die vorstehende Erklärung hat zunächst nur dann einen Sinn, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl und > 1 ist. Das Princip der Erhaltung der Operationsgesetze führt jedoch die Nothwendigkeit herbei, den ursprünglichen Potenzbegriff zu erweitern. Eine solche Erweiterung enthalten schon die im Zusatz zu §. 52 abgeleiteten Sätze

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^0 = 1.$$

Später wird der Potenzbegriff auch auf negative und gebrochene Exponenten erweitert werden.

Verbindung des Potenzierens mit sich selbst.

§. 153. Die Potenz einer Potenz bleibt unverändert, wenn man die Exponenten unter einander vertauscht.

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

Beweis. Ordnet man die gleichen Factoren der Potenz $(a^m)^n$ in n Reihen, deren jede den Factor a m mal enthält, nämlich

$$\begin{array}{l} a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\ldots.\ (m\ \text{mal}) \\ a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\ldots. \\ a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\ldots. \\ .\quad .\quad .\quad . \\ (n\ \text{mal}), \end{array}$$

so erhält man offenbar a mn mal als Factor, mag man die m Factoren einer Horizontalreihe n mal, oder die n Factoren einer Verticalreihe m mal als

Factor setzen. Im ersten Falle erhält man a^m $n$mal als Factor, also $(a^m)^n$, im zweiten a^n $m$mal als Factor, also $(a^n)^m$. Es ist daher $(a^m)^n = (a^n)^m$.

Dieser Satz behält, wie leicht zu zeigen ist (§. 36), seine volle Giltigkeit auch dann, wenn mehr als zwei Potenzexponenten gegeben sind.

§. **154.** 1. Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man die Basis mit dem Producte beider Exponenten potenziert.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Folgt aus dem Beweise in §. 153.

2. Umgekehrt: Eine Zahl wird mit einem Producte potenziert, indem man sie mit dem einen Factor, und die erhaltene Potenz mit dem andern Factor potenziert.

Verbindung des Potenzierens mit der Multiplication und Division.

§. **155.** 1. Ein Product wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden Factor mit ihr potenziert.

$$(ab)^m = a^m . b^m.$$

Beweis. $(ab)^m = ab.ab.ab.ab\ldots$ ($m$mal)

$= a.a.a.a..$ ($m$mal)$.b.b.b.b\ldots$ ($m$mal) (§. 36)

$= a^m . b^m.$

2. Umgekehrt: Potenzen desselben Exponenten werden multipliciert, indem man das Product der Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

§. **156.** 1. Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl potenziert, indem man Dividend und Divisor mit ihr potenziert.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Der Beweis ist demjenigen zu §. 155, 1 analog.

2. Umgekehrt: Potenzen desselben Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenziert.

Folgesatz. Die Potenz eines auf die einfachste Form gebrachten echten oder unechten Bruches kann nie eine ganze Zahl sein.

Folgt aus 1. unter Beiziehung von §. 75, 5.

§. **157.** 1. Potenzen derselben Basis werden multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

Dieser Satz wurde schon in §. 38 bewiesen.

2. Umgekehrt: Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man sie mit jedem Summanden potenziert und die erhaltenen Potenzen multipliciert.

§. **158**. 1. Potenzen derselben Basis werden dividiert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit einer Zahl potenziert, welche gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Divisors.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung für $m > n$ und $m = n$ wurde in §. 52 bewiesen; die Bedeutung derselben für $m < n$ wird weiter unten (§. 177) besonders untersucht werden.

2. Umgekehrt: Eine Zahl wird mit einer Differenz potenziert, indem man sie mit dem Minuend und mit dem Subtrahend potenziert, und die erste Potenz durch die zweite dividiert.

Zusatz. Mit Potenzen, welche ungleiche Exponenten und ungleiche Grundzahlen haben, wird die Multiplication und Division auf dieselbe Art wie mit allgemeinen Zahlen überhaupt vorgenommen.

Die in den §§. 155—158 angeführten Sätze bilden die Distributionsgesetze des Potenzierens. Das commutative Princip findet bei den Potenzen nicht statt, da a^m von m^a im allgemeinen verschieden ist.

Verbindung des Potenzierens mit der Addition und Subtraction.

§. **159**. Für das Addieren und Subtrahieren von Potenzen sowie für das Rechnen mit mehrgliedrigen Ausdrücken, in denen Potenzen vorkommen, gelten die bezüglichen, für allgemeine Zahlen überhaupt abgeleiteten Sätze. Eine Zusammenziehung des Resultates kann nur dann stattfinden, wenn die Potenzen sowohl gleiche Grundzahlen als gleiche Exponenten haben.

Die auf einander folgenden Potenzen eines Binoms oder Polynoms kann man einfach durch die Multiplication erhalten. Die Entwicklung des Quadrates und des Cubus insbesondere wird in den §§. 187 und 194 gezeigt, das allgemeine Gesetz der höheren Potenzen in §. 273 näher untersucht werden.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Potenzierung.

§. **160**. 1. Gleiche Zahlen mit gleichen Zahlen potenziert geben Gleiches.

Ist $a = b$, so ist auch $a^m = b^m$ (§. 8, 3).

Folgesatz. Wenn man alle Glieder einer Proportion mit derselben Zahl potenziert, so erhält man wieder eine Proportion.

Ist $a : b = c : d$, so muss auch $(a : b)^m = (c : d)^m$, folglich $a^m : b^m = c^m : d^m$ (§. 156, 1) sein.

2. Ungleiche Zahlen mit gleichen positiven Zahlen potenziert geben Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$, so ist $a^m > b^m$ (§. 45, 3).

Folgesatz. Wenn $a \gtrless 1$, so ist bezüglich $a^m \gtrless 1$.

3. Gleiche Zahlen mit ungleichen Zahlen potenziert geben Ungleiches mit demselben oder mit dem entgegengesetzten Ungleichheitszeichen, je nachdem die Basis größer oder kleiner als 1 ist.

Ist $m > n$, so hat man für $a > 1$, $a^m > a^n$;
für $a < 1$, $a^m < a^n$.

Folgt aus §. 101, Folgesatz.

4. Ungleiche Zahlen, von denen wenigstens die eine größer als 1 ist, mit ungleichen positiven Zahlen bei demselben Ungleichheitszeichen potenziert, geben Ungleiches mit dem gemeinschaftlichen Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und zugleich $a > 1$, ferner $m > n$, so ist $a^m > b^n$.

Denn nach 3. ist $a^m > a^n$, nach 2. $a^n > b^n$; daher um so mehr $a^m > b^n$.

Potenzen mit algebraischer Basis.

§. **161.** 1. Eine positive Basis gibt mit einer ganzen Zahl potenziert immer eine positive Potenz.

$(+a)^n = +a \,.\, +a \,.\, +a \,.\, + \ldots\, n\text{mal} = +a^n$ (§. 59, Folges. 2).

2. Eine negative Basis gibt mit einer geraden ganzen Zahl potenziert eine positive, mit einer ungeraden ganzen Zahl potenziert dagegen eine negative Potenz.

$(-a)^{2n} \;= -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a \ldots\; 2n\text{mal} = +a^{2n}$ (§. 59, Folges. 3).
$(-a)^{2n+1} = -a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a \ldots\; (2n+1)\text{mal} = -a^{2n+1}$.

II. Wurzeln mit positiven ganzen Exponenten.

§. **162.** Aus einer Zahl a die nte Wurzel auszuziehen, oder die Zahl a durch n radicieren, heißt aus der Potenz a und dem Exponenten n die Basis suchen. Die gegebene Potenz a heißt der Radicand, oder geradehin die Zahl, der gegebene Exponent n der Wurzelexponent, und die gesuchte Basis p die nte Wurzel aus a. Man schreibt $\sqrt[n]{a} = p$.

Eine Wurzel ist also ein Ausdruck für diejenige Zahl, welche mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radicand gibt; oder es ist $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Die zweite und die dritte Wurzel einer Zahl nennt man bezüglich Quadratwurzel und Cubikwurzel.

§. **163.** *Folgesätze.* 1. Potenziert man eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten, so erhält man den Radicand.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

2. Radiciert man eine Potenz durch den Potenzexponenten, so erhält man die Basis.

$$\sqrt[n]{(a^n)} = a.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl potenziert und durch dieselbe Zahl radiciert.

$$a = \sqrt[n]{(a)^n}\,;\ a = (\sqrt[n]{a})^n.$$

Hiernach kann jede Zahl in Form einer Wurzel dargestellt werden; z. B. $b = \sqrt[5]{b^5}$.

Das Potenzieren und das Radicieren sind demnach einander entgegengesetzt; letzteres ist eine inverse Operation des ersteren.

4. Die erste Wurzel aus einer Zahl ist die Zahl selbst.

Da $a^1 = a$, so ist $\sqrt[1]{a} = a$.

Für die erste Wurzel wird daher weder der Exponent 1, noch das Wurzelzeichen angeschrieben. Bei der zweiten oder Quadratwurzel wird das Wurzelzeichen, aber nicht der Exponent 2 angeschrieben, so dass $\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt[2]{a}$ bedeutet.

5. $\sqrt[n]{1} = 1$. 6. $\sqrt[n]{0} = 0$.

Rationale und irrationale Wurzeln.

§. **164.** 1. Die nte Wurzel aus einer ganzen Zahl ist entweder eine ganze Zahl oder sie ist irrational.

Beweis. Man bilde die nten Potenzen der aufeinander folgenden ganzen Zahlen, mit Hinzufügung der Null, nämlich

$$0^n,\ 1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ \ldots\ p^n,\ (p+1)^n,\ \ldots$$

Es sind nun zwei Fälle möglich:

a) Entweder ist a gleich einer dieser Potenzen, z. B. $a = p^n$; dann ist $\sqrt[n]{a} = p$ eine ganze Zahl.

b) Oder a liegt zwischen zwei aufeinander folgenden solchen Potenzen, etwa zwischen p^n und $(p+1)^n$, wo dann $\sqrt[n]{a}$ zwischen zwei aufeinander folgende ganze Zahlen p und $p+1$ fällt, somit keine ganze Zahl sein kann. Dann läst sich aber $\sqrt[n]{a}$ auch durch keinen Bruch vollkommen genau darstellen; denn wäre $\sqrt[n]{a} = p + \frac{q}{r} = \frac{pr+q}{r}$, wo q und r relative Primzahlen sind, so müste $\left(\frac{pr+q}{r}\right)^n = a =$ einer ganzen Zahl sein, was nach §. 156, Folges. unmöglich ist.

Dagegen läſst sich in diesem Falle $\sqrt[n]{a}$ als Grenzwert eines veränderlichen Bruches mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit bestimmen.

Da nämlich $\sqrt[n]{a}$ zwischen p und $p + 1$ liegt, so vermehre man p nach und nach um $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots$, wo m eine ganze Zahl bezeichnet und bilde

$$p^n, \left(p + \frac{1}{m}\right)^n, \left(p + \frac{2}{m}\right)^n, \ldots \left(p + \frac{c}{m}\right)^n, \left(p + \frac{c+1}{m}\right)^n, \ldots$$

Weil nun a keiner dieser Potenzen gleich sein kann, so muſs es nothwendig zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgende solche Potenzen fallen, etwa zwischen $\left(p + \frac{c}{m}\right)^n$ und $\left(p + \frac{c+1}{m}\right)^n$, wo $c < m$ ist. Dann ist

$$p + \frac{c}{m} < \sqrt[n]{a} < p + \frac{c+1}{m}.$$

$\sqrt[n]{a}$ liegt also zwischen zwei Brüchen $p + \frac{c}{m}$ und $p + \frac{c+1}{m}$, deren Differenz $\frac{1}{m}$ ist. Setzt man für $\sqrt[n]{a}$ die Zahl $p + \frac{c}{m}$, so begeht man einen Fehler, der kleiner als $\frac{1}{m}$ ist. Da aber m beliebig groß, daher $\frac{1}{m}$ beliebig klein gemacht werden kann, so läſst sich $\sqrt[n]{a}$ als Grenzwert, dem sich der veränderliche Bruch $p + \frac{c}{m}$ um so mehr nähert, je größer m wird, mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmen. Es ist $\sqrt[n]{a} = \lim \left(p + \frac{c}{m}\right)$, wenn $m = \infty$ wird; $p + \frac{c}{m}$ und $p + \frac{c+1}{m}$ sind für jeden besonderen Wert von m auf $\frac{1}{m}$ genaue Näherungswerte von $\sqrt[n]{a}$.

Ist also die nte Wurzel aus einer ganzen Zahl nicht wieder eine ganze Zahl, so ist sie eine *irrationale Zahl* (§. 134).

2. *Die nte Wurzel aus einem Bruche $\frac{a}{b}$ ist entweder ein Bruch oder eine irrationale Zahl.*

Der Beweis wird, indem man zunächst die Reihe der Potenzen

$$\left(\frac{0}{b}\right)^n, \left(\frac{1}{b}\right)^n, \left(\frac{2}{b}\right)^n, \left(\frac{3}{b}\right)^n, \ldots \left(\frac{p}{b}\right)^n, \left(\frac{p+1}{b}\right)^n, \ldots$$

bildet, anolog wie zu 1. geführt.

Zusatz. Da wir die folgenden Sätze sämmtlich aus dem *allgemeinen Begriffe* einer Wurzel, welcher durch die Gleichung $(\sqrt[n]{a})^n = a$ gegeben ist, ableiten werden, so sind dieselben sowohl für rationale als für irrationale Wurzeln giltig.

Verbindung des Radicierens mit sich selbst und mit dem Potenzieren.

§. **165.** 1. Eine Potenz wird durch eine Zahl radiciert, indem man die Basis durch sie radiciert, oder indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert.

$$\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

Beweis. a) Soll $(\sqrt[n]{a})^m$ die richtige Wurzel sein, so muss sie mit dem Wurzelexponenten n potenziert den Radicand a^m geben (§. 162). Wirklich ist

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m \text{ (§. 153)} = a^m \text{ (§. 163, 2)}.$$

b) Ebenso ist auch

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} \text{ (§. 154, 1)} = a^m.$$

2. Eine Zahl wird mit einem Quotienten (Bruche) potenziert, indem man sie mit dem Dividend potenziert und durch den Divisor radiciert.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus 1.

Folgesatz. Soll eine Zahl potenziert und radiciert werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man diese Rechnungsoperationen vornimmt.

§. **166.** 1. Eine Zahl wird durch ein Product radiciert, indem man sie durch den einen Factor, und die erhaltene Wurzel durch den andern Factor radiciert.

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}.$$

Beweis. Beide Formen der Wurzel entsprechen der im §. 162 aufgestellten Erklärung derselben. Es ist

$$\{\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}\}^{mn} = [\{\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}\}^n]^m \text{ (§. 154, 2)}.$$
$$= (\sqrt[m]{a})^m \text{ (§. 163, 1)} = a,$$

und ebenso

$$\{\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}\}^{mn} = [\{\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}\}^m]^n \text{ (§. 154, 2)}$$
$$= (\sqrt[n]{a})^n \text{ (§. 163, 1)} = a.$$

2. Eine Wurzel wird durch eine Zahl radiciert, indem man den Radicand durch sie radiciert, oder indem man die Wurzelexponenten multipliciert.

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})} = \sqrt[mn]{a}.$$

Folgt durch Umkehrung aus 1.

Folgesatz. Soll eine Zahl durch zwei Zahlen radiciert werden, so darf man entweder durch dieselben einzeln in beliebiger Reihenfolge, oder auch sogleich durch ihr Product radicieren.

§. **167.** 1. Eine Zahl wird durch einen Quotienten (Bruch) radiciert, indem man sie durch den Dividend radiciert und mit dem Divisor potenziert.

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}.$$

Beweis. Es ist sowohl

$$\left\{(\sqrt[n]{a})^m\right\}^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[n]{a})^n \text{ (§. 154, 1)} = a,$$

als auch

$$\left\{\sqrt[n]{(a^m)}\right\}^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\left\{\sqrt[n]{(a^m)}\right\}^n} \text{ (§. 165, 2)} = \sqrt[m]{(a)^m} = a.$$

2. Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man den Radicand mit ihr potenziert, oder indem man den Wurzelexponenten durch den Potenzexponenten dividiert.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}.$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus 1.

§. **168.** Die Wurzel aus einer Potenz bleibt unverändert, wenn man den Wurzel- und den Potenzexponenten mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

Es ist
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{(a^{mp})};$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = \sqrt[n:p]{(a^{m:p})}.$$

Zusatz. Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jede Wurzel in eine andere umformen, deren Wurzelexponent ein Vielfaches des gegebenen Wurzelexponenten ist, folglich auch zwei oder mehrere Wurzeln mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten darstellen; b) jede Wurzel, in welcher der Wurzel- und der Potenzexponent ein gemeinschaftliches Maß haben, dadurch abkürzen.

Sind z. B. die Wurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[10]{c^7}$ gegeben, so ist 30 ihr kleinster gemeinschaftlicher Wurzelexponent und man hat

$$\sqrt{a} = \sqrt[30]{a^{15}},\ \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}},\ \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[30]{c^{21}}.$$

Verbindung des Radicierens mit der Multiplication und Division.

§. **169.** 1. Ein Product wird durch eine Zahl radiciert, indem man jeden Factor durch sie radiciert und die erhaltenen Wurzeln multipliciert.

$$\sqrt[n]{(ab)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Beweis.

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \text{ (§. 155, 1)} = a \cdot b \text{ (§. 163, 1).}$$

2. Umgekehrt: **Wurzeln desselben Wurzelexponenten werden multipliciert,** indem man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Producte der Radicanden auszieht.

Sind Wurzeln, welche ungleiche Exponenten haben, zu multiplicieren, so müssen sie zunächst mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten dargestellt werden (§. 168. Zusatz).

Zusätze. a) Mit Hilfe des ersten Satzes kann man, wenn der Radicand einen Factor enthält, aus dem sich die verlangte Wurzel ausziehen läſst, diesen Factor vom Wurzelzeichen befreien. Z. B.

$$\sqrt[n]{(a^n \cdot b)} = \sqrt[n]{(a^n)} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}.$$

b) Nach dem zweiten Satze kann man mit Beiziehung von §. 163, 3 umgekehrt jeden Factor einer Wurzel unter das Wurzelzeichen bringen, indem man ihn mit dem Wurzelexponenten potenziert und diese Potenz mit dem Radicand multipliciert. Z. B.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n)} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n b)}.$$

§. **170.** 1. **Ein Quotient (Bruch) wird durch eine Zahl radiciert,** indem man Dividend und Divisor durch sie radiciert und die erste Wurzel durch die zweite dividiert.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Beweis. $\left\{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right\}^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} \text{ (§. 156, 1)} = \frac{a}{b} \text{ (§. 163, 1).}$

2. Umgekehrt: **Wurzeln desselben Wurzelexponenten werden dividiert,** indem man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Quotienten der Radicanden auszieht.

Sind Wurzeln, welche ungleiche Exponenten haben, zu dividieren, so werden sie früher auf einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten gebracht.

Folgesatz. Die Wurzel aus einem auf die einfachste Form gebrachten Bruche kann keine ganze Zahl sein.

Die Vergleichung der Sätze §§. 165—170 über das Radicieren mit den §§. 17—20 über die Subtraction und mit den §§. 48—51, dann 53 und 54 über die Division läſst die Analogie zwischen den inversen Rechnungsarten der ersten, zweiten und dritten Stufe recht deutlich erkennen.

Verbindung des Radicierens mit der Addition und Subtraction.

§. **171.** Die Addition und Subtraction der Wurzeln sowie das Rechnen mit mehrgliedrigen Ausdrücken, in denen Wurzeln vorkommen, wird nach den für allgemeine Zahlen überhaupt aufgestellten Regeln vollzogen. Eine Zusammenziehung findet statt, wenn die Wurzeln sowohl gleiche Radicanden als gleiche Wurzelexponenten haben. Manchmal können auch Wurzeln mit ungleichen Radicanden, wenn sie denselben Exponenten haben, durch Zerlegen der Radicanden in Factoren (§. 169. Zusatz a) mit einem gemeinschaftlichen Radicand dargestellt werden. Z. B.

$$\sqrt{45a^2c} - \sqrt{80b^2c} + \sqrt{125c^3} = \sqrt{9a^2.5c} - \sqrt{16b^2.5c} + \sqrt{25c^2.5c}$$
$$= 3a\sqrt{5c} - 4b\sqrt{5c} + 5c\sqrt{5c} = (3a - 4b + 5c)\sqrt{5c}.$$

Wie man aus algebraischen Summen die Quadrat- und Cubikwurzel auszieht, wird in den §§. 189 und 196 gezeigt werden.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Radicierung.

§. **172.** 1. Gleiche Zahlen durch gleiche Zahlen radiciert geben Gleiches.

Ist $a = b$, so ist $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$ (§. 8, 3).

Folgesätze. a) Wenn man alle Glieder einer Proportion durch dieselbe Zahl radiciert, so erhält man wieder eine Proportion.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{c : d}$, oder

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \text{ (§. 170, 1).}$$

b) Die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei Zahlen ist gleich der Quadratwurzel aus dem Producte dieser Zahlen.

Ist $a : b = b : c$, so ist $b^2 = ac$ (§. 137, Folges. 1), daher

$$b = \sqrt{ac} \text{ (§. 172, 1).}$$

2. Ungleiche Zahlen durch gleiche radiciert geben Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$, so ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Beweis. Wäre $\sqrt[m]{a} \overline{\overline{<}} \sqrt[m]{b}$, so müsste bezüglich nach §. 160, 1. oder 2. $(\sqrt[m]{a})^m \overline{\overline{<}} (\sqrt[m]{b})^m$, also $a \overline{\overline{<}} b$ sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Folgesatz. Ist $a \gtrless 1$, so ist bezüglich auch $\sqrt[m]{a} \gtrless 1$.

3. Gleiche Zahlen durch ungleiche Zahlen radiciert geben Ungleiches und zwar mit dem entgegengesetzten oder mit demselben Ungleichheitszeichen, je nachdem der Radicand größer oder kleiner als 1 ist.

Ist m > n, so ist für a > 1, $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$;

für a < 1, $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$.

Beweis. Wäre für a > 1, $\sqrt[m]{a} \overline{\overline{>}} \sqrt[n]{a}$, so wäre bezüglich nach §. 160, 1. oder 2. $(\sqrt[m]{a})^{mn} \overline{\overline{>}} (\sqrt[n]{a})^{mn}$, oder $a^n \overline{\overline{>}} a^m$, während wegen m > n nach §. 160, 3. $a^m > a^n$ sein muss.

Eben so wird der Beweis für a < 1 geführt.

4. Ungleiche Zahlen, von denen wenigstens die eine größer als 1 ist, durch ungleiche Zahlen bei entgegengesetztem Ungleichheitszeichen radiciert geben Ungleiches mit dem Ungleichheitszeichen der Radicanden.

Ist a > b und zugleich a > 1, ferner n < m, so ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{b}$."

Beweis. Nach 3. ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$, nach 2. ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$; folglich um so mehr $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Umformung von irrationalen Wurzelausdrücken.

§. **173.** Ausdrücke, in denen irrationale Wurzeln vorkommen, lassen sich manchmal durch entsprechende Umstaltung auf eine Form bringen, die für die Rechnung mehr Bequemlichkeit bietet.

Aufgabe. Einen Bruch, dessen Nenner ein irrationales Monom oder Binom ist, ohne Änderung seines Wertes mit einem rationalen Nenner darzustellen. (Rationalmachen des Nenners.)

Der vorgelegte Bruch kann eine der folgenden Formen haben:

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}},\quad \frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}},\quad \frac{Z}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[m]{a^q}}.$$

1. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}}$, wobei m > n ist, mit einem rationalen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner mit $\sqrt[m]{a^{m-n}}$.

Es ist

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n}.\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

Z. B. $\quad \frac{m}{\sqrt[3]{a}} = \frac{m\sqrt[3]{a^2}}{a};\quad \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{3\sqrt{a}.\sqrt[5]{a^2}}{a} = \frac{3\sqrt[10]{a^9}}{a}.$

2. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}}$ oder $\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ mit einem rationalen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner mit $a \mp \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. Es ist

$$\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{Z(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})\,(a \mp \sqrt{b})} = \frac{Z(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b};$$

$$\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{Z(a \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})\,(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{Z(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

3. B. $$\frac{3}{5 - \sqrt{2}} = \frac{3(5 + \sqrt{2})}{5^2 - 2} = \frac{15 + 3\sqrt{2}}{23}.$$

$$\frac{15}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{15(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = 5(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})\,(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})\,(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})\,(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \ldots$$

3. Um einen Bruch von der Form

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[n]{b^q}} = \frac{Z}{\sqrt[mn]{a^{np}} \pm \sqrt[mn]{b^{mq}}} = \frac{Z}{\sqrt[r]{A} \pm \sqrt[r]{B}},$$

wo der Kürze halber $mn = r$, $a^{np} = A$ und $b^{mq} = B$ gesetzt wird, mit einem rationalen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner des letzten Bruches mit dem Polynom

$$\sqrt[r]{A^{r-1}} \mp \sqrt[r]{A^{r-2}.B} + \sqrt[r]{A^{r-3}.B^2} \mp \ldots (\mp 1)^{r-2} \sqrt[r]{A.B^{r-2}} + (\mp 1)^{r-1} \sqrt[r]{B^{r-1}}.$$

Man erhält dadurch $A \pm B$ als den neuen Nenner. 3. B.

$$\frac{Z}{\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}} = \frac{Z(\sqrt[5]{a^4} + \sqrt[5]{a^3 b} + \sqrt[5]{a^2 b^2} + \sqrt[5]{a b^3} + \sqrt[5]{b^4})}{a - b}.$$

§. 174. **Aufgabe.** Die Summe oder die Differenz der Quadratwurzeln aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen, von welchen die eine irrational ist, in eine einzige Quadratwurzel zu verwandeln.

Ist $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}$ die gegebene Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln, wobei a als positiv und größer als $\sqrt{b}$ vorausgesetzt wird, so hat man

$$(\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}})^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - b},$$

daher, wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht,

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}},$$

Diese Umformung läßt sich besonders dann mit Vortheil anwenden, wenn $a^2 - b$ eine vollständige Quadratzahl ist. 3. B.

$$\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{16 - 7}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{9}} = \sqrt{14};$$

$$\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}} = \sqrt{12 - 2\sqrt{36 - 11}} = \sqrt{12 - 2\sqrt{25}} = \sqrt{2}.$$

§. 175. **Aufgabe.** Die Quadratwurzel aus einem irrationalen Binom in die Summe oder die Differenz zweier Qudratwurzeln zu verwandeln.

Ist $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ die gegebene Quadratwurzel, so hat man, wenn a positiv und $a > \sqrt{b}$ ist, nach §. 174

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2-b}},$$
$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2-b}};$$

daher durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$
$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Die Umformung ist nur dann vortheilhaft, wenn $a^2 - b$ eine vollständige Quadratzahl ist. Z. B.

$$\sqrt{11 \pm 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 \pm \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{49}}{2}} \pm \sqrt{\frac{11-\sqrt{49}}{2}} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Zusatz. Haben die beiden Glieder des Binoms $a \pm \sqrt{b}$ einen gemeinschaftlichen irrationalen Factor, so wird derselbe vor der Transformation herausgehoben. Z. B.

$$\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{10}} = \sqrt[4]{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt[4]{2}.\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Wurzeln mit algebraischem Radicand.

§. 176. 1. Jeder geraden Wurzel aus einem positiven Radicand entsprechen zwei gleiche und entgegengesetzte Werte.

2. Jeder ungeraden Wurzel aus einem positiven Radicand entspricht ein positiver Wert.

3. Jeder ungeraden Wurzel aus einem negativen Radicand entspricht ein negativer Wert.

Beweis. Nach §. 161 ist

$$(\pm p)^{2n} = + a, \quad (+q)^{2n+1} = + b, \quad (-q)^{2n+1} = - b,$$

wo a und b die durch Potenzierung sich ergebenden absoluten Zahlenwerte bedeuten. Daraus aber folgt nach §. 162

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm p, \quad \sqrt[2n+1]{+b} = + q, \quad \sqrt[2n+1]{-b} = - q.$$

Zusatz. Die Zahlenform $\sqrt[2n]{-a}$ wird später einer besonderen Betrachtung unterzogen werden.

III. Potenzen und Wurzeln mit negativen und gebrochenen Exponenten.

1. Negative Exponenten.

§. **177.** Der durch die Gleichung $a^m : a^n = a^{m-n}$ ausgedrückte Lehrsatz für die Division zweier Potenzen derselben Basis (§. 158, 1) wurde bisher auf den Fall, wo $m \geqq n$ ist, beschränkt. Ist nun $m < n$ und zwar $m + p = n$, so führt die Anwendung der obigen Gleichung auf eine Potenz mit negativem Exponenten; es ist

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+p} = a^{-p}.$$

Damit daher das durch die obige Gleichung ausgesprochene Gesetz allgemeine Geltung habe, ist man genöthigt, auch den Potenzen mit negativen Exponenten eine Bedeutung beizulegen, durch welche auch sie auf den ursprünglichen Potenzbegriff zurückgeführt werden. Diese Bedeutung ergibt sich sogleich, wenn man den Quotienten, welchen a^{-p} vorstellen soll, in einer anderen Form entwickelt. Man hat

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

Mithin ist
$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist demnach der reciproke Wert derselben Potenz mit positivem Exponenten.

Folgesätze. a) Da $\frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$ ist, so ist auch $a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$. Eine Zahl a zur $(-p)$ten Potenz erheben heißt daher, den reciproken Wert von a pmal als Factor setzen.

b) Aus $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ folgt $a^p \cdot a^{-p} = 1$, folglich ist auch $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$. Man kann daher jede Potenz, die im Zähler eines Bruches als Factor vorkommt, als Factor in den Nenner, und umgekehrt, übertragen, wenn man das Vorzeichen des Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt.

§. **178.** Mit Rücksicht auf §. 177 läſst sich die in §. 106 aufgestellte allgemeine Form eines Decimalbruches

$$\ldots c.10^3 + b.10^2 + a.10 + E + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \ldots$$

auch so darstellen:

$$\ldots c.10^3 + b.10^2 + a.10 + E + \alpha.10^{-1} + \beta.10^{-2} + \gamma.10^{-3} + \ldots,$$

und sind daher -1, -2, -3,... bezüglich die Rangexponenten (§. 65) der ersten, zweiten, dritten,... Decimalziffer. Hieraus folgt:

1. Der Rangexponent der höchsten von Null verschiedenen Ziffer eines echten Decimalbruches ist negativ und absolut genommen gleich der Anzahl aller Nullen, welche dieser Ziffer vorangehen, die Null vor dem Decimalpunkte

mitgezählt. Z. B. in dem Decimalbruche 0·000783 hat die höchste Ziffer 7 den Rangexponenten — 4.

2. Bedeutet N einen Decimalbruch, dessen höchste Ziffer den Rangexponenten — n hat, also einen echten Decimalbruch, dessen höchste Ziffer an der nten Decimalstelle steht, so ist

$$N \geqq 10^{-n} \quad \text{und} \quad N < 10^{-n+1}.$$

$$\text{Z. B.}\quad 0\cdot 00935 > \frac{1}{10^3} \quad \text{und} \quad 0\cdot 00935 < \frac{1}{10^2}.$$

§. **179**. Alle bisher erwiesenen Lehrsätze von den Potenzen mit positiven Exponenten gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten.

Um dies an den einzelnen Sätzen zu beweisen, darf man nur die Potenzen mit negativen Exponenten durch die reciproken Werte derselben Potenzen mit positiven Exponenten ausdrücken, dann die angedeuteten Rechnungen durchführen und in den Resultaten, wenn darin Ausdrücke von der Form $\frac{1}{a^p}$ vorkommen, wieder zu Potenzen mit negativen Exponenten zurückkehren. Z. B.

$$(+a)^{-n} = \frac{1}{(+a)^n} = \frac{1}{+a^n} = +a^{-n};$$

$$(-a)^{-2n} = \frac{1}{(-a)^{2n}} = \frac{1}{+a^{2n}} = +a^{-2n};$$

$$a^m \,.\, a^{-n} = a^m \,.\, \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$a^{-m} \,.\, b^{-m} = \frac{1}{a^m} \,.\, \frac{1}{b^m} = \frac{1}{(a\,b)^m} = (a\,b)^{-m};$$

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \,.\, a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n};\ \text{u. s. w.}$$

§. **180**. Eine Wurzel mit negativem Wurzelexponenten ist gleich dem reciproken Werte derselben Wurzel mit positivem Wurzelexponenten.

Es ist $\qquad \sqrt[-n]{a} = \sqrt[-n.-1]{a^{1.-1}} = \sqrt[n]{a^{-1}}$, also

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Zusatz. Negative Wurzelexponenten pflegt man zu vermeiden, indem man das Negative in den Potenzexponenten verlegt.

2. Gebrochene Exponenten.

§. **181**. Das Radicieren von Potenzen führt nach den in §§. 165 und 167 erwiesenen Gleichungen

$$\sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

für den Fall, daſs bezüglich m durch n oder n durch m nicht theilbar ist, auf Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten. Um die Giltigkeit dieser Regeln von den besonderen Werten der Exponenten m und n unabhängig zu machen, müssen die Begriffe der Potenz und Wurzel so erweitert werden, daſs sie auch für gebrochene Exponenten ihre bestimmte Bedeutung erhalten. Aus den obigen Gleichungen ergeben sich nun unmittelbar folgende Erklärungen:

1. Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten ist die sovielte Wurzel aus der Grundzahl, als der Nenner anzeigt, potenziert mit dem Zähler.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

2. Eine Wurzel mit gebrochenem Exponenten ist die sovielte Potenz des Radicands, als der Nenner anzeigt, radiciert durch den Zähler.

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{(a^m)}.$$

Zusatz. Aus $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}}$ folgt, daſs sich jede Wurzel mit gebrochenem Exponenten als eine Potenz mit gebrochenem Exponenten darstellen läſst. Da man deshalb Wurzeln mit Bruchexponenten in die Rechnung gar nicht einzuführen pflegt, so beschränken wir uns hier auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

§. 182. Alle bisher erwiesenen allgemeinen Sätze von den Potenzen gelten auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Um dieses an den einzelnen Sätzen nachzuweisen, braucht man nur die Potenzen mit gebrochenen Exponenten in Wurzeln zu verwandeln, dann die angedeuteten Rechnungen auszuführen, und in den Resultaten die Wurzeln wieder in Potenzen mit Bruchexponenten umzuformen. Z. B.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}};$$

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} . \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}};$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}};\ \text{u. s. w.}$$

Zusatz. Da sich alle Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten darstellen lassen, so ist die Lehre von den Wurzeln schon in den Sätzen von den Potenzen enthalten.

IV. Erweiterung des Zahlengebietes durch das Radicieren.

Imaginäre und complexe Zahlen.

§. 183. In §. 176 blieb noch der Ausdruck $\sqrt[2n]{-a}$ zu untersuchen übrig. Da weder eine positive, noch eine negative ganze, gebrochene oder irrationale Zahl, noch auch Null, mit einer geraden Zahl potenziert eine negative Zahl hervorbringen kann, so ist $\sqrt[2n]{-a}$ in der stetigen Folge der bisher betrachteten Zahlen nicht zu finden. Man muss $\sqrt[2n]{-a}$ als eine neue Zahlenform ansehen und nennt sie eine imaginäre Zahl; im Gegensatze zu ihr bezeichnet man die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen mit dem gemeinschaftlichen Namen reelle Zahlen.

Nach dem bereits in §. 26 erwähnten Princip der Erhaltung der Operationsgesetze wird man die neue Zahlenform so definieren, dass die bisher für reelle Zahlen entwickelten Gesetze auch noch für das Rechnen mit den imaginären Zahlen ihre Geltung behalten. Diese Erklärung der neuen Zahlenform liegt in der Gleichung $(\sqrt[2n]{-a})^{2n} = -a$.

Für $n = 1$ und $a = 1$ erhält man $\sqrt{-1}$ als die einfachste Form einer imaginären Zahl. Auf diese kann schließlich auch jede andere imaginäre Zahl zurückgeführt werden; z. B.

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot -1} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = b\sqrt{-1},$$

wenn b die absolute Quadratwurzel aus a ist.

$\sqrt{-1}$ heißt die imaginäre Einheit und wird nach Gauß fast allgemein mit dem Buchstaben i bezeichnet. Ihre Definition ist durch die Gleichung $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ gegeben.

Das Zahlzeichen $b\sqrt{-1}$ oder bi, das die Form eines Productes einer reellen Zahl b mit der imaginären Einheit hat, wird eine rein imaginäre Zahl genannt.

Das Zahlzeichen $a + bi$, welches die Form einer Summe einer reellen und einer rein imaginären Zahl hat, heißt eine complexe Zahl; a ist ihr reeller, bi ihr imaginärer Bestandtheil. Zwei complexe Zahlen von der Form $a + bi$ und $a - bi$ heißen conjugiert.

Der Ausdruck $a + bi$ ist die allgemeine Form für alle möglichen Zahlen; er enthält für $a = o$ und $b = o$ die Null, für $b = o$ alle reellen Zahlen, für $a = o$ alle rein imaginären Zahlen, und, wenn a und b von Null verschieden sind, alle complexen Zahlen.

Über die geometrische Bedeutung der imaginären und complexen Zahlen enthält der Anhang dieses Lehrbuches eine abgesonderte Untersuchung. Hier sollen nur die wichtigsten formalen Verbindungen dieser Zahlen betrachtet werden. Indem dabei nach dem Princip der Permanenz die Operationsgesetze für reelle Zahlen ihre Anwendung finden, rechnet man mit der imaginären Zahl bi der Form nach so, als wenn das Zahlzeichen i eine reelle Zahl vorstellen würde; nur tritt noch die Bestimmung hinzu, dass überall i^2 durch -1 zu ersetzen ist.

Rechnungsoperationen mit rein imaginären Zahlen.

§. **184.** Ist eine imaginäre Zahl von der Form $\sqrt{-a}$ der Rechnung zu unterziehen, so muss sie früher auf die Form $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = b\sqrt{-1} = bi$, wo $b = \sqrt{a}$ ist, gebracht werden.

1. Addition und Subtraction.

$$ai + bi = (a + b)\,i;$$
$$ai - bi = (a - b)\,i.$$

Die Summe zweier imaginärer Zahlen ist demnach auch imaginär; ebenso die Differenz zweier ungleicher imaginärer Zahlen.

2. Multiplication.

$$ai \cdot b = abi, \text{ ebenso } a \cdot bi = abi;$$
$$ai \cdot bi = ab \cdot i^2 = ab \cdot -1 = -ab.$$

Das Product aus einer imaginären und einer reellen Zahl ist imaginär, das Product zweier imaginärer Zahlen reell.

3. Division.

$$\frac{ai}{b} = \frac{a}{b}\,i, \quad \frac{a}{bi} = \frac{ai}{bi^2} = -\frac{a}{b}\,i;$$
$$\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}.$$

Eine imaginäre und eine reelle Zahl geben also einen imaginären, zwei imaginäre Zahlen einen reellen Quotienten.

4. Potenzieren.

Man hat
$$i^2 = -1,$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i,$$
$$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = +1,$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = +i, \text{ u. s. w.}$$
allgemein
$$i^{4n} = +1, \quad i^{4n+1} = +i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

Ferner ist
$$(ai)^n = a^n \cdot i^n.$$

Die Potenz einer rein imaginären Zahl ist demnach reell oder imaginär, je nachdem die bezügliche Potenz von i reell oder imaginär ist.

Rechnungsoperationen mit complexen Zahlen.

§. 185. 1. Das Gleichsein zweier complexer Zahlen $a + bi = c + di$ kann nur die Bedeutung haben, dass $a = c$ und $b = d$ ist. Denn sonst wäre $(a - c) = (d - b)\,i$, d. i. eine reelle Zahl gleich einer imaginären, was ein Widerspruch ist.

2. Ebenso kann die Gleichung $a + bi = 0$ nur dann stattfinden, wenn sowohl $a = 0$ als auch $b = 0$ ist.

§. **186.** 1. Die Addition zweier complexer Zahlen $a + bi$ und $c + di$ erfolgt nach der Gleichung

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i.$$

Die Summe zweier complexer Zahlen besteht demnach aus der Summe der reellen und der Summe der imaginären Bestandtheile der beiden Summanden; sie ist im allgemeinen auch eine complexe Zahl. Reell ist immer die Summe zweier conjugierter Zahlen; denn

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

2. Die Subtraction zweier complexer Zahlen $a + bi$ und $c + di$ wird bestimmt durch die Gleichung

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i.$$

Zwei complexe Zahlen geben im allgemeinen eine complexe Zahl zur Differenz.

3. Wird die Multiplication zweier complexer Zahlen $a + bi$ und $c + di$ formal ausgeführt und dann i^2 durch -1 ersetzt, so hat man

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)\,i.\end{aligned}$$

Das Product zweier complexer Zahlen ist im allgemeinen auch eine complexe Zahl. Reell ist immer das Product zweier conjugierter Zahlen; denn

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

4. Um zwei complexe Zahlen $a + bi$ und $c + di$ durch einander zu dividieren, darf man nur Dividend und Divisor mit der zu dem Divisor conjugierten Zahl multiplicieren, wodurch man auf eine Division durch einen reellen Divisor geführt wird.

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\,i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.\end{aligned}$$

Der Quotient zweier complexer Zahlen ist auch eine complexe Zahl.

Durch das eben angeführte Verfahren kann auch jeder Bruch, dessen Nenner eine complexee Zahl ist, mit einem reellen Nenner dargestellt und sonach in eine complexe Zahl verwandelt werden. Z. B.

$$\frac{3 + i}{2 + 5i} = \frac{(3 + i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} = \frac{11 - 13i}{29} = \frac{11}{29} - \frac{13}{29}\,i.$$

5. Die Potenz einer complexen Zahl ist im allgemeinen wieder eine complexe Zahl.

$$(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + 2abi;$$
$$(a + bi)^3 = (a + bi)^2 (a + bi) = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\,i;$$

u. s. w.

6. Die in §§. 174 und 175 für die Quadratwurzeln aus irrationalen Binomen abgeleiteten Formeln gelten, wie aus der Ableitung selbst hervorgeht, auch für die Quadratwurzeln aus complexen Zahlen, und zwar ist hier ihre Anwendung von der dort aufgestellten Bedingung, dass a positiv und größer als $\sqrt{b}$ sein muss, ganz unabhängig. Z. B.

$$\sqrt{1+i}+\sqrt{1-i}=\sqrt{2+2\sqrt{1-i^2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}}.$$

$$\sqrt{2+3\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16+9}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16+9}}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{-2})=\frac{\sqrt{2}}{2}(3+\sqrt{-1}).$$

V. Quadrieren und Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und der Cubikwurzel.

1. Quadrat und Quadratwurzel.

§. **187. Aufgabe.** Eine algebraische Summe zum Quadrat zu erheben.

Man entwickle das Quadrat nach folgendem Bildungsgesetze:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt sein eigenes Quadrat.

2. Jedes folgende Glied gibt zwei Bestandtheile, das doppelte Product aus der Summe aller vorangehenden Glieder mit diesem Gliede, und das eigene Quadrat.

3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist das gesuchte Quadrat.

Beweis. Man hat zunächst

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2,$$

d. i. das Quadrat eines Binoms ist gleich der Summe aus dem Quadrate des ersten Gliedes, dem doppelten Producte beider Glieder und dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Ferner ergibt sich für einen dreigliedrigen Ausdruck $a+b+c$, wenn man denselben als Binom ansieht, dessen erstes Glied $a+b$, dessen zweites Glied c ist,

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$

Gilt überhaupt das hier für zwei und für drei Glieder nachgewiesene Gesetz für einen ngliedrigen Ausdruck $a+b+c+..+q+r$, so muss dasselbe auch für einen $(n+1)$ gliedrigen Ausdruck $a+b+c+..+q+r+s$ richtig sein; denn

$$(a+b+c+..q+r+s)^2=[(a+b+c+..+q+r)+s]^2$$
$$=(a+b+c..+q+r)^2+2(a+b+c+..+q+r)s+s^2.$$

Das angeführte Bildungsgesetz gilt nun für drei Glieder, folglich muss es auch für vier, folglich auch für fünf, u. s. w., mithin allgemein für jede Anzahl von Gliedern gelten.

Zusatz. Die zwei Bestandtheile, welche ein Glied der gegebenen Zahl im Quadrat gibt, können auch in einen einzigen zusammengefasst werden, wenn man dieses Glied zu der doppelten Summe der vorhergehenden Glieder addiert und die erhaltene Summe mit diesem Gliede multipliciert; denn

$$2a.b + b^2 = (2a + b).b;$$
$$2(a + b).c + c^2 = [2(a + b) + c].c; \text{ u. s. w.}$$

§. **188.** **Aufgabe.** Eine dekadische Zahl zum Quadrate zu erheben.

Dabei wird folgendes Verfahren angewendet:

1. Man erhebt die erste Ziffer links zum Quadrate.

2. Aus jeder folgenden Ziffer bildet man zwei Bestandtheile, das doppelte Product aus der ihr vorangehenden Zahl und dieser Ziffer, und ihr eigenes Quadrat.

3. Diese Bestandtheile werden so unter einander gesetzt, dass jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt, da sich jede dekadische Zahl als ein nach den Potenzen von 10 geordnetes Polynom darstellen lässt, aus §. 187.

Um z. B. 3417 zum Quadrate zu erheben, hat man

$$3417^2 = (3000 + 400 + 10 + 7)^2$$
$$= 3000^2 + 2.3000.400 + 400^2 + 2.3400.10 + 10^2$$
$$+ 2.3410.7 + 7^2;$$

oder, wenn man die Bestandtheile unter einander setzt und entwickelt:

$$\begin{array}{rrcr}
3417^2 = & 3000^2 & \ldots\ldots & 9000000 \\
+\,2.3000. & 400 & \ldots\ldots & 2400000 \\
+ & 400^2 & \ldots\ldots & 160000 \\
+\,2.3400. & 10 & \ldots\ldots & 68000 \\
+ & 10^2 & \ldots\ldots & 100 \\
+\,2.3410. & 7 & \ldots\ldots & 47740 \\
+ & 7^2 & \ldots\ldots & 49 \\
\hline
 & & & 11675889;
\end{array}$$

oder mit Hinweglassung der Nullen:

$$\begin{array}{rlr}
 & 3417^2 & \\
\hline
 & 3^2 & 9. \\
2. & 3.4 \;\ldots\ldots & 24. \\
 & 4^2 \;\ldots\ldots & 16. \\
2. & 3.41 \;\ldots\ldots & 68. \\
 & 1^2 \;\ldots\ldots & 1. \\
 & 2.341.7 \;\ldots\ldots & 4774. \\
 & 7^2 \;\ldots\ldots & 49 \\
\hline
 & & 11675889.
\end{array}$$

Zusätze. 1. Die zwei Bestandtheile, welche die zweite und jede folgende Ziffer der gegebenen Zahl im Quadrate liefert, kann man in einen einzigen zusammenfassen, wenn man zu der doppelten vorangehenden Zahl die neue Ziffer hinzuschreibt und die dadurch entstehende Zahl mit dieser neuen Ziffer multipliciert; nur muss bei diesem Vorgange jedes folgende Product um zwei Stellen weiter rechts hinausgerückt werden; es ist nämlich allgemein

$$(2A.10).p + p^2 = (2A.10 + p)\,p.$$

Das frühere Beispiel würde sich bei diesem kürzeren Verfahren so stellen:

$$\begin{array}{rcr|r|r|l}
\multicolumn{6}{l}{3417^2} \\
\hline
3^2 & \ldots & 9 & .. & & \\
64.4 & \ldots & 2 & 56 & .. & \\
681.1 & \ldots & & 6 & 81 & .. \\
6827.7 & \ldots & & 4 & 77 & 89 \\
\hline
 & & 11 & 67 & 58 & 89
\end{array}$$

2. **Das Quadrat einer dekadischen ganzen Zahl hat entweder doppelt so viele Ziffern als diese Zahl oder um eine Ziffer weniger.**

Denn ist N nziffrig, also $N \overline{>} 10^{n-1}$, aber $< 10^n$, so ist $N^2 \overline{>} 10^{2n-2}$, aber $< 10^{2n}$; das Quadrat N^2 hat also mindestens $2n - 1$ Ziffern und höchstens $2n$ Ziffern.

Theilt man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu zwei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man im Quadrate so viele Abtheilungen, als die Quadratwurzel Ziffern hat.

3. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}$ ist, so erhellet, dass bei einem **Decimalbruche** das Quadrat auf gleiche Weise wie bei einer dekadischen ganzen Zahl gebildet wird; nur muss man im Quadrate des Zählers doppelt so viele Decimalen abschneiden, als deren der gegebene Decimalbruch enthält.

4. Erhebt man einen **unvollständigen Decimalbruch** zum Quadrat, so ist (nach §. 115) die Fehlergrenze des Quadrates gleich dem doppelten Producte des Decimalbruches (bezüglich seiner höchsten Stelle) mit dessen Fehlergrenze.

So erhält man z. B. $5{\cdot}168..^2 = 26{\cdot}71..$ mit der Fehlergrenze $2 \times 5 \times 0{\cdot}0005 = 0{\cdot}005$.

§. **189. Aufgabe. Aus einer algebraischen Summe die Quadratwurzel auszuziehen.**

Aus dem Gesetze (§. 187), nach welchem die Bestandtheile einer mehrgliedrigen Zahl in ihrem Quadrate zusammengestellt erscheinen, lässt sich für das **Ausziehen der Quadratwurzel aus einem geordneten Polynom** folgendes Verfahren ableiten.

1. Das erste Glied des geordneten Polynoms ist das Quadrat des ersten Wurzelgliedes. Man findet daher das erste Glied der Wurzel, wenn man aus dem ersten Gliede des Radicands die Quadratwurzel auszieht. Das Quadrat des gefundenen ersten Wurzelgliedes wird von dem Radicand subtrahiert.

2. Die ersten zwei Glieder des Restes enthalten die Bestandtheile, welche aus dem folgenden Gliede der Wurzel hervorgehen, und zwar ist das erste Glied des Restes das Product aus der doppelten bereits gefundenen Wurzel und aus dem folgenden Gliede der Wurzel. Dividiert man daher das erste Glied des Restes durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel, so erhält man das folgende Glied der Wurzel. Man bilde nun die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Quadrate gibt, indem man zu dem Doppelten der früheren Wurzel das neue Glied addiert und die Summe mit diesem Gliede multipliciert, und subtrahiert das Product von dem Reste des Polynoms.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest, so ist das gegebene Polynom ein vollständiges Quadrat und die erhaltene Quadratwurzel rational; bleibt aber ein Rest übrig, so ist die Wurzel irrational.

Z. B. $\sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25} = x^2 + 3x - 5$

$$
\begin{array}{l}
x^4 \\
- \\
\hline
\quad + 6x^3 - x^2 \qquad\qquad : (2x + 3x) . 3x \\
\quad + 6x^3 + 9x^2 \\
\quad - \quad\;\; - \\
\hline
\qquad - 10x^2 - 30x + 25 : (2x^2 + 6x - 5) . -5 \\
\qquad - 10x^2 - 30x + 25 \\
\qquad + \qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

§. **190.** Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche ein vollständiges Quadrat ist, die Quadratwurzel auszuziehen.

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen in Abtheilungen von je zwei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur eine Ziffer enthalten kann, suche die größte Zahl, deren Quadrat in der höchsten Abtheilung enthalten ist, und schreibe sie als erste Ziffer der Wurzel an. Das Quadrat der ersten Wurzelziffer wird von der höchsten Abtheilung des Radicands subtrahiert.

2. Zu dem Reste setze man die folgende Abtheilung des Radicands herab, dividiere die dadurch gebildete Zahl nach Weglassung ihrer letzten Ziffer durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel und zugleich als Ergänzung zu dem Divisor. Den so ergänzten Divisor multipliciere man mit der neuen Wurzel-

ziffer und subtrahiere das Product sogleich während des Multiplicierens von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer.

3. Dieses Verfahren setze man fort, bis alle Abtheilungen des gegebenen Radicands in Rechnung gezogen worden sind.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus §. 188.

Z. B.
$$\begin{array}{rl} \sqrt{5|94|38|44} & = 2438 \\ 1\,94 & : 44 \\ 18\,38 & : 483 \\ 3\,89\,44 & : 4868 \\ 0 & \end{array}$$

Zusätze. 1. Da $\sqrt{\frac{A}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{A}}{10^n}$ ist, so folgt, dass man aus einem Decimalbruche die Quadratwurzel nach demselben Verfahren auszieht, wie aus einer ganzen Zahl; nur muss man den Decimalbruch vom Decimalpunkte aus nach rechts und links in Abtheilungen von je zwei Stellen theilen und in der Wurzel den Decimalpunkt setzen, bevor die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung gezogen wird.

Z. B.
$$\begin{array}{rl} \sqrt{1|52{\cdot}27|56} & = 12{\cdot}34 \\ 52 & : 22 \\ 8\,27 & : 243 \\ 98\,56 & : 2464 \\ 0 & \end{array}$$

2. Um aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, zieht man dieselbe aus Zähler und Nenner.

Z. B. $\sqrt{\frac{144}{529}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{529}} = \frac{12}{23}$.

§. **191**. Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche kein vollständiges Quadrat ist, die Quadratwurzel zu ziehen.

Ist die ganze Zahl a kein vollständiges Quadrat, so ist $\sqrt{a}$ nach §. 164 irrational und lässt sich nur näherungsweise bestimmen. Man ziehe dabei aus a auf die in §. 190 angegebene Weise die Quadratwurzel, bis die letzte Abtheilung in Rechnung gezogen ist, setze dann nach der zuletzt erhaltenen Wurzelziffer den Decimalpunkt und rechne auf dieselbe Art weiter, indem man jedem Reste für die folgende Abtheilung zwei Nullen anhängt. Die Rechnung wird so lange fortgesetzt, bis man die gewünschte Anzahl von Decimalstellen erhalten hat.

Beweis. Multipliciert man die ganze Zahl a mit 10^{2m}, d. h. hängt man derselben mmal zwei Nullen an, und ist b die größte ganze Zahl, welche in $\sqrt{a.10^{2m}}$ enthalten ist, also

$b < \sqrt{a.10^{2m}} < b + 1$, oder $b < 10^m.\sqrt{a} < b + 1$, so ist
$$\frac{b}{10^m} < \sqrt{a} < \frac{b+1}{10^m}.$$

$\sqrt{a}$ liegt demnach zwischen den Brüchen $\frac{b}{10^m}$ und $\frac{b+1}{10^m}$, deren Differenz $\frac{1}{10^m}$ ist; folglich ist der Fehler, den man begeht, wenn $\sqrt{a} = \frac{b}{10^m}$ gesetzt wird, kleiner als $\frac{1}{10^m}$, somit kleiner als eine Einheit der letzten berechneten Decimalstelle.

Z. B. $\sqrt{3|50} = 18\cdot708..$

$$\begin{array}{l} 2\,50 : 28 \\ \quad 2600 : 367 \\ \qquad 310000 : 37408 \\ \qquad\quad 10736 \end{array}$$

Zusätze. 1. Auf gleiche Weise wird auch beim Quadratwurzel-Ausziehen aus einem Decimalbruche, welcher kein vollständiges Quadrat ist, die Rechnung beliebig weit fortgesetzt, indem man zunächst in der letzten Abtheilung rechts, wenn sie nur eine Ziffer enthalten sollte, die fehlende durch eine Null ergänzt, und dann dem übriggebliebenen sowie jedem folgenden Reste zwei Nullen anhängt.

Z. B. $\sqrt{0\cdot00|01|5_0} = 0\cdot01224..$

$$\begin{array}{l} 50 : 22 \\ \;600 : 242 \\ \;11600 : 2444 \\ \quad 1824 \end{array}$$

Bei periodischen Decimalbrüchen treten selbstverständlich die entsprechenden Ziffern der Periode an die Stelle der anzuhängenden Nullen.

2. Um aus einem gemeinen Bruche, dessen Zähler und Nenner nicht Quadratzahlen sind, die Quadratwurzel auszuziehen, verwandelt man ihn entweder in einen solchen Bruch, dessen Nenner eine Quadratzahl ist, und zieht dann die Wurzel aus Zähler und Nenner; oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, und zieht dann aus diesem die Quadratwurzel.

Z. B. $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5.6}{6^2}} = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{5\cdot47722..}{6} = 0\cdot91287..$

oder $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{0\cdot8\dot{3}} = 0\cdot91287..$

§. 192. Abgekürztes Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel.

Hat man von der Quadratwurzel einer Zahl nach dem gewöhnlichen Verfahren die ersten m Ziffern gefunden, so darf man, um noch m—1 weitere richtige Wurzelziffern zu erhalten, nur den letzten Rest durch die doppelte bereits gefundene Wurzel dividieren.

In der Ausführung wird dabei die abgekürzte Division angewendet und im Divisor sogleich die letzte Ziffer weggelassen.

Beweis. Bezeichnet a den Radicand und b die bereits gefundenen ersten m Ziffern der Quadratwurzel, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit die ersten m Abtheilungen in a, und daher auch die m zifferige Zahl b als Ganze annehmen, weil es für die Ziffernfolge der Wurzel gleichgiltig ist, nach welcher Abtheilung des Radicands man den Decimalpunkt setzt; dann werden die weiter folgenden Wurzelziffern Decimalen vorstellen.

Setzt man nun $\sqrt{a} = b + x$, wo x den noch fehlenden Theil der Wurzel ausdrückt, so muss

$$(b + x)^2 = a, \text{ oder } b^2 + 2bx + x^2 = a, \text{ daher}$$

$$2bx = a - b^2 - x^2 \text{ und } x = \frac{a - b^2}{2b} - \frac{x^2}{2b}$$

sein. Wenn nun für x der Quotient $\frac{a - b^2}{2b}$, wo $a - b^2$ den letzten bei der Wurzelausziehung gebliebenen Rest und $2b$ die doppelte bereits gefundene Wurzel bedeutet, gesetzt wird, so ist der Fehler, den man begeht, gleich $\frac{x^2}{2b}$. Aber $x < 1$ und $b > 10^{m-1}$, daher $\frac{x^2}{2b}$ jedenfalls kleiner als $\frac{1}{10^{m-1}}$; woraus folgt, dass der Quotient $\frac{a - b^2}{2b}$ mindestens $m-1$ weitere richtige Wurzelziffern gibt.

Zusätze. 1. Wenn aus einer ganzen Zahl oder einem vollständigen Decimalbruche die Quadratwurzel mit $2m - 1$ oder $2m$ geltenden Ziffern zu bestimmen ist, so sucht man bezüglich nur die ersten m oder $m + 1$ Ziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren der Quadratwurzel-Ausziehung, die folgenden aber nach der obigen Vorschrift durch die abgekürzte Division.

Hat man z. B. $\sqrt{138}$ auf 5 Decimalstellen genau, also im ganzen mit 7 geltenden Ziffern zu bestimmen, so sucht man die ersten 4 Ziffern durch das Radicieren, die letzten 3 durch die abgekürzte Division. Die Rechnung steht:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{1|38} & = 11{\cdot}74734.. \\
38 & : 21 \\
1700 & : 227 \\
11100 & : 2344 \\
1724 & : 2248 \\
80 & \\
10 & \\
1 &
\end{array}$$

2. Dasselbe abgekürzte Verfahren findet insbesondere auch beim Ausziehen der Quadratwurzel aus einem unvollständigen Decimalbruche statt. Man findet durch dieses Verfahren, wenn der Radicand m geltende Abtheilungen hat, deren jede mit Ausnahme etwa der ersten links zwei Ziffern enthält, in der Wurzel im ungünstigsten Falle $2m - 1$ verlässliche geltende Ziffern.

§. 193. Aufgabe. Eine irrationale Quadratwurzel durch die Näherungswerte eines Kettenbruches zu bestimmen.

Es sei $\sqrt{a}$ zu bestimmen. Man suche die größte darin enthaltene Zahl q und setze $\sqrt{a} = q + \frac{1}{x_1}$, wo $\frac{1}{x_1} = \sqrt{a} - q < 1$, daher $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a-q}} > 1$ sein muss. Nun suche man wieder die größte in $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a-q}}$ enthaltene ganze Zahl q_1 und setze $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$, wo $\frac{1}{x_2} < 1$ und $x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} > 1$ sein muss.

Setzt man dieses Verfahren fort, und sind die größten in $x_2, x_3, \ldots$ enthaltenen ganzen Zahlen $q_2, q_3, \ldots$, so hat man

$$\sqrt{a} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{x_2} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{x_3} = \ldots$$

Durch die aus dem erhaltenen Kettenbruche hervorgehenden Näherungswerte kann $\sqrt{a}$ mit jeder beliebigen Schärfe berechnet werden.

Ist z. B. $\sqrt{14}$ zu bestimmen, so hat man folgende Rechnung:

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{x_1},$$

$$\text{wo } x_1 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 2}{5} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

$$\text{„ } x_2 = \frac{5}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{14} - 2}{2} = 2 + \frac{1}{x_3},$$

$$\text{„ } x_3 = \frac{2}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 3}{5} = 1 + \frac{1}{x_4},$$

$$\text{„ } x_4 = \frac{5}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{1} = 6 + \frac{\sqrt{14} - 3}{1} = 6 + \frac{1}{x_5},$$

$$\text{„ } x_5 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3}, \text{ welches wieder } = x_1 = 1 + \frac{1}{x_2},$$

so dass die Nenner 1, 2, 1, 6 immer wiederkehren. Man hat also

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Die Näherungswerte sind:

$$3,\ 4,\ \frac{11}{3},\ \frac{15}{4},\ \frac{101}{27},\ \frac{116}{31},\ \frac{333}{89},\ \frac{449}{120},\ \frac{3027}{809},\ \ldots$$

Setzt man $\sqrt{14} = \frac{3027}{809} = 3{\cdot}741656\ldots$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{809^2} = \frac{1}{654481} = 0{\cdot}0000015\ldots$; es ist also $\sqrt{14}$ auf 5 Decimalen genau bestimmt.

2. Cubus und Cubikwurzel.

§. 194. Aufgabe. Eine algebraische Summe zum Cubus zu erheben.

Man entwickle den Cubus nach folgendem Gesetze:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt seinen eigenen Cubus.

2. Jedes folgende Glied liefert drei Bestandtheile, das dreifache Quadrat der Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit diesem Gliede, die dreifache Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit seinem Quadrate, und seinen eigenen Cubus.

3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist der verlangte Cubus.

Beweis. Zunächst ist

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) (a + b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

d. h. der Cubus eines Binoms ist gleich der Summe aus dem Cubus des ersten Gliedes, dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciert mit dem zweiten Gliede, dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Gliedes, und dem Cubus des zweiten Gliedes.

Der weitere Gang des Beweises ist ähnlich wie im §. 187.

§. 195. Aufgabe. Eine dekadische Zahl zum Cubus zu erheben.

1. Man erhebe die erste Wurzelziffer zum Cubus.

2. Aus jeder folgenden Ziffer bilde man drei Bestandtheile, das Product aus dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, das Product aus der dreifachen vorangehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren Cubus.

3. Diese Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, dass jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus §. 194.

Um z. B. den Cubus von 4213 zu bestimmen, hat man folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rlr}
4213^3 = & (4000 + 200 + 10 + 3)^3 & \\
= & \quad 4000^3 \ldots\ldots & 64000000000 \\
 & + 3.4000^2.200 \ldots\ldots & 9600000000 \\
 & + 3.4000\,.200^2 \ldots\ldots & 480000000 \\
 & + \quad 200^3 \ldots\ldots & 8000000 \\
 & + 3.4200^2.\,10 \ldots\ldots & 529200000 \\
 & + 3.4200\,.\,10^2 \ldots\ldots & 1260000 \\
 & + \quad 10^3 \ldots\ldots & 1000 \\
 & + 3.4210^2.\,3 \ldots\ldots & 159516900 \\
 & + 3.4210\,.\,3^2 \ldots\ldots & 113670 \\
 & + \quad 3^3 \ldots\ldots & 27 \\
\hline
 & = & 74778091597
\end{array}$$

oder mit Weglassung der Nullen:

4213^3

4^3	64	.		
$3.\ 4^2.2$	9	6.		
$3.\ 4\ .2^2$		48.		
2^3		8	.	
$3.\ 42^2.1$		529	2.	
$3.\ 42\ .1^2$		1	26.	
1^3			1	.
$3.421^2.3$		159	516	9.
$3.421\ .3^2$			113	67.
3^3				27
	74	778	091	597

Zusätze. 1. Der Cubus einer dekadischen ganzen Zahl hat entweder dreimal so viele Ziffern als diese Zahl, oder um zwei Ziffern oder um eine weniger.

Beweis analog wie zu §. 188, Zusatz 2.

2. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$ ist, so folgt, dass man bei Decimalbrüchen vom Cubus des Zählers 3mal so viele Decimalen abschneiden müsse, als deren der gegebene Decimalbruch hat.

3. Erhebt man einen unvollständigen Decimalbruch zum Cubus, so ist (nach §. 115) die Fehlergrenze des Cubus gleich dem dreifachen Producte aus dem Decimalbruche und dessen Fehlergrenze.

§. **196.** Aufgabe. Aus einer algebraischen Summe die Cubikwurzel zu ziehen.

1. Man ziehe die Cubikwurzel aus dem ersten Gliede des geordneten Radicands; diese ist das erste Glied der Wurzel. Der Cubus des ersten Wurzelgliedes wird von dem Radicand subtrahiert.

2. Man dividiere das erste Glied des Restes durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel; der Quotient ist das folgende Glied der Wurzel. Man bilde dann die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Wurzeltheiles multipliciert mit dem neuen Gliede, das Dreifache des vorhergehenden Wurzeltheiles multipliciert mit dem Quadrate des neuen Gliedes und den Cubus dieses Gliedes und subtrahiere die Summe dieser drei Bestandtheile von dem früheren Reste des Radicands.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest übrig, so ist die Cubikwurzel rational; bleibt ein Rest, so ist sie irrational.

Die Ableitung dieses Verfahrens aus §. 194 geschieht auf ähnliche Weise, wie im §. 189 das Verfahren der Quadratwurzel-Ausziehung aus Polynomen aus §. 187 hergeleitet wurde.

Beispiel.

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{[y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27]} = y^2 - 2y + 3 \\
\underline{y^6} \\
\quad - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 \quad : \quad 3y^4 \\
\quad \underline{- 6y^5 + 12y^4 - 8y^3} \\
\qquad + 9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 : 3y^4 - 12y^3 + 12y^2 \\
\qquad + 9y^4 - 36y^3 + 36y^2 \\
\qquad \qquad \underline{+ 27y^2 - 54y + 27} \\
\qquad \qquad 0
\end{array}$$

§. **197**. Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche ein vollständiger Cubus ist, die Cubikwurzel auszuziehen.

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen gegen die Linke in Abtheilungen von je drei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur zwei oder eine Ziffer haben kann, suche die größte Zahl, deren Cubus in der höchsten Abtheilung vorkommt, und schreibe sie als erste Ziffer in die Cubikwurzel. Den Cubus der ersten Wurzelziffer subtrahiere man von der ersten Abtheilung des Radicands.

2. Zu dem Reste setze man die nachfolgende Abtheilung herab, dividiere dann die dadurch entstehende Zahl mit Weglassung der letzten zwei Ziffern durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel. Dann bilde man die Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit der neuen Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multipliciert mit dem Quadrate dieser neuen Ziffer und ihren Cubus; schreibe den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter gegen die Rechte und subtrahiere die Summe der so angesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man alle Abtheilungen des Radicands in Rechnung gezogen hat.

Die Richtigkeit des Verfahrens beruht auf §. 195.

Z. B.

$$\begin{array}{lrl}
 & \sqrt[3]{78|953|589} = 429 & \\
 & \underline{64} & \\
 & 14\,9,53 & : 48\ldots 3.\ 4^2 \\
3.\ 4^2.2\ldots & 96\,.\,. & \\
3.\ 4\ .2^2\ldots & 48\,. & \\
2^3\ldots & \underline{8} & \\
 & 4\,8\,65\,5,89 & : 5292\ldots 3.42^2 \\
3.42^2.9\ldots & 47629\,.\,. & \\
3.42\ .9^2\ldots & 10206\,. & \\
9^3\ldots & \underline{629} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Zusatz. Wie man beim Ausziehen der Cubikwurzel aus einem Decimal- oder einem gemeinen Bruche zu verfahren habe, ersieht man leicht aus dem für das Quadratwurzel-Ausziehen in §. 190, Zusatz 1 und 2 angegebenen Verfahren.

§. 198. Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche kein vollständiger Cubus ist, die Cubikwurzel zu ziehen.

Ist der Radicand keine dritte Potenz einer ganzen Zahl, so ist die Cubikwurzel irrational und kann nur näherungsweise berechnet werden. Das dabei anzuwendende Verfahren entspricht demjenigen, das wir in §. 191 für die Quadratwurzel-Ausziehung aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche kein Quadrat ist, angegeben haben; nur müssen hier den einzelnen Resten für jede Abtheilung drei Nullen angehängt werden.

Zusatz. Auch bezüglich der Vorschrift für das Ausziehen der Cubikwurzel aus Decimal- oder gemeinen Brüchen, welche nicht vollständige Cubikzahlen sind, verweisen wir auf die analogen Bemerkungen in Zus. 1 und 2 zu §. 191.

§. 199. Abgekürztes Verfahren beim Ausziehen der Cubikwurzel.

Wenn man von der Cubikwurzel einer Zahl nach dem gewöhnlichen Verfahren die ersten m Ziffern berechnet hat, so erhält man noch m — 1 weitere verlässliche Ziffern, indem man den letzten Rest durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel dividiert.

Beweis. Es sei a der Radicand und b bezeichne die bereits berechneten ersten m Ziffern der Cubikwurzel, wobei b ohne Änderung der noch fehlenden Wurzelziffern als eine ganze Zahl vorausgesetzt werden darf.

Setzt man $\sqrt[3]{a} = b + x$, wo x die weiter folgenden Ziffern der Wurzel bedeutet, so ist

$$(b + x)^3 = a, \text{ oder } b^3 + 3b^2x + 3bx^2 + x^3 = a, \text{ daher}$$

$$3b^2x = a - b^3 - 3bx^2 - x^3, \text{ und } x = \frac{a - b^3}{3b^2} - \frac{x^2}{b} - \frac{x^3}{3b^2},$$

wo $a - b^3$ der letzte bei der Wurzelausziehung gebliebene Rest, und $3b^2$ das dreifache Quadrat der bisher gefundenen Wurzel ist.

Der Fehler, welcher begangen wird, wenn man für x den Quotienten $\frac{a - b^3}{3b^2}$ setzt, ist demnach $\frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{3b^2}$, wo $x < 1$ und $b > 10^{m-1}$ ist, so dass bei der Beurtheilung des Fehlers das Glied $\frac{x^3}{3b^2}$ als gegen $\frac{x^2}{b}$ verschwindend gar nicht in Betracht kommt; $\frac{x^2}{b}$ ist aber kleiner als $\frac{1}{10^{m-1}}$, also wird x durch den Quotienten $\frac{a - b^3}{3b^2}$ auf m — 1 Ziffern genau bestimmt.

Ist z. B. $\sqrt[3]{0\cdot083066534}$ auf 5 Decimalen genau zu bestimmen, so sucht man die ersten drei Ziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren der Cubikwurzel-Ausziehung, die zwei folgenden durch die abgekürzte Division.

Die Rechnung steht:

$$\sqrt[3]{0\cdot083|066|534} = 0\cdot43632\,..$$

$$\begin{array}{ll}
64 & \\
\hline
19066 & :48 \\
144.. & \\
108. & \\
27 & \\
\hline
3559534 & :5547 \\
33282.. & \\
4644. & \\
216 & \\
\hline
1846,78 & :57,0,288 \\
135 & \\
21 &
\end{array}$$

Zusatz. Durch das voranstehende Verfahren erhält man in der Cubikwurzel eines unvollständigen Decimalbruches $2m - 1$ verläſsliche Ziffern, wenn der Radicand m geltende Abtheilungen zu drei Ziffern hat.

VI. Logarithmen.

1. Von den Logarithmen überhaupt.

§. 200. Eine Zahl a durch eine andere Zahl b logarithmieren heißt, den Potenzexponenten suchen, mit welchem b als Basis potenziert werden muſs, um a als Potenz zu geben. Die Zahl b ist die Grundzahl oder Basis, die als Potenz gegebene Zahl a heißt der Logarithmand oder geradezu die Zahl (Numerus), und der gesuchte Potenzexponent der Logarithmus. Ist $a = b^n$, so ist n der Logarithmus der Zahl a für die Basis b; man hat dafür die Bezeichnung:

$$\log a_{(b)} = n.$$

Werden die Logarithmen durchgängig auf eine bestimmte Basis, z. B. 10, bezogen, so schreibt man statt des letzten Ausdruckes kürzer $\log a = n$, wobei die Basis 10 als bekannt vorausgesetzt wird.

Dem Potenzieren entsprechen zwei inverse Operationen, das Radicieren und das Logarithmieren, je nachdem die Basis oder der Exponent gesucht wird, da diese beiden nicht commutiert werden können.

Eine Potenzgröße von der Form b^x, in welcher der Exponent eine unbekannte Zahl ist, heißt eine Exponentialgröße.

§. **201.** **Folgesätze.** 1. Potenziert man die Basis mit dem Logarithmus, so erhält man den Logarithmand.

Ist $\log a_{(b)} = n$, so ist $b^n = a$.

2. Der Logarithmus der Basis in Bezug auf diese Basis selbst ist gleich 1.

$$\log b_{(b)} = 1; \text{ denn } b^1 = b.$$

3. Der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich 0.

$$\log 1_{(b)} = 0; \text{ denn } b^0 = 1.$$

4. Für eine positive Basis hat eine negative Zahl keinen reellen Logarithmus.

Denn sowohl b^{+n} als $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ gibt ein positives Resultat.

§. **202.** Der Inbegriff der Logarithmen der in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen für eine bestimmte Basis bildet ein logarithmisches System.

Da durch das Potenzieren einer reellen negativen Zahl nicht alle möglichen positiven Zahlen erzeugt werden können, jede Potenz von 1 aber wieder 1 ist, so kann nur eine reelle positive und von 1 verschiedene Zahl als Basis eines Logarithmensystems angenommen werden.

Im Gebrauche sind nur zwei logarithmische Systeme, nämlich das gemeine oder Brigg'sche für die Basis 10, und das natürliche oder Neper'sche für die irrationale Basis 2·718281828..., welche man aus der Summierung der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

erhält und gewöhnlich mit dem Buchstaben e bezeichnet.

Allgemeine Sätze über die Logarithmen.

§. **203.** 1. Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Factoren.

Es sei für die Basis b

$$\log M = m, \log N = n, \log P = p, \text{ also}$$
$$M = b^m, N = b^n, P = b^p; \text{ dann ist}$$
$$MNP = b^{m+n+p}; \text{ d. i.}$$
$$\log MNP = m + n + p, \text{ oder}$$
$$\log MNP = \log M + \log N + \log P.$$

Z. B. $\log 6 = \log 2 + \log 3$.

$$\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5.$$

Sind für eine Basis die Logarithmen aller Primzahlen bekannt, so lassen sich aus denselben durch bloße Addition auch die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen ableiten.

2. **Der Logarithmus eines Bruches** (Quotienten) **ist gleich dem Logarithmus des Zählers weniger dem Logarithmus des Nenners.**

Es sei für die Basis b

$$\log M = m, \ \log N = n; \text{ also } M = b^m, \ N = b^n;$$

dann ist

$$\frac{M}{N} = b^{m-n}, \text{ folglich } \log \frac{M}{N} = m - n = \log M - \log N.$$

Z. B. $\log \frac{29}{31} = \log 29 - \log 31.$

$$\log 35{\cdot}29 = \log \frac{3529}{100} = \log 3529 - \log 100.$$

$$\log \frac{a+b}{a-b} = \log (a+b) - \log (a-b).$$

3. **Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multipliciert mit dem Potenzexponenten.**

Es sei für die Basis b, $\log M = m$, also $M = b^m$; dann ist $M^p = b^{mp}$, und daher

$$\log M^p = mp = p \log M.$$

Z. B. $\log 8^3 = 3 \log 8.$

$$\log (2a)^3 = 3 \log 2a = 3 (\log 2 + \log a).$$

$$\log \frac{x^2 y}{(mn)^4} = 2 \log x + \log y - 4 (\log m + \log n).$$

4. **Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicands dividiert durch den Wurzelexponenten.**

Es sei für die Basis b, $\log M = m$, also $M = b^m$; dann ist

$\sqrt[p]{M} = \sqrt[p]{b^m} = b^{\frac{m}{p}}$, daher

$$\log \sqrt[p]{M} = \frac{m}{p} = \frac{\log M}{p}.$$

Z. B. $\log \sqrt[3]{75} = \frac{\log 75}{3}.$

$$\log \sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\log \frac{a}{b}}{5} = \frac{\log a - \log b}{5}.$$

$$\log \frac{a \sqrt[3]{x^2}}{y} = \log a + \tfrac{2}{3} \log x - \log y.$$

§. **104.** 1. Für dieselbe Basis gehören zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen; und umgekehrt: zu gleichen Logarithmen gehören auch gleiche Zahlen.

Ist b die Basis und $b^m = M$, $b^n = N$, so muss, wenn $M = N$ ist, auch $m = n$, d. i. $\log M = \log N$ sein. (Folgt indirect aus §. 160, 3.)

Ist umgekehrt $\log M = \log N$, also $m = n$, so muss nach §. 160, 1 auch $b^m = b^n$, d. i. $M = N$ sein.

2. Für eine Basis, welche größer als 1 ist, gehört zu der größeren Zahl auch ein größerer Logarithmus; und umgekehrt: zu dem größeren Logarithmus gehört auch eine größere Zahl.

Ist $b^m = M$, $b^n = N$ und $M > N$, so muss für $b > 1$ auch $m > n$, also $\log M > \log N$ sein. (Folgt indirect aus 1. und aus §. 160, 3.)

Ist umgekehrt $\log M > \log N$, so folgt eben so aus §. 160, 3. $M > N$.

3. Dieselbe Zahl hat für verschiedene Grundzahlen auch verschiedene Logarithmen.

Ist $\log N_{(B)} = p$ und $\log N_{(b)} = q$, wo B und b als verschiedene Zahlen vorausgesetzt werden, so ist $N = B^p$ und $N = b^q$, daher $B^p = b^q$. Wäre nun $p = q$, so würde aus §. 160, 2 indirect folgen, dass auch $B = b$ sei, was jedoch der Voraussetzung widerspricht; die Logarithmen p und q müssen daher von einander verschieden sein.

4. Der Logarithmus einer Zahl für irgend eine Basis ist gleich dem Logarithmus derselben Zahl für eine zweite Basis, multipliciert mit dem reciproken Werte des Logarithmus der ersteren Basis in Bezug auf die zweite.

Ist $\log N_{(B)} = p$, also $B^p = N$, so erhält man, wenn man in der zweiten Gleichung beiderseits die Logarithmen in Bezug auf eine andere Basis b nimmt, $p \log B_{(b)} = \log N_{(b)}$, oder $\log N_{(B)} \,.\, \log B_{(b)} = \log N_{(b)}$; folglich

$$\log N_{(B)} = \log N_{(b)} \,.\, \frac{1}{\log B_{(b)}}.$$

Sind die Logarithmen der Zahlen für die Basis b bekannt, so kann man aus denselben auch die Logarithmen für jede andere Basis B bestimmen, wenn man die ersteren mit dem beständigen Factor $\frac{1}{\log B_{(b)}}$, d. i. mit dem reciproken Werte des Logarithmus der neuen Basis in Bezug auf die frühere Basis multipliciert. Die Zahl, mit welcher die Logarithmen eines Systems multipliciert werden müssen, um die Logarithmen eines anderen Systems zu erhalten, heißt der Modulus des neuen Systems in Bezug auf das ursprüngliche. Der Modulus des Brigg'schen Systems in Bezug auf das natürliche ist $\frac{1}{\log 10_{(e)}} = 0{\cdot}4342945\ldots$

2. Von den Brigg'schen Logarithmen.

§. **205.** Unter dem Brigg'schen Logarithmus einer Zahl versteht man den Potenzexponenten, mit dem die Basis 10 potenziert werden muss, um jene Zahl als Potenz zu geben.

1. Die Brigg'schen Logarithmen aller Zahlen, welche größer als 1 sind, sind positiv; die Brigg'schen Logarithmen aller positiven Zahlen, welche kleiner als 1 sind, sind negativ.

Beweis. Eine Zahl, welche größer als 1 ist, ist entweder eine dekadische Einheit 10^n, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet, oder sie liegt zwischen zwei dekadischen Einheiten 10^{n-1} und 10^n; ihr Logarithmus ist daher bezüglich n oder zwischen $n-1$ und n eingeschlossen, also in jedem Falle positiv.

Eine positive Zahl, welche kleiner als 1 ist, ist entweder eine dekadische Einheit $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$, oder sie liegt zwischen zwei dekadischen Einheiten 10^{-n+1} und 10^{-n}; ihr Logarithmus ist daher bezüglich $-n$ oder zwischen $-n+1$ und $-n$ eingeschlossen, also in jedem Falle negativ.

2. Der Brigg'sche Logarithmus einer ganzen oder gebrochenen Zahl, welche eine dekadische Einheit ist, ist eine ganze Zahl.

Folgt aus dem Beweise zu 1.

3. Der Brigg'sche Logarithmus einer ganzen oder gebrochenen Zahl, welche keine dekadische Einheit ist, ist eine irrationale Zahl.

Beweis. a) Ist N keine dekadische Einheit, sondern zwischen zwei aufeinander folgenden dekadischen Einheiten 10^n und 10^{n+1} enthalten, wo n eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null bedeutet, so liegt der Logarithmus von N zwischen n und $n+1$, und ist somit keine ganze Zahl. Er kann aber auch kein Bruch sein. Denn wäre $\log N = \frac{\pm p}{q}$, wo p und q relative Primzahlen seien, so müsste $10^{\frac{\pm p}{q}} = N$, oder $10^{\pm p} = N^q$ sein. Damit jedoch diese Gleichung möglich sei, müssten $10^{\pm p}$ und N^q aus denselben Primfactoren bestehen; es dürfte also N keine anderen Factoren als 2 und 5, bezüglich $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$, und müsste auch beide in gleicher Anzahl enthalten; dann aber wäre N selbst eine dekadische Einheit, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann demnach log N, wenn N keine dekadische Einheit ist, weder durch eine ganze Zahl noch durch einen Bruch genau dargestellt werden.

b) Der Logarithmus von N läßt sich jedoch durch Angabe von Näherungswerten, zwischen denen er liegt, mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit annäherungsweise bestimmen. Da N zwischen 10^n und 10^{n+1} enthalten ist, so liegt log N zunächst zwischen den Näherungswerten n und n + 1; aus diesen aber lassen sich andere immer genauere Näherungswerte ableiten.

Liegt nämlich N allgemein zwischen zwei Zahlen u und v, daher (nach §. 204, 2) log N zwischen log u und log v, welche letztere bekannt seien, so ist nach §. 203, 4 auch der Logarithmus von $\sqrt{uv}$, d. i. von der mittleren geometrischen Proportionale zwischen u und v bekannt. Weil nun $\sqrt{uv}$ zwischen u und v liegt, so muss N entweder zwischen $\sqrt{uv}$ und u, oder zwischen $\sqrt{uv}$ und v fallen, daher auch log N entweder zwischen $\log \sqrt{uv}$ und log u, oder zwischen $\log \sqrt{uv}$ und log v liegen. In jedem Falle ist also log N zwischen zwei engere Näherungswerte eingeschlossen als früher, und durch eine wiederholte Anwendung dieser Schlussweise können die Werte, zwischen welchen log N liegt, so nahe an einander gerückt werden als man will.

§. **206**. Aufgabe. Von einer gegebenen Zahl den Brigg'schen Logarithmus zu berechnen.

1. Eine Auflösung dieser Aufgabe beruht auf dem in §. 205, 3 unter b) gegebenen Beweise, nach welchem der Logarithmus einer Zahl zwischen immer engere Näherungswerte eingeschlossen und dadurch so genau, als man will, berechnet werden kann.

Es sei z. B. der Logarithmus von 13 zu berechnen.

13 liegt zwischen 10 und 100,
log 13 „ „ log 10 = 1 und log 100 = 2;

Differenz der Näherungswerte: 2 — 1 = 1.

$\sqrt{10.100} = 31 \cdot 6227766 = a$, $\log a = \frac{1}{2} (\log 10 + \log 100) = 1 \cdot 5$;

13 liegt zwischen 10 und a,
log 13 „ „ log 10 = 1 und log a = 1·5;

Differenz der Näherungswerte: 1·5 — 1 = 0·5.

$\sqrt{10\,a} = 17 \cdot 7827942 = b$, $\log b = \frac{1}{2} (\log 10 + \log a) = 1 \cdot 25$;

13 liegt zwischen 10 und b,
log 13 „ „ log 10 = 1 und log b = 1·25;

Differenz der Näherungswerte: 1·25 — 1 = 0·25.

Man sieht, dass die Näherungswerte des Logarithmus von 13 immer näher an einander rücken. Durch fortgesetztes Verfahren findet man:

$\sqrt{10\,b} = 13 \cdot 3352144 = c$, $\log c = \frac{1}{2} (\log 10 + \log b) = 1 \cdot 125$;

$\sqrt{10\,c} = 11 \cdot 5478201 = d$, $\log d = \frac{1}{2} (\log 10 + \log c) = 1 \cdot 0625$;

$\sqrt{c\,d} = 12 \cdot 4093780 = e$, $\log e = \frac{1}{2} (\log c + \log d) = 1 \cdot 09375$;

$\sqrt{c\,e} = 12 \cdot 8639696 = f$, $\log f = \frac{1}{2} (\log c + \log e) = 1 \cdot 109375$;

$\sqrt{cf} = 13{\cdot}0974727 = g,\quad \log g = \frac{1}{2}(\log c + \log f) = 1{\cdot}117188;$
$\sqrt{fg} = 12{\cdot}9801960 = h,\quad \log h = \frac{1}{2}(\log f + \log g) = 1{\cdot}113281;$
$\sqrt{gh} = 13{\cdot}0387024 = i,\quad \log i = \frac{1}{2}(\log g + \log h) = 1{\cdot}115234;$
$\sqrt{hi} = 13{\cdot}0094163 = k,\quad \log k = \frac{1}{2}(\log h + \log i) = 1{\cdot}114258;$
$\sqrt{hk} = 12{\cdot}9947978 = l,\quad \log l = \frac{1}{2}(\log h + \log k) = 1{\cdot}113769;$
$\sqrt{kl} = 13{\cdot}0021049 = m,\quad \log m = \frac{1}{2}(\log k + \log l) = 1{\cdot}114014;$
$\sqrt{lm} = 12{\cdot}9981507 = n,\quad \log n = \frac{1}{2}(\log l + \log m) = 1{\cdot}113892;$
$\sqrt{mn} = 13{\cdot}0002776 = o,\quad \log o = \frac{1}{2}(\log m + \log n) = 1{\cdot}113953;$
$\sqrt{no} = 12{\cdot}9993640 = p,\quad \log p = \frac{1}{2}(\log n + \log o) = 1{\cdot}113922;$
$\sqrt{op} = 12{\cdot}9998207 = q,\quad \log q = \frac{1}{2}(\log o + \log p) = 1{\cdot}113937;$
$\sqrt{oq} = 13{\cdot}0000491 = r,\quad \log r = \frac{1}{2}(\log o + \log q) = 1{\cdot}113945;$
$\sqrt{qr} = 12{\cdot}9999348 = s,\quad \log s = \frac{1}{2}(\log q + \log r) = 1{\cdot}113941;$
u. s. w.

Da nun 13 zwischen s und r, und folglich auch log 13 zwischen log s und log r liegt, diese beiden Logarithmen aber in den 5 ersten Decimalstellen übereinstimmen, so ist auf 5 Decimalen genau $\log 13 = 1{\cdot}11394$.

Auf diesem mühsamen Wege berechnete Heinrich Brigg die Logarithmen der Primzahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000 mit 14 Decimalstellen, und später Adrian Vlacq die noch fehlenden der Primzahlen von 20000 bis 90000.

2. Bequemer und kürzer kann man den Brigg'schen Logarithmus einer Zahl N mittelst der Näherungswerte eines Kettenbruches bestimmen. Es sei $\log N = x$, somit $N = 10^x$. Findet man durch Potenzierung, dass x zwischen den ganzen Zahlen q und q + 1 liegt, dass also $10^q < N < 10^{q+1}$ ist, so setze man $x = q + \frac{1}{x_1}$, wo $x_1 > 1$; dann wird $10^{q+\frac{1}{x_1}} = 10^q . 10^{\frac{1}{x_1}} = N$, also $10^{\frac{1}{x_1}} = N : 10^q$, oder, wenn $N : 10^q$ durch N_1 bezeichnet wird, $10^{\frac{1}{x_1}} = N_1$ und $10 = N_1^{x_1}$. Man suche nun ebenso die größte in x_1 enthaltene ganze Zahl; diese sei q_1, also $N_1^{q_1} < 10 < N_1^{q_1+1}$; setzt man $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$, wo $x_2 > 1$, so wird $N_1^{q_1} . N_1^{\frac{1}{x_2}} = 10$, daher $N_1^{\frac{1}{x_2}} = 10 : N_1^{q_1}$, oder, wenn man $10 : N_1^{q_1}$ durch N_2 ausdrückt, $N_1^{\frac{1}{x_2}} = N_2$ und $N_1 = N_2^{x_2}$. Findet man ferner $N_2^{q_2} < N_1 < N_2^{q_2+1}$ und setzt $x_2 = q_2 + \frac{1}{x_3}$, so ergibt sich, wenn $N_1 : N_2^{q_2}$ durch N_3 bezeichnet wird, auf gleiche Weise $N_2 = N_3^{x_3}$; u. s. w.

Hiernach ist

$$\log N = q + \frac{1}{x_1} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{x_2}} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = \ldots,$$

woraus sich die Näherungsbrüche für log N herleiten lassen.

Ist nach dieser Methode z. B. der Logarithmus von 13 zu bestimmen, so hat man folgende Rechnung:

$N = 13, \quad 10^1 < 13 < 10^2, \quad q = 1;$

$N_1 = \frac{13}{10^1} = 1 \cdot 3, \quad 1 \cdot 3^8 < 10 < 1 \cdot 3^9, \quad q_1 = 8;$

$N_2 = \frac{10}{1 \cdot 3^8} = 1 \cdot 22589, \quad 1 \cdot 22589^1 < 1 \cdot 3 < 1 \cdot 22589^2, \quad q_2 = 1;$

$N_3 = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 22589^1} = 1 \cdot 06045, \quad 1 \cdot 06045^3 < 1 \cdot 22589 < 1 \cdot 06045^4, \quad q_3 = 3;$

$N_4 = \frac{1 \cdot 22589}{1 \cdot 06045^3} = 1 \cdot 02823, \quad 1 \cdot 02823^2 < 1 \cdot 06045 < 1 \cdot 02823^3, \quad q_4 = 2;$

$N_5 = \frac{1 \cdot 06045}{1 \cdot 02823^2} = 1 \cdot 00303, \quad 1 \cdot 00303^9 < 1 \cdot 02823 < 1 \cdot 00303^{10}, \quad q_5 = 9;$

$N_6 = \frac{1 \cdot 02823}{1 \cdot 00303^9} = 1 \cdot 00159, \quad 1 \cdot 00159^1 < 1 \cdot 00303 < 1 \cdot 00159^2, \quad q_6 = 1;$

u. s. w.

Man hat also $\log 13 = 1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$

und daher für den gesuchten Logarithmus die Näherungswerte

$$1, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{39}{35}, \frac{88}{79}, \frac{831}{746}, \frac{919}{825} \ldots$$

Setzt man $\log 13 = \frac{919}{825} = 1 \cdot 113939 \ldots$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{825^2} = \frac{1}{680625} = 0 \cdot 000001 \ldots$, somit ist der Logarithmus von 13 auf 5 Decimalstellen genau $1 \cdot 11394$, wie wir denselben auch oben nach der ersten Methode gefunden haben.

Zusatz. Noch kürzere Methoden zur Berechnung der Logarithmen bietet die höhere Analysis.

§. **207.** Da im Brigg'schen Systeme mit Ausnahme der dekadischen Einheiten alle übrigen rationalen Zahlen irrationale Logarithmen haben und diese annäherungsweise durch Decimalbrüche dargestellt werden, so besteht ein Brigg'scher Logarithmus im allgemeinen aus Ganzen mit angehängten Decimalziffern. Man nennt die im Logarithmus enthaltenen Ganzen die Charakteristik (Kennziffer) des Logarithmus, die angehängten Decimalen die Mantisse desselben.

Für positive Zahlen, welche kleiner als 1 sind, ist der Logarithmus, also dessen Charakteristik und Mantisse negativ. Negative Mantissen pflegt man übrigens in der Rechnung zu beseitigen; man führt statt derselben positive Mantissen mit einer negativen Charakteristik ein, indem man den negativen Logarithmus von einer Zahl subtrahiert, die um 1 größer ist als die Charakteristik, wodurch eine positive Mantisse zum Vorschein kommt, und dann diese um 1 größere Zahl als negative Charakteristik hinter die Mantisse setzt.

Z. B. $\quad -2 \cdot 34567 = 3 - 2 \cdot 34467 - 3$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \cdot 65533 - 3.$

§. **208.** Die Charakteristik des Brigg'schen Logarithmus einer dekadischen Zahl ist gleich dem Rangexponenten der höchsten Ziffer dieser Zahl.

Es sei n der Rangexponent der höchsten Ziffer der Zahl a, wobei n eine ganze positive oder negative Zahl oder auch die Null bezeichnen kann; dann ist

$$a \overline{\overline{>}} 10^n \text{ und } a < 10^{n+1}, \text{ daher}$$
$$\log a \overline{\overline{>}} n \quad \text{und } \log a < n + 1.$$

Es ist also $\log a = n + \alpha$, wo α positiv und < 1 oder auch Null ist; folglich ist n die Charakteristik des Logarithmus von a.

Folgesätze. a) Die Charakteristik des Logarithmus einer Zahl, welche Ganze enthält, ist positiv und um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen, welche die Ganzen einnehmen (§. 65, Folges. 1).

b) Die Charakteristik des Logarithmus eines echten Decimalbruches ist negativ und absolut genommen gleich der Anzahl aller Nullen, welche den geltenden Decimalziffern vorangehen, die Null vor dem Decimalpunkte mitgezählt (§. 178, 1).

§. **209.** Wenn man irgend eine Zahl mit einer Potenz von 10 multipliciert oder durch eine Potenz von 10 dividiert, so wird dadurch in ihrem Brigg'schen Logarithmus nur die Charakteristik geändert, während die Mantisse dieselbe bleibt.

Es ist $\log (a . 10^m) = \log a + \log 10^m = \log a + m,$

$$\log \frac{a}{10^m} = \log a - \log 10^m = \log a - m.$$

Es wird also der Logarithmus von a um die ganze Zahl m im ersten Falle vermehrt, im zweiten vermindert, d. h. er erhält eine andere Charakteristik, während die Mantisse ungeändert bleibt.

So ist z. B. $\quad \log 7124 = 3 \cdot 85272$; daher

$$\log 712400 = \log 7124 + \log 100 = 3 \cdot 85272 + 2 = 5 \cdot 85272;$$
$$\log 74 \cdot 24 = \log 7124 - \log 100 = 3 \cdot 85272 - 2 = 1 \cdot 85272.$$

Folgesatz. Die Mantisse eines Logarithmus hängt bloß von der Ziffernfolge der Zahl ohne Rücksicht auf deren Rang ab.

Logarithmentafeln.

§. **210**. Die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000 oder von 1 bis 100000, und zwar erstere auf 5 oder 6, letztere auf 7 Decimalen berechnet, hat man in besonderen Tafeln, welche Logarithmentafeln heißen, zusammengestellt. Diese enthalten nur die Mantissen der Logarithmen, da die Charakteristik in jedem Falle nach §. 208 bestimmt werden kann.

Mit Hilfe solcher Tafeln findet man durch ein ganz einfaches Verfahren, das in den denselben vorausgeschickten Anleitungen näher angegeben ist, zu jeder Zahl den entsprechenden Logarithmus, und umgekehrt zu jedem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl*).

§. **211**. Rechnungsoperationen mit den Brigg'schen Logarithmen.

In Beziehung auf die Rechnungsoperationen mit Logarithmen sind im allgemeinen dieselben Regeln zu beobachten, wie für dekadische Zahlen überhaupt; nur hat man dabei noch Folgendes zu berücksichtigen:

1. Erhält man beim Addieren der Logarithmen zwei Charakteristiken, eine positive und eine negative, so werden diese in eine einzige zusammengezogen. Z. B.

$$\begin{array}{l} 3\cdot10\,589 \\ 2\cdot56\,814 \\ 0\cdot21\,340 - 2 \\ 0\cdot08\,105 - 4 \\ \hline 5\cdot96\,848 - 6 = 0\cdot96\,848 - 1. \end{array}$$

2. Ist beim Subtrahieren der Minuend kleiner als der Subtrahend, so addiere man, um im Reste eine negative Mantisse zu vermeiden, zu dem Minuend so viele positive Einheiten, dass er größer wird als der Subtrahend, und setze dann auch als Charakteristik des Restes so viele negative Einheiten. Z. B.

$$\begin{array}{l} +3 \qquad -3 \\ 1\cdot45\,025 \\ 3\cdot57\,892 \\ \hline 0\cdot87\,133 - 3. \end{array}$$

3. Wird ein Logarithmus mit negativer Charakteristik mit einer Zahl multipliciert, so muss im Producte die neue negative Charakteristik mit der etwa erhaltenen positiven zusammengezogen werden. Z. B.

$$\begin{aligned} (0\cdot53\,115 - 2) \times 5 &= 2\cdot65\,575 - 10 \\ &= 0\cdot65\,575 - 8. \end{aligned}$$

4. Ist ein Logarithmus mit negativer Charakteristik durch eine Zahl zu dividieren, so muss die negative Charakteristik, wenn sie durch diese Zahl

*) Eine ausführliche Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von mir herausgegebenen fünfstelligen Logarithmentafeln zum Schulgebrauche. Wien, bei Gerold, 1877.

nicht theilbar ist, um so viele Einheiten vergrößert werden, dass sie dadurch theilbar wird; eben so viele Einheiten müssen aber dann auch als Ganze zu der positiven Mantisse gesetzt werden. Z. B.

$$(0{\cdot}41\,509 - 7) : 5 = (3{\cdot}41\,509 - 10) : 5$$
$$= 0{\cdot}68\,303 - 2.$$

§. **212**. Anwendung der Brigg'schen Logarithmen.

Durch die allgemeinen Sätze, die in §. 203 entwickelt wurden, ist man im Stande, die Multiplication in eine Addition, die Division in eine Subtraction, das Potenzieren in eine Multiplication und das Radicieren in eine Division zu verwandeln.

Kommen unter den gegebenen Zahlen negative vor, so betrachtet man sie einstweilen als absolute Zahlen, führt damit die Rechnung durch und bestimmt das Vorzeichen nachträglich in dem gefundenen Resultate.

1. Multiplication der Zahlen mit Hilfe der Logarithmen.

Bestimme das Product aus $1{\cdot}0954$, $0{\cdot}91567$, $-3{\cdot}1571$ und $1{\cdot}00782$.

Es ist

$$\begin{aligned} \log 1{\cdot}0954 &= 0{\cdot}03\,957 \\ \log 0{\cdot}91567 &= 0{\cdot}96\,174 - 1 \\ \log 3{\cdot}1571 &= 0{\cdot}49\,928\ (n) \\ \log 1{\cdot}00782 &= 0{\cdot}00\,338 \\ \hline \log \text{des Productes} &= 0{\cdot}50\,397 = \log 3{\cdot}1914, \end{aligned}$$

also

$$1{\cdot}0954 \times 0{\cdot}91567 \times -3{\cdot}1571 \times 1{\cdot}00782 = -3{\cdot}1914.$$

2. Division der Zahlen mit Hilfe der Logarithmen.

1) Es soll der Quotient $528 : 737$ oder $\frac{528}{737}$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} & +1 \qquad\quad -1 \\ \log 528 &= 2{\cdot}72\,263 \\ \log 737 &= 2{\cdot}86\,747 \\ \hline \log \tfrac{528}{737} &= 0{\cdot}85\,516 - 1 = \log 0{\cdot}7164, \end{aligned}$$

folglich $\frac{528}{737} = 0{\cdot}7164$.

2) Bestimme den Wert des Bruches $x = \dfrac{3{\cdot}4156 \times 4{\cdot}023}{1{\cdot}2378 \times 5{\cdot}87091}$.

Es ist

$$\log x = \log 3{\cdot}4156 + \log 4{\cdot}023 - (\log 1{\cdot}2378 + \log 5{\cdot}87091)$$

$$\begin{aligned} \log 3{\cdot}4156 &= 0{\cdot}53\,347 \\ \log 4{\cdot}023 &= 0{\cdot}60\,455 \\ \hline &\ 1{\cdot}13\,802 \\ \log 1{\cdot}2378 &= 0{\cdot}09\,265 \\ \log 5{\cdot}87091 &= 0{\cdot}76\,871 \\ \hline \log x &= 0{\cdot}27\,666 = \log 1{\cdot}8909, \end{aligned}$$

also $x = 1{\cdot}8909$.

3. Potenzierung einer Zahl mit Hilfe der Logarithmen.

1) Es soll die 20ste Potenz von 1·025 gesucht werden.

Man hat

$$\log 1{\cdot}025 = 0{\cdot}010724 \times 20$$

$$\log (1{\cdot}025)^{20} = 0{\cdot}214480 = \log 1{\cdot}6386,$$

also $(1{\cdot}025)^{20} = 1{\cdot}6386.$

2) Bestimme $\left(\frac{329}{67}\right)^{1{\cdot}065}$.

$$\log 329 = 2{\cdot}51\,720$$

$$\log 67 = 1{\cdot}82\,607$$

$$0{\cdot}69\,113 \times 1{\cdot}065$$

$$5\,601$$

$$69\,113$$

$$4\,146_6$$

$$345_6$$

$$\log \left(\frac{329}{67}\right)^{1\,065} = 0{\cdot}73\,605 = \log 5{\cdot}4456$$

somit $\left(\frac{329}{67}\right)^{1{\cdot}065} = 5{\cdot}4456.$

4. Radicierung einer Zahl mit Hilfe der Logarithmen.

Man verlangt die 5te Wurzel aus 10.

$$\log 10 = 1{\cdot}00\,000 \quad : 5$$

$$\log \sqrt[5]{10} = 0{\cdot}20\,000 = \log 1{\cdot}5849,$$

also $\sqrt[5]{10} = 1{\cdot}5849.$

Vierter Abschnitt.

Gleichungen.

---

§. 213. Die Gleichstellung zweier Zahlenausdrücke, welche gleichen Wert haben, wird eine Gleichung genannt. Z. B.

$$a = a, \quad (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4, \quad x^2 - 8 = 2x.$$

Die Größen, welche einander gleichgestellt werden, heißen Theile der Gleichung und können einzeln wieder aus mehreren Gliedern bestehen. In der Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ ist $x^2 - 8$ der erste, $2x$ der zweite Theil; der erste Theil besteht aus zwei Gliedern x^2 und -8.

Man unterscheidet identische und Bestimmungsgleichungen.

Eine Gleichung, in welcher ein Zahlenausdruck sich selbst oder einer bloßen Umformung dieses Ausdruckes gleichgesetzt wird, heißt eine identische Gleichung; z. B. $a = a$, $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Eine identische Gleichung bleibt für jeden beliebigen Wert der darin vorkommenden allgemeinen Zahlen richtig. Jede Formel für eine arithmetische Operation bildet eine identische Gleichung.

Eine Gleichung, in welcher der eine Theil nicht durch bloße Umformung aus dem andern hergeleitet werden kann, welche also auch nicht für alle, sondern nur für bestimmte Werte der in ihr enthaltenen unbestimmten Zahlen richtig ist, heißt eine Bestimmungsgleichung, auch bloß Gleichung im engeren Sinne. Z. B. die Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ ist nur richtig, wenn man für x einen der zwei Werte 4 oder -2 setzt.

Die in einer Bestimmungsgleichung unbestimmt gelassenen Zahlen heißen Unbekannte und werden gewöhnlich durch die letzten Buchstaben $x, y, z \ldots$ des Alphabets bezeichnet. Die Bestimmungsgleichungen dienen dazu, aus den durch sie ausgedrückten Beziehungen zwischen den bekannten und unbekannten Zahlen die letzteren zu bestimmen. Die Werte der Unbekannten, welche einer Gleichung genügen, nennt man die Wurzeln der Gleichung; diese Werte bestimmen, heißt die Gleichung auflösen. Die Wurzeln einer Gleichung müssen, statt der Unbekannten in dieselbe substituiert, die Gleichung zu einer identischen machen.

Ordnen der Gleichungen.

§. **214**. Um eine Gleichung auflösen zu können, muss sie zuerst auf eine solche Form gebracht werden, dass die Unbekannte weder in einem Nenner, noch unter einem Wurzelzeichen vorkommt, dass alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, in dem ersten Theile der Gleichung nach den fallenden Potenzen derselben aufeinander folgen, dass endlich der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten eine ganze positive Zahl ist. Eine so geformte Gleichung heißt *geordnet*; z. B.

$$ax^3 + bx^2 + cx = d,$$
$$x^2 + 2x = 6.$$

Wird eine geordnete Gleichung so dargestellt, daß der zweite Theil derselben Null ist, so heißt die Gleichung *auf Null reduciert*; z. B. $x^2 + ax + b = 0$.

§. **215**. Das Ordnen der Gleichungen beruht auf dem Grundsatze:

Wenn man mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vornimmt, so erhält man wieder gleiche Größen.

Dieser Grundsatz lässt sich durch folgende Sätze näher ausdrücken:

1. *Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man zu beiden Theilen derselben eine und dieselbe Zahl addiert, oder von beiden Theilen dieselbe Zahl subtrahiert.*

Nach diesem Satze kann man jedes Glied des einen Theiles mit dem entgegengesetzten Vorzeichen in den andern Theil bringen (*transponieren*) *gleiche Glieder* in beiden Theilen weglassen und insbesondere auch jede geordnete Gleichung *auf Null reducieren*.

Z. B. aus $x + a = b$ folgt $x = b - a$,
„ $3x + m = a + m$ „ $3x = a$,
„ $x^2 - 2x = 1$ „ $x^2 - 2x - 1 = 0$.

2. *Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben mit derselben Zahl multipliciert.*

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jede Gleichung *von den Nennern befreien*, insbesondere auch den Coefficienten der höchsten Potenz der Unbekannten, wenn er negativ ist, durch die Multiplication beider Theile mit -1, d. i. durch Veränderung aller Vorzeichen, positiv darstellen.

Z. B. aus $\frac{x}{a} - b = \frac{c}{x}$ folgt $x^2 - abx = ac$,
„ $-x^2 + 3x = -5$ „ $x^2 - 3x = 5$.

3. *Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben durch dieselbe Zahl dividiert.*

Hiernach kann man eine Gleichung, deren beide Theile einen gemeinschaftlichen *Factor* haben, durch diesen abkürzen, insbesondere auch den Coefficienten der *höchsten Potenz* der Unbekannten, wenn er von 1 verschieden ist, wegschaffen.

Z. B. aus $2x^2 - 8x = 4$ folgt $x^2 - 4x = 2$,

„ $8x = 7$ „ $x = \frac{7}{8}$.

4.* Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben mit derselben Zahl potenziert.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man eine Gleichung, in welcher die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen steht, von dem Wurzelexponenten befreien (rational machen); dabei muss die Wurzel, welche man wegschaffen will, allein in den einen Theil gebracht werden.

Z. B. aus $\sqrt{x - b^2} = a$ folgt $x - b^2 = a^2$.

5.* Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben durch dieselbe Zahl radiciert.

Durch das Radicieren kann man aus der Gleichung den Potenzexponenten der Unbekannten wegschaffen.

Z. B. aus $x^3 = 10$ folgt $x = \sqrt[3]{10}$,

„ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b$ „ $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$.

6.* Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man von beiden Theilen den Logarithmus in Bezug auf dieselbe Basis nimmt.

Dadurch kann man eine Gleichung von Exponentialgrößen (§. 200) befreien.

Z. B. aus $a^x = b$ folgt $x \log a = \log b$.

Bei Anwendung der hier angeführten Umformungen ist einige Vorsicht nöthig, da in gewissen Fällen die neu gebildete Gleichung nebst den Wurzeln der gegebenen Gleichung auch noch andere Wurzeln, in anderen Fällen aber nicht mehr alle Wurzeln der gegebenen Gleichung enthält.

Dividiert man z. B. beide Theile der Gleichung $x(x - 2) = 3x$ durch x, so enthält die neue Gleichung $x - 2 = 3$ nur die Wurzel 5, während die gegebene Gleichung auch durch die Wurzel 0 befriedigt wird.

§. **216.** Aufgabe. Eine gegebene Gleichung zu ordnen.

Aus den vorhergehenden Sätzen ergibt sich für das Ordnen einer Gleichung folgendes Verfahren:

1. Enthält die Gleichung Brüche, so werden die Nenner weggeschafft, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multipliciert.

2. Kommen in der Gleichung durch Klammern verbundene Ausdrücke vor, so werden die Klammern durch wirkliche Ausführung der angezeigten Operationen aufgelöst.

3.* Kommt die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen vor, so wird die Gleichung durch entsprechende Potenzierung beider Theile von dem Wurzelexponenten befreit.

4. Alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, werden in den ersten Theil gebracht, reduciert und nach fallenden Potenzen geordnet; alle übrigen Glieder werden in den zweiten Theil übertragen und ebenfalls reduciert.

5. Ist der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten negativ, so werden die Vorzeichen aller Glieder geändert.

Beispiele.

1) $$\begin{aligned} 6(x-2)-2(3x+1) &= 14-4(2x+3) \\ 6x-12-6x-2 &= 14-8x-12 \\ 6x-6x+8x &= 14-12+12+2 \\ 8x &= 16 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x-\frac{12-3x}{x} &= 8. \\ x^2-12+3x &= 8x. \\ x^2+3x-8x &= 12. \\ x^2-5x &= 12. \end{aligned}$$

3)* $$\begin{aligned} 2x-\sqrt{2x} &= 1 \\ -\sqrt{2x} &= 1-2x \\ 2x &= 1-4x+4x^2 \\ 2x+4x-4x^2 &= 1 \\ -4x^2+6x &= 1 \\ 4x^2-6x &= -1. \end{aligned}$$

Eintheilung der Bestimmungsgleichungen.

§. **217** 1. Eine Gleichung, in welcher die Unbekannten nur mit besonderen Zahlen verbunden sind, heißt eine numerische Gleichung; eine Gleichung, welche außer den Unbekannten auch allgemeine Zahlen (Buchstaben) enthält, heißt eine Buchstabengleichung.

2. Die Gleichungen theilt man ferner in algebraische und transcendente ein; in den ersteren kommt die Unbekannte nur als Basis einer Potenz, in den letzteren unter einer der Formen a^x, $\log x$, $\sin x$ u. dgl. vor.

3. Nach der Zahl der in einer Gleichung vorkommenden Unbekannten unterscheidet man Gleichungen mit einer, zwei und mehreren Unbekannten.

4. Nach dem höchsten Potenzexponenten der Unbekannten und wenn mehrere unbekannte Zahlen vorkommen, nach der höchsten Summe der Potenzexponenten der Unbekannten eines Gliedes in der geordneten Gleichung theilt man die Gleichungen in Gleichungen des ersten, zweiten, dritten, ... Grades ein. So sind z. B.

$$\left.\begin{aligned} 5x-4 &= 0 \\ x+3y &= 3z-8 \end{aligned}\right\} \text{Gleichungen des 1. Grades,}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x^2-5x &= 10 \\ xy-x &= y+2 \end{aligned}\right\} \text{Gleichungen des 2. Grades.}$$

Die Gleichungen des ersten Grades heißen auch lineare, die des zweiten Grades quadratische, die des dritten cubische, und Gleichungen, welche den dritten Grad übersteigen, allgemein höhere Gleichungen.

5. Gleichungen des zweiten oder eines höheren Grades heißen **rein**, wenn sie nur **eine** Potenz der Unbekannten enthalten, und **gemischt**, wenn in denselben zwei oder mehrere Potenzen der Unbekannten vorkommen.

6. Die Gleichungen unterscheidet man endlich in **bestimmte**, welche eine beschränkte, schon vor der Auflösung genau bestimmbare Anzahl von Wurzeln haben, und in **unbestimmte**, denen unendlich viele Wurzeln genügen, wenn nicht die Anzahl derselben durch besondere Bedingungen beschränkt wird.

I. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades.

1. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. **218.** Die allgemeine Form einer geordneten Gleichung des ersten Grades ist

$$ax = b.$$

Dividiert man beide Theile durch a, so erhält man

$$x = \frac{b}{a}.$$

Eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten hat nur **eine** Wurzel und ist daher eine bestimmte Gleichung.

Beispiele.

1)
$$\begin{aligned} ax + b &= a'x + b' \\ ax - a'x &= b' - b \\ (a - a')x &= b' - b \\ x &= \frac{b' - b}{a - a'}. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} \frac{a}{x} - a + \frac{b}{2} &= \frac{b}{2x} \\ 2a - 2ax + bx &= b \\ bx - 2ax &= b - 2a \\ (b - 2a)x &= b - 2a \\ x &= 1. \end{aligned}$$

2. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§. **219.** Eine Gleichung mit zwei Unbekannten ist **unbestimmt**; man kann für die eine Unbekannte jeden beliebigen Wert annehmen und nach Einsetzung desselben durch Auflösung der entstehenden Gleichung einen zugehörigen Wert für die andere Unbekannte finden. Diese Unbestimmtheit hört auf, wenn noch eine zweite von der ersten unabhängige Gleichung mit denselben Unbekannten gegeben ist, welche der ersten und zweiten Gleichung gleichzeitig genügen sollen, indem man dann aus beiden Gleichungen durch Wegschaffung einer Unbekannten eine einzige Gleichung mit nur **einer** Unbekannten bildet und diese auflöst.

Aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten eine dritte Gleichung herleiten, welche die eine Unbekannte nicht mehr enthält, heißt **diese Unbekannte eliminieren**.

§. **220**. Es sind vorzüglich drei Eliminations-Methoden im Gebrauche.

1. Die Comparations-Methode. Man bestimmt den Wert derselben Unbekannten aus beiden Gleichungen, setzt diese Werte einander gleich und löst die dadurch erhaltene Gleichung, welche nur die andere Unbekannte enthält, auf.

Sind allgemein die Gleichungen

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

gegeben, so erhält man aus denselben

$$y = \frac{c - ax}{b} \qquad x = \frac{c - by}{a},$$

$$y = \frac{c' - a'x}{b'} \qquad x = \frac{c' - b'y}{a'};$$

daher, weil y und x in beiden Gleichungen dieselben Werte haben sollen,

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'} \qquad \frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich dann

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}; \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

2. Die Substitutions-Methode. Man sucht den Wert einer Unbekannten aus einer Gleichung und substituiert denselben in die andere Gleichung; dadurch erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, welche dann aufgelöst wird.

Es seien wieder die früheren zwei Gleichungen gegeben. Aus der ersten folgt

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Substituiert man diesen Wert in die zweite Gleichung, so hat man

$$a'x + b'.\frac{c - ax}{b} = c', \text{ und daher}$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Auf ähnliche Weise findet man den Wert von y.

3. Die Methode der gleichen Coefficienten. Man verschafft in beiden Gleichungen der zu eliminierenden Unbekannten durch Multiplication aller Glieder mit einem geeigneten Factor gleiche Coefficienten und addiert oder subtrahiert die neuen Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben; die dadurch erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten wird dann aufgelöst.

Es seien wieder die obigen Gleichungen gegeben. Um aus denselben y zu eliminieren, multipliciert man die erste Gleichung mit b′, die zweite mit b, wodurch man erhält:

$$ab'x + bb'y = b'c,$$
$$a'bx + bb'y = bc'.$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, so ist

$$ab'x - a'bx = b'c - bc', \text{ und daher}$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Wird ebenso aus den gegebenen Gleichungen x eliminiert, so erhält man y.

Zusätze. a) Welche von den drei Eliminations-Methoden in jedem besonderen Falle am vortheilhaftesten anzuwenden sei, muss aus der Beschaffenheit der Coefficienten der Unbekannten beurtheilt werden. Gewöhnlich bestimmt man nur den Wert der einen Unbekannten nach einer der angeführten drei Methoden und substituiert dann den gefundenen Wert in eine der gegebenen Gleichungen, woraus sich der Wert für die zweite Unbekannte ergibt.

b) Kommen in den gegebenen Gleichungen nur die reciproken Werte der Unbekannten vor, so ist es am einfachsten, diese reciproken Werte selbst als die eigentlichen Unbekannten anzusehen und aus ihnen nachträglich die ursprünglichen Unbekannten zu berechnen. Z. B.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \text{ und } \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 4.$$

Setzt man $\frac{1}{x} = x'$ und $\frac{1}{y} = y'$, so hat man

$$2x' + 3y' = 13 \text{ und } 5x' - 2y' = 4,$$

und findet $x' = 2$, $y' = 3$, woraus dann $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ folgt.

Beispiele.

1) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 24 \\ 5x - 3y = 11 \end{array}\right\}$ nach der Comparations-Methode aufzulösen.

Die erste Gleichung gibt $x = \frac{24 - 4y}{3}$, die zweite $x = \frac{11 + 3y}{5}$; daher $\frac{24 - 4y}{3} = \frac{11 + 3y}{5}$, woraus $y = 3$ folgt.

Substituiert man diesen Wert von y in den Ausdruck

$$x = \frac{24 - 4y}{3}, \text{ so erhält man } x = \frac{24 - 4.3}{3} = 4.$$

2) $\left.\begin{array}{l} 6x - 13y = 48 \\ 2x + 3y = 16 \end{array}\right\}$ nach der Substitutions-Methode aufzulösen.

Aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{48 + 13y}{6}$; wird dieser Wert in die zweite Gleichung substituiert, so hat man

$$2.\frac{48 + 13y}{6} + 3y = 16, \text{ woraus } y = 0 \text{ folgt.}$$

Substituiert man diesen Wert von y in den Ausdruck

$$x = \frac{48 + 13y}{6}, \text{ so findet man } x = \frac{48 + 13.0}{6} = 8.$$

3) $\left.\begin{array}{l} 4x + 19y = 11 \\ 6x - 5y = -17 \end{array}\right\}$ nach der Methode der gleichen Coefficienten aufzulösen.

Um bei x gleiche Coefficienten herbeizuführen, multipliciert man die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 2; man erhält

$$\left.\begin{array}{r} 12x + 57y = 33 \\ 12x - 10y = -34 \end{array}\right\} \text{subtrahiert,}$$

$$67y = 67, \text{ also } y = 1.$$

Wird dieser Wert von y in die erste Gleichung substituiert, so erhält man $4x + 19.1 = 11$, woraus $x = -2$ folgt.

4) $$x + y = s,\ x - y = d.$$

Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen erhält man

$$2x = s + d,\ 2y = s - d, \text{ daher}$$

$$x = \frac{s+d}{2},\quad y = \frac{s-d}{2}.$$

Wie findet man aus der Summe zweier Zahlen und deren Differenz die beiden Zahlen selbst?

§. **221.** Die in §. 220 aus den allgemeinen Gleichungen

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'$$

erhaltenen Werte

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b},\ y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

lassen ersehen, daß es Fälle gibt, in denen die gegebenen zwei Gleichungen zur Bestimmung der in denselben vorkommenden zwei Unbekannten nicht geeignet sind.

1. Die Werte von x und y sind völlig unbestimmt, wenn $ab' = a'b$ und $b'c = bc'$ und daher auch $ac' = a'c$ ist, weil dann sowohl $x = \frac{0}{0}$ als auch $y = \frac{0}{0}$ wird. Dieser Fall tritt immer ein, wenn die eine Gleichung von der andern abhängig ist. Denn setzt man $a = a'm$, wo dann auch $b = b'm$ und $c = c'm$ wird, so nehmen die gegebenen Gleichungen folgende Form an:

$$a'mx + b'my = c'm,$$
$$a'x + b'y \ = c',$$

woraus hervorgeht, dass die erste Gleichung durch bloße Umformung, nämlich durch Multiplication mit m, aus der zweiten hervorgegangen, folglich von dieser abhängig ist.

2. Die zwei Gleichungen lassen ferner keine endliche Auflösung zu, wenn in den obigen Ausdrücken für x und y der Nenner = 0, die Zähler aber von 0 verschieden sind, wenn also $ab' = a'b$, dagegen etwa $bc' \gtrless b'c$ ist, weil man dann für x einen Wert von der Form $\frac{A}{0}$ erhält, die keinen Sinn hat (§. 47, 7). Dieser Fall tritt immer ein, wenn die zwei gegebenen Glei-

chungen einander widerstreiten. Denn setzt man $a = a'm$, also auch $b = b'm$, so nehmen die gegebenen Gleichungen folgende Form an:

$$\begin{aligned} a'mx + b'my &= c, \\ a'x + b'y \quad &= c', \end{aligned}$$

woraus $c'm = c$ folgen würde, was jedoch einen Widerspruch enthält, da nach der Voraussetzung $bc' \gtrless b'c$, also $\frac{bc'}{b'} \gtrless c$, oder $c'm \gtrless c$ sein muss.

Aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten können demnach die Werte dieser Unbekannten nur dann bestimmt werden, wenn die beiden Gleichungen von einander unabhängig sind und einander nicht widerstreiten.

§. **222.** Zur Bestimmung von drei oder mehreren Unbekannten müssen eben so viele von einander unabhängige und sich nicht widerstreitende Gleichungen gegeben sein.

Um ein System von mehreren zusammengehörigen Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten aufzulösen, wendet man dieselben Methoden an, welche in §. 220 für die Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angegeben wurden. Man eliminiert nämlich aus den gegebenen Gleichungen eine der Unbekannten, wodurch man eine Unbekannte und zugleich eine Gleichung weniger erhält; aus diesen neuen Gleichungen eliminiert man eine zweite Unbekannte und setzt dieses Verfahren fort, bis man zuletzt nur eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, aus welcher sich der Wert dieser Unbekannten ergibt. Der gefundene Wert wird in eine der zunächst vorhergehenden zwei Gleichungen substituiert und dadurch eine zweite Unbekannte bestimmt. Die beiden gefundenen Werte substituiert man dann in eine der vorhergehenden Gleichungen, u. s. w., und bestimmt auf diese Art nach und nach die Werte aller Unbekannten.

Beispiel.
$$\begin{aligned} 8x + 5y + 2z &= 24, \\ 6x - 3y + \ z &= 3, \\ 4x + 9y - 6z &= 4. \end{aligned}$$

Nach der Comparations-Methode hat man:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{24 - 5y - 2z}{8} \\ x &= \frac{3 + 3y - z}{6} \\ x &= \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{aligned}\right\}, \text{ folglich } \left\{\begin{aligned} \frac{24 - 5y - 2z}{8} &= \frac{3 + 3y - z}{6}, \\ \frac{3 + 3y - z}{6} &= \frac{4 - 9y + 6z}{4}, \end{aligned}\right.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen ergibt sich, wenn man sie nach y auflöst:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{60 - 2z}{27} \\ y &= \frac{6 + 20z}{33} \end{aligned}\right\}, \text{ daher } \frac{60 - 2z}{27} = \frac{6 + 20z}{33},$$

aus welcher letzteren Gleichung $z = 3$ folgt.

Substituiert man den Wert von z in einen der für y gefundenen Ausdrücke, z. B. in $y = \frac{60 - 2z}{27}$, so hat man $y = \frac{60 - 2.3}{27} = 2$.

Werden endlich die gefundenen Werte von y und z in einen der für x aufgestellten Ausdrücke, z. B. in $x = \frac{3 + 3y - z}{6}$ substituiert, so erhält man $x = \frac{3 + 3.2 - 3}{6} = 1$.

Löse dieselben drei Gleichungen auch nach der Substitutions-Methode und nach der Methode der gleichen Coefficienten auf.

3. Anwendung der bestimmten Gleichungen des ersten Grades.

§. **223.** In jeder Aufgabe, mag sie nur einen einzelnen besonderen Fall betreffen oder ganz allgemein gestellt sein, werden gewisse Bedingungen angegeben, denen die zu suchenden Zahlen genügen sollen. Das Geschäft der Algebra bei der Auflösung von Aufgaben ist ein dreifaches:

1. Der Ansatz einer oder mehrerer zusammengehöriger Gleichungen, d. i. die Uebertragung der Bedingungen der Aufgabe aus der gewöhnlichen Wortsprache in die algebraische Zeichensprache;

2. die Auflösung der gebildeten Gleichungen;

3. die Discussion oder Deutung des erhaltenen Resultates, welche die verschiedenen möglicherweise eintretenden Fälle und die Bedingungen der Lösbarkeit der Aufgabe zu erörtern hat.

Für das Ansetzen der Gleichungen können keine allgemeinen Regeln gegeben werden; es ist das Werk des Scharfsinnes und kann nur durch vielfältige Uebung geläufig gemacht werden. Anfängern kann folgende Regel als einigermaßen leitende Vorschrift dienen: Man betrachte die gegebene Aufgabe vorläufig als aufgelöst und behandle die Unbekannte so, wie es die Bedingungen der Aufgabe erfordern; dadurch erhält man für eine und dieselbe Größe zwei verschieden geformte Ausdrücke, welche einander gleichgestellt die verlangte Gleichung geben. Die Discussion ist besonders dann von Wichtigkeit, wenn das Resultat ein allgemeines ist oder eine negative Auflösung enthält.

§. **224.** **Beispiele.**

1) Man suche eine Zahl, deren Hälfte und dritter Theil zusammen 25 betragen.

Bezeichnet x die gesuchte Zahl, so ist ihre Hälfte $\frac{x}{2}$ und der dritte Theil $\frac{x}{3}$, daher nach der Bedingung der Aufgabe.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25, \text{ woraus } x = 30 \text{ folgt.}$$

2) A ist a Jahre, B b Jahre alt; nach wie viel Jahren wird A doppelt so alt sein als B?

Nach x Jahren wird A $a + x$, B $b + x$ Jahre alt; man hat daher

$$a + x = 2(b + x), \text{ und}$$
$$x = a - 2b.$$

Discussion. Ist hier $a < 2b$, so ist $x = -(2b - a)$, also negativ. Da eine negative Zahl Jahre keinen Sinn hat, so ist in diesem Falle die uflösung der vorgelegten Aufgabe unmöglich. Würde man aber in der obigen Gleichung $-x$ statt x setzen, so erhielte man

$$a - x = 2(b - x), \text{ und}$$
$$x = 2b - a.$$

Wenn man daher fragen würde: Vor wie viel Jahren war A doppelt so alt als B? so gibt die letztere Gleichung dafür die Lösung $x = 2b - a$, d. h. vor $2b - a$ Jahren.

Die negative Auflösung einer Gleichung des ersten Grades genügt also, wenn man sie positiv nimmt, einer anderen Gleichung, welche aus der ersten durch Aenderung der Vorzeichen der Unbekannten gebildet wird, und kann die Auflösung einer Aufgabe enthalten, in welcher die Fragezahl der vorgelegten Aufgabe im entgegengesetzten Sinne genommen wird.

3) Zwei Körper K' und K'' sind auf einer geraden Linie in derselben Richtung mit den Geschwindigkeiten c' und c'' in gleichförmiger Bewegung und gehen gleichzeitig bezüglich durch die Punkte A' und A'', von denen A' um d Längeneinheiten rückwärts von A'' liegt. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten werden beide Körper zusammentreffen?

K' legt in T Zeiteinheiten $c'T$ Längeneinheiten zurück,
K'' " " T " $c''T$ " "

Da zur Zeit des Zusammentreffens der von K' zurückgelegte Weg um d größer ist als der von K'' zurückgelegte, so ist $c'T - c''T = d$, daher

$$T = \frac{d}{c' - c''}.$$

Discussion. a) So lange $c' > c''$, ist T positiv und es gibt eine bestimmte Zeit, nach welcher die Körper zusammentreffen. Wenn $c' = c''$, also $c' - c'' = 0$, so wird $T = \frac{d}{0}$; die Auflösung ist unmöglich. Ist für diesen Fall auch $d = 0$, d. h. gehen die Körper gleichzeitig durch denselben Punkt, so wird $T = \frac{0}{0}$; die Auflösung ist unbestimmt, d. i. die Körper haben, da sie in jedem Augenblicke zusammen sind, nicht einen, sondern unendlich viele Zeitpunkte des Zusammentreffens. Ist endlich $c' < c''$, so wird $T = -\frac{d}{c'' - c'}$, woraus folgt, dass in diesem Falle die Auflösung der Aufgabe, so wie sie gestellt wurde, unmöglich ist, was auch schon an sich einleuchtet, indem sich der hintere Körper K' langsamer als der vordere K'' bewegt, beide also nicht nur nie zusammentreffen, sondern sich von einander immer mehr entfernen. Um übrigens auch dem negativen Werte von T eine Deutung zu geben, darf man nur in der gegebenen Aufgabe die Frage im entgegengesetzten Sinne stellen, nämlich: Vor wie viel Zeiteinheiten waren beide Körper zusammengetroffen? Dann gibt der negative Wert von T positiv genommen eine Auflösung der so geänderten Aufgabe und drückt aus, daß die zwei Körper vor $\frac{d}{c'' - c'}$ Zeiteinheiten zusammengetroffen waren.

b) Setzt man $- d$ für d, d. i. nimmt man an, dass der Punkt A' vorwärts von A'' liege, so erhält man $T = \frac{-d}{c' - c''} = \frac{d}{c'' - c'}$; es gelten daher hier die unter a) für K', A', c' gewonnenen Resultate bezüglich von K'', A'', c'', und umgekehrt.

c) Setzt man endlich $- c''$ für c', d. i. nimmt man an, dass sich der Körper K'' gegen K' in entgegengesetzter Richtung bewege, so wird $T = \frac{d}{c' + c''}$. Wenn d positiv ist, bedeutet T die Zeit, nach welcher die Körper zusammentreffen. Für $d = 0$ wird auch $T = 0$, d. i. wenn die zwei Körper gleichzeitig von demselben Punkte abgehen, so sind sie eben zur Zeit des Abganges zusammen. Ist d negativ, dann wird $T = - \frac{d}{c' + c''}$, d. i. die beiden Körper waren vor $\frac{d}{c' + c''}$ Zeiteinheiten zusammengetroffen.

Wird aus der obigen Grundgleichung nicht T, sondern eine andere allgemeine Größe bestimmt, so erhält man dadurch die Lösung für eine andere verwandte Aufgabe. Die algebraische Auflösung einer allgemeinen Aufgabe beantwortet daher nicht bloß die unmittelbar gestellte Aufgabe; sie liefert zugleich die Auflösung für eine ganze Gruppe von verwandten Aufgaben und zeigt den inneren Zusammenhang, in welchem dieselben unter einander stehen. Insbesondere dienen die negativen Werte dazu, um die Beschränkungen aufzuheben, welche in eine Aufgabe gelegt wurden, und um dadurch diese in ihrer Allgemeinheit vollständig zu lösen.

4) Man theile die Zahl 58 in zwei Theile so, dass der eine Theil um 16 kleiner sei als der andere.

Bezeichnet man den größeren Theil durch x und den kleineren durch y, so muss nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x + y = 58 \text{ und } x = y + 16$$

sein, aus welchen Gleichungen $x = 37$, $y = 21$ folgt.

Diese Aufgabe kann auch mittelst einer einzigen Gleichung mit einer Unbekannten aufgelöst werden.

Ist nämlich x der größere Theil, so ist $58 - x$ der kleinere, und es muss $x = 58 - x + 16$ sein, woraus $x = 37$, daher $58 - x = 21$ folgt.

5) Man hat zwei gleichartige Stoffe; von dem ersten ist der Wert einer Einheit $= a$, von dem zweiten $= b$. Man soll aus beiden eine Mischung

machen, die m Einheiten enthält und von welcher jede Einheit den Wert c hat. Wie viele Einheiten muss man von jedem Stoffe zu dieser Mischung nehmen?

Es wird vorausgesetzt, dass der Wert der Mischung gleich ist den Werten der dazu verwendeten Stoffe.

Bezeichnet x die Anzahl der Einheiten, welche man von dem ersten Stoffe nehmen muss, und y die Anzahl der Einheiten, welche man von dem zweiten Stoffe nehmen muss, so ist

$$x + y = m \text{ und } ax + by = cm, \text{ daher}$$

$$x = \frac{c - b}{a - b} . m, \ y = \frac{a - c}{a - b} . m.$$

Die Aufsuchung des Mischungsverhältnisses der beiden Quantitäten $x : y = (c - b) : (a - c)$ bildet die sogenannte Alligationsrechnung.

II. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

§. **225.** Führt eine Aufgabe auf weniger Gleichungen, als Unbekannte zu bestimmen sind, so kann man durch wiederholtes Eliminieren der Unbekannten immer zuletzt eine einzige Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten erhalten. Wird aus dieser Gleichung die eine Unbekannte durch die übrigen ausgedrückt, so kann man für diese letzteren unendlich viele verschiedene Werte setzen, und erhält dann auch für die erste Unbekannte unendlich viele Werte. Eine solche Gleichung ist daher unbestimmt.

Häufig wird bei derlei Aufgaben die Zahl der Auflösungen durch die Forderung beschränkt, dass die Werte der Unbekannten ganze, oder ganze und zugleich positive Zahlen sein sollen. In diesem Falle heißt die Aufgabe eine Diophantische.

Auflösung in ganzen Zahlen.

§. **226.** Eine unbestimmte Gleichung lässt keine Auflösung in ganzen Zahlen zu, wenn die Coefficienten der Unbekannten einen gemeinschaftlichen Factor haben, durch welchen das bekannte Glied nicht theilbar ist.

Beweis. Es sei die auf die einfachste Form gebrachte Gleichung

$$ax + by = c,$$

wo a, b, c beliebige ganze Zahlen vorstellen. Haben a und b das gemeinschaftliche Maß m, durch welches c nicht theilbar ist, so hat man

$$\frac{a}{m} . x + \frac{b}{m} . y = \frac{c}{m}.$$

Da nun $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen sind, so können nicht zugleich x, y ganze Zahlen sein, weil sonst auch $\frac{a}{m} \cdot x + \frac{b}{m} \cdot y$, folglich auch $\frac{c}{m}$ eine ganze Zahl wäre, was gegen die Voraussetzung ist.

§. **227.** Eine Gleichung des ersten Grades mit zwei Unbekannten, deren Coefficienten relative Primzahlen sind, hat unendlich viele Auflösungen in ganzen Zahlen.

Beweis. 1. Die Gleichung $ax + by = c$, wo a und b relativ prim sind und a als positiv vorausgesetzt werden kann, läſst immer eine Auflösung in ganzen Zahlen zu.

Denn substituiert man in den aus dieser Gleichung folgenden Ausdruck

$$x = \frac{c - by}{a}$$

für y nach und nach die a Werte 0, 1, 2, 3, ... $a - 1$ und dividiert die dadurch sich ergebenden a Werte von $c - by$ durch a, so müssen die dabei erscheinenden Divisionsreste sämmtlich verschieden ausfallen. Sind nämlich m und n zwei von den Zahlen 0, 1, 2 ... $a - 1$, und würden $c - bm$ und $c - bn$ durch a dividiert denselben Rest r geben, so daſs

$$c - bm = aq + r \text{ und } c - bn = aq_1 + r$$

wäre, so erhielte man, wenn man beide Gleichungen subtrahiert,

$$b(m - n) = a(q_1 - q), \text{ oder } \frac{b(m-n)}{a} = q_1 - q.$$

Es müſste also $b(m - n)$ durch a theilbar sein, was nach §. 75, 3 nicht möglich ist, da b und a relative Primzahlen sind, $m - n$ aber kleiner als a ist und also nicht durch a theilbar sein kann. Die Reste, welche übrig bleiben, wenn man jene a Werte von $c - by$ durch a dividiert, müssen also alle verschieden sein; es muſs daher, da sie zugleich sämmtlich kleiner als a sind, einer unter ihnen gleich Null sein. Es sei nun β der Wert von y, welcher dem Reste 0 entspricht; dann wird

$$x = \frac{c - b\beta}{a} = \alpha,$$

wo α eine ganze Zahl vorstellt. Der vorgelegten Gleichung genügen also die ganzen Zahlen

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

2. Hat aber die Gleichung $ax + by = c$ eine Auflösung in ganzen Zahlen, so läſst sie deren unendlich viele zu.

Denn ist für diese Gleichung $x = \alpha$, $y = \beta$ eine Auflösung in ganzen Zahlen, so hat man

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Dann ist auch

$$a\alpha - abu + b\beta + abu = c, \text{ oder}$$
$$a(\alpha - bu) + b(\beta + au) = c.$$

Der gegebenen Gleichung genügen somit allgemein die Werte

$$x = \alpha - bu, \quad y = \beta + au,$$

wo u eine willkürliche positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

§. **228**. Aufgabe. Eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades in ganzen Zahlen aufzulösen.

Die Auflösung geschieht nach einer der folgenden Methoden.

I. Durch Substitution.

Man bestimmt aus der Gleichung den Wert derjenigen Unbekannten, deren Coefficient den kleineren Zahlenwert hat, und substituiert darin für die andere Unbekannte nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3..., bis für eine dieser Substitutionen auch der Wert der ersten Unbekannten eine ganze Zahl wird.

Diese Auflösung beruhet auf dem zu §. 227 gegebenen Beweise.

Beispiel. Es sei die Gleichung $4x - 7y = 75$.

Man erhält daraus

$$x = \frac{75 + 7y}{4},$$

und ist versichert, dass wenn man darin für y einen der vier Werte 0, 1, 2, 3 setzt, einer der zugehörigen Werte von x eine ganze Zahl sein wird, so dass man also höchstens vier Versuche zu machen braucht. Man findet für $y = 3$

$$x = \frac{75 + 21}{4} = \frac{96}{4} = 24.$$

Die vorgelegte Gleichung läst also die Auflösung $x = 24$, $y = 3$ zu, und alle übrigen Auflösungen in ganzen Zahlen sind gegeben durch die Formeln

$$x = 24 + 7u, \quad y = 3 + 4u,$$

wo u eine willkürliche ganze Zahl bedeutet.

Man findet daher folgende Auflösungen:

für $u =$	... -2	-1	0	1	2	...
ist $x =$	... 10	17	24	31	38	...
$y =$	... -5	-1	3	7	11	...

Das hier angegebene Verfahren kann sehr weitläufig werden, wenn die Coefficienten beider Unbekannten große Zahlen sind.

II. Durch Reduction. (Euler'sche Methode.)

Ganz einfach gestaltet sich die Auflösung, wenn die eine Unbekannte den Coefficienten 1 hat. Z. B. aus der Gleichung $x + by = c$ folgt $x = c - by$; man kann hier für y jede beliebige ganze Zahl setzen und erhält dann auch für x eine ganze Zahl.

Auf diesen Fall läst sich durch folgendes Verfahren auch jede andere Gleichung

$$ax \pm by = c$$

zurückführen. Man sucht den Wert für diejenige Unbekannte, welche den kleineren Coefficienten hat, scheidet aus dem gefundenen Quotienten die darin enthaltenen Ganzen aus und setzt den in Bruchform erscheinenden Rest einer neuen Unbekannten gleich. Die so gebildete Hilfsgleichung löst man in Bezug auf die zweite der ursprünglichen Unbekannten auf, behandelt den erhaltenen Quotienten wie den früheren und setzt dieses Verfahren fort, bis man endlich, da die Coefficienten in den Hilfsgleichungen immer kleiner werden, auf eine Gleichung kommt, in welcher die eine Unbekannte den Coefficienten 1 hat. Wird sodann der Wert für diese Unbekannte nach und nach in die vorhergehenden Gleichungen substituiert, so erhält man zuletzt die Formeln für alle ganzen Werte von x und y.

Beispiele.

1) Es sei die Gleichung $19x - 8y = 52$ gegeben.

Löst man dieselbe nach der Unbekannten y, welche den kleineren Coefficienten hat, auf, so erhält man

$$y = \frac{19x - 52}{8},$$

oder, wenn man aus diesem Quotienten die darin enthaltenen Ganzen absondert,

$$y = 2x - 6 + \frac{3x - 4}{8}.$$

Da x und y ganze Zahlen sein sollen, so muss auch der in Bruchform erscheinende Ausdruck $\frac{3x-4}{8}$ eine ganze Zahl sein. Setzt man $\frac{3x-4}{8} = u_1$, so hat man

$$y = 2x - 6 + u_1 \ldots 1).$$

Löst man die Hilfsgleichung $\frac{3x-4}{8} = u_1$ nach x auf, so erhält man

$$x = \frac{8u_1 + 4}{3},$$

oder, wenn man aus diesem Quotienten die Ganzen ausscheidet,

$$x = 2u_1 + 1 + \frac{2u_1 + 1}{3}.$$

Da x und u_1 ganze Zahlen sein sollen, so muss auch $\frac{2u_1+1}{3}$ eine solche sein. Bezeichnet man sie durch u_2, so ist

$$x = 2u_1 + 1 + u_2 \ldots 2).$$

Die Gleichung $\frac{2u_1+1}{3} = u_2$ gibt nach u_1 aufgelöst

$$u_1 = \frac{3u_2 - 1}{2} = u_2 + \frac{u_2 - 1}{2},$$

und wenn $\frac{u_2-1}{2} = u_3$ gesetzt wird,

$$u_1 = u_2 + u_3 \ldots 3).$$

Aus $\frac{u_2-1}{2} = u_3$ folgt endlich die Gleichung

$$u_2 = 2u_3 + 1 \ldots 4),$$

in welcher die Unbekannte u_2 den Coefficienten 1 hat und für jeden beliebigen ganzen Wert von u_3 eine ganze Zahl wird.

Setzt man nun den Wert von u_2 nach und nach in die früheren Gleichungen 3), 2) und 1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_3 + 1 + u_3 = 3u_3 + 1, \\ x &= 6u_3 + 2 + 1 + 2u_3 + 1 = 8u_3 + 4, \\ y &= 16u_3 + 8 - 6 + 3u_3 + 1 = 19u_3 + 3. \end{aligned}$$

Die allgemeine Auflösung in ganzen Zahlen ist also gegeben durch die Formeln

$$x = 8u + 4, \qquad y = 19u + 3,$$

wo für u jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann.

für $u = \ldots$	-10	-1	0	1	10	...
ist $x = \ldots$	-76	-4	4	12	84	...
$y = \ldots$	-187	-16	3	22	193	...

2. Es sei die Gleichung $11x + 28y = 106$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

$$11x + 28y = 106 \text{ gibt } x = \frac{106 - 28y}{11} = 9 - 2y + \frac{7 - 6y}{11} = 9 - 2y + u_1,$$

$$\frac{7 - 6y}{11} = u_1 \quad \text{,,} \quad y = \frac{7 - 11u_1}{6} = 1 - u_1 + \frac{1 - 5u_1}{6} = 1 - u_1 + u_2,$$

$$\frac{1 - 5u_1}{6} = u_2 \quad \text{,,} \quad u_1 = \frac{1 - 6u_2}{5} = -u_2 + \frac{1 - u_2}{5} = -u_2 + u_3;$$

$$\frac{1 - u_2}{5} = u_3 \quad \text{,,} \quad u_2 = 1 - 5u_3.$$

Hieraus ergibt sich durch allmälige Substitution

$$\begin{aligned} u_1 &= -1 + 5u_3 + u_3 = -1 + 6u_3, \\ y &= 1 + 1 - 6u_3 + 1 - 5u_3 = 3 - 11u_3, \\ x &= 9 - 6 + 22u_3 - 1 + 6u_3 = 2 + 28u_3, \end{aligned}$$

wo u_3 jede beliebige ganze Zahl sein kann.

III. Mittelst der Kettenbrüche. (Methode von Lagrange.)

Um für die Gleichung $ax \pm by = \pm c$, wo a, b und c positive Zahlen sind, eine Auflösung in ganzen Zahlen zu erhalten, verwandelt man $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und berechnet den vorletzten Näherungswert desselben $= \frac{p}{q}$. Da $\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{bq}$, also $aq - bp = \pm 1$ (§. 124, 1), daher auch $acq - bcp = \pm c$ ist, so haben x und y die absoluten Werte cq und cp, und zwar mit denjenigen Vorzeichen, welche mit Rücksicht auf die Vorzeichen der vorgelegten Gleichung der identischen Gleichung $acq - bcp = \pm c$ genügen.

Beispiel. Es soll $9x + 29y = 15$ in ganzen Zahlen aufgelöst werden.

Man verwandle $\frac{9}{29}$ in einen Kettenbruch und bestimme den vorletzten Näherungsbruch $\frac{4}{13}$. Da $\frac{9}{29} - \frac{4}{13} = \frac{+1}{29.13}$, also $9.13 - 29.4 = +1$ und $9.13.15 - 29.4.15 = 15$ ist, so bilden $x = 13.15 = 195$, $y = -4.15 = -60$ eine Auflösung der Gleichung in ganzen Zahlen, und man erhält dann als allgemeine Lösung

$$x = 195 - 29u, \quad y = -60 + 9u,$$

wo die Hilfs-Unbekannte u eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet.

§. **229.** 1. Um ein System von zwei Gleichungen mit drei Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen, leitet man aus demselben durch Elimination eine Gleichung mit zwei Unbekannten ab und löst dieselbe nach einer der in §. 228 angeführten Methoden auf. Substituiert man dann die gefundenen allgemeinen Werte dieser beiden Unbekannten in eine der Gleichungen, welche auch die dritte Unbekannte enthalten, und löst dieselbe als eine zweite unbestimmte Gleichung auf, so ergeben sich zuletzt die zusammengehörigen Ausdrücke für alle drei Unbekannten.

2. Um eine unbestimmte Gleichung mit mehr als zwei Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen, wendet man die in §. 228 unter II. entwickelte Reductionsmethode an. Man kommt auch hier zuletzt immer auf eine Gleichung, in welcher die eine Unbekannte 1 zum Coefficienten hat, und erhält dann durch gehörige Substitution die allgemeinen Ausdrücke für die Unbekannten der gegebenen Gleichung, in denen jedoch meist mehrere Hilfs-Unbekannte erscheinen.

Auflösung in ganzen und positiven Zahlen.

§. **230.** Die Gleichung $ax + by = c$ hat eine begrenzte, die Gleichung $ax - by = c$ eine unbegrenzte Anzahl von Auflösungen in ganzen positiven Zahlen.

Beweis. Die Auflösungen in ganzen Zahlen für die Gleichung $ax + by = c$ enthalten die Formeln

$$x = \alpha - bu, \quad y = \beta + au.$$

Sollen nun x und y positiv sein, so muss

$$\alpha - bu > 0 \quad \text{und} \quad \beta + au > 0, \text{ also}$$

$$u < \frac{\alpha}{b} \quad \text{und} \quad u > -\frac{\beta}{a}$$

sein. Man erhält daher nur für solche ganze Werte von u, welche zwischen den Grenzen $\frac{\alpha}{b}$ und $-\frac{\beta}{a}$ liegen, ganze und positive Werte von x und y.

Der Gleichung $ax - by = c$ genügen die ganzen Werte

$$x = \alpha + bu, \quad y = \beta + au.$$

Damit x und y positiv seien, muss

$$\alpha + bu > 0 \quad \text{und} \quad \beta + au > 0, \text{ also}$$

$$u > -\frac{\alpha}{b} \quad \text{und} \quad u > -\frac{\beta}{a}$$

sein. Da es unendlich viele ganze Werte von u gibt, welche $> -\frac{\alpha}{b}$ und zugleich $> -\frac{\beta}{a}$ sind, so können auch x und y unendlich viele ganze und positive Werte haben.

§. **231.** Aufgabe. Eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Man stellt zuerst die allgemeine Lösung in ganzen Zahlen auf und beschränkt dann die noch willkürlichen Werte für die Hilfs-Unbekannte so, dass die Ausdrücke für die Unbekannten der gegebenen Gleichung positiv werden.

Beispiele. 1) Es soll die Gleichung $13x + 19y = 356$ in ganzen positiven Zahlen aufgelöst werden.

Zur Auflösung in ganzen Zahlen erhält man

$$x = 42 - 19u, \quad y = -10 + 13u.$$

Damit nun x und y positiv seien, muss

$$42 - 19u > 0, \quad \text{also} \quad u < \tfrac{42}{19}, \text{ und}$$
$$-10 + 13u > 0, \quad \text{also} \quad u > \tfrac{10}{13} \text{ sein.}$$

Für u können daher nur ganze Werte zwischen den Grenzen $\frac{10}{13}$ und $\frac{42}{19}$, somit nur die zwei Werte $u = 1$ und $u = 2$ gesetzt werden. Die Gleichung läßt also zwei Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen zu:

$$\text{für } u = 1 \text{ wird } x = 23,\ y = 3;$$
$$\text{„ } u = 2 \text{ „ } x = 4,\ y = 16.$$

2) Man löse die Gleichung $13x + 17y = 77$ in ganzen und positiven Zahlen auf.

Die Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst gibt

$$x = 2 - 17u, \quad y = 3 + 13u.$$

Damit $2 - 17u > 0$ und $3 + 13u > 0$ werde, muss $u < \frac{2}{17}$ und $u > -\frac{3}{13}$ sein. Da man für u nur ganze Zahlen, die Null mitgerechnet, setzen darf, so kann die einzige Substitution $u = 0$ für x und y ganze und positive Werte geben; man erhält dafür $x = 2$ und $y = 3$.

3) Die Gleichung $7x - 17y = 50$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Die ganzen Werte von x und y enthalten die Formeln

$$x = 17u + 12 \quad \text{und} \quad y = 7u + 2,$$

aus denen man sogleich erkennt, dass für u keine negativen Werte, dagegen 0 und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden dürfen. Die Aufgabe hat unendlich viele Auflösungen;

für $u =$	0	1	2	3	...
erhält man $x =$	12	29	46	63	...
$y =$	2	9	16	23	...

4) Der Bruch $\frac{230}{77}$ soll als Summe zweier Brüche dargestellt werden, deren Nenner 7 und 11 sind.

Heißen x und y die Zähler der gesuchten Brüche, so hat man

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77}, \text{ oder } 11x + 7y = 230.$$

Diese Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst gibt

$$x = 5 - 7u, \quad y = 25 + 11u.$$

Damit $5 - 7u > 0$ und $25 + 11u > 0$ werde, muss $u < \frac{5}{7}$ und $u > -\frac{25}{11}$ gesetzt werden. Diesen Bedingungen entsprechen für u nur die drei Werte 0, — 1, — 2. Man hat daher

$$\text{für } u = 0 \ \ldots\ x = 5, \ y = 25;$$
$$\text{„ } u = -1 \ldots\ x = 12, \ y = 14;$$
$$\text{„ } u = -2 \ldots\ x = 19, \ y = 3.$$

Die gesuchten Brüche sind demnach

$$\frac{5}{7} \text{ und } \frac{25}{11}, \text{ oder } \frac{12}{7} \text{ und } \frac{14}{11}, \text{ oder } \frac{19}{7} \text{ und } \frac{3}{11}.$$

III. Bestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

1. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. **232.** Die allgemeine Form einer geordneten Gleichung des zweiten Grades ist

$$px^2 + qx = r,$$

oder, wenn man beide Theile der Gleichung, durch p dividiert,

$$x^2 + \frac{q}{p}x = \frac{r}{p}.$$

Setzt man $\frac{q}{p} = a$ und $\frac{r}{p} = b$, so erhält man als diejenige allgemeine Form, von der in der Folge immer auszugehen sein wird:

$$x^2 + ax = b.$$

Reine quadratische Gleichungen.

§. **223.** Setzt man in der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + ax = b$ $a = 0$, so erhält man als die allgemeine Form einer geordneten reinen quadratischen Gleichung

$$x^2 = b.$$

Zieht man aus beiden Theilen die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$x = \pm \sqrt{b}.$$

Eine reine quadratische Gleichung hat also zwei entgegengesetzte Wurzeln; ist b positiv, so sind dieselben reell; ist b negativ, so sind sie imaginär.

Beispiele.

$x^2 = 9,$ $\quad x^2 = 15,$ $\quad x^2 = -7,$

$x = \pm \sqrt{9} = \pm 3.$ $\quad x = \pm \sqrt{15}.$ $\quad x = \pm \sqrt{-7}.$

Gemischte quadratische Gleichungen.

§. **234.** Die allgemeine Form einer geordneten gemischten quadratischen Gleichung ist

$$x^2 + ax = b.$$

Ergänzt man den ersten Theil zu dem vollständigen Quadrate eines Binoms, indem man zu beiden Theilen das Quadrat des halben Coefficienten von x, nämlich $\frac{a^2}{4}$, addiert, so erhält man

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b, \text{ oder}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b;$$

und wenn man aus beiden Theilen die Quadratwurzel auszieht,

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

folglich

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

In einer geordneten gemischten quadratischen Gleichung ist demnach die Unbekannte gleich dem halben Coefficienten der ersten Potenz der Unbekannten mit entgegengesetztem Vorzeichen, mehr oder weniger der Quadratwurzel aus der algebraischen Summe des Quadrates dieses halben Coefficienten und des von der Unbekannten freien Gliedes.

Hiernach hat auch jede gemischte quadratische Gleichung zwei Wurzeln. Dieselben sind

reell und ungleich, wenn der Ausdruck $\frac{a^2}{4} + b$ positiv,

reell und gleich, wenn dieser Ausdruck Null,

complex und conjugiert, wenn derselbe negativ ist.

Beispiele.

1) $x^2 - 6x = 16.$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm \sqrt{25} = 3 \pm 5;$$

daher entweder $x = 3 + 5 = 8$, oder $x = 3 - 5 = -2$.

2) $x^2 + 7x + 12 = 0$; geordnet $x^2 + 7x = -12$.

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}}$$
$$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2};$$

$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$, oder

$x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{2} = -4$.

3) $x^2 - 2x + 2 = 0$; geordnet $x^2 - 2x = -2$.

$x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1}$.

Zusatz. Sind in der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + ax = b$ die bekannten Zahlen a und b irrational, z. B. $a = \sqrt{A}$ und $b = \sqrt{B}$, so dass die Gleichung die Form

$$x^2 + \sqrt{A} \, . \, x = \sqrt{B}$$

annimmt, so erhält man

$$x = -\frac{\sqrt{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{A}{4} + \sqrt{B}.}$$

Bei allen Gleichungen dieser Art kommt man auf einen Ausdruck von der Form $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$. Wie ein solcher Ausdruck bestimmt, d. i. wie aus einem irrationalen Binom die Quadratwurzel ausgezogen wird, ist in §. 175 gezeigt worden.

Beziehungen zwischen den bekannten Zahlen einer quadratischen Gleichung und ihren Wurzeln.

§. **235.** Die allgemeine Form einer auf Null reducierten quadratischen Gleichung ist

$$x^2 + Ax + B = 0.$$

Man nennt in diesem Falle den ersten Theil $x^2 + Ax + B$ das Gleichungstrinom.

Ist m eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$, so heißt $x - m$ ein Wurzelfactor derselben.

1. Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist durch ihren Wurzelfactor theilbar.

Es ist

$$\begin{array}{l}
(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m) \\
\underline{\;\; x^2 - mx \qquad\qquad} \\
\;\; - \quad + \\
\qquad (A + m)\,x + B \\
\qquad \underline{(A + m)\,x - Am - m^2} \\
\qquad\; - \qquad\qquad + \quad + \\
\qquad \text{Rest} = m^2 + Am + B.
\end{array}$$

Da m eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist, also für x in das Trinom $x^2 + Ax + B$ substituiert dieses auf Null reduciert, so ist der frühere Rest $m^2 + Am + B = 0$, und daher

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m).$$

2. Jede quadratische Gleichung hat zwei, aber auch nur zwei Wurzeln.

Setzt man in dem obigen Ausdrucke

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m)$$

$A + m = - n$, so wird

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x - n, \text{ folglich}$$
$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n).$$

Da nun der Ausdruck $x^2 + Ax + B$ nicht nur für $x = m$, sondern auch für $x = n$ in Null übergeht, so ist nicht nur m, sondern auch n eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$.

Hätte $x^2 + Ax + B = 0$ noch eine dritte von m und n verschiedene Wurzel p, so müsste $(p - m)(p - n) = 0$ sein, was nicht möglich ist, da in diesem Producte kein Factor Null ist, ein Product aber, dessen Factoren von Null verschieden sind, nicht gleich Null sein kann.

3. Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist gleich dem Producte ihrer Wurzelfactoren.

4. Der Coefficient des zweiten Gliedes ist gleich der Summe, und das dritte, von der Unbekannten freie Glied dem Producte aus den entgegengesetzt genommenen Wurzeln.

Diese zwei Sätze folgen aus 2., da

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + (-m.-n),$$
$$\text{also } A = -m - n \text{ und } B = -m.-n \text{ ist.}$$

Zusätze. a) Mit Beachtung des Satzes 4. lässt sich aus den Vorzeichen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung auch auf die Vorzeichen ihrer Glieder und umgekehrt aus den Vorzeichen der letzteren auf jene der ersteren schließen.

b) Hat man eine quadratische Gleichung von der Form $(ax - b)(cx - d) = 0$, so kann man statt derselben zwei Gleichungen des ersten Grades $ax - b = 0$ und $cx - d = 0$ auflösen; die Wurzeln dieser zwei Gleichungen genügen zugleich der Gleichung $(ax - b)(cx - d) = 0$.

§. **236**. Aufgaben. 1. Eine quadratische Gleichung zu bilden, welche zwei gegebene Zahlen zu Wurzeln hat.

Seien z. B. 3 und -4 die gegebenen Zahlen, so nehme man diese mit entgegengesetzten Vorzeichen, nämlich -3 und 4, und bilde davon

die Summe $= -3 + 4 = + 1$, und

das Product $= -3 + 4 = - 12$;

dann ist $x^2 + x - 12 = 0$ die Gleichung, welche 3 und -4 zu Wurzeln hat.

2. **Einen Ausdruck von der Form $x^2 + ax + b$ in Factoren zu zerlegen.**

Man setze $x^2 + ax + b = 0$, welche Gleichung

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

zu Wurzeln hat; dann ist nach §. 235, 3

$$x^2 + ax + b = \left[x + \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right]\left[x + \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right].$$

Ist z. B. $x^2 - 3x - 28$ in zwei Factoren zu zerlegen, so setze man $x^2 - 3x - 28 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x_1 = 7$, $x_2 = -4$, daher die Wurzelfactoren $x - 7$ und $x + 4$; somit

$$x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4).$$

Zusatz. Soll der Ausdruck $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ in Factoren zerlegt werden, so bringt man ihn auf die Form $\alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$, verwandelt den Ausdruck in den Klammern mittelst der Wurzeln der Gleichung $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ in ein Product zweier Factoren und multipliciert dieses noch mit α. Z. B.:

$$9x^2 - 3x - 2 = 9\left(x^2 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right) = 9\left(x + \tfrac{1}{3}\right)\left(x - \tfrac{2}{3}\right).$$

2. Bestimmte quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. **237**. Enthält eine quadratische Gleichung mehrere Unbekannte, so lassen sich diese, wie bei den Gleichungen des ersten Grades, nur dann bestimmt angeben, wenn so viele von einander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen vorhanden sind, als Unbekannte bestimmt werden sollen. Die Auflösung geschieht auch hier nach den in §. 220 angegebenen Eliminations-Methoden, durch welche man schließlich auf eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten kommt. Die Endgleichung übersteigt jedoch im allgemeinen den zweiten Grad, sobald von den gegebenen Gleichungen mehr als eine vom zweiten Grad ist, und kann dann nach den hier vorgetragenen Lehren nicht gelöst werden.

Beispiele.

1) $\left.\begin{array}{r} x + y = a \\ xy = b \end{array}\right\}$ nach der Comparationsmethode.

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$\left.\begin{array}{r} x = a - y \\ x = \frac{b}{y} \end{array}\right\}$ daher $a - y = \frac{b}{y}$, oder geordnet $y^2 - ay = -b$, woraus sich

$y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, und somit $x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ ergibt.

Man könnte hier mit Rücksicht auf §. 235, 4. auch so schließen:
Wenn zwischen zwei Größen x und y die beiden Gleichungen $x + y = a$ und $xy = b$ gegeben sind, so sind x und y die Wurzeln der Gleichung $x^2 - ax + b = 0$.

2) $\left.\begin{array}{r} x - y = 7 \\ x^2 + 2y^2 = 118 \end{array}\right\}$ nach der Substitutionsmethode.

Wird der Ausdruck $x = y + 7$, welcher aus der ersten Gleichung folgt, in die zweite substituiert, so hat man

$$(y + 7)^2 + 2y^2 = 118, \text{ oder geordnet } y^2 + \frac{14y}{3} = 23,$$

welcher Gleichung die Wurzeln $y = 3$ und $y = -\frac{23}{3}$ entsprechen.

Werden diese Werte von y in den Ausdruck $x = y + 7$ substituiert, so erhält man $x = 10$, oder $x = -\frac{2}{3}$.

3) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 89 \\ x^2 - y^2 = 39 \end{array}\right\}$ nach der Methode der gleichen Coefficienten.

Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen erhält man

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2 = 128 \\ 2y^2 = 50 \end{array}\right\}, \text{ daher } \left.\begin{array}{r} x^2 = 64 \\ y^2 = 25 \end{array}\right\} \text{ und } \begin{array}{l} x = \pm 8, \\ y = \pm 5. \end{array}$$

§. **238.** In vielen Fällen führen besondere Kunstgriffe einfacher zum Ziel, als die gewöhnlichen Eliminations-Methoden. Dabei sucht man aus den gegebenen Gleichungen zunächst die Summe, Differenz, das Product oder den Quotienten der Unbekannten, und entwickelt dann erst aus diesen Größen die Werte der Unbekannten selbst.

Beispiele.

1) $x^2 + y^2 = a.$
$\quad xy = b.$

Multipliciert man die zweite Gleichung mit 2, und verbindet die neue Gleichung mit der ersten durch Addition und durch Subtraction, so erhält man

$$(x + y)^2 = a + 2b, \text{ daher } x + y = \pm\sqrt{a + 2b},$$
$$(x - y)^2 = a - 2b; \qquad x - y = \pm\sqrt{a - 2b};$$
$$\text{folglich } x = \pm \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}\right),$$
$$y = \pm \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}\right).$$

2) $x^2 + xy = ay,$
$\quad y^2 + xy = bx.$

Bringt man die Gleichungen auf die Form

$$\frac{x}{y}(x + y) = a \text{ und } \frac{y}{x}(x + y) = b,$$

so erhält man durch Multiplication und Division

$$(x + y)^2 = ab \text{ und } \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{a}{b}, \text{ daher}$$

$$x + y = \pm\sqrt{ab} \text{ und } \frac{x}{y} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ woraus sich}$$

$$x = \frac{-ab \pm a\sqrt{ab}}{a-b} \text{ und } y = \frac{ab \mp b\sqrt{ab}}{a-b} \text{ ergibt.}$$

3) $xy = a,\ xz = b,\ yz = c.$

Multipliciert man die ersten zwei Gleichungen mit einander und dividiert das Product durch die dritte, so erhält man

$$x^2 = \frac{ab}{c}, \text{ daher } x = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Auf ähnliche Art findet man

$$y = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

4) $xy + xz = a,\ xy + yz = b,\ xz + yz = c.$

Setzt man $xy = x',\ xz = y',\ yz = z'$, so hat man

$$x' + y' = a,\ x' + z' = b,\ y' + z' = c.$$

Daraus folgt

$$x' = xy = \frac{a+b-c}{2};\ y' = xz = \frac{a+c-b}{2};\ z' = yz = \frac{b+c-a}{2};$$

dann erhält man, wie in 3),

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2(b+c-a)}},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{2(a+c-b)}},$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}.$$

IV. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

§. **239.** Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten ist

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Dabei sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden: entweder kommt die eine Unbekannte, z. B. y, nur in der ersten Potenz, oder es kommen beide Unbekannte in der zweiten Potenz vor. Im ersten Falle erhält man für y einen von x abhängigen Ausdruck in rationaler, im zweiten in irrationaler Form. In beiden Fällen genügen der Gleichung unendlich viele Werte von x und y; die Zahl der Auflösungen wird jedoch gewöhnlich durch die Bedingung beschränkt, dass für quadratische Gleichungen, in denen die eine Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt, x und y ganze positive, für Gleichungen dagegen, in denen x und y in der zweiten Potenz vorkommen, dieselben mindestens rationale Zahlen sein sollen.

Die Schwierigkeiten bei der Lösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades sind ungleich größer und mannigfaltiger, als bei den Gleichungen des ersten Grades. Hier sollen nur die wichtigeren hieher gehörigen Aufgaben untersucht werden.

§. **240.** Aufgabe. Eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten, von denen die eine nur in der ersten Potenz vorkommt, in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Kommt y nur in der ersten Potenz vor, so hat die quadratische Gleichung zwischen x und y die Form

$$Ax^2 + Bxy + Cx + Dy + E = 0,$$

wo A, B, C, D und E als ganze Zahlen, und überdies die Coefficienten der Unbekannten als relative Primzahlen (§. 226) anzunehmen seien. Löst man die Gleichung nach y auf, so folgt

$$y = \frac{-Ax^2 - Cx - E}{Bx + D},$$

oder, wenn man wirklich dividiert, bis der Rest kein x mehr enthält, ein Ausdruck von der Form

$$y = mx + n + \frac{p}{Bx + D}.$$

Sind m, n, p Brüche, so erhält man durch Multiplication mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner eine Gleichung von der Form

$$ay = bx + c + \frac{d}{Bx + D}.$$

Damit nun x und y ganze positive Zahlen seien, muss zunächst d durch $Bx + D$ theilbar sein; man zerlegt daher d in alle seine Factoren, nimmt für x nur solche ganze positive Werte, für welche $Bx + D$ ein Factor von d ist, und wählt dann von diesen Werten selbst nur diejenigen, für welche auch y positiv wird.

Beispiel. Es sei $2x^2 + 3xy - 4x - 2y - 20 = 0$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen. Man erhält

$$y = \frac{-2x^2 + 4x + 20}{3x - 2} = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{9} + \frac{\frac{196}{9}}{3x - 2};$$

daher
$$9y = -6x + 8 + \frac{196}{3x - 2}.$$

Nun sucht man alle Factoren von 196 (§. 87, Zusatz) und setzt

$$3x - 2 = 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 28,\ 49,\ 98,\ 196, \text{ daher}$$

$$x = 1,\ \tfrac{4}{3},\ 2,\ 3,\ 10,\ 17,\ \tfrac{100}{3},\ 66.$$

In $y = \frac{-2x^2 + 4x + 20}{3x - 2}$ ist der Nenner für jeden ganzen positiven Wert von x positiv; damit auch der Zähler positiv werde, darf man für x nur solche ganze positive Werte setzen, welche kleiner als 5 sind. Von den obigen

Werten von x sind demnach nur 1, 2, 3 brauchbar, und man findet drei Auflösungen in ganzen positiven Zahlen:

$$x = 1, 2, 3;$$
$$y = 22, 5, 2.$$

§. **241.** Aufgabe. Eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten, von denen eine nur in der zweiten Potenz vorkommt, in rationalen Zahlen aufzulösen.

Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Die Auflösung soll hier nur für einige einfachere Fälle gezeigt werden.

1. Es sei $a = m^2$ ein vollständiges Quadrat. Man setze

$$y = \sqrt{m^2x^2 + bx + c} = mx + p, \text{ also}$$
$$m^2x^2 + bx + c = m^2x^2 + 2mpx + p^2,$$

woraus
$$x = \frac{p^2 - c}{b - 2mp}$$

folgt, wo p eine beliebige rationale Zahl bedeutet. Hiernach wird

$$y = mx + p = \frac{mp^2 - mc}{b - 2mp} + p = \frac{bp - mp^2 - mc}{b - 2mp}, \text{ also rational.}$$

Ist z. B. $y = \sqrt{9x^2 + 5x + 3}$, so erhält man $x = \frac{p^2 - 3}{5 - 6p}$ und $y = \frac{5p - 3p^2 - 9}{5 - 6p}$, wo man für p jede beliebige rationale Zahl, $p = \frac{5}{6}$ ausgenommen, setzen kann. Für $p = 1$ wird $x = 2$ und $y = 7$.

2. Es sei $c = n^2$ ein vollständiges Quadrat. Man setze

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + n^2} = px + n, \text{ also}$$
$$ax^2 + bx + n^2 = p^2x^2 + 2npx + n^2,$$

woraus
$$x = \frac{2np - b}{a - p^2}, \text{ und } y = px + n = \frac{np^2 - bp + an}{a - p^2}$$

folgt, wo p irgend eine rationale Zahl bedeutet.

3. Es lasse sich der Ausdruck $ax^2 + bx + c$ in zwei rationale Factoren zerlegen, was nach §. 236, 2 erfüllt wird, wenn die Gleichung $ax + bx + c = 0$ rationale Wurzeln hat.

Sind $qx + r$ und $sx + t$ die beiden rationalen Factoren, so setze man

$$y = \sqrt{(qx + r)\ (sx + t)} = p\ (sx + t), \text{ also}$$
$$(qx + r)\ (sx + t) = p^2\ (sx + t)^2.$$

woraus
$$x = \frac{p^2t - r}{q - p^2s} \text{ und } y = p\,(sx + t) = \frac{p\,(qt - rs)}{q - p^2s}$$

folgt, wo p eine beliebige rationale Zahl bedeutet.

4. Wenn sich $ax^2 + bx + c$ auf die Form $(mx + n)^2 + (qx + r)(sx + t)$ bringen läßt, so setze man

$$y = \sqrt{(mx + n)^2 + (qx + r)\ (sx + t)} = mx + n + p\ (sx + t), \text{ also}$$
$$(mx + n)^2 + (qx + r)\ (sx + t) = (mx + n)^2 + 2p\ (mx + n)\ (sx + t) + p^2\ (sx + t)^2,$$

woraus

$$x = \frac{2np + p^2t - r}{q - 2mp - p^2s}, \quad y = \frac{p^2(ns - mt) + p(qt - rs) + nq - mr}{q - 2mp - p^2s}$$

folgt.

Z. B. $y = \sqrt{2x^2 + 4x + 3}$.

$$2x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 1$$
$$= (x + 2)^2 + (x + 1)(x - 1).$$

Man erhält

$$x = \frac{4p - p^2 - 1}{1 - 2p - p^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{3p^2 - 2p + 1}{1 - 2p - p^2}.$$

Für $p = \frac{1}{3}$ wird $x = 1$ und $y = 3$.

§. **242. Aufgabe.** Eine vollständige quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten in rationalen Zahlen aufzulösen.

Wird aus der allgemeinen Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y entwickelt, so erhält man

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \sqrt{\frac{(Bx + E)^2}{4C^2} - \frac{Ax^2 + Dx + F}{C}},$$

oder

$$y = \frac{1}{2C}\left\{-(Bx + E) \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + (2BE - 4CD)x + (E^2 - 4CF)}\right\},$$

und wenn

$$B^2 - 4AC = a, \; 2BE - 4CD = b, \; E^2 - 4CF = c$$

gesetzt wird,

$$y = \frac{1}{2C}\left\{-(Bx + E \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}\right\}.$$

Die Lösung der vorgelegten Gleichung reduciert sich also auf die vorhergehende Aufgabe (§. 241), alle rationalen Werte von x zu finden, für welche der Ausdruck $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ rational wird.

V. Höhere Gleichungen, welche sich auf quadratische zurückführen lassen.

§. **243.** Höhere Gleichungen, welche nur zwei Potenzen der Unbekannten von solcher Beschaffenheit enthalten, dass der eine Potenzexponent das Doppelte des andern ist, lassen sich immer auf quadratische zurückführen; man darf nur die niedrigere Potenz durch eine neue Unbekannte ausdrücken.

1. Gleichungen von der Form $x^{2m} + x^m = b$.

Setzt man hier $x^m = y$, folglich $x^{2m} = y^2$, so hat man

$$y^2 + ay = b,$$

und daher

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Wird nun statt y wieder der Wert x^m restituiert, so ist

$$x^m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

somit, wenn man aus beiden Theilen die mte Wurzel auszieht,

$$x = \sqrt[m]{\left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)}.$$

Ist m ungerade, so gibt jeder reelle Wert von y oder x^m auch einen reellen Wert von x. Ist dagegen m gerade, so geben nur die positiven Werte von y reelle Werte von x, und zwar jeder derselben zwei gleiche und entgegengesetzte; die negativen Werte von y geben imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Z. B. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Setzt man $x^2 = y$, so hat man $y^2 - 13y + 36 = 0$, welche Gleichung

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2},$$

also $y = 9$ oder $y = 4$ gibt. Man hat daher

aus $x^2 = 9$ die Werte $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$,

„ $x^2 = 4$ „ $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

2. Gleichungen von der Form $\sqrt[m]{x} + a\sqrt[2m]{x} = b$.

Setzt man $\sqrt[2m]{x} = y$, daher $\sqrt[m]{x} = y^2$, so hat man

$$y^2 + ay = b,$$

und daraus

$$y = \sqrt[2m]{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

daher, wenn man beide Theile zur 2mten Potenz erhebt,

$$x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{2m}.$$

Z. B. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} = 2$.

Setzt man $\sqrt[6]{x} = y$, so hat man $y^2 - y = 2$, daher

$$y = \sqrt[6]{x} = 2 \text{ oder } y = \sqrt[6]{x} = -1,$$

und somit

$$x = 64 \text{ oder } x = 1.$$

3. Reciproke Gleichungen.

§. **244**. Eine auf Null reducierte Gleichung heißt reciprok, wenn die Coefficienten ihrer vom Anfange und vom Ende gleich weit abstehenden Glieder entweder alle sowohl dem absoluten Werte als auch dem Vorzeichen nach gleich sind, oder alle bei gleichem absoluten Werte entgegengesetzte Vorzeichen haben. Im letzteren Falle muss, wenn die Gleichung von geradem Grade ist, das mittlere Glied fehlen.

Die allgemeine Form der reciproken Gleichungen ist

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots \pm a_2 x^2 \pm a_1 x \pm 1 = 0.$$

Eine reciproke Gleichung hat die Eigenschaft, daß der reciproke Wert jeder ihrer Wurzeln ebenfalls Wurzel der Gleichung ist.

Hat z. B. die reciproke Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

die Wurzel w, ist also

$$w^4 + aw^3 + bw^2 + aw + 1 = 0,$$

so ist auch $\frac{1}{w}$ eine Wurzel der Gleichung.

Denn durch die Substitution $x = \frac{1}{w}$ erhält der erste Theil der gegebenen Gleichung den Wert

$$\frac{1}{w^4} + a \cdot \frac{1}{w^3} + b \cdot \frac{1}{w^2} + a \cdot \frac{1}{w} + 1,$$

oder

$$\frac{1}{w^4}(1 + aw + bw^2 + aw^3 + w^4),$$

welcher Wert ebenfalls $= 0$ ist.

Jede reciproke Gleichung, welche nicht den fünften Grad übersteigt, läßt sich auf quadratische Gleichungen zurückführen.

a) Das Polynom einer reciproken Gleichung des dritten Grades

$$x^3 \pm ax^2 \pm ax \pm 1 = 0$$

läßt sich in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine bezüglich $x \pm 1$ und der andere das Trinom einer quadratischen Gleichung ist.

Vereinigt man z. B. in der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$$

die Glieder, welche dieselben Coefficienten haben, so erhält man

$$(x^3 + 1) + ax(x + 1) = 0,$$

oder, da $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ ist,

$$(x + 1)(x^2 - x + 1 + ax) = 0.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn man entweder $x + 1 = 0$ oder $x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$ setzt, wodurch man drei Wurzelwerte erhält.

Auf gleiche Weise geschieht die Auflösung der Gleichung

$$x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0.$$

b) Es sei die reciproke Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

in welcher dieselben Coefficienten gleiche Vorzeichen haben.

Dividiert man durch x^2, so erhält man

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

oder nach Vereinigung der Glieder mit denselben Coefficienten

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Setzt man nun $x + \frac{1}{x} = y$, so ist

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x_2} = y^2, \text{ also } x^2 + \frac{1}{x_2} = y^2 - 2,$$

folglich durch Substitution in der obigen Gleichung

$$y^2 - 2 + ay + b = 0,$$

und

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + 2}.$$

Wird jeder dieser Werte in die Gleichung $x + \frac{1}{x} = y$ eingesetzt, so erhält man, da diese Gleichung in Beziehung auf x vom zweiten Grade ist, für jeden Wert von y zwei Werte für x, also im ganzen vier Wurzeln für die vorgelegte Gleichung.

c) Das Polynom der reciproken Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 - ax - 1 = 0,$$

in welchem dieselben Coefficienten entgegengesetzte Vorzeichen haben, läßt sich in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine $x^2 - 1$, der andere das Trinom einer quadratischen Gleichung ist.

Die obige Gleichung läßt sich zunächst so darstellen:

$$(x^4 - 1) + ax\,(x^2 - 1) = 0.$$

Nun ist $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$; man hat also

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1 + ax) = 0.$$

Setzt man $x^2 - 1 = 0$, so erhält man $x = \pm 1$; setzt man $x^2 + 1 + ax = 0$, so ergibt sich $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

Die Gleichung hat also vier Wurzeln.

d) Jede reciproke Gleichung des fünften Grades

$$x^5 + ax^4 + bx^3 \pm bx^2 \pm ax \pm 1 = 0$$

kann auf zwei Gleichungen zurückgeführt werden, von denen die eine $x \pm 1 = 0$, und die andere eine reciproke Gleichung des vierten Grades ist, in welcher dieselben Coefficienten gleiche Vorzeichen haben. Die erste gibt bezüglich $x = -1$ oder $x = +1$, die zweite wird nach b) aufgelöst und gibt vier Wurzeln.

VI. Exponentialgleichungen.

§. **245.** Eine Gleichung, in welcher die Unbekannte nur im Exponenten enthalten ist, heißt eine Exponentialgleichung. Einfachere Gleichungen dieser Art lassen sich mit Hilfe der Logarithmen auf algebraische zurückführen und dann wie diese auflösen.

1. Gleichungen von der Form $a^x = b$.

Da gleichen Größen auch gleiche Logarithmen entsprechen, so folgt aus $a^x = b$ auch $\log(a^x) = \log b$, oder $x \log a = \log b$; daher ist

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Um z. B. die Gleichung $5^x = 37$ aufzulösen, hat man $x \log 5 = \log 37$, und somit

$$x = \frac{\log 37}{\log 5} = \frac{1 \cdot 56820}{0 \cdot 69897} = 2 \cdot 2436.$$

2. Gleichungen von der Form $\sqrt[x]{a} = b$.

Nimmt man hier beiderseits die Logarithmen, so erhält man $\frac{1}{x} . \log a = \log b$, daher $\log a = x \log b$, und

$$x = \frac{\log a}{\log b}.$$

So gibt die Gleichung $\sqrt[x]{2} = 10$ den Wert $x = \frac{\log 2}{\log 10} = 0 \cdot 30103$.

3. Gleichungen von der Form $a^{2x} + pa^x = q$.

Setzt man $a^x = y$, so erhält man $y^2 + py = q$, also

$$y = a^x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

und daher

$$x = \frac{\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}{\log a}.$$

Z. B. $4^{2x} + 5.4^x = 36$ gibt für $4^x = y$, $y^2 + 5y = 36$, woraus $y = 4^x = 4$ und $y = 4^x = -9$ folgt; somit

$$x = \frac{\log 4}{\log 4} = 1.$$

Der andere Wert $x = \frac{\log(-9)}{\log 4}$ gibt keine reelle Auflösung.

4. Gleichungen von der Form $\sqrt[x]{a} + p\sqrt[2x]{a} = q$.

Für $\sqrt[2x]{a} = y$ wird $y^2 + py = q$, folglich

$$y = \sqrt[2x]{a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

und daher

$$x = \frac{\log a}{2\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}.$$

Z. B. Aus $5\sqrt[x]{64} - 6\sqrt[2x]{64} = 8$ erhält man für $\sqrt[2x]{64} = y$, $5y^2 - 6y = 8$, daher $y = 2$ oder $= -\frac{4}{5}$, und

$$x = \frac{\log 64}{2\log 2} = \frac{6\log 2}{2\log 2} = 3.$$

Der zweite Wert von x ist nicht reell.

Fünfter Abschnitt.

Progressionen.

---

§. **246.** Eine Folge von Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, heißt eine Reihe, auch Progression. Jede dieser Zahlen wird ein Glied der Reihe genannt. Die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Stelle in der Reihe ein Glied einnimmt, heißt der Zeiger dieses Gliedes.

Eine Reihe heißt steigend oder fallend, je nachdem die aufeinander folgenden Glieder immer größer oder immer kleiner werden.

Eine Reihe heißt ferner eine endliche oder unendliche, je nachdem die Anzahl der Glieder begrenzt oder unbegrenzt ist.

Eine Reihe interpolieren heißt, zwischen je zwei aufeinander folgende Glieder eine bestimmte Anzahl von Gliedern einschalten, welche mit den Gliedern der gegebenen Reihe wieder eine Reihe derselben Art bilden.

I. Arithmetische Progressionen.

§. **247.** Eine arithmetische Progression ist eine Reihe, in welcher die Differenz je zweier aufeinander folgender Glieder (das vorhergehende als Subtrahend genommen) dieselbe Zahl ist. Diese constante Differenz heißt die Differenz der Progression. So sind

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22, \ldots$$

und $50,\ 47,\ 44,\ 41,\ 38,\ 35,\ 32,\ 29, \ldots$

arithmetische Progressionen; in der ersten ist 3, in der zweiten -3 die Differenz.

1. In einer arithmetischen Progression ist jedes Glied gleich der Summe aus dem ersten Gliede und dem Producte der Differenz mit dem um 1 verminderten Zeiger des Gliedes.

Beweis. Bezeichnet allgemein a_n das nte Glied und d die Differenz der Progression, so ist

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_1 + 3d, \text{ u. s. w.}$$

Der Satz ist also für die Anfangsglieder richtig. Gilt aber derselbe für irgend ein Glied a_n, so dass $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$ ist, so muss er auch für das nächstfolgende Glied a_{n+1} giltig sein; denn

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n - 1)\,d + d = a_1 + nd.$$

Hieraus folgt, dass der obige Satz allgemein giltig ist.

Die Formel $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$ heißt das **allgemeine Glied** der Progression, weil daraus, wenn man für n nach und nach 1, 2, 3, 4,... setzt, alle Glieder der Progression abgeleitet werden können.

2. **In einer arithmetischen Progression ist die Summe irgend einer Anzahl von Anfangsgliedern gleich dem Producte aus der halben Anzahl dieser Glieder und der Summe des ersten und letzten Gliedes.**

Beweis. Ist a_n das nte Glied der Reihe, so ist $a_n - d$ das nächstvoranstehende, $a_n - 2d$ das diesem vorangehende Glied, u. s. f.

Drückt man nun die Summe der ersten n Glieder durch s_n aus, so ist

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n.$$

Schreibt man die Glieder in umgekehrter Ordnung, so ist auch

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1.$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke erhält man, da je zwei unter einander stehende Glieder $a_1 + a_n$ zur Summe geben,

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Hier kommt $a_1 + a_n$ so oft als Summand vor, als Glieder angenommen werden, also nmal; daher

$$2s_n = n\,(a_1 + a_n),$$

und

$$s_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n).$$

Diese Formel heißt das **Summenglied** der arithmetischen Progression.

Beispiel. Man suche das allgemeine und das Summenglied der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11...

Da $a_1 = 1$, $d = 2$ ist, so hat man

$$a_n = 1 + (n - 1) \,.\, 2 = 2n - 1,$$

$$s_n = \frac{n}{2}\,(1 + 2n - 1) = n^2.$$

So ist z. B. $a_{15} = 2.15 - 1 = 29$, und $s_{15} = 15^2 = 225$.

§. **248.** Die beiden von einander unabhängigen Gleichungen

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d \quad \text{und} \quad s_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

enthalten fünf Größen a_1, d, n, a_n, s_n; es kann also aus je dreien derselben durch Elimination jede der beiden anderen berechnet werden. Dadurch erhält man 20 verschiedene Aufgaben.

Sind z. B. d, n und a_n gegeben und a_1 oder s_n zu suchen, so findet man aus der ersten Gleichung

$$a_1 = a_n - (n-1)\,d,$$

und dann aus der zweiten

$$s_n = \frac{n}{2}\{a_n - (n-1)\,d + a_n\} = \frac{n}{2}\{2\,a_n - (n-1)\,d\}.$$

§. **249.** Eine arithmetische Progression zu interpolieren.

Sind zwischen die Glieder a_k und a_{k+1} einer arithmetischen Progression, deren Differenz d ist, r Glieder einzuschalten, die mit a_k und a_{k+1} wieder eine arithmetische Progression bilden, so ist a_k das erste und a_{k+1} das $(r+2)$te Glied der neuen Progression, daher, wenn die Differenz derselben mit d_1 bezeichnet wird, $a_{k+1} = a_k + (r+1)\,d_1$; es ist aber auch $a_{k+1} = a_k + d$, folglich $(r+1)\,d_1 = d$, und

$$d_1 = \frac{d}{r+1}.$$

Die interpol'̈"te Reihe ist also

$$a_k,\ a_k + \frac{d}{r+1},\ a_k + \frac{2d}{r+1}, \ldots a_k + \frac{rd}{r+1},\ a_{k+1}.$$

Z. B. Man schalte in der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 ...... zwischen die Glieder 2 und 3 nach dem Gesetze der arithmetischen Progressionen 7 Glieder ein.

Hier ist $d = 1, r = 7$, daher $d_1 = \frac{1}{8}$; die interpolierte Progression ist also

$$\mathbf{2}\ \ 2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{2}{8},\ 2\tfrac{3}{8}\ 2\tfrac{4}{8},\ 2\tfrac{5}{8},\ 2\tfrac{6}{8},\ 2\tfrac{7}{8},\ \mathbf{3}.$$

II. Geometrische Progressionen.

§. **250.** Eine geometrische Progression ist eine Reihe, in welcher der Quotient je zweier aufeinander folgender Glieder (das vorhergehende als Divisor genommen) dieselbe Zahl ist. Dieser constante Quotient heißt der Quotient der Progression. So sind

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ \ldots$$

$$1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27},\ \tfrac{1}{81},\ \tfrac{1}{243},\ \tfrac{1}{729},\ \ldots$$

geometrische Progressionen; in der ersten ist 3, in der zweiten $\frac{1}{3}$ der Quotient.

1. In einer geometrischen Progression ist jedes Glied gleich dem Producte aus dem ersten Gliede und der sovielten Potenz des Quotienten, als der um 1 verminderte Zeiger des Gliedes anzeigt.

Beweis. Bezeichnet a_n das nte Glied und q den Quotienten der Progression, so ist

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1\, q,$$
$$a_3 = a_1\, q^2,$$
$$a_4 = a_1\, q^3, \text{ u. s. w.}$$

Der Satz ist also für die Anfangsglieder richtig. Gilt er aber für irgend ein Gled a_n, so dass $a_n = a_1\, q^{n-1}$ ist, so muss er auch für das nächstfolgende Glied a_{n+1} gelten; denn

$$a_{n+1} = a_n . q = a_1\, q^{n-1} . q = a_1\, q^n.$$

Hieraus folgt, dass der obige Satz allgemein giltig und dass daher

$$a_n = a_1\, q^{n-1}$$

das allgemeine Glied einer geometrischen Progression ist.

2. In einer geometrischen Progression ist die Summe von n Anfangsgliedern gleich dem Producte aus dem ersten Gliede und der um 1 verminderten nten Potenz des Quotienten dividiert durch den um 1 verminderten Quotienten.

Beweis. Bezeichnet s_n die Summe von n Anfangsgliedern, so hat man

$$s_n = a_1 + a_1\, q + a_1\, q^2 + \ldots + a_1\, q^{n-2} + a_1\, q^{n-1}.$$

Multipliciert man beide Theile dieser Gleichung mit q, so erhält man

$$q s^n = a_1\, q + a_1\, q^2 + a_1\, q^3 \ldots + a_1\, q^{n-1} + a_1\, q^n.$$

Wird nun von dieser Gleichung die frühere subtrahiert, so folgt

$$q s_n - s_n = a_1\, q^n - a_1,$$

daher

$$s_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Diese Formel ist das Summenglied für die geometrische Progression.

Beispiel. Man bestimme das allgemeine und das Summenglied der Progression 1, 3, 9, 27, 81, 243, ...

Hier ist $a_1 = 1$ und $q = 3$, daher

$$a_n = 1 . 3^{n-1} = 3^{n-1},\ s_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

So ist z. B. $a_{10} = 3^9 = 19683$, und $s_{10} = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524$.

Zusatz. Ist $q < 1$, so nähert sich, wenn n ins Unendliche zunimmt, q^n ohne Ende der Null, die Summe selbst also dem Grenzwerte

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Die Summe der Glieder der fallenden geometrischen Progression kann zwar, so viele Glieder man auch nehmen mag, diesen Wert nie erreichen, wohl aber ihm so nahe kommen, dass die Differenz kleiner wird, als jede noch so kleine constante Zahl. Man nennt den Ausdruck $s = \frac{a_1}{1-q}$ die **Summe** der unendlichen fallenden Progression.

Z. B. Für die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$, in welcher $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$ ist, hat man $s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$; d. h. je mehrere Glieder der Reihe man addiert, desto mehr nähert sich die Summe der Zahl 2, ohne jedoch je dieselbe zu erreichen.

Jeder periodische Decimalbruch kann als eine fallende geometrische Progression dargestellt und als solche summiert, d. i. in einen gemeinen Bruch verwandelt werden. Z. B.

$$0{\cdot}\dot{2}\dot{5} = \frac{25}{10^2} + \frac{25}{10^4} + \frac{25}{10^6} + \frac{25}{19^8} + \ldots = \frac{\frac{25}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{25}{99}.$$

§. **251.** Mittelst der beiden von einander unabhängigen Gleichungen

$$a_n = a_1\, q^{n-1} \text{ und } s_n = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q-1},$$

welche fünf Größen a_1, q, n, a_n, s_n enthalten, können aus je dreien dieser Größen die beiden anderen bestimmt werden.

Sind z. B. q, n, s_n gegeben, so erhält man aus der zweiten Gleichung

$$a_1 = \frac{(q-1)\,s_n}{q^n - 1},$$

und dann aus der ersten Gleichung

$$a_n = \frac{q^{n-1}\,(q-1)\,s_n}{q^n - 1}.$$

§. **252. Aufgabe.** Eine geometrische Progression zu interpolieren.

Schaltet man zwischen die Glieder a_k und a_{k+1} einer geometrischen Progression, deren Quotient q ist, r Glieder ein, die mit a_k und a_{k+1} wieder eine geometrische Progression bilden, so ist in dieser a_k das erste und a_{k+1} das $(r+2)$te Glied; man hat daher, wenn der Quotient der neuen Progression mit q_1 bezeichnet wird, $a_{k+1} = a_k . q_1^{\,r+1}$; es ist aber auch $a_{k+1} = a_k . q$, daher $q_1^{\,r+1} = q$, und

$$q_1 = \sqrt[r+1]{q}.$$

Die interpolierte Progression ist also

$$a_k,\ a_k . \sqrt[r+1]{q},\ a_k . \sqrt[r+1]{q^2},\ \ldots\ a_k \sqrt[r+1]{q^r},\ a_{k+1}.$$

Um z. B. in der Reihe 1, 16, 256, 4096, ... zwischen je zwei Glieder drei neue Glieder zu interpolieren, setze man, da $q = 16$ und $\ = 3$ ist, $q = \sqrt[4]{16} = 2$, wodurch man erhält

1, 2, 4, 8, **16**, 32, 64, 128, **256**, 512, 1024, 2048, **4096**, ...

Die zusammengesetzte arithmetisch-geometrische Reihe.

§. **253.** Multipliciert man die Glieder der arithmetischen Progression

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \ldots.$$

mit den gleichstelligen Gliedern der geometrischen Progression

$$b, \quad bq, \quad bq^2, \quad bq^3, \ldots,$$

so entsteht die zusammengesetzte Reihe

$$ab, \ (a+d)bq, \ (a+2d)bq^2, \ (a+3d)bq^3, \ldots.$$

Um das Summenglied derselben

$$S_n = ab + (a+d)bq + (a+2d)bq^2 + \ldots + \{a+(n-1)d\}bq^{n-1}$$

zu bestimmen, multipliciere man beide Theile dieser Gleichung mit q und subtrahiere von der dadurch sich ergebenden Gleichung

$$qS_n = abq + (a+d)bq^2 + (a+2d)bq^3 + \ldots + \{a+(n-1)d\}bq^n$$

die frühere. Man erhält

$$S_n(q-1) = \{a+(n-1)d\}bq^n - ab - (bdq + bdq^2 + \ldots + bdq^{n-1})$$

$$= ab(q^n-1) + (n-1)bdq^n - \frac{bdq(q^{n-1}-1)}{q-1},$$

und folglich

$$S_n = \frac{ab(q^n-1)}{q-1} + \frac{(n-1)bdq^n}{q-1} + \frac{bdq(q^{n-1}-1)}{(q-1)^2}, \text{ oder}$$

$$S_n = \frac{ab(q^n-1)}{q-1} + \frac{bdq}{(q-1)^2}\{nq^{n-1}(q-1) - (q^n-1)\}.$$

Ist $q < 1$ und wird $n = \infty$, so nähert sich q^n ohne Ende der Null, und daher die Summe der unendlichen Reihe dem Grenzwerte

$$S = \frac{ab(1-q) + bdq}{(1-q)^2}.$$

III. Zinseszins- und Rentenrechnung.

§ **254.** Werden die am Ende einer Zeiteinheit fälligen Zinsen eines Capitals zu diesem hinzugefügt und mit ihm wieder verzinst, so sagt man: das Capital ist auf Zinseszinsen angelegt.

Bei den Zinseszinsrechnungen kommt, wie bei der einfachen Zinsrechnung (§. 148), das Capital, die Zeit, das Procent und der Zins in Betracht. Als Zeiteinheit ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ein Jahr zu verstehen. Ist ein Capital zu p% angelegt, so wachsen 100 Einheiten des Capitals (Gulden, Mark) in einem Jahre sammt den Zinsen auf $100 + p$ an; somit hat 1 Capitalseinheit nach 1 Jahre mtt Hinzufügung der Zinsen den Wert $\frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$. Den Wert $1 + \frac{p}{100}$, zu welchem die Einheit des Capitals mit Zinsen in 1 Jahre anwächst, nennt man gewöhnlich den Zinsfuße; wir wollen denselben in den nachfolgenden Rechnungen der Kürze halber mit e bezeichnen.

§. **255.** Erste Fundamental-Aufgabe. Ein Capital a ist zu dem Zinsfuße $e = 1 + \frac{p}{100}$ auf Zinseszinsen angelegt; zu welchem Werte wächst es nach n Jahren an?

Da die Capitalseinheit mit den Zinsen nach 1 Jahre den Werth e erhält, so hat das Capital a nach 1 Jahre den Wert

$$a_1 = a \, . \, e,$$

d. h. man findet den Wert eines Capitals nach 1 Jahre, indem man den Anfangswert mit dem Zinsfuße multipliciert.

Wird das neue Capital a_1 wieder ein Jahr verzinst, so ist sein Wert am Ende desselben $a_2 = a_1 . e = a . e^2$.

Nach 3, 4 ... Jahren wird das Capital angewachsen sein auf

$$a_3 = a_2 . e = a . e^3, \quad a_4 = a_3 . e = a . e^4, \text{ u. s. w.}$$

Hiernach ist der Wert des Capitals am Ende des nten Jahres

$$a_n = a . e^n \ldots \text{I)}$$

Löst man diese Gleichung nach a auf, so ergibt sich als der gegenwärtige oder Barwert eines nach n Jahren zahlbaren Capitals a_n zum Zinsfuße e

$$a = \frac{a_n}{e^n}.$$

Ebenso erhält man aus I) für e und n die Werte

$$e = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a}}, \quad n = \frac{\log a_n - \log a}{\log e}.$$

Zusätze. 1. Hier wurde n als eine ganze Zahl von Jahren vorausgesetzt. Ist nun n eine gemischte Zahl, etwa $m + \frac{r}{s}$, so sind nur für die vollen m Jahre die Zinseszinsen von a, dagegen für den Bruchtheil des noch folgenden Jahres die einfachen Zinsen von a_m zu berechnen. Man erhält also in diesem Falle $a_m = a e^m$, und mit Rücksicht auf §. 148, da $\frac{p}{100} = e - 1$ ist,

$$a_{+m\frac{r}{s}} = a_m + \frac{a_m (e-1) r}{s} = a e^m \left\{ 1 + (e-1) . \frac{r}{s} \right\}.$$

2. Werden die Zinsen nicht jährlich, sondern nach dem qten Theile eines Jahres (halbjährig, monatlich) capitalisiert, so ist in der Gleichung I) und in den daraus abgeleiteten Formeln $e = 1 + \frac{p}{100q}$ und für n die Zahl nq zu setzen.

3. Die obigen Gleichungen können auch auf andere Größen, wenn dieselben in einem constanten Verhältnisse wachsen, z. B. auf die Zunahme der Bevölkerung eines Landes, des Holzstandes eines Waldes u. dgl. angewendet werden.

Beispiele.

1) Wie hoch wächst ein Capital von 2518 fl. in 12 Jahren zu 5 % Zinseszinsen an?

$$a_{12} = 2518 . 1\cdot05^{12}$$

$$\log 1\cdot05 = 0\cdot021\ 189$$
$$12 \log 1\cdot05 = 0\cdot25\ 427$$
$$\log 2518 = 3\cdot40\ 106$$
$$\log a_{12} = 3\cdot65\ 533 = \log 4522,$$

also $a_{12} = 4522$ fl.

2) Welchen Barwert hat ein nach 11 Jahren zahlbares Capital von 1000 fl. zum Zinsfuße 1·04?

$$a = \frac{1000}{1\cdot04^{11}}.$$

$$\log 1000 = 3\cdot00\ 000$$
$$\log 1\cdot04 = 0\cdot017\ 033$$
$$11 \log 1\cdot04 = 0\cdot18\ 736$$
$$\log a = 2\cdot81\ 264 = \log 649\cdot59,$$

also Barwert $a = 649\cdot59$ fl.

3) Ein Capital von 2000 fl. ist bei 4 % Zinseszinsen auf 4469 fl. 84 kr. angewachsen; wie lange war dasselbe angelegt?

$$4469\cdot84 = 2000 . 1\cdot04^n, \text{ also}$$

$$n = \frac{\log 4499\cdot84 - \log 2000}{\log 1\cdot04} = \frac{0\cdot34927}{0\cdot01703} = 20\cdot505..$$

Setzt man $n = (20 + t)$ Jahre, so ergibt sich, da 2000 fl. nach 20 Jahren auf $2000 . 1\cdot04^{20} = 4382\cdot2$ fl. anwachsen und daher die Differenz $4469\cdot84 - 4382\cdot2 = 87\cdot64$ fl. der einfache Zins des Capitals 4382·2 fl. für die Zeit t ist, nach §. 148

$$t = \frac{100 . 87\cdot64}{4382\cdot2 . 4} = \frac{1}{2} \text{ Jahr, und somit } n = 20\ \frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

§. **256.** **Zweite Fundamental-Aufgabe.** Durch n Jahre wird am Anfange oder am Ende eines jeden Jahres ein Betrag r gezahlt; zu welchem Werte wachsen alle diese Beträge zur Zeit der letzten Zahlung an, wenn man p% Zinseszinsen rechnet?

Die Zeit von der ersten bis zu der letzten Zahlung beträgt n — 1 Jahre; setzt man daher $1 + \frac{p}{100} = e$, so ist (§. 255) zur Zeit der letzten Zahlung

der Wert der 1. Zahlung $= re^{n-1}$,
„ „ „ 2. „ $= re^{n-2}$,
. . . .
„ „ „ (n-2)ten „ $= re^2$,
„ „ „ (n-1)ten „ $= re$,
„ „ „ n ten „ $= r$;

daher die Summe aller dieser Werte

$$s_n = r + re + re^2 + \ldots + re^{n-2} + re^{n-1},$$

oder mit Rücksicht auf §. 250, 2

$$s_n = \frac{r(e^n - 1)}{e - 1} \ldots \text{II}).$$

Aus dieser Gleichung können auch r und n bestimmt werden, wenn die übrigen Größen gegeben sind. Die Bestimmung von e übersteigt, da man dabei auf eine Gleichung des (n — 1)ten Grades kommt, die Grenzen dieser Anleitung.

Beispiele.

1) Jemand legt durch 10 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres 230 fl. zu 5% Zinseszins an; welchen Wert haben diese Anlagen am Anfange des 10ten Jahres?

$$s_{10} = \frac{230\,(1{\cdot}05^{10} - 1)}{0{\cdot}05} = \frac{230.0{\cdot}62889}{0{\cdot}05} = 2892{\cdot}89 \text{ fl.}$$

2) Jemand legt durch 15 Jahre am Ende eines jeden halben Jahres eine sich gleichbleibende Summe in eine Sparcasse, welche bei dem jährlichen Zinse à 5% halbjährig capitalisiert, und erwirbt sich dadurch zur Zeit der letzten Zahlung ein Guthaben von 3292·71 fl.; wie groß ist die jedesmalige Einlage?

Hier muß man 30 Zeitperioden rechnen und als Zinsfuß 1·025 annehmen man hat daher $3292{\cdot}71 = \frac{r\,(1{\cdot}025^{30} - 1)}{0{\cdot}025}$; mithin

$$r = \frac{3292{\cdot}71.0{\cdot}025}{1{\cdot}025^{30} - 1} = 75 \text{ fl.}$$

§. **257.** Auf die voranstehenden zwei Hauptaufgaben lassen sich alle mehr oder weniger zusammengesetzten Aufgaben über die Zinseszinsrechnung zurückführen.

Aufgaben.

1) Ein zum Zinsfuße e angelegtes Capital a wird durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres um den Betrag r vermehrt oder vermindert; welchen Wert hat es am Ende dieser Zeit?

Am Ende des nten Jahres ist der Wert des Capitals a (nach §. 255) ae^n, und der Wert aller n Beträge r, um welche das Capital am Ende eines jeden Jahres vermehrt oder vermindert wird, (nach §. 256) $\frac{r(e^n - 1)}{e - 1}$; der Endwert des so vermehrten oder verminderten Capitals ist also

$$A = ae^n \pm \frac{r(e^n - 1)}{e - 1}.$$

Ist im Falle der Verminderung $r > a(e - 1)$, oder $r > ae - a$, d. i. größer als der jährliche Zins des Capitals a, so wird der Endwert dieses Capitals von Jahr zu Jahr kleiner, bis endlich das Capital erschöpft ist.

2) Ein unverzinsliches Capital a ist nach m Jahren, ein unverzinsliches Capital b nach n Jahren, wo $n > m$ ist, fällig; in welchem Verhältnisse stehen a) ihre Barwerte, b) ihre Werte nach n Jahren bei dem Zinsfuße e?

Der Barwert des Capitals a ist $\frac{a}{e^m}$, der Barwert des Capitals b ist $\frac{b}{e^n}$, daher das Verhältnis der Barwerte

$$\frac{a}{e^m} : \frac{b}{e^n} = a e^{n-m} : b.$$

Nach n Jahren ist der Wert des ersten Capitals $a e^{n-m}$, des zweiten b, daher das Verhältnis dieser Werte, wie früher,

$$a e^{n-m} : b.$$

Zusatz. Sollen zu verschiedenen Zeiten fällige Capitalsbeträge mit einander verglichen werden, so muss man sie immer auf denselben Zeitpunkt reducieren. Da aber das Verhältnis ihrer Werte für jeden Zeitpunkt dasselbe ist, so lange ihr Zinsfuß ungeändert bleibt, so ist es an sich ganz gleichgiltig, welcher gemeinschaftliche Zeitpunkt für die Vergleichung gewählt wird. Gewöhnlich werden entweder die Barwerte oder die Werte nach Ablauf des gegebenen Zeitraumes berechnet und mit einander in Vergleichung gesetzt.

3) Ein Anlehen a soll durch eine am Ende eines jeden Jahres zu zahlende Rate r in n Jahren getilgt (amortisiert) werden; wie viel muss die Jahresrate r bei dem Zinsfuße e betragen?

Der Barwert aller Jahresraten muss dem Schuldcapital gleich sein.

n Jahresraten, jede = r, haben zur Zeit der letzten Zahlung, d. i. am Ende des nten Jahres, den Wert $\frac{r(e^n - 1)}{e - 1}$; ihr Barwert ist also $b = \frac{r(e^n - 1)}{e^n(e - 1)}$.

Da $b = a$ sein muss, so hat man

$$\frac{r(e^n - 1)}{e^n(e - 1)} = a, \text{ daher } r = \frac{a e^n (e - 1)}{e^n - 1}.$$

4) Nach wie viel Jahren sind von einem auf Zinseszinsen zu 5% ausgeliehenen Capital von 1060 fl. noch 167·22 fl. übrig, wenn am Ende eines jeden Jahres 80 fl. zurückgezahlt werden?

Nach n Jahren. Das Schuldcapital 1060 fl. hat nach n Jahren den Wert $1060 . 1{\cdot}05^n$ fl.; die n jährlichen Rückzahlungen à 80 fl. haben nach n Jahren den Wert $\frac{80(1{\cdot}05^n - 1)}{0{\cdot}05}$ fl.; es ist daher

$$1060 . 1{\cdot}05^n = \frac{80(1{\cdot}05^n - 1)}{0{\cdot}05} + 167{\cdot}22, \text{ und somit}$$

$$n = \frac{\log 71{\cdot}639 - \log 27}{\log 1{\cdot}05} = 20 \text{ Jahre.}$$

Rentenrechnung.

§. **258.** Die Berechnung von Zinseszinsen kommt insbesondere bei der Rentenrechnung vor.

Unter einer **Rente** versteht man einen in festgesetzten gleichen Zeitterminen (meistens am Ende jedes Jahres) zahlbaren Geldbetrag, dessen Bezugsrecht durch eine vorher gezahlte Geldsumme, die **Einlage**, erworben wird. Die Einlage wird entweder auf einmal oder jährlich entrichtet und heißt dann bezüglich **Mise** oder **Prämie**. Die Rente ist gewöhnlich constant; sie kann aber auch nach einem bestimmten Gesetze veränderlich sein. Eine Rente heißt **Zeitrente**, wenn die Zahl der Termine, in denen sie gezahlt wird, genau bestimmt ist, **Leibrente** dagegen, wenn sie bis zum Tode des Empfängers fortdauert. Hier soll nur von Zeitrenten die Rede sein.

Aufgaben.

1) Welchen Barwert hat zum Zinsfuße e eine Rente, welche durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres in dem gleichen Betrage r fällig ist?

n Jahresrenten, jede $= r$, haben zur Zeit des letzten Bezuges, d. i. am Ende des nten Jahres, den Wert $\frac{r(e^n - 1)}{e - 1}$; ihr Barwert ist also

$$b = \frac{r(e^n - 1)}{e^n(e - 1)}.$$

2) Welche Prämie muss durch n Jahre am Anfange eines jeden Jahres zum Zinsfuße e an eine Versicherungsanstalt geleistet werden, damit diese sodann das Capital s auszahle?

Die Jahresprämien müssen bis zum Anfange des nten Jahres zu dem Werte s anwachsen.

n Prämien, jede $= r$, sind zur Zeit der letzten Zahlung, d. i. am Anfange des nten Jahres, $\frac{r(e^n - 1)}{e - 1}$ wert; man hat daher

$$\frac{r(e^n - 1)}{e - 1} = s, \text{ und somit } r = \frac{s(e - 1)}{e^n - 1}.$$

3) Jemand will an eine Versicherungsbank durch m Jahre am Anfange eines jeden Jahres einen bestimmten Betrag a einzahlen, um sich durch die nachfolgenden n Jahre den Bezug einer am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Rente r zu sichern; wie viel wird die jährliche Einzahlung bei dem Zinsfuße e betragen müssen?

Der Barwert aller Prämien muss dem Barwerte aller Rentenbezüge gleich sein.

m jährliche Prämien, jede $= a$, haben zur Zeit der letzten Zahlung, d. i. am Anfange des mten Jahres, den Wert $\frac{a(e^m - 1)}{e - 1}$; ihr Barwert ist also $A = \frac{a(e^m - 1)}{e^{m-1}(e - 1)}$.

n Jahresrenten, die am Ende des $(m + 1)$ten Jahres beginnen, und deren jede $= r$ ist, haben zur Zeit des letzten Bezuges, d. i. am Ende des $(m + n)$ten Jahres, den Wert $\frac{r(e^n - 1)}{e - 1}$; ihr Barwert ist also $R = \frac{r(e^n - 1)}{e^{m+n}(e - 1)}$.

Da nun $A = R$ sein muss, so hat man

$$\frac{a(e^m - 1)}{e^{m-1}(e - 1)} = \frac{r(e^n - 1)}{e^{m+n}(e - 1)}, \text{ daher } a = \frac{r(e^n - 1)}{e^{n+1}(e^m - 1)}.$$

Aus der letzten Gleichung kann auch r, m oder n bestimmt werden, wenn die übrigen Größen gegeben sind.

4) Eine Jahresrente r steige jährlich und zwar n Jahre hindurch in einer arithmetischen Progression mit der Differenz d; wie groß ist deren Barwert zum Zinsfuße e?

Die am Ende der einzelnen Jahre zu beziehenden Renten sind

$$r,\ r + d,\ r + 2d, \ldots,\ r + (n - 1)d,$$

und die Summe ihrer Barwerte

$$b = \frac{r}{e} + \frac{r + d}{e^2} + \frac{r + 2d}{e^3} + \ldots + \frac{r + (n - 1)d}{e^n},$$

oder nach §. 253

$$b = \frac{r(e^n - 1)}{e^n(e - 1)} + \frac{d}{e^n(e - 1)^2}[(e^n - 1) - n(e - 1)].$$

5) Welchen Barwert hat eine durch n Jahre nachschussweise zahlbare Rente r, welche jährlich in einer geometrischen Progression mit dem Quotienten q steigt, bei dem Zinsfuße e?

Die einzelnen Jahresrenten sind

$$r,\ rq,\ rq^2, \ldots,\ rq^{n-1},$$

daher die Summe ihrer Barwerte

$$b = \frac{r}{e} + \frac{rq}{e^2} + \frac{rq^2}{e^3} + \ldots + \frac{rq^{n-1}}{e^n},$$

oder

$$b = \frac{r(q^n - e^n)}{e^n(q - e)}.$$

Sechster Abschnitt.

Combinationslehre.

I. Permutationen, Combinationen und Variationen.

§. **259.** Gegebene Dinge nach einem bestimmten Gesetze in Gruppen zusammenzustellen, heißt *combinieren* im weiteren Sinne des Wortes. Die einzelnen Dinge werden *Elemente*, und die aus ihnen gebildeten Gruppen *Complexionen* genannt.

Zur schriftlichen Darstellung der Combinationen ist es am zweckmäßigsten, die Elemente durch die in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen, welche *Zeiger* oder *Indices* heißen, zu bezeichnen. Diese Zeiger bestimmen die Rangordnung der Elemente, so dass jenes Element das *höhere* ist, welches einen größeren Zeiger hat. Von zwei Complexionen heißt jene die *höhere*, worin von der Linken aus zuerst ein höheres Element vorkommt; z. B. die Complexion 1342 ist höher als jene 1324. Die *niedrigste* Complexion ist diejenige, in welcher kein höheres Element vor einem niedrigeren steht, in welcher also die Elemente in *natürlicher Ordnung* aufeinander folgen; und jene die *höchste*, in welcher kein niedrigeres Element vor einem höheren steht, somit alle Elemente in umgekehrter Ordnung vorkommen.

Werden die Elemente, anstatt durch Zeiger, durch Buchstaben bezeichnet, so ist dasjenige Element als ein höheres zu betrachten, welches im Alphabete später vorkommt.

Alle Combinationen scheiden sich ihrer Natur nach in *Versetzungen* und *Verbindungen*. Bei den *Versetzungen* fasst man die verschiedene *Anordnung* der gegebenen Elemente, bei den *Verbindungen* ihre *Auswahl* in bestimmter *Anzahl* in's Auge. Wird nicht nur auf die *Anzahl* und *Auswahl* der Elemente, sondern gleichzeitig auch auf die *Anordnung* derselben Rücksicht genommen, so kommen *Verbindungen* und *Versetzungen* vereint vor.

Hiernach unterscheidet man drei Arten des Combinierens: das *Permutieren*, das *Combinieren* im engeren Sinne, und das *Variieren*.

Bei jeder dieser drei Combinationsarten kommt die wirkliche *Bildung* der Complexionen und die *Zahl* derselben in Betracht.

1. Permutieren.

§. **260**. Permutieren heißt, gegebene Elemente auf jede mögliche Weise versetzen, so jedoch, dass in jeder Complexion alle Elemente vorkommen.

Die Anzahl aller möglichen Permutationen von n Elementen bezeichnet man durch P_n (Permutationszahl von n), die Anzahl der Permutationen von genannten Elementen, z. B. von a, b, b, c durch P (abbc).

Bildung der Permutationen.

§. **261**. Um von mehreren gegebenen Elementen alle möglichen Permutationen zu bilden, schreibe man zuerst die niedrigste Complexion der gegebenen Elemente an, leite aus dieser die nächst höhere, aus dieser wieder die nächst höhere, u. s. w. ab, bis man zur höchsten kommt. Man erhält aber aus jeder schon aufgestellten Complexion die nächst höhere, indem man, in dieser Complexion von rechts nach links fortschreitend, das erste Element aufsucht, an dessen Stelle aus den rechts folgenden ein höheres gesetzt werden kann, sodann dieses höhere Element an jene Stelle schreibt und die links vorangehenden Elemente ungeändert stehen, die übrigen aber ihm in natürlicher Ordnung folgen lässt. Z. B.

123	abbbc	babbc	bbabc	bcabb	cabbb
132	abbcb	babcb	bbacb	bcbab	cbabb
213	abcbb	bacbb	bbbac	bcbba	cbbab
231	acbbb		bbbca		cbbba
312			bbcab		
321			bbcba		

Anzahl der Permutationen.

§. **262**. 1. Sind alle möglichen Permutationen von n verschiedenen Elementen gebildet und tritt zu diesen Elementen noch ein neues dazu, so kann dasselbe in jeder der früheren Permutationen den ersten, oder den zweiten,..., oder den (n + 1) ten Platz, also n + 1 verschiedene Stellungen einnehmen, so dass aus n + 1 Elementen (n + 1) mal so viel Permutationen entstehen, als aus n Elementen. Es ist also

$$P_{n+1} = P_n \,.\, (n + 1).$$

Da nun ein Element nur eine einzige Stellung zulässt, so ist

$$P_1 = 1, \text{ daher}$$
$$P_2 = 1.2,$$
$$P_3 = 1.2.3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

allgemein $\quad P_n = 1.2.3.\ldots(n-1)\,n;$

d. h. die Permutationszahl von mehreren verschiedenen Elementen ist gleich dem Producte der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl der Elemente ausdrückt.

Das Product $1.2.3.4 \ldots (n-1).n$ wird durch das Symbol $n!$, zu lesen: „Facultät von n“, bezeichnet. Es ist daher

$$P_2 = 2!,\ P_3 = 3!, \ldots P_n = n!.$$

2. Wenn unter den gegebenen n Elementen p gleiche vorkommen, so betrachte man diese einstweilen als verschieden; dann ist die Anzahl aller möglichen Permutationen $n!$. Denkt man sich diese Permutationen so in Abtheilungen gebracht, dass sich die Permutationen einer Abtheilung bloß durch die gegenseitige Stellung der als verschieden betrachteten p Elemente von einander unterscheiden, während die übrigen Elemente dieselbe Stelle einnehmen; so enthält jede dieser Abtheilungen so viele Permutationen, als man ihrer aus p Elementen bilden kann, also $p!$ Permutationen. Wenn man nun die als verschieden betrachteten Elemente wieder als einander gleich annimmt, so gelten alle $p!$ Complexionen einer Abtheilung nur für eine Permutation; je $p!$ von den $n!$ Permutationen gehen in eine einzige über, und man hat somit nur $\frac{n!}{p!}$ verschiedene Permutationen.

Befinden sich unter den gegebenen n Elementen außer den p gleichen Elementen noch q andere gleiche Elemente, so wiederholen sich die Schlüsse in gleicher Weise, so dass man als die Anzahl aller verschiedenen Permutationen $\frac{n!}{p!\,q!}$ erhält.

3. Sind unter den gegebenen n Elementen $n-k$ einander gleich, und die übrigen k Elemente ebenfalls einander gleich, wie z. B. in dem Producte $a^{n-k}b^k$, so ist die Permutationszahl derselben

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{1.2.3 \ldots (n-k)\,(n-k+1) \ldots (n-2)\,(n-1)\,n}{1.2.3 \ldots (n-k).1.2.3 \quad \ldots\ldots \quad k}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner dieses Bruches durch $1.2.3 \ldots (n-k)$ und schreibt die dann übrig bleibenden Factoren des Zählers in umgekehrter Ordnung, so hat man

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-k+1)}{1.\ 2.\ \ 3 \ \ldots\ k}.$$

Der letzte Bruch, dessen Zähler ein Product von k Factoren, die von n beginnend um je 1 abnehmen, und dessen Nenner das Product von k Factoren ist, die von 1 beginnend um je 1 wachsen, wird durch das Symbol $\binom{n}{k}$, zu lesen: „n über k“, ausgedrückt. Es ist also

$$P(a^{n-k}\,b^k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

Zusatz. Aus $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.\ 2.\ \ldots.\ k}$ folgt für $k = n$, $n+1$, $n+2, \ldots$

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n+1} = \binom{n}{n+2} = .. = 0.$$

2. Combinieren.

§. **263**. Combinieren im engeren Sinne heißt, gegebene Elemente so mit einander verbinden, dass jede Complexion dieselbe bestimmte Anzahl aus den gegebenen Elementen enthält, wobei jedoch nur solche Complexionen, in welchen nicht dieselben Elemente vorkommen, als verschieden gelten.

Je nachdem die Verbindungen je zwei, drei, vier,... Elemente enthalten, nennt man sie Combinationen der zweiten, dritten, vierten,... Classe, oder auch Amben, Ternen, Quaternen, u. s. w. Die Elemente selbst können als Combinationen der ersten Classe angesehen werden und heißen als solche Unionen.

Man unterscheidet ferner Combinationen ohne und mit Wiederholungen; bei jenen darf in einer Complexion ein Element nur einmal, bei diesen auch öfter vorkommen.

Die Anzahl aller möglichen Combinationen der r ten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen wird durch C_n^r, die Anzahl derselben mit Wiederholungen durch $C_n^{w,r}$ bezeichnet.

Bildung der Combinationen.

§. **264**. 1. Um aus gegebenen Elementen alle Amben ohne Wiederholungen zu bilden, stelle man jedes Element vor jedes höhere Element.

Sind einmal die Combinationen einer bestimmten Classe gebildet, so erhält man aus denselben die Combinationen der nächst höheren Classe, indem man jedes Element vor jede frühere Complexion, in der lauter höhere Elemente vorkommen, setzt.

So erhält man aus den vier Elementen, b, c, d, e nachfolgende

Amben ohne Wiederh.	Ternen ohne Wiederh.
bc, bd, be;	bcd, bce, bde;
cd, ce;	cde;
de;	

u. s. w.

2. Um aus gegebenen Elementen alle Amben mit Wiederholungen zu bilden, setze man jedes Element vor sich selbst und vor jedes höhere Element.

Hat man einmal die Combinationen irgend einer Classe mit Wiederholungen gebildet, so erhält man aus denselben alle Combinationen der nächst höheren Classe, indem man jedes Element vor jede frühere Complexion, in der keine niedrigeren Elemente vorkommen, setzt.

So geben die vier Elemente a, b, c, d folgende

Amben mit Wiederhol.	aa, ab, ac, ad; bb, bc, bd; cc, cd; dd;
Ternen mit Wiederhol.	aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add; bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd; ccc, ccd, cdd; ddd;

u. s. w.

Zusatz. Einfacher gestalten sich die Combinationen mit Wiederholungen, wenn man jede Combination als Product auffasst. So geben die Elemente a und b folgende als Producte betrachtete Combinationen mit Wiederholungen

der 2ten Classe: a^2, ab, b^2;
" 3ten " a^3, a^2b, ab^2, b^3;
" 4ten " a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4;
. . . .
" nten " a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2, \ldots ab^{n-1}$, b^n.

Zahl der Combinationen ohne Wiederholungen.

§. **265**. Verbindet man jedes von n gegebenen Elementen mit jedem der übrigen $n - 1$ Elemente, so erhält man alle Amben 2mal; z. B. die Ambe ab, indem man a mit b, und indem man b mit a verbindet. Da sich sonach $n(n-1)$ paarweise gleiche Amben ergeben, so ist die Anzahl aller verschiedenen Amben von n Elementen

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Hat man überhaupt alle Combinationen der r ten Classe ohne Wiederholungen von n Elementen und verbindet mit jeder dieser C_n^r Combinationen jedes der darin nicht vorkommenden $n - r$ Elemente, so enthalten die sich ergebenden $C_n^r \cdot (n-r)$ Verbindungen alle Combinationen der $(r+1)$ ten Classe, und zwar jede $(r+1)$ mal, weil man immer je r andere Elemente derselben mit dem $(r+1)$ ten verbinden kann; die Zahl aller verschiedenen Combinationen der $(r+1)$ ten Classe von n Elementen ist also

$$C_n^{r+1} = C_n^r \cdot \frac{n-r}{r+1}.$$

Da nun

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

ist, so hat man

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ folglich}$$

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ u. s. w.}$$

allgemein

$$C_n^r = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+2)\,(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(r-1)\,.\,r};$$

oder mit Rücksicht auf die im §. 262, 3 eingeführte Bezeichnung

$$C_n^2 = \binom{n}{2},\quad C_n^3 = \binom{n}{3}, \ldots\quad C_n^r = \binom{n}{r}.$$

Zahl der Combinationen mit Wiederholungen.

§. **266.** Sind n Elemente gegeben, und verbindet man jedes Element mit sich selbst und noch mit allen n Elementen, auch sich selbst nicht ausgenommen, so geben die erhaltenen $n\,(n+1)$ Verbindungen alle Amben mit Wiederholungen, und zwar jede 2mal. Die Anzahl aller verschiedenen Amben von n Elementen mit Wiederholungen ist also $\frac{n\,(n+1)}{2}$.

Sind überhaupt alle Combinationen der rten Classe mit Wiederholungen von n Elementen gebildet und verbindet man mit jeder dieser $C_n^{w,r}$ Combinationen zuerst jedes der r Elemente, welche darin vorkommen, und dann noch alle n Elemente; so enthalten die sich ergebenden $C_n^{w,r}.(n+r)$ Verbindungen alle Combinationen der $(r+1)$ Classe mit Wiederholungen, und zwar kommt jede solche Combination $(r+1)$mal vor, weil man immer je r andere Elemente derselben mit dem $(r+1)$ten verbinden kann; es ist daher

$$C_n^{w,r+1} = C_n^{w,r}\,.\,\frac{n+r}{r+1}.$$

Da nun

$$C_n^{w,2} = \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}$$

ist, so hat man

$$C_n^{w,3} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3},\text{ folglich}$$

$$C_n^{w,4} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},\text{ u. s. w.}$$

allgemein

$$C_n^{w,r} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+r-2)\,(n+r-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(r-1)\,.\,r}.$$

Schreibt man in dem letzten Bruche die Factoren des Zählers in umgekehrter Ordnung, wodurch der Bruch die Form

$$\frac{(n+r-1)\,(n+r-2)\ldots(n+2)\,(n+1).n}{1\,.\,2\,\ldots(r-2)\,(r-1).r}$$

annimmt, so kann man denselben nach der im §. 262, 3 eingeführten Bezeichnungsweise durch $\binom{n+r-1}{r}$ ausdrücken. Es ist daher

$$C_n^{w,2} = \binom{n+1}{2},\quad C_n^{w,3} = \binom{n+2}{3},\ldots\quad C_n^{w,r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

3. Variieren.

§. **267.** Variieren heißt, gegebene Elemente so mit einander verbinden, dass jede Complexion dieselbe bestimmte Anzahl aus den gegebenen Elementen enthält, wobei jedoch auch solche Complexionen, in welchen dieselben Elemente in verschiedener Anordnung vorkommen, als verschieden gelten. Variationen sind demnach permutierte Combinationen.

Wie die Combinationen, unterscheidet man auch die Variationen in die der ersten, zweiten, dritten,...Classe, ferner in Variationen ohne und mit Wiederholungen.

Die Anzahl aller möglichen Variationen der rten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen wird durch V_n^r, und die Zahl derselben mit Wiederholungen durch $V_n^{w,r}$ bezeichnet.

Bildung der Variationen.

§. **268.** Die Variationen einer bestimmten Classe erhält man, indem man aus den gegebenen Elementen alle Combinationen derselben Classe bildet und dann von jeder Combination die Permutationen aufstellt. Die Variationen können aber auch unmittelbar gebildet werden.

1. Um aus gegebenen Elementen die Variationen der zweiten Classe ohne Wiederholungen zu bilden, setzt man jedes Element vor jedes der übrigen Elemente.

Sind überhaupt die Variationen irgend einer Classe ohne Wiederholungen gebildet, so erhält man aus denselben die Variationen der nächst höheren Classe, indem man jedes Element vor jede frühere Variation, in welcher dieses Element nicht vorkommt, setzt.

So geben die Elemente 1, 2, 3, 4 folgende Variationen ohne Wiederholungen

der 2. Classe:	der 3. Classe:
12, 13, 14;	123, 124, 132, 134, 142, 143;
21, 23, 24;	213, 214, 231, 234, 241, 243;
31, 32, 34;	312, 314, 321, 324, 341, 342;
41, 42, 43;	412, 413, 421, 423, 431, 432;

u. s. w.

2. Um aus gegebenen Elementen die Variationen der zweiten Classe mit Wiederholungen zu erhalten, setzt man jedes Element vor jedes Element, auch sich selbst nicht ausgenommen.

Hat man bereits die Variationen irgend einer Classe mit Wiederholungen dargestellt, so bildet man aus denselben die Variationen der nächst höheren Classe, indem man jedes Element vor jede frühere Variation setzt.

Aus den beiden Elementen a und b erhält man folgende Variationen mit Wiederholungen

der 2. Classe:	der 3. Classe:
aa, ab;	aaa, aab, aba, abb;
ba, bb;	baa, bab, bba bbb; u. s. w.

Zahl der Variationen ohne Wiederholungen.

§. **269.** Die Anzahl der Combinationen der rten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen ist $\binom{n}{r}$; aus jeder solchen Combination lassen sich durch Permutation der r Elemente r! Variationen der rten Classe ohne Wiederholungen bilden; folglich ist

$$V_n^r = \binom{n}{r} \cdot r! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1).$$

Zahl der Variationen mit Wiederholungen.

§. **270.** Sind n Elemente gegeben, so gibt jedes derselben n Variationen der zweiten Classe mit Wiederholungen, somit ist n^2 die Anzahl aller solcher Variationen.

Ist überhaupt die Anzahl aller Variationen der rten Classe mit Wiederholungen von n Elementen bekannt, so ist, da jede solche Variation durch Verbindung mit allen n Elementen n Variationen der (r + 1) ten Classe gibt,

$$V_n^{w,r+1} = V_n^{w,r} \cdot n.$$

Da nun $V_n^{w,2} = n^2$ ist, so hat man $V_n^{w,3} = n^3$, folglich $V_n^{w,4} = n^4$, allgemein

$$V_n^{w,r} = n^r.$$

II. Binomischer Lehrsatz.

§. **271.** Unter dem binomischen Lehrsatze versteht man das Gesetz, nach welchem die Potenz eines Binoms in eine Reihe entwickelt wird.

Jede Potenz eines Binoms mit einem ganzen positiven Exponenten kann aus dem Producte mehrerer Binome, welche das erste Glied gemeinschaftlich haben, hergeleitet werden, indem man in denselben auch die zweiten Glieder gleichsetzt. So geht das Product $(a + b)(a + c)(a + d)(a + e)(a + f)$, wenn man $c = d = e = f = b$ setzt, in die Potenz $(a + b)^5$ über.

§. **272.** Das Product mehrerer Binome, welche ein Glied gemeinschaftlich haben.

Um das Product $(a + b)(a + c)(a + d)(a + e) \ldots$ zu entwickeln, multipliciere man zuerst die ersten zwei Binome mit einander, ihr Product mit dem dritten Binom, u. s. w. Man erhält

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)\,a + bc,$$

$$(a + b)(a + c)(a + d) = a^3 + (b + c + d)\,a^2 + (bc + bd + cd)\,a + bcd,$$

$$(a + b)(a + c)(a + d)(a + e) = a^4 + (b + c + d + e)\,a^3 + (bc + bd + be + cd + ce + de)\,a^2 + (bcd + bce + bde + cde)\,a + bcde,$$

u. s. w.

Das in diesen Producten herrschende Gesetz ist leicht zu ersehen. Das erste Glied eines jeden Productes ist die sovielte Potenz von a, als Binomialfactoren gegeben sind; in den folgenden Gliedern nehmen die Exponenten von a in natürlicher Ordnung ab, bis im letzten Gliede $a^0 = 1$, d. i. gar kein a erscheint. Der Coefficient des ersten Gliedes ist 1, der Coefficient des zweiten, dritten, vierten,... Gliedes ist bezüglich die Summe der Combinationen der ersten, zweiten, dritten,... Classe aus den zweiten Gliedern der Binome, jede dieser Complexionen als ein Product der darin vorkommenden Elemente aufgefasst.

Gilt nun dieses Bildungsgesetz für ein Product von n Binomialfactoren $a + b$, $a + c, \ldots a + p$, so dass

$$(a + b)(a + c) \ldots (a + p)$$
$$= a^n + S_1(b..p)\,a^{n-1} + S_2(b..p)\,a^{n-2} + \ldots + S_{n-1}(b..p)\,a + S_n(b..p)$$

ist, wo allgemein $S_k(b..p)$ die Summe aller Combinationen der kten Classe aus den n Elementen $b, c, ..p$, die einzelnen Complexionen als Producte aufgefasst, bezeichnet, so gilt dasselbe Gesetz auch, wenn noch ein neuer Factor $a + q$ dazu tritt. Man erhält nämlich

$$(a + b)(a + c) \ldots (a + p)(a + q)$$
$$= a^{n+1} + \left\{\begin{matrix} S_1(b..p) \\ + q \end{matrix}\right\} a^n + \left\{\begin{matrix} S_2(b..p) + \\ S_1(b..p)\,.\,q \end{matrix}\right\} a^{n-1} + \ldots + \left\{\begin{matrix} S_n(b..p) + \\ S_{n-1}(b..p)\,.\,q \end{matrix}\right\} a + S_n(b..p)\,.\,a.$$

Nun ist

$$S_1(b..p) + q = b + c + \ldots + p + q = S_1(b..q).$$

Ferner ist $S_2(b..p)$ die Summe der Amben von $b, c, ..p$, und $S_1(b..p)\,.\,q$ die Summe der Amben, welche man erhält, indem man die Elemente $b, c, ..p$ noch mit dem neuen Elemente q verbindet, folglich ist $S_2(b..p) + S_1(b..p)\,.\,q$ die Summe aller Combinationen der zweiten Classe aus den Elementen $b, c, \ldots p, q$; also

$$S_2(b..p) + S_1(b..p)\,.\,q = S_2(b..q).$$

Ebenso folgt

$$S_3(b..p) + S_2(b..p).q = S_3(b..q),$$
$$S_4(b..p) + S_3(b..p).q = S_4(b..q).$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$S_n(b..p) + S_{n-1}(b..p).q = S_n(b..q).$$

Endlich ist

$$S_n(b..p).q = bc..pq = S_{n+1}(b..q).$$

Man hat daher

$$(a+b)(a+c)\ldots(a+p)(a+q)$$
$$= a^{n+1} + S_1(b..q)a^n + S_1(b..q)a^{n-1} + \ldots$$
$$+ S_n(b..q)a + S_{n+1}(b..q).$$

Das angeführte Bildungsgesetz gilt also für ein Product von $n+1$ Binomialfactoren, wenn es für ein Product von n solchen Factoren richtig ist. Nun gilt es nach dem Obigen für 2, 3, 4 Factoren, folglich gilt es auch für 5, folglich auch für 6 Factoren.., mithin allgemein für jede Zahl von Factoren.

§. **273**. Die Potenz eines Binoms.

Setzt man in dem Producte von n Binomialfactoren

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots(a+p)$$
$$= a_n + S_1(b..p)a^{n-1} + S_2(b..p)a^{n-2} + S_3(b..p)a^{n-3} + \ldots$$
$$+ S_{n-1}(b..p)a + S_n(b..p)$$

die zweiten Glieder $c = d = \ldots = p = b$, so wird

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots(a+p) = (a+b)^n,$$

ferner

$$S_1(b..p) = b + c + \ldots + p = b + b \ldots + b = \binom{n}{1}b,$$

$$S_2(b..p) = bc + bd + \ldots + op = b^2 + b^2 + \ldots + b^2 = \binom{n}{2}b^2,$$

$$S_3(b..p) = bcd + bce + \ldots + mop = b^3 + b^3 \ldots + b^3 = \binom{n}{3}b^3,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$S_{n-1}(b..p) = bcd..mo + \ldots = b^{n-1} + b^{n-1} + \ldots + b^{n-1} = \binom{n}{n-1}b^{n-1},$$

$$S_n(b..p) = bcd..mop = b^n = \binom{n}{n}b^n.$$

Durch die Substitution in den obigen Ausdruck erhält man daher für den binomischen Lehrsatz die Formel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

In dieser Formel herrscht folgendes Bildungsgesetz:

1. Die Potenzen des ersten Gliedes a des Binoms erscheinen fallend, jene des zweiten Gliedes b steigend geordnet. Der Exponent von a ist im ersten Gliede gleich dem Potenzexponenten n des Binoms, in jedem folgenden

Gliede um 1 kleiner und wird im letzten Gliede $= 0$, woraus zugleich folgt, dass die ganze Reihe ein Glied mehr hat, als der Potenzexponent n des Binoms Einheiten enthält. Die Exponenten von b nehmen umgekehrt von 0 bis n zu. Die Summe der Exponenten von a und b ist in jedem Gliede gleich n.

2. Der **Binomialcoefficient** des ersten Gliedes ist 1; der Coefficient des zweiten, dritten, vierten, ... $(k+1)$ten Gliedes ist bezüglich die Zahl der Combinationen der ersten, zweiten, dritten ... $k$ten Classe ohne Wiederholungen von n Elementen.

3. Ist das zweite Glied b des Binoms negativ, so wird das zweite, vierte, ... überhaupt jedes geradstellige Glied der Reihe negativ; man hat daher

$$(a - b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n.$$

Hiernach ist in der Binomialreihe $(a \pm b)^n$ allgemein das $(k+1)$te Glied gleich $(-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Beispiele.

1) $(x + a)^6 =$

$$= x^6 + \binom{6}{1} a x^5 + \binom{6}{2} a^2 x^4 + \binom{6}{3} a^3 x^3 + \binom{6}{4} a^4 x^2 + \binom{6}{5} a^5 x + a^6$$

$$= x^6 + 6 a x^5 + 15 a^2 x^4 + 20 a^3 x^3 + 15 a^4 x^2 + 6 a^5 x + a^6.$$

2) $(3x - 2y)^4 =$

$$= (3x)^4 - \binom{4}{1} . (3x)^3 . \, 2y + \binom{4}{2} (3x)^2 . \, (2y)^2 - \binom{4}{3} . \, 3x . (2y)^3 + (2y)^4$$

$$= 81 x^4 - 4.27 x^3 . 2y + 6.9 y^2 . 4y^2 - 4.3x.8y^3 + 16y^4$$

$$= 81 x^2 - 216 x^3 y + 216 x^2 y^2 - 96 x y^3 + 16 y^4.$$

3) Das 7te Glied von $(2x^2 - 3y)^9$ ist $(-1)^6 \binom{9}{6} . (2x^2)^{9-6} . \, (3y)^6$

$$= 84 . 8 x^6 . 729 y^6 = 489888 x^6 y^6.$$

§. **274.** Wir lassen nun auch noch eine zweite Entwicklung des binomischen Lehrsatzes folgen, die unmittelbar auf der Combinationslehre beruht.

Multiplicieren wir $a + b$ mit $a + b$, das Product wieder mit $a + b$ u. s. w., schreiben aber dabei, damit das Bildungsgesetz leichter erkannt werde, in jedem Theilproducte zuerst den Multiplicator an, und machen in den Resultaten vorläufig auch von der Potenzbezeichnung für die gleichen Factoren keinen Gebrauch. Es ist

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = \left.\begin{matrix} aa + ab \\ + ba + bb \end{matrix}\right\}$$

$$(a + b^3) = (a + b)^2\,(a + b) = \left.\begin{matrix} aaa + aab + aba + abb \\ + baa + bab + bba + bbb \end{matrix}\right\}$$

u. s. w.

Vergleicht man diese Resultate mit den Variationen mit Wiederholungen aus a und b in §. 268, 2, so sieht man sogleich, dass die Bestandtheile der 2ten Potenz des Binoms $a+b$ aus den Gliedern desselben auf gleiche Weise gebildet werden, wie dort aus den Elementen a und b die Variationen der 2ten Classe mit Wiederholungen zusammengestellt wurden, dass daher $(a+b)^2$ gleich der Summe aller Variationen der 2ten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a und b ist, wenn man jede Variation als Product betrachtet; dass ebenso $(a+b)^3$ die Summe aller Variationen der 3ten Classe mit Wiederholungen von a und b ist, jede Variation als Product aufgefasst. Da auch die Entwicklung jeder höheren Potenz von $a+b$, wenn sie auf die angedeutete Weise geschieht, mit dem Bildungsgesetze der Variationen der entsprechenden Classe mit Wiederholungen aus a und b in Uebereinstimmung bleibt, so folgt, dass allgemein $(a+b)^n$ die Summe aller Variationen der nten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a und b ist, wenn man jede Variation als Product auffasst.

Die Variationen erhält man aber auch, wenn man die Combinationen derselben Classe bildet und diese permutiert. Die Combinationen der nten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a und b, als Producte betrachtet, sind nach §. 264, Zusatz

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2,\ ..\ a^{n-k}b^k,\ ..\ ab^{n-1},\ b^n.$$

Diese Combinationen müssten permutiert und die dadurch entstehenden Variationen als Producte addiert werden. Da aber alle Variationen, die aus der Permutierung derselben Combination hervorgehen, dieselben Elemente enthalten und somit als Producte betrachtet der Combination selbst gleich sind, so braucht man die Permutationen nicht wirklich zu bilden, sondern wird, um die Summe aller Variationen zu erhalten, jede Combination sogleich mit ihrer Permutationszahl multiplicieren und dann alle diese Producte addieren.

Die Permutationszahlen für die oben aufgestellten Combinationen sind nun nach §. 262, 3 folgeweise

$$1,\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\dots\ \binom{n}{k},\dots\ \binom{n}{n-1},\ 1.$$

Es ergibt sich sonach, wie in §. 273,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Zusatz. Genau auf dieselbe Art, wie hier die Binomialformel entwickelt wurde, kann auch der polynomische Lehrsatz, d. i. eine Formel für $(a+b+c+d+..)^n$, abgeleitet werden, da diese Potenz der Summe aller Variationen der nten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d,... gleich ist, wenn man jede Variation als Product auffasst. Um daher die nte Potenz eines gegebenen Polynoms zu erhalten, darf man nur aus den Gliedern desselben die Combinationen der nten Classe mit Wiederholungen bilden, jede derselben als Product betrachtet mit der zugehörigen Permutationszahl multiplicieren und die erhaltenen Producte addieren.

§. **275.** Beziehungen zwischen den Binomialcoefficienten.

1. Je zwei vom Anfange und vom Ende gleich weit abstehende Binomialcoefficienten sind einander gleich.

Der $(k+1)$te Binomialcoefficient vom Anfange ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1.2.\ldots..(k+1).k}.$$

Der $(k+1)$te Binomialcoefficient vom Ende ist der $(n-k+1)$te vom Anfange, also

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(k+2)(k+1)}{1.2\ldots(n-k-1)(n-k)}.$$

Multipliciert man Zähler und Nenner des ersten Bruches mit

$$(k+1)(k+2)\ldots(n-k-1)(n-k),$$

so erhält man

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)..(n-k+1)(n-k)\ldots(k+2)(k+1)}{1.2\ldots.k(k+1)\ldots(n-k-1)(n-k)};$$

folglich ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Zusatz. Aus der letzten Gleichung ergibt sich für $k=0$

$$\binom{n}{o} = \binom{n}{n} = 1.$$

2. Die Summe aus dem kten und $(k+1)$ten Binomialcoefficienten einer Potenz ist gleich dem $(k+1)$ten Binomialcoefficienten der um 1 höheren Potenz.

Es ist $\binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots..(n-k+3)(n-k+2)}{1.2\ldots..(k-2)(k-1)}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots(k-1).k}; \text{ daher}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2\ldots\ldots(k-1)k}\{k+(n-k+1)\}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2.3\ldots\ldots..k} = \binom{n+1}{k}.$$

Mittelst dieses Satzes kann man aus den Binomialcoefficienten irgend einer Potenz jene der nächst höheren Potenz durch bloße Addition ableiten. Man erhält dadurch für die aufeinander folgenden Potenzen eines Binoms folgende Coefficienten (Pascal'sches Dreieck):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

u. s. w.

3. Die Summe aus den $(k+1)$ten Binomialcoefficienten der kten, $(k+1)$ten, $(k+2)$ten,... bis nten Potenz ist gleich dem $(k+2)$ten Coefficienten der $(n+1)$ten Potenz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt $\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$; daher ist

$$\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} - \binom{k}{k+1},$$
$$\binom{k+1}{k} = \binom{k+2}{k+1} - \binom{k+1}{k+1},$$
$$\binom{k+2}{k} = \binom{k+3}{k+1} - \binom{k+2}{k+1},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k+1},$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}.$$

Addiert man diese Gleichungen, so ergibt sich, da sich die Glieder auf der zweiten Seite paarweise aufheben und $\binom{k}{k+1} = 0$ ist, die Gleichung

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Z. B. für $k = 2$ ist

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

4. Die absolute Summe aller Binomialcoefficienten für die nte Potenz ist gleich 2^n.

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

5. Die algebraische Summe der abwechselnd positiven und negativen Binomialcoefficienten ist gleich Null.

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

III. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die absolute und einfache Wahrscheinlichkeit.

§. **276.** Sind unter mehreren gleich möglichen Fällen einige dem Eintreffen eines bestimmten Ereignisses günstig, die übrigen dagegen ungünstig, so heißt das Verhältnis der Anzahl jener Fälle, welche dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, zu der Anzahl aller gleich möglichen Fälle die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieses Ereignisses.

Bezeichnet a die Zahl der einem Ereignisse günstigen und b die Zahl der ihm ungünstigen Fälle, so ist, wenn die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen jenes Ereignisses durch w ausgedrückt wird,

$$w = \frac{a}{a + b}.$$

Je mehr Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind oder je größer a ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden des Ereignisses; sind alle Fälle günstig, so ist das Stattfinden gewiss und man hat, da b = 0 ist, als das mathematische Symbol der Gewissheit

$$w = \frac{a}{a} = 1.$$

Je weniger günstige Fälle vorkommen, desto geringer wird auch die Wahrscheinlichkeit; ist gar kein Fall günstig, so ist das Eintreffen des Ereignisses unmöglich, und man hat, da a = 0 ist, für das mathematische Symbol der Unmöglichkeit

$$w = \frac{0}{b} = 0.$$

Im gewöhnlichen Leben heißt ein Ereignis wahrscheinlich, wenn $w > \frac{1}{2}$, zweifelhaft, wenn $w = \frac{1}{2}$, und unwahrscheinlich, wenn $w < \frac{1}{2}$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis nicht eintreffen werde, heißt die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Sie wird durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler die Anzahl aller ungünstigen und der Nenner die Anzahl aller gleich möglichen Fälle ist. Bezeichnet man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit durch w', so ist

$$w' = \frac{b}{a + b}, \text{ daher } w + w' = \frac{a + b}{a + b} = 1,$$

d. h. die Summe der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses und jener für das Nichteintreffen gibt die Einheit, somit die Gewissheit; was auch ganz natürlich erscheint, da es gewiss ist, dass jenes Ereignis entweder eintreffen oder nicht eintreffen muss.

Aus $w + w' = 1$ folgt $w' = 1 - w$.

Beispiele.

Wirft man zwei Spielwürfel A und B, deren sechs Flächen nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 Punkten oder Augen bezeichnet sind, so sind in Bezug auf die Zahlen, welche auf den oberen Flächen der beiden Würfel zu stehen kommen, folgende 36 Fälle gleich möglich:

AB	AB	AB	AB	AB	AB
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

a) Um die Summe 5 zu werfen, sind vier Fälle günstig, nämlich 14, 23, 32, 41. Die Wahrscheinlichkeit, mit beiden Würfeln 5 Augen zu werfen, ist also $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Dieser Ausdruck, welcher anzeigt, dass in 9 Würfen die Summe 5 einmal geworfen werde, ist jedoch nicht so zu verstehen, als wenn man in den ersten neun Würfen die Summe 5 gerade einmal werfen müsste; man kann diese Summe vielleicht gar nicht, oder gerade einmal, oder auch mehr als einmal werfen; aber wenn man sehr viele Würfe macht, so wird sich das Verhältnis der Anzahl der Würfe, worin man 5 wirft, zu der gesammten Anzahl der Würfe um so mehr dem Verhältnisse 1 : 9 nähern, je länger das Spiel fortgesetzt wird. Der wirkliche Erfolg wird der durch Zahlen ausgedrückten Wahrscheinlichkeit um so näher kommen, je größer die Anzahl der Versuche ist; und in diesem Sinne ist die mathematische Wahrscheinlichkeit stets aufzufassen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, die Summe 5 nicht zu werfen, ist $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

c) Die Wahrscheinlichkeit, die Zahlen 3 und 5 zu werfen, ist, da nur zwei Fälle 35 und 53 günstig sind, $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

d) Die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch, d. i. zwei gleiche Zahlen zu werfen, ist $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Die relative Wahrscheinlichkeit.

§. **277.** Die bisher betrachtete Wahrscheinlichkeit, wobei nur ein Ereignis an und für sich betrachtet wird, heißt die absolute Wahrscheinlichkeit, im Gegensatze zu der relativen, welche sich auf die Vergleichung zweier Ereignisse bezieht. Bei der relativen Wahrscheinlichkeit zieht man unter den möglichen Fällen nur diejenigen in Rechnung, welche entweder dem einen oder dem anderen der beiden Ereignisse günstig sind, während alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben.

Sind für verschiedene Ereignisse s Fälle gleich möglich, und vergleicht man nur die Ereignisse A und B, deren einem m und dem anderen n Fälle günstig sind, so ist die relative Wahrscheinlichkeit W für das erste Ereignis $\frac{m}{m+n}$, und die relative Wahrscheinlichkeit W' für das zweite Ereignis $\frac{n}{m+n}$.

Man kann die relativen Wahrscheinlichkeiten auch aus den absoluten herleiten. Es ist nämlich, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B beziehungsweise durch w und w' bezeichnet,

$$W = \frac{m}{m+n} = \frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s}+\frac{n}{s}} = \frac{w}{w+w'}, \qquad W' = \frac{n}{m+n} = \frac{\frac{n}{s}}{\frac{m}{s}+\frac{n}{s}} = \frac{w'}{w+w'}.$$

Die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist also gleich dem Quotienten aus der absoluten Wahrscheinlichkeit jenes Ereignisses und der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse.

Z. B. In einer Urne sind 4 weiße, 6 blaue und 8 rothe Kugeln. Die absolute Wahrscheinlichkeit,

eine weiße Kugel zu ziehen, ist $\frac{4}{18}$,
„ rothe „ „ „ „ $\frac{8}{18}$;

daher die relative Wahrscheinlichkeit,

eher eine weiße als eine rothe Kugel zu ziehen, $\dfrac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18}+\frac{8}{18}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

eher eine rothe als eine weiße Kugel zu ziehen, $\dfrac{\frac{8}{18}}{\frac{4}{18}+\frac{8}{18}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

§. **278.** Beruht die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf der Berechnung mehrerer einfacher Wahrscheinlichkeiten, so heißt ein solche Wahrscheinlichkeit eine zusammengesetzte. Sie ist zweifacher Art; entweder schließt sich das Eintreffen der einzelnen Ereignisse gegenseitig aus und es kann unter mehreren fraglichen Ereignissen nur eines stattfinden, oder es sollen zwei oder mehrere Ereignisse in Verbindung mit einander gleichzeitig oder nach einander eintreffen.

§. **279.** Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines von mehreren Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen.

Ist s die Anzahl aller gleich möglichen Fälle, von denen m dem Ereignisse A, n dem Ereignisse B, p dem Ereignisse C, . . . also $m+n+p\ldots$ für das Eintreffen irgend eines unter den Ereignissen A, B, C, . . . günstig sind, so ist, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse durch w', w'', w''', . . . und die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines dieser Ereignisse durch W bezeichnet,

$$w' = \frac{m}{s}, \quad w'' = \frac{n}{s}, \quad w''' = \frac{p}{s}, \ldots \text{ und}$$

$$W = \frac{m+n+p+\ldots}{s} = \frac{m}{s} + \frac{n}{s} + \frac{p}{s} + \ldots,$$

oder

$$W = w' + w'' + w''' + \ldots,$$

d. i. die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines von mehreren sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen ist gleich der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in welcher sich 6 gelbe, 8 rothe und 10 ungefärbte Kugeln befinden, eine farbige Kugel zu ziehen?

die Wahrscheinlichkeit, eine gelbe Kugel zu ziehen, ist $\frac{6}{24}$,
„ „ „ rothe „ „ „ „ $\frac{8}{24}$;

daher ist die Wahrscheinlichkeit, eine farbige Kugel zu ziehen,

$$\frac{6}{24} + \frac{8}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$

§. **280.** Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse.

Es sei W die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier Ereignisse A und B, von denen dem ersteren m' Fälle günstig und n' Fälle ungünstig, dem letzteren m'' Fälle günstig und n'' Fälle ungünstig sind. Die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind

$$w' = \frac{m'}{m'+n'}, \qquad w'' = \frac{m''}{m''+n''}.$$

Da nun jeder der m' dem Ereignisse A günstigen Fälle mit jedem der m'' dem Ereignisse B günstigen Fälle zusammen eintreffen kann, so gibt es für das Zusammentreffen beider Ereignisse $m'\,m''$ günstige Fälle. Die Anzahl aller möglichen Fälle ist $(m'+n')\,(m''+n'')$, da jeder der $m'+n'$ bei A möglichen Fälle mit jedem der $m''+n''$ bei B möglichen Fälle zusammentreffen kann. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Ereignisse A und B zusammen eintreffen,

$$W = \frac{m'\,m''}{(m'+n')\,(m''+n'')} = \frac{m'}{m'+n'} \cdot \frac{m''}{m''+n''} = w'\,w''.$$

Sind ebenso $w', w'', w''', \ldots$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse A, B, C, ..., so erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse

$$W = w'\,w''\,w''' \ldots,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse ist gleich dem Producte aus den absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse.

Z. B. Es sei ein gewöhnliches Spiel Karten von 32 Blättern nach den Farben in vier Pakete eingetheilt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Coeur-König zu ziehen?

Die W., die Hand auf das Paket der Coeurs zu legen, ist $\frac{1}{4}$; die W., aus diesem Paket den König zu ziehen, $\frac{1}{8}$; daher die W. für das Zusammentreffen dieser beiden Ereignisse $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

§. **281.** Wahrscheinlichkeit für das wiederholte Eintreffen desselben Ereignisses.

Ist w die absolute Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Ereignis eintreffe, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass jenes Ereignis 2-, 3-, 4-, ...rmal nach einander eintreffe,

$$\begin{aligned} w_2 &= w.w = w^2, \\ w_3 &= w.w.w = w^3, \\ w_4 &= w.w.w.w = w^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_r &= w.w.w\ldots r\text{mal} = w^r; \end{aligned}$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis mehrere Male nacheinander stattfinde, ist gleich der sovielten Potenz der

Wahrscheinlichkeit für das einmalige Eintreffen, als Wiederholungen stattfinden sollen.

Z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 3mal nach einander die Summe 7 zu werfen? — Die W., die Summe 7 einmal zu werfen, ist $\frac{1}{6}$, also die W., die Summe 3mal nach einander zu werfen, $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$.

Wenn ein Ereignis wiederholt stattfinden soll, so tritt zuweilen der Fall ein, dass nach jedem Eintreffen desselben sowohl die Anzahl der möglichen als die der günstigen Fälle um 1 kleiner wird. In diesem Falle ist, wenn $\frac{m}{s}$ die Wahrscheinlichkeit für das erste Eintreffen eines solchen Ereignisses ausdrückt, die Wahrscheinlichkeit für das rmalige Wiederholen desselben

$$w_r = \frac{m}{s} \cdot \frac{m-1}{s-1} \cdot \frac{m-2}{s-2} \cdots \frac{m-r+1}{s-r+1}.$$

Z. B. Die W., aus einer Urne, welche 8 weiße und 6 schwarze Kugeln enthält, 4mal nach einander eine weiße Kugel zu ziehen, wenn jede gezogene Kugel nicht wieder in die Urne zurückgelegt wird, ist

$$\frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{10}{143}.$$

§. 282. **Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Combinationen mehrerer Ereignisse.**

Sind s gleich mögliche Fälle, von denen m' dem Ereignisse A, und m'' dem Ereignisse B günstig sind, so ist, wenn

$$\frac{m'}{s} = w' \text{ und } \frac{m''}{s} = w''$$

gesetzt wird, die Wahrscheinlichkeit,

dass A eintrifft	w'
„ A nicht eintrifft.	$1 - w'$
„ B eintrifft	w''
„ B nicht eintrifft.	$1 - w''$
„ A eintrifft, B nicht.	$w'(1 - w'')$
„ A nicht eintrifft, aber B	$(1 - w')\,w''$
„ A und B eintreffen.	$w'\,w''$
„ A und B beide nicht eintreffen .	$1 - w'\,w''$
„ weder A noch B eintrifft	$(1 - w')(1 - w'')$
„ entweder A oder B eintrifft. . . .	$1 - (1 - w')(1 - w'')$.

Auf gleiche Weise läßt sich, wenn die absoluten Wahrscheinlichkeiten w', w'', w''' für das Stattfinden dreier Ereignisse A, B, C bekannt sind, aus denselben die Wahrscheinlichkeit für jede Combination finden, die in Bezug auf das wechselseitige Eintreffen und Nichteintreffen jener drei Ereignisse möglich ist. So erhält man z. B. für die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen drei Ereignissen wenigstens eines eintreffe, den Ausdruck

$$1 - (1 - w')(1 - w'')(1 - w''').$$

Z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln, wenn nicht im ersten, so doch im zweiten Wurf 9 Augen zu werfen?

Hier ist $w' = \frac{1}{9}$ und $w'' = \frac{1}{9}$, daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1 - (1 - w')\ 1 - w'') = 1 - \tfrac{8}{9} . \tfrac{8}{9} = \tfrac{17}{81},$$

Mathematischer Hoffnungswert und rechtmäßiger Einsatz bei Wetten und Glücksspielen.

§. **283.** Wenn mit dem Eintreffen eines Ereignisses der Besitz eines physischen Gutes oder ein Gewinn erworben werden kann, so hat derselbe vor dem Eintreffen jenes Ereignisses einen Wert, welcher von dem Grade der Wahrscheinlichkeit abhängt, die für das Stattfinden des Ereignisses vorhanden ist; man nennt diesen Wert den mathematischen Hoffnungswert oder die mathematische Erwartung. Trifft das Ereignis gewiss ein, so darf man auch vor dem Eintreffen desselben den vollen Gewinn erwarten. Sind aber unter den Ursachen, von denen das Stattfinden des Ereignisses abhängt, a günstige und b ungünstige, so wird das Ereignis nicht mit Gewissheit, sondern unter $a + b$ Fällen nur in a Fällen eintreffen, und es wird daher auch der Gewinn nicht mit dem vollen Werte, sondern nur mit dem so vielten Theile desselben, als die Wahrscheinlichkeit w, ihn zu erhalten, anzeigt, erwartet werden können. Heißt daher h der mathematische Hoffnungswert und g der anzuhoffende Gewinn, so ist

$$h = \frac{a}{a + b} . g = wg,$$

d. h. der mathematische Hoffnungswert eines Gewinnes ist gleich dem Producte aus dem Gewinne und der Wahrscheinlichkeit desselben.

Z. B. Jemand setzt auf zwei Nummern einer Zahlenlotterie, welche 90 Nummern enthält, 1 fl. und gewinnt, wenn seine beiden Nummern gezogen werden, 240 fl.; wie groß ist der mathematische Hoffnungswert?

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Nummern einen Ambo zu machen, ist $\frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$, daher $h = \frac{2}{801} . 240 = \frac{480}{801} = \frac{160}{267}$ fl.

§. **284.** Bei Versicherungen, Wetten und Glücksspielen wird eine bestimmte Summe eingesetzt und dafür im günstigen Falle eine bestimmte Summe gewonnen. Jede rechtmäßige Versicherung, sowie jedes rechtmäßige Glücksspiel beruht auf dem Grundsatze:

Der Einsatz muss dem mathematischen Hoffnungswerte des Gewinnes gleich sein.

Man hat daher für den Einsatz e denselben Ausdruck wie für den mathematischen Hoffnungswerth, nämlich $e = wg$.

Heißen e' und e'' die Einsätze zweier Spieler, welche beziehungsweise die Wahrscheinlichkeit w' und w'' haben, einen Gewinn g zu erhalten, so ist

$$e' = w'g \text{ und } e'' = w''g,$$

daher

$$e' : e'' = w' : w'',$$

d. h. die **Einsätze müssen den Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen, proportioniert sein.**

Z. B. A wettet gegen B, dass er mit zwei Würfeln einen Pasch wirft. Die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, ist für A $\frac{1}{6}$, für B $\frac{5}{6}$; es müssen sich also auch die Einsätze der beiden Spieler, wenn die Wette rechtmäßig sein soll, wie $\frac{1}{6} : \frac{5}{6}$ oder wie $1:5$ verhalten, d. h. B muss 5mal so viel einsetzen, als A.

Wahrscheinlichkeit in Beziehung auf die Lebensdauer des Menschen.

§. 285. Durch Vergleichung der Sterbelisten, die für zahlreiche Orte und durch viele Jahre hindurch geführt wurden, ist man zu Tabellen gelangt, welche angeben, wie viele von einer bestimmten Anzahl in demselben Jahre geborner Menschen in den aufeinander folgenden Jahren noch am Leben sind. Solche Tabellen heißen **Sterblichkeits-** oder **Mortalitätstafeln**. Wir theilen nachstehend eine solche Tafel mit.

Süßmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstafel.

n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n
0	1000	**20**	491	**40**	374	**60**	210	**80**	37
1	750	**21**	486	**41**	367	**61**	201	**81**	32
2	661	**22**	481	**42**	360	**62**	192	**82**	28
3	618	**23**	476	**43**	353	**63**	182	**83**	24
4	593	**24**	471	**44**	346	**64**	172	**84**	20
5	579	**25**	466	**45**	339	**65**	162	**85**	17
6	567	**26**	461	**46**	332	**66**	152	**86**	14
7	556	**27**	456	**47**	324	**67**	142	**87**	12
8	547	**28**	451	**48**	316	**68**	132	**88**	10
9	539	**29**	445	**49**	308	**69**	122	**89**	8
10	532	**30**	439	**50**	300	**70**	112	**90**	6
11	527	**31**	433	**51**	291	**71**	103	**91**	5
12	523	**32**	427	**52**	282	**72**	94	**92**	4
13	519	**33**	421	**53**	273	**73**	85	**93**	3
14	515	**34**	415	**54**	264	**74**	77	**94**	2
15	511	**35**	409	**55**	255	**75**	69	**95**	1
16	507	**36**	402	**56**	246	**76**	62	**96**	0
17	503	**37**	395	**57**	237	**77**	55		
18	499	**38**	388	**58**	228	**78**	49		
19	495	**39**	381	**59**	219	**79**	43		

Diese Tabelle, welche sich auf 1000 in demselben Jahre Geborne bezieht, enthält in der ersten mit n überschriebenen Spalte die Altersjahre der Personen, in der zweiten mit a_n bezeichneten die Zahl der im Alter von n Jahren noch Lebenden. Die Differenz zweier Zahlen der Lebenden gibt die Anzahl der in dem bezüglichen Zeitraume Gestorbenen. So sterben z. B. vom 20. bis zum 30. Lebensjahre $491 - 439 = 52$ Personen. Die Zahl der im nten Altersjahre Gestorbenen ist gleich $a_n - a_{n+1}$.

§. **286. Aufgabe.** Die Wahrscheinlichkeit, dass eine njährige Person das Alter von $n+p$ Jahren erreichen werde, darzustellen.

Von a_n im Alter von n Jahren lebenden Personen leben im Alter von $n+p$ Jahren noch a_{n+p} Personen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine njährige Person das $(n+p)$te Jahr erreichen werde, ist demnach, da a_{n+p} die Anzahl der günstigen und a_n die Anzahl aller gleich möglichen Fälle angibt,

$$w = \frac{a_{n+p}}{a_n}.$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass nämlich eine njährige Person das $(n+p)$te Jahr nicht erleben werde, ist

$$w' = 1 - \frac{a_{n+p}}{a_n}.$$

Beispiele. 1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 24jährige Person das 50ste Jahr erreichen werde?

$$\frac{a_{50}}{a_{24}} = \frac{300}{471} = 0{\cdot}6368.$$

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Eheleuten, von denen der Mann 40, die Frau 30 Jahre alt ist, beide das 60ste Jahr erreichen werden? Die Wahrscheinlichkeit, das 60ste Jahr zu erreichen, ist für den Mann $\frac{a_{60}}{a_{40}}$, für die Frau $\frac{a_{60}}{a_{30}}$, daher die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass beide das 60ste Jahr erleben,

$$\frac{a_{60}}{a_{40}} \cdot \frac{a_{60}}{a_{30}} = \frac{210}{374} \cdot \frac{210}{439} = 0{\cdot}2686.$$

Lebensversicherungsrechnung.

§. **287.** Verpflichtet sich eine Versicherungsanstalt, einer Person oder deren Rechtsnachfolgern gegen eine zu entrichtende Geldsumme in einem bestimmten Falle, welcher von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen abhängt, einen gewissen Capitalsbetrag oder eine bestimmte Leibrente (§. 258) zu zahlen, so heißt der bezügliche Vertrag ein Lebensversicherungsvertrag.

Bei allen Rechnungen über Lebensversicherungen wird der Grundsatz festgehalten, dass der Barwert der Zahlungen, welche die Versicherungsanstalt von den unter gleichen Bedingungen versicherten Personen zu empfangen hat, gleich sei dem Barwerte der Zahlungen, welche die Anstalt an diese Versicherten zu leisten hat. Wir beschränken uns hier auf einige besonders wichtige Aufgaben dieser Art.

Aufgabe. Eine $n$jährige Person will bei einer Versicherungsanstalt ein Capital C so versichern, dass dieses nach p Jahren, wenn die Person damals noch lebt, an dieselbe ausgezahlt werden soll, dass dagegen, falls die Person während der p Jahre stirbt, die eingezahlte Summe zu Gunsten der Anstalt verfällt; wie groß ist der Betrag M (Mise), welcher an die Anstalt sogleich einzuzahlen ist?

Wenn alle a_n Personen, welche in der Sterblichkeitstafel bei dem Alter n angegeben sind, unter denselben Bedingungen der Versicherungsanstalt beitreten, so haben sie zusammen $M \,.\, a_n$ einzuzahlen. Von den a_n Personen leben nach p Jahren noch a_{n+p}; an diese hat die Anstalt je C, also im ganzen den Betrag $C \,.\, a_{n+p}$ zu zahlen, dessen Barwert, wenn hier wie auch in den folgenden Aufgaben der Zinsfuß durch e bezeichnet wird, $\frac{C \,.\, a_{n+p}}{e^p}$ beträgt. Da nun die Barwerte der Einnahmen und der Ausgaben der Anstalt gleich sein sollen, so hat man die Gleichung

$$M \,.\, a_n = C \,.\, \frac{a_{n+p}}{e^p}, \text{ daher } M = C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_n\, e^p}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch durch folgende Schlussweise, die ebenso bei den späteren Aufgaben angewendet werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass die $n$jährige Person das $(n+p)$te Jahr erreichen und dass also die Auszahlung des versicherten Capitals C wirklich erfolgen werde, ist $\frac{a_{n+p}}{a_n}$, daher (nach § 283) der mathematische Hoffnungswert dieses Capitals $C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_n}$, und sein Barwert $C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_n\, e^p}$. Es ergibt sich daher, wie früher,

$$M = C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_n\, e^p}.$$

Ist umgekehrt M gegeben und C zu suchen, so hat man

$$C = M \,.\, \frac{a_n\, e^p}{a_{n+p}}.$$

Beispiel. Wie groß ist der Betrag, den ein Vater an eine Versicherungsanstalt einzahlen muss, damit diese seinem 10jährigen Sohne, wenn er das 24ste Jahr erreicht, ein Capital von 2000 fl. auszahlt, wobei 5% Zinseszins zu rechnen und anzunehmen ist, dass die Einzahlung verfällt, falls der Sohn vor dem 24sten Jahre sterben sollte?

$$M = 2000 \,.\, \frac{a_{24}}{a_{10} \,.\, 1{\cdot}05^{14}} = \frac{2000 \,.\, 471}{532 \,.\, 1{\cdot}05^{14}} = 894{\cdot}32 \text{ fl.}$$

Zu diesem Betrage kommt noch ein Verwaltungskostenzuschlag.

§. 288. **Aufgabe.** Wie groß ist der Betrag M, den eine $n$jährige Person an eine Versicherungsanstalt sogleich einzahlen muss, damit sie, so lange sie lebt, am Ende eines jeden Jahres eine Leibrente B beziehe?

Versichern sich a_n Personen vom Alter n unter gleichen Bedingungen, so haben sie $M \,.\, a_n$ einzuzahlen. Von diesen Personen leben am Ende des 1., 2., 3.,... Jahres noch a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3},... Die Anstalt hat daher an Renten auszuzahlen:

$$B \,.\, a_{n+1}, \quad B \,.\, a_{n+2}, \quad B \,.\, a_{n+3}, \ldots$$

Die Summe der Barwerte dieser Renten ist

$$B \,.\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots\right),$$

wobei die Reihe innerhalb der Klammern bis an das Ende der Sterblichkeitstafel fortzusetzen ist.

Setzt man die Barwerte der Einnahmen und der Ausgaben der Versicherungsanstalt gleich, so ergibt sich

$$M \,.\, a_n = B \,.\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots\right)$$

und daher

$$M = B \,.\, \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots\right),$$

oder

$$M = B \,.\, r_n,$$

wenn

$$r_n = \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \ldots\right) \ldots\ldots 1)$$

gesetzt wird.

Wird B gesucht, so hat man

$$B = \frac{M}{r_n}.$$

Beispiel. Welchen Betrag muss eine 47jährige Person einzahlen, um sich eine Leibrente von 200 fl. zu sichern, die Zinsen zu 4% gerechnet?

Da man $r_{47} = \frac{1}{a_{47}}\left(\frac{a_{48}}{1 \cdot 04} + \frac{a_{49}}{1 \cdot 04^2} + \frac{a_{50}}{1 \cdot 04^3} + \ldots\right) = 11 \cdot 527$ findet, so ist

$$M = 200 \,.\, r_{47} = 200 \,.\, 11 \cdot 527 = 2305 \cdot 4 \text{ fl.}$$

Die Berechnung von r_n, welches den Barwert der Renteneinheit für das Alter n darstellt und ein Hauptelement der Versicherungsrechnung bildet, gestaltet sich meistens sehr mühsam und weitläufig. Wir geben in der nachfolgenden Tabelle die für 4% und 5% bereits ausgerechneten Werte von r_n.

Barwert einer Renteneinheit

nach der Süßmilch-Baumann'schen Sterblichkeitstafel für 4% und 5% berechnet.

n	r_n 4%	r_n 5%	n	r_n 4%	r_n 5%	n	r_n 4%	r_n 5%
0	11·432	9·782	32	14·719	13·067	64	7·293	6·838
1	14·852	12·695	33	14·526	12·916	65	7·053	6·624
2	16·525	14·125	34	14·326	12·758	66	6·817	6·412
3	17·382	14·863	35	14·117	12·592	67	6·589	6·207
4	17·840	15·264	36	13·938	12·452	68	6·372	6·011
5	18·002	15·415	37	13·752	12·307	69	6·170	5·829
6	18·118	15·528	38	13·560	12·115	70	5·990	5·667
7	18·216	15·627	39	13·362	11·997	71	5·774	5·471
8	18·256	15·678	40	13·156	11·883	72	5·580	5·294
9	18·268	15·706	41	12·944	11·662	73	5·418	5·147
10	18·249	15·709	42	12·723	11·483	74	5·220	4·966
11	18·149	15·651	43	12·494	11·296	75	5·058	4·819
12	18·029	15·559	44	12·257	11·101	76	4·854	4·631
13	17·895	15·463	45	12·011	10·896	77	4·691	4·482
14	17·756	15·362	46	11·755	10·682	78	4·476	4·282
15	17·610	15·256	47	11·527	10·494	79	4·304	4·124
16	17·459	15·146	48	11·291	10·297	80	4·202	4·032
17	17·302	15·029	49	11·048	10·093	81	4·053	3·895
18	17·138	14·907	50	10·796	9·880	82	3·818	3·675
19	16·968	14·779	51	10·575	9·695	83	3·632	3·501
20	16·790	14·645	52	10·349	9·505	84	3·533	3·412
21	16·642	14·535	53	10·118	9·309	85	3·322	3·214
22	16·487	14·421	54	9·881	9·108	86	3·196	3·098
23	16·327	14·301	55	9·639	8·900	87	2·877	2·796
24	16·160	14·175	56	9·392	8·687	88	2·591	2·522
25	15·987	14·043	57	9·138	8·468	89	2·368	2·311
26	15·807	13·906	58	8·879	8·243	90	2·284	2·235
27	15·619	13·761	59	8·614	8·010	91	1·851	1·816
28	15·424	13·609	60	8·342	7·771	92	1·406	1·384
29	15·257	13·482	61	8·064	7·525	93	0·949	0·937
30	15·085	13·350	62	7·780	7·272	94	0·481	0·476
31	14·905	13·212	63	7·536	7·055			

Die Berechnung einer solchen Tafel geschieht am einfachsten auf folgende Weise. Da nach der Formel 1)

$$r_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}\left(\frac{a_{n+2}}{e} + \frac{a_{n+3}}{e^2} + \ldots\right), \text{ also}$$

$$\frac{1 + r_{n+1}}{e} = \frac{1}{a_{n+1}}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right) = \frac{1}{a_{n+1}} \cdot r_n\, a_n$$

ist, so folgt

$$r_n = \frac{a_{n+1}\,(1 + r_{n+1})}{a_n\, e} \ldots 2).$$

Man bestimmt nun, z. B. für 4%, und zwar zuerst nach der Formel 1)

$$r_{94} = \frac{1}{a_{94}} \cdot \frac{a_{95}}{1{\cdot}04} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1{\cdot}04} = 0{\cdot}481;$$

sodann nach der Formel 2)

$$r_{93} = \frac{a_{94}\,(1 + r_{94})}{a_{93} . 1{\cdot}04} = \frac{2.1{\cdot}481}{3.1{\cdot}04} = 0{\cdot}849,$$

hierauf nach derselben Formel r_{92}, dann folgeweise r_{91}, r_{90}, u. s. f., was mit Hilfe der Logarithmen leicht auszuführen ist.

§. 289. **Aufgabe. Eine $n$jährige Person will bei einer Anstalt ein Capital C versichern, das nach ihrem Tode ihren Erben ausgezahlt werden soll; wie groß ist der Betrag M, den sie sogleich einzuzahlen hat?**

Treten der Anstalt a_n Personen unter gleichen Bedingungen bei, so muss die Summe ihrer Einzahlungen, nämlich $M . a_n$, gleich sein dem Barwerte aller Capitalien, welche von der Anstalt für die gestorbenen Personen an deren Erben zu zahlen sind.

Von a_n Personen leben nach einem Jahre noch a_{n+1}, die Zahl der Gestorbenen des ersten Jahres ist also $a_n - a_{n+1}$. Ebenso sterben im 2., 3.,... Jahre $a_{n+1} - a_{n+2}$, $a_{n+2} - a_{n+3}$, ... Die Anstalt hat also am Ende des 1., 2., 3.,... Jahres an die Erben der Gestorbenen die Capitalsbeträge

$$C.(a_n - a_{n+1}),\ C.(a_{n+1} - a_{n+2}),\ C.(a_{n+2} - a_{n+3}), \ldots$$

zu zahlen. Die Summe der Barwerte aller dieser Zahlungen ist

$$C.\left[\frac{a_n - a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+2} - a_{n+3}}{e^3} + \ldots\right]$$

$$= C.\left[\frac{a_n}{e} - \left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right) + \frac{1}{e}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= C.\frac{a_n}{e}.\left[1 - \frac{e}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right) + \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= C.\frac{a_n}{e}\left[1 - (e - 1).\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{C}{e}.a_n\left[1 - (e - 1)\, r_n\right],$$

wenn der Ausdruck $\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+3}}{e^2} + \ldots\right)$ durch r_n ersetzt wird (§. 288).

Somit ist

$$M . a_n = \frac{C}{e} . a_n\left[1 - (e - 1)\, r_n\right], \text{ daher}$$

$$M = \frac{C}{e} . \left[1 - (e - 1)\, r_n\right].$$

Ist M gegeben und C zu suchen, so hat man

$$C = \frac{M e}{1 - (e - 1) r_n}.$$

Beispiel. Welches Antrittsgeld hat eine 36jährige Person bei 5% Zinsen an eine Versicherungsanstalt zu zahlen, damit nach ihrem Tode ihre Erben eine Summe von 2500 fl. erhalten?

$$M = \frac{2500}{1 \cdot 05} \cdot (1 - 0 \cdot 05 \,.\, r_{36}) = \frac{2500}{1 \cdot 05} . (1 - 0 \cdot 05 . 12 \cdot 452) = 898 \cdot 54 \text{ fl.}$$

§. **290.** Aufgabe. Eine njährige Person will gegen eine am Anfange jedes Jahres zahlbare Prämie P ein Capital C versichern, das bei ihrem Absterben an die Erben ausgezahlt werden soll; man suche die Beziehung zwischen P und C.

Nimmt man wieder a_n Personen vom Alter n an, so beträgt die von ihnen gleich beim Eintritte an die Anstalt zu zahlende Prämie zusammen $P . a_n$. Nach 1, 2,... Jahren leben noch a_{n+1}, a_{n+2}... Personen; diese zahlen an Prämien $P . a_{n+1}$, $P . a_{n+2}$.

Der Barwert aller Prämien ist also

$$P . \left[a_n + \frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right]$$
$$= P . a_n \left[1 + \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \ldots\right)\right]$$
$$= P . a_n \, (1 + r_n) \quad (\text{§. } 288).$$

Der Barwert aller Leistungen der Anstalt an die Erben der Versicherten ist, wie in der Aufg. §. 289,

$$\frac{C}{e} . a_n \, [1 - (e - 1) \, r_n].$$

Man hat daher

$$P . a_n \, (1 + r_n) = \frac{C}{e} . a_n \, [1 - (e - 1) \, r_n], \text{ oder}$$

$$P . (1 + r_n) = \frac{C}{e} . [1 - (e - 1) \, r_n],$$

aus welcher Gleichung jede der Größen P und C bestimmt werden kann, wenn die andere gegeben ist.

Beispiel. Eine 55jährige Person will auf den Todesfall ihren Erben ein Capital von 4000 fl. versichern; welche jährliche Prämie hat sie bei 4% Verzinsung einzuzahlen?

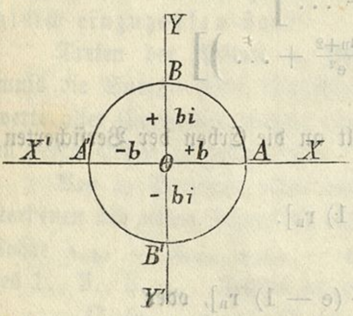
$$P = \frac{4000}{1 \cdot 04} \cdot \frac{1 - 0 \cdot 04 \, r_{55}}{1 + r_{55}} = \frac{4000}{1 \cdot 04} \cdot \frac{1 - 0 \cdot 04 . 9 \cdot 639}{1 + 9 \cdot 639} = 222 \cdot 2 \text{ fl.}$$

Anhang.

Geometrische Darstellung der imaginären und der complexen Zahlen.

1. Geometrische Darstellung der imaginären Zahlen.

§. **291.** Stellt XX′ die unbegrenzte Zahlenlinie, OX die positive und OX′ die negative Richtung dar, so nimmt der Punkt O die Stelle der Null ein; alle denkbaren positiven ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen haben auf OX, ebenso alle negativen Zahlen auf OX′ ihre Stelle und sind dort bestimmbar. Eine Erweiterung des Zahlengebietes in der Längenrichtung der Zahlenlinie ist nicht möglich, weil dieselbe in dieser Richtung lückenlos bereits durch die reellen Zahlen ausgefüllt wird. Es bleibt daher, um auch die imaginären Zahlen darzustellen, bloß die seitliche Erweiterung übrig, d. i. man muss aus der Zahlenlinie in die Zahlenebene hinaustreten.



Zieht man durch den Nullpunkt O der Zahlenlinie XX′ auf diese eine Senkrechte YY′ und beschreibt aus O mit dem Halbmesser $OA = b$ einen Kreis, welcher jene Senkrechte in den Punkten B und B′ schneidet, so ist nach einem bekannten Satze der Planimetrie sowohl OB als OB′ die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten OA und OA′ der als Durchmesser angenommenen Strecke AA′. Wird daher $OA = +b$ und $OA' = -b$ gesetzt, so hat man $OB^2 = +b \,.\, -b = -b^2$, woraus $OB = \sqrt{-b^2}$ $= b\sqrt{-1} = bi$ folgt. OB′ unterscheidet sich von OB bloß durch die entgegengesetzte Lage, so dass, wenn man $OB = +bi$ annimmt, $OB' = -bi$ gesetzt werden muss.

Wenn man nun die Zahlen $+b$ und $-b$ durch diejenigen Punkte A und A′ der Zahlenlinie XX′ repräsentiert, deren Abstände vom Nullpunkte nach Größe und Richtung durch diese Zahlen angegeben werden, so erschein es consequent, als Repräsentanten der Zahlen $+bi$ und $-bi$ die Punkte B und B′ anzunehmen. Die imaginären Zahlen finden daher ihre Darstellung auf einer Geraden, welche auf der ursprünglichen Zahlenlinie in deren Nullpunkte senkrecht steht.

In den Zahlenausdrücken

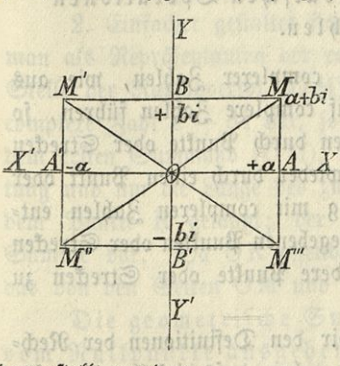
$$+b = b.+1, \qquad +bi = b.+i,$$
$$-b = b.-1, \qquad -bi = b.-i$$

drückt der absolute Wert b aus, dass jede dieser Zahlen b Einheiten enthält; die Zeichen aber, oder im erweiterten Sinne die Richtungsfactoren $+1$, $+i$, -1, $-i$ zeigen an, dass die b Einheiten bezüglich in den Richtungen OX, OY, OX′, OY′ zu zählen sind.

Die Gerade XX′ nennt man die reelle, die Gerade YY′ die imaginäre Zahlenlinie.

2. Geometrische Darstellung der complexen Zahlen.

§. **292**. Die reelle Zahlenlinie XX′ kann als die Abscissenaxe und die imaginäre Zahlenlinie YY′ als die Ordinatenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems betrachtet werden. Legt man durch die beiden Axen eine Ebene und nimmt die reellen Zahlen a und b einer complexen Zahl $a+bi$ als Coordinaten eines Punktes M, und zwar a als Abscisse und b als Ordinate an, so ist dadurch die Lage dieses Punktes in der Ebene unzweideutig bestimmt; umgekehrt entspricht einem Punkte M, dessen Coordinaten a und b gegeben sind, eine einzige complexe Zahl, welche die Abscisse a des Punktes als reellen Bestandtheil und die Ordinate b als reellen Factor des imaginären Bestandtheils enthält. Der Punkt M erscheint sonach als der geometrische Repräsentant der complexen Zahl $a+bi$. Man gelangt zu diesem Punkte der Zahlenebene, wenn man vom Nullpunkte auf der reellen Axe die Strecke a, und dann senkrecht darauf die Strecke b aufträgt.

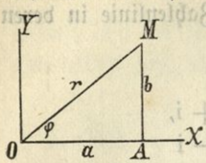


Ebenso ergibt sich, dass die complexen Zahlen $-a+bi$, $-a-bi$, $+a-bi$ bezüglich durch die Punkte M′, M″, M‴ dargestellt werden.

Läfst man a und b alle reellen Zahlenwerte von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig durchlaufen, so erhält der Punkt M, welcher in der Zahlenebene die complexe Zahl $a+bi$ darstellt, alle in dieser Ebene möglichen Lagen.

§. **293**. Eine besonders wichtige Form nehmen die complexen Zahlen an, wenn zu ihrer Darstellung statt der rechtwinkligen die Polarcoordinaten angewendet werden.

Ist M der Punkt der Zahlenebene, welcher die complexe Zahl $a + bi$ darstellt, und ist $OM = r$ der Abstand desselben vom Coordinatenanfangspunkte und $MOX = \varphi$ der Winkel, welchen OM mit der positiven Abscissenaxe bildet, so ergibt sich aus



$$a = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad b = r\sin\varphi$$

unmittelbar

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

In dieser Darstellung heißt die complexe Zahl $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ die reducierte Form, r der Modul und φ das Argument der complexen Zahl $a + bi$.

Zur Bestimmung von r und φ dienen die Gleichungen

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\quad \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

worin r stets positiv zu nehmen ist und φ zwischen den Grenzen 0 und 2π liegend vorausgesetzt wird.

Da r die absolute Länge des Radiusvectors OM und φ den Winkel desselben mit der reellen Axe angibt und daher durch die complexe Zahl $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ der Radiusvector OM der Länge und der Richtung nach bestimmt ist, so wird zur Darstellung der complexen Zahl statt des Punktes M sehr häufig auch der Radiusvector (OM) angenommen, wobei die Klammern andeuten, dass OM nach Länge und Richtung betrachtet wird.

3. Geometrische Deutung der algebraischen Operationen mit complexen Zahlen.

§. **294.** Da die formalen Verbindungen complexer Zahlen, wie aus §. 186 hervorgeht, im allgemeinen wieder auf complexe Zahlen führen, so lässt sich, wenn man gegebene complexe Zahlen durch Punkte oder Strecken darstellt, auch das Resultat ihrer Verbindung wieder durch einen Punkt oder durch eine Strecke darstellen. Jeder Rechnung mit complexen Zahlen entspricht hiernach die geometrische Aufgabe, aus gegebenen Punkten oder Strecken einer Ebene nach vorgeschriebenen Gesetzen andere Punkte oder Strecken zu construieren.

Um diese Gesetze festzustellen, werden wir den Definitionen der Rechnungsoperationen eine solche allgemeine Fassung geben, dass dieselben auch für complexe Zahlen anwendbar werden und dass in ihnen zugleich die bezüglichen für das Rechnen mit reellen Zahlen gegebenen Erklärungen als besondere Fälle enthalten sind.

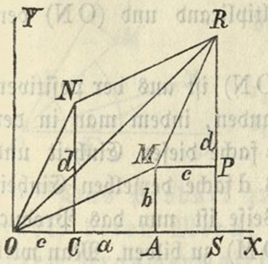
Addition und Subtraction complexer Zahlen.

§. **295.** Wir definieren die Summe zweier Zahlen allgemein als die Zahl, zu welcher man gelangt, wenn man von dem ersten Summand in derselben Weise fortschreitet, wie man von der Null aus zu dem zweiten Summand gelangt.

1. Es sei zu bestimmen die Summe der complexen Zahlen

$$(a + bi) + (c + di).$$

Ist $OA = a$, $AM = b$, $OC = c$, $CN = d$, so stellt der Punkt M die complexe Zahl $a + bi$ und der Punkt N die complexe Zahl $c + di$ dar.



Von Null aus gelangt man zu dem zweiten Summand N, indem man auf der reellen Axe die Strecke $OC = c$ und hierauf parallel zur imaginären Axe die Strecke $CN = d$ aufträgt. Man wird daher nach der obigen Erklärung der Addition vom ersten Summand M aus zuerst parallel zur reellen Axe die Strecke $MP = c$ und hierauf parallel zur imaginären Axe die Strecke $PR = d$ auftragen. Der Punkt R, zu dem man dadurch gelangt, stellt die gesuchte Summe dar. Da dieser Punkt, wie man sogleich sieht, die complexe Zahl $(a + c) + (b + d)\,i$ repräsentiert, so hat man

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i.$$

Zwei complexe Zahlen werden demnach addiert, indem man ihre reellen Bestandtheile für sich, und ihre imaginären Bestandtheile für sich addiert.

Dieselbe Regel wurde auch in §. 186, 1. bei der formalen Behandlung der complexen Zahlen der Addition derselben zugrunde gelegt.

2. Einfacher gestaltet sich die graphische Ausführung der Addition, wenn man als Repräsentanten der complexen Zahlen ihre Radienvectoren annimmt. Stellt der Radiusvector (OM) die complexe Zahl $a + bi$ und (ON) die complexe Zahl $c + di$ dar, so muss man, um ihre Addition auszuführen, von dem ersten Summand (OM), d. i. von dessen Endpunkte M aus in der Richtung und um die Länge des zweiten Summands fortschreiten, wodurch man zu dem Punkte R gelangt; der Radiusvector (OR) stellt dann die gesuchte Summe dar. Da OR offenbar die Diagonale eines Parallelogramms ist, das von den Seiten OM und ON gebildet wird, so kann man sagen:

Die geometrische Summe zweier complexer Zahlen ist die vom Nullpunkte ausgehende Diagonale des von ihren Radienvectoren gebildeten Parallelogramms.

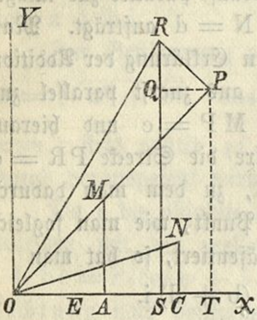
§. **296.** Die Subtraction zweier complexer Zahlen ergibt sich unmittelbar aus der Addition.

Stellt der Radiusvector (OR) den Minuend und (ON) den Subtrahend dar, so betrachte man OR als Diagonale und ON als eine Seite eines Parallelogramms; die andere vom Nullpunkte ausgehende Seite (OM) dieses Parallelogramms stellt dann die gesuchte Differenz dar.

Multiplication und Division complexer Zahlen.

§. **298.** 1. Das **Product zweier Zahlen** definieren wir allgemein als die Zahl, welche aus dem Multiplicand in derselben Weise entsteht, wie der Multiplicator aus der positiven reellen Einheit entstanden ist.

Es sei $a + bi$ mit $c + di$ zu multiplicieren. Nehmen wir OE als die positive reelle Einheit an; (OM) stelle den Multiplicand und (ON) den Multiplicator dar.



Der Multiplicator (ON) ist aus der positiven reellen Einheit OE entstanden, indem man in der Richtung derselben das c fache dieser Einheit und dann senkrecht darauf das d fache derselben Einheit auftrug. Auf dieselbe Weise ist nun das Product aus dem Multiplicand (OM) zu bilden. Man wird in der Richtung des Multiplicands (OM) das c fache dieses Multiplicands und dann senkrecht darauf das d fache des Multiplicands auftragen, wodurch man zu dem Punkte R gelangt; der Radiusvector (OR) stellt dann das gesuchte Product dar.

Zur Bestimmung der Coordinaten des Punktes R erhält man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OPT und OMA

$$OT : a = c : 1 \quad \text{und} \quad PT : b = c : 1; \ \text{daher}$$
$$OT = ac \quad \text{und} \quad PT = bc.$$

Ebenso folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke RPQ und OMA

$$PQ : b = d : 1 \quad \text{und} \quad RQ : a = d : 1; \ \text{daher}$$
$$PQ = bd \quad \text{und} \quad RQ = ad.$$

Es ist also

$$OS = OT - PQ = ac - bd, \ \text{und}$$
$$RS = RQ + PT = ad + bc,$$

folglich (OR) der Repräsentant der complexen Zahl $(ac - bd) + (ad + bc)i$, und somit

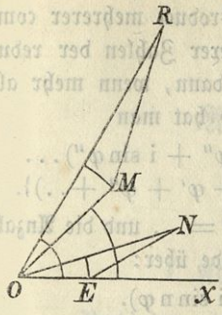
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Hiedurch ist auch die Richtigkeit der in §. 186, 3. für die Multiplication complexer Zahlen gegebenen Vorschrift nachgewiesen.

2. Ganz einfach stellt sich die Multiplication zweier complexer Zahlen, wenn dieselben in der reducierten Form gegeben sind.

Es sei das Product $r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \,.\, r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ zu bestimmen. Man nehme $OE = + 1$ an, (OM) stelle den Multiplicand und (ON) den Multiplicator dar.

Der Multiplicator (ON) ist aus der positiven Einheit OE entstanden, indem man diese in der Zahlenebene um O um den Winkel φ_2 drehte und in dieser Richtung die r_2 fache Länge der Einheit auftrug. Man wird daher ebenso auch den Multiplicand (OM) um den Winkel φ_2 drehen und in der neuen Richtung die r_2 fache Länge dieses Multiplicands auftragen, wodurch man (OR) als das gesuchte Product erhält.



Da nach der Construction zu (OR) der Modul $r_1 r_2$ und das Argument $\varphi_1 + \varphi_2$ gehört, so hat man

$$r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \,.\, r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) = r_1 r_2 \,.\, \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\}.$$

Das Product zweier complexer Zahlen ist eine complexe Zahl, deren Modul gleich ist dem Producte der Moduln und deren Argument gleich ist der Summe der Argumente der Factoren.

Aus der voranstehenden Entwicklung folgt, dass die Dreiecke OMR und OEN ähnlich sind.

Zu demselben Resultate, das wir oben auf graphischem Wege abgeleitet haben, gelangt man auch, wenn man die beiden complexen Zahlen nach der für reelle Zahlen geltenden Vorschrift multipliciert und dann i^2 durch -1 ersetzt. Man erhält nämlich

$$\begin{aligned} & r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \,.\, r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \,.\, \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ + i (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) \end{array} \right\} \\ &= r_1 r_2 \,.\, \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\}. \end{aligned}$$

§. **299.** Der Quotient zweier complexer Zahlen

$$r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) : r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

ergibt sich durch Umkehrung der in §. 298, 2. gelösten Multiplicationsaufgabe.

Stellt in der bezüglichen Figur das Product (OR) den Dividend $r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ und der eine Factor (OM) den Divisor $r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$ dar, so gelangt man zu dem Quotienten (ON) als dem andern Factor, indem man ein dem Dreiecke OMR ähnliches Dreieck OEN so construiert, dass die mit OM homologe Seite OE der Einheit gleich ist. Dann ergibt sich $ON : r_1 = 1 : r_2$, daher $ON = \frac{r_1}{r_2}$.

Der Modul des gesuchten Quotienten (ON) ist also $\frac{r_1}{r_2}$; das Argument desselben ist $EON = MOR = \varphi_1 - \varphi_2$. Man hat demnach

$$\frac{r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\}.$$

Potenzieren einer complexen Zahl.

§. **300.** Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo der Potenzexponent eine ganze positive Zahl ist, und bilden zunächst ein Product mehrerer complexer Zahlen. Da das für das Multiplicieren complexer Zahlen der reducierten Form in §. 298, 2. nachgewiesene Gesetz auch dann, wenn mehr als zwei Factoren vorhanden sind, seine Giltigkeit behält, so hat man

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \,.\, r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') \,.\, r''(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'') \ldots$$
$$= rr'r'' \ldots \{\cos(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) + i\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots)\}.$$

Setzt man nun $r = r' = r'' = \ldots$, $\varphi = \varphi' = \varphi'' = \ldots$ und die Anzahl der Factoren $= n$, so geht die Gleichung in die folgende über:

$$\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Diese Gleichung ist unter dem Namen der Moivre'schen Binomialformel bekannt; sie enthält den Satz:

Die nte Potenz einer complexen Zahl ist wieder eine complexe Zahl, deren Modul gleich ist der nten Potenz des Moduls der Basis und deren Argument gleich ist dem nfachen Argumente der Basis.

Aufgaben-Sammlung.

I. Addition und Subtraction.

1. Addition mit absoluten ganzen Zahlen.

Verbindung der Addition mit sich selbst. (§§. 12 und 13.)

1. $5a + 2a$.

2. $7m + 5m$.

3. $23p + 19p$.

4. $15x + 21x$.

5. $(x + 2) + 6$.

6. $(4a + 7) + 2a$.

7. $(m + 2n) + 3m$.

8. $(7x + 6y) + 7y$.

9. $3m + 4m + 6m$.

10. $15a + 3b + 9b$.

11. $(2a + 3b + 4c) + 3a$.

12. $[(7p + 5q) + 3p] + 5q$.

13. $2p + 3q + 5p + 3q + q$.

14. $m + 6m + 3n + 7m + 9n$.

15. $8 + (6 + a)$.

16. $10y + (12x + 5y)$.

17. $7m + [3m + (2m + 8n)]$.

18. $3a + [7a + (5a + b)]$.

19. $5p + [(7p + 8q) + 6q]$.

20. $[15x + \{5x + (7y + x)\}] + 2y$.

21. $(x + 3) + (x + 1)$.

22. $(3a + 4m) + (3a + 2m)$.

23. $\{(3a + 4b) + 2c\} + \{6a + (4b + 5c)\}$.

24. $\{(2x + 3y) + (5x + 2y)\} + [\{4x + (5x + y)\} + 6y]$.

25.
$$\begin{array}{r} 6x + 5y \\ x + 7y \\ 8x + y \\ \hline \end{array}$$

26.
$$\begin{array}{r} a + 2b + 3c \\ 2a + 3b + c \\ 3a + b + 2c \\ \hline \end{array}$$

27.
$$\begin{array}{r} 8a + 7b + 6c + 5d \\ 9a + 6b + 7c + 4d \\ 7a + 5b + 8c + 6d. \\ \hline \end{array}$$

28.
$$\begin{array}{r} 3m + 2n + 6p + 5q \\ m + 3n + 6p + 6q \\ 5m + 6n + 2p + 4q. \\ \hline \end{array}$$

29. $(7a + 6b) + (16a + 3b) + (13a + 20b) + (5a + 6b)$.

30. $(6x + 7y + 5z) + (5x + 6y + 7z) + (2x + y + 3z) + (x + 3y + 4z) + (4x + 2y + z)$.

2. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen.

Verbindung der Subtraction mit sich selbst und mit der Addition.

(§§. 17 — 24.)

1. $4a - 2a$.

2. $4a - 4a$.

3. $(x + 7) - 2$.

4. $(6p + 5) - 3p$.

5. $(9m + 2n) - 6m$.
6. $8n + n - 6n$.
7. $[(3x + 5) + 2x] - 4x$.
8. $3m + 9m + m - 5m$.
9. $(a - 2) + 5a$.
10. $(7m - 3a) + 2a$.
11. $(8x - 4y) + 7x$.
12. $[(5z - 7) + 3z] + 4$.
13. $6 + (n - 4)$.
14. $x + (8x - 4a)$.
15. $7a + (3a - 2b)$.
16. $15m + [(4m - 3) + 2]$.
17. $12 - (4 + m)$.
18. $9y - (2x + 7y)$.
19. $(6x + 4y) - (3x + 2y)$.
20. $5m - [(2m + 3a) + 2m]$.
21. $(3a - 4) - 6$.
22. $(16y - 8x) - 8y$.
23. $[(5x - 2) - 2x] - 3$.
24. $5a + 7b - 2b - 4a$.
25. $5y - (8z - 3y)$.
26. $(m + n) - [m - (a - n)]$.
27. $(2x - 4) - (x - 1)$.
28. $7a + (8a - 2) + (9a - 4)$.
29. $[x - (m + n)] + [x - (m + p)] + [x - (n + p)]$.
30. $(5x - 2y) - (x - 2y)$.
31. $(9m - 4n) - (4m - 3n)$.

32.
$$\begin{array}{r} 5a - 3b \\ 2a - b \\ - \;\; + \;\; \\ \hline \end{array}$$

33.
$$\begin{array}{r} 7b - 3c \\ 2b - 2c \\ \hline \end{array}$$

34.
$$\begin{array}{r} 17x - 15y \\ 8x - 9y \\ \hline \end{array}$$

35.
$$\begin{array}{r} 20m - 27n + 12p \\ 15m - n + 12p \\ \hline \end{array}$$

36. $(17p + 15q - 13r - 11s) - (5p - 6q - 7r + 8s)$.
37. $(5a + 2b - 3c) - (2a - 3b + 5c) - (a - 2b - 4c)$.
38. $(3x - 5y - 7z) + (7x + 4y - 3z) - (6x - 3y + 10z)$.
39. $7a - (3c - 6b) - (6a - 3c) - 3b + (3a - 8c)$.
40. $(8m - 5y) + [(2y - 7m) - (y - 3m)]$.
41. $(x + y) - [x - \{a - (y - x)\}]$.
42. $2x - [(3a + 4x) - (4x - 1)] - (x - 2a - 2)$.
43. $(8m - 5x) - (2m - 3n - 4x) + [(3x - 2n) - (4m + 3n)]$.

Bestimme die Werte folgender Ausdrücke für $a = 4$, $b = 3$:

44. $(8a + 7b) - (5a - 4b) - (2a - b)$;
45. $8a + (7b - 5a) - \{(4b - 2a) - b\}$;
46. $8a + (7b - 5a) - \{4b - (2a - b)\}$;
47. $(8a + 7b) - \{5a - (4b - 2a) - b\}$.

Bestimme folgende Ausdrücke:

48. $A + \{B - (C + D)\}$;
49. $A - \{B + (C - D)\}$;
50. $A + \{B - (C - D)\}$;
51. $A - \{B - (C - D)\}$;

wenn $A = 6a - (2b + 3c)$, $B = 3a + (3b - 4c)$,
$C = 2a - (b + c)$, $D = a - (4b - 2c)$ ist.

3. Addition und Subtraction mit algebraischen ganzen Zahlen.

(§§. 29 — 32.)

1. $(+7a)+(+3a)$. **2.** $(-6m)+(+3m)$.
3. $(+5n)+(-5n)$. **4.** $(-8x)+(-2x)$.
5. $(+2x)-(+x)$. **6.** $(-6a)-(+4a)$.
7. $(+6m)-(-3m)$. **8.** $(-4s)-(-8s)$.
9. $(-4x)+(-2x)-(-x)+(+9x)$.

10.
$$\begin{array}{r} 8a+3b-4c \\ -3a-5b+7c \\ a+4b-5c \\ \hline \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{r} 25x+31y-17z \\ x-29y-19z \\ -22x+8y+37z \\ \hline \end{array}$$

12. Berechne $x-(x-2)+(x-4)-(x-6)$ für $x=4$.
13. $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)-(-x-y+z)$.
14. $[(a-b)-b]-(b-a)$. **15.** $5m-[3m-(-n+m)]$.
16. $x+[(y-x)-(x-y)]$. **17.** $x-[(x+z)-(-x+z)]$.
18. $3m-2n-\{-5n-[6m-\{4n-[-3m-(5m-2n)]\}]\}$.
19. $2a+3b-\{2a-[-2a+3b-\{(2a+3b)-(2a-3b)\}]\}$.
20. $[6x+7y-\{-6x+7y-[(6x+7y)-(6x-7y)-6x]\}]$
$-[6x-\{(6x-7y)-(6x+7y)\}]$.

II. Multiplication und Division.

1. Multiplication mit absoluten ganzen Zahlen.

Verbindung der Multiplication mit sich selbst. (§§. 37 und 38.)

1. $a^3.a^4$. **2.** $m^3.m^5.m$. **3.** $x^m.x^n.x^p.z^q$
4. $xy.z$. **5.** $3a.b$. **6.** $5mn.2$.
7. $a.bx$. **8.** $m.6yz$. **9.** $a^3.4a^2$.
10. $2a.4b$. **11.** $8xy.7x$. **12.** $2y^3.4y^2$.
13. $7a^2x.ax^2$. **14.** $4z^3.5bz^2$. **15.** $6m^3n^4.5m^3n^2$.
16. $a.2a.3a$. **17.** $xy.xy.xy$. **18.** $z^2.2z^3.3z$.
19. $a^3b.5a^2b^2.8ab^3$. **20.** $x^3.3x^2y.3xy^2.y^3$.

Verbindung der Multiplication mit der Addition und Subtraction.

(§§. 39 — 44.)

21. $(x+a).b$. **22.** $(a+1).5$. **23.** $(x+5).4-2x$.
24. $(3m+2n).5p$. **25.** $(a^2b+ab^2).ab$. **26.** $(6m+5m^2).2m$.
27. $am+bm$. **28.** $5x^2+9x^2$. **29.** $3y^3+5y^3$.
30. $4a+4b$. **31.** ax^2+ay^2. **32.** $(a+m)x+(a-m)x$.
33. $m(b^2-x^2)+n(b^2-x^2)$. **34.** $6m+6n+6p$.

35. $(a - b)\,z$. **36.** $(m - 1).m$. **37.** $8x + (7 - x).3$.
38. $(4a - 3b).5c$. **39.** $(2x^2 - x).3x$. **40.** $(ax^3 - by^3).mxy$.
41. $am - bm$. **42.** $a.10^m - b.10^m$. **43.** $15ay^2 - 9ay^2$.
44. $3x - 3y$. **45.** $7x - 7y + 7$. **46.** $ax + ay - a$.
47. $3a^2 - a^2 + 5b^2 - 3b^2$. **48.** $5x - 5y + 6a - 6b$.
49. $a(3x + 2) - 3b(3x + 2) + 2a(3x + 2)$.

Addiere

50.
$$\begin{array}{l} 8mx + 5ny \\ 3mx - 7ny \\ mx - 3ny \\ \hline \end{array}$$

51.
$$\begin{array}{r} 6a^4 - 9a^3 + 12a^2 \\ 4a^3 - \;\;6a^2 + 8a \\ 2a^2 - 3a + 4 \\ \hline \end{array}$$

Subtrahiere

52.
$$\begin{array}{l} amx + bny - cpz \\ 3mx - 2ny + \;\;pz \\ \hline \end{array}$$

53.
$$\begin{array}{l} 15x^3 - 26x^2 + 33x - 10 \\ 15x^3 - 20x^2 + 25x \\ \hline \end{array}$$

54. $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$.
55. $7xy - [7yz - (3xz - 2xy) + 3xy] - (6yz - 2xz)$.
56. $b.(x + y)$. **57.** $5.((a + 1)$. **58.** $m.(p + 5)$.
59. $6.(m + n) - 5m$. **60.** $3x.(a^2 + b^2)$. **61.** $12a^2.(3x^2 + 2y^2)$.
62. $a.(b - 1)$ **63.** $b.(x - y)$. **64.** $8.(3 - m)$.
65. $5.(z - 2) + 7$. **66.** $5m.(ax^3 - by^3)$. **67.** $2a^2b^2.(a^2b - ab^2)$.
68. $\{(3a - 2b)\,a^2 - (2a - 3b)\,b^2 + (a + b).2ab\}.4a^2b^2$.
69. Berechne folgende Ausdrücke für $m = 20$, $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$:
a) $m - (x.y + z)$; c) $(m - x)\,y + z$;
b) $m - x\,(y + z)$; d) $(m - x.y) + z$.

---

70. $(x + a)\,(x + b)$. **71.** $(x + a)\,(x - b)$.
72. $(x - a)\,(x + b)$. **73.** $(x - a)\,(x - b)$.
74. $(a + 1)\,(b + 1)$. **75.** $(m + 1)\,(m + 2)$.
76. $(y + 3)\,(y - 5)$. **77.** $(z - 4)\,(z - 6)$.
78. $(5x + 3a)\,(5x + 4b)$. **79.** $(a^m + b^m)\,(a^n - b^n)$.
80. $(3x^2 + 2y^2)\,(4x^2 + 5y^2)$. **81.** $(ax^m - by^n)\,(bx^n + ay^m)$.
82. $(2a^2 + 3b^2)\,(5a^2 - 4b^2) - (10a^4 - 12b^4)$.
83. $(x + y)^2$. **84.** $(a + 1)^2$. **85.** $(p + 2)^2$.
86. $(x - y)^2$. **87.** $(a - 1)^2$. **88.** $(p - 2)^2$.
89. $(10m + n)^2$. **90.** $(2x + y)^2$. **91.** $(x - 2y)^2$.
92. $(3m - 2n)^2$. **93.** $(3a^2 + 4b^2)^2$. **94.** $(5p^3 - 3q^3)^2$.
95. $(x + 3)^2 - 6x$. **96.** $(y - 4)^2 + 8y$.
97. $(x + a)^2 + (x - a)^2$. **98.** $(x + a)^2 - (x - a)^2$.
99. $(ax^2 + by^2)^2 - 2abx^2y^2$. **100.** $(a^2x - b^2y)^2 + (a^2x + b^2y)^2$.
101. $(x + y)\,(x - y)$. **102.** $(a + 5)\,(a - 5)$.
103. $(x + a)\,(x - a) + a^2$. **104.** $y^2 - (y + 2)\,(y - 2)$.

105. $(15a + 9b)(15a - 9b)$. **106.** $(a^m + b^n)(a^m - b^n)$.
107. $(3a^2 - 2b^2)(3a^2 + 2b^2)$. **108.** $(5x^3 + 3x^2y)(5x^3 - 3x^2y)$.
109. $(mx^3 + ny^3)(mx^3 - ny^3) + 2ny^3(mx^3 + ny^3)$.
110. $(3a^2 + 5b^2)(3a^2 - 5b^2) - (3a^2 + 7b^2)(2a^2 - 4b^2)$.
111. $(5x + a)(2x - a) - (4x - 3a)(7x + a) + (3x - a)(6x + 2a)$.

---

112. $(5a - 2b + 1).7$. **113.** $(2x + 5y - 3z).4xyz$.
114. $(m + 2m^2 - 3m^3).5m$. **115.** $(a^2 + 5a - 9).6a^2$.
116. $(8xy^3 + 5x^2y^2 - 3x^3y).12x^2y^2$.
117. $(3z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z).6z^2$.
118. $(4m^3 - 3m^2n + 2mn^2 - n^3).3m^2n^2$.
119 $(3x^2 + 5x + 7).5x - (4x^2 - 6x - 8).3x$.
120. $mnp.(10m - 7n + 4p)$. **121.** $3ax.(a^2 + ax + x^2)$.
122. $5a^2.(3x^2 - 8xy + 2y^2)$. **123.** $x^3.(x^3 - x^2 + x - 1)$.
124. $4a^2b^4.(5a^2b^3 - 7a^3b^2 - 5a^4b - 3a^5)$.
125. $7x^2y.(2x^2y - 2xy^2 - 3xz^2 + 3y^2z) + x^2y^2.(14xy - 21yz)$.

---

126. $(a + 2b + 3c)(3m + 2n)$. **127.** $(2a - b + 3c)(5m - n)$.
128. $(8x + 6y + 4)(5a - 7)$. **129.** $(7x + 5y - 3)(3a + 5)$.
130. $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$. **131.** $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.
132. $(z^2 - 2z + 1)(6z + 3)$. **133.** $(5y^2 + 6y - 7)(4y - 5)$.
134. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3)(a - 2b)$.
135. $(16x^4 + 8x^2y^2 + y^4)(4x^2 - y^2)$.
136. $(4a^4 - 12a^2b^3 + 9b^6)(2a^2 - 3b^3)$.
137. $(2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2)(x - 1)$.
138. $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b) + (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$.
139. $(5x^2 + 4x - 3)(4x + 8) - (4x^2 - 3x - 6)(5x + 4)$.
140. $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a + 1)$.
141. $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1)$.
142. $(x^{5m} - x^{4m} + x^{3m} - x^{2m} + x^m - 1)(x^m + 1)$.
143. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$.
144. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$.
145. $(a + b)^3$. **146.** $(a - b)^3$. **147.** $(2x + 3y)^3$.
148. $(ax^2 - by^2)^3$. **149.** $(8a^2 + 7b^2)^3$. **150.** $(ax^m - bx^n)^3$.
151. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. **152.** $(x + 3)(x - 2)(x + 4)$.
153. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4.)$
154. $(x + a)(x + b)(x + c)$.
155. $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$.
156. $(a + b + c)^2$. **157.** $(3x - 2y + z)^2$.
158. $(y^2 - 4y + 4)^2$. **159.** $(ax^2 + by^2 + c)^2$.

160. $(3a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 2b^3)(4a^2 - 3ab + b^2)$.
161. $(5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x + 7)(6x^2 + 4x - 7)$.
162. $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$.
163. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + 5)(2a^2b - 3ab^2 + 4b^3 - 5)$.
164. $(ax^3 + bx^2 + cx + d)(mx^3 + nx^2 + px + q)$.
165. $(x^{4m} - 2x^{3m}y^n + 2x^{2m}y^{2n} - 4x^my^{3n} + 4y^{4n})(x^{2m} + 2x^my^n + 2y^{2n})$.
166. $(m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 3m + 1)(m^3 - 3m^2 + 3m - 1)$.
167. $(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$.
168. $(a^2 - 2ab + 3b^2)(3a^2 + ab - 2b^2)(2a^3 - 3b^3)$.
169. $(a^2 - 4a - 6)(a^2 - 4a + 6)(a^2 + 4a - 6)$.
170. $(4x^2 - 3x + 2)(3x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 3)$.
171. $(a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2)$
$(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2)$.
172. $[x^2 + (a + b)x + (a^2 + b^2)][x^2 - (a - b)x + (a^2 - b^2)]$.

---

2. Division mit absoluten ganzen Zahlen.

Verbindung der Division mit sich selbst und mit der Multiplication.

(§§. 48—52.)

1. $x^5 : x^3$. **2.** $a^4 : a$. **3.** $a^{m+n} : a^n$.
4. $15a : 5$. **5.** $mx : x$. **6.** $4ab.px : b$.
7. $2a(m - 1) : a$. **8.** $50ab : 2a$. **9.** $8abxy : ax$.
10. $12x^6 : 3x^4$. **11.** $8a^2c : 4a$. **12.** $7a^2y^4 : ay^4$.
13. $9a^2b^2x : 3abx$. **14.** $(x + y)(x - y) : (x - y)(x - z)$.
15. $28a^5m^2y^4 : 7a^4my^2$. **16.** $20a^mb^nx^p : 5a^{m-1}b^{n-2}x^{p-3}$.
17. $\frac{2a}{b}.c$. **18.** $\frac{x}{ny}.ny$. **19.** $\frac{a}{b}.bm$.
20. $\frac{2x}{ay}.a$. **21.** $\frac{a}{bc}.abc$. **22.** $\frac{2x}{5y}.5ax$.
23. $\frac{5a^2}{6bc^3}.3ab$. **24.** $\frac{3x^2}{4y^4}.4z^2$. **25.** $\frac{16ax^m}{25by^{2n}}.5y^n$.
26. $\frac{5ax}{7b} : x$. **27.** $\frac{mxy}{nz} : my$. **28.** $\frac{8ax}{5y} : 3b$.
29. $\frac{15a^3b^2}{4mn} : 5a^2b$. **30.** $\frac{6a^2x^4}{5by} : 3ax^2$. **31.** $\frac{4m^2n^3}{7p^2} : 2p^3$.
32. $(15x^2y^2 : 5x) : 3y$. **33.** $(2m^3x^3 : ny^2) : 3n^2y$.
34. $mn.\frac{m}{np}$. **35.** $15x.\frac{4y}{3x}$. **36.** $3x^2y.\frac{2z}{3xy}$.
37. $5my^3.\frac{8abx^2}{5my}$. **38.** $2a^2x.\frac{3x}{4a^2b^2}$. **39.** $4a^2bc^2.\frac{5x}{2a^2b^2c}$.
40. $x : \frac{x}{y}$. **41.** $y : \frac{x}{y}$. **42.** $xy : \frac{x}{y}$.

43. $axy : \frac{x}{z}$. **44.** $5a^4 : \frac{a^2}{b^2}$. **45.** $6a^3m^2x : \frac{2ax}{y^2}$.

46. $2m(m+1) : \frac{2m}{m-1}$. **47.** $b^2 + \left[(b^2+c^2) : \frac{b^2+c^2}{a^2-b^2}\right]$.

48. $15m^2n^3 : (6n^2 : 2nx^2)$. **49.** $4a^3b^5m^4 : (2m^2 : ab^3)$.

50. $\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y}$. **51.** $\frac{mn}{p} \cdot \frac{mp}{n} \cdot \frac{np}{m}$.

52. $\frac{ab}{m} : \frac{an}{b}$. **53.** $\frac{6am}{25bn} : \frac{3a}{5b}$. **54.** $\frac{8m^3x}{5n^3y} : \frac{4mx}{ny}$.

55. $[(a+b)x^2 : (a-b)y^2] : [x^2 : (a-b)y]$.

56. $\frac{x^2y^2}{z^2} : \left[\left\{\left(\frac{xy}{z^2} : \frac{yz}{x^2}\right) : \left(\frac{yz}{x^2} : \frac{y^2}{xz}\right)\right\} : \frac{y}{z}\right]$.

Verbindung der Division mit der Addition und Subtraction.

(§§. 53—57.)

57. $(ax+bx) : x$. **58.** $(8x+8) : 8$.

59. $(a^2b+ab^2) : ab$. **60.** $(12a^3x^4+9ax^4) : 3ax^2$.

61. $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3a}$. **62.** $\frac{7m}{5} + \frac{3m}{5}$. **63.** $\frac{3a}{n} + \frac{5a}{n}$.

64. $\frac{a+b}{n} + \frac{a-b}{n}$. **65.** $\frac{2x+3}{x+1} + \frac{3x+2}{x+1}$.

66. $(am-bm) : m$. **67.** $(mp-np) : p$.

68. $(5a^2x-10ax^2) : 5ax$. **69.** $(8x^3y^3-4x^2y^2z^2) : 4x^2y^2$.

70. $\frac{b}{4} - \frac{c}{4}$. **71.** $\frac{6a}{m} - \frac{5a}{m}$. **72.** $\frac{9x}{4a} - \frac{5x}{4a}$.

73. $\frac{a+b}{m} - \frac{a-b}{m}$. **74.** $\frac{8y-3}{2y+1} - \frac{4y-5}{2y+1}$.

75. $\frac{3x-2y}{x-y} + \frac{4x+3y}{x-y} - \frac{3x+5y}{x-y}$.

76. $\frac{17x+12y}{x+y} - \frac{3x-7y}{x+y} + \frac{2x-3y}{x+y}$.

---

77. $(45am - 25bm + 35cm) : 5m$.

78. $(2a^3 - 6a^2b + 30ab^2) : 2a$.

79. $(5m^4x - 4m^3x^2 - 3m^2x^3) : m^2x$.

80. $(10x^4y^2z - 25x^3y^2z^2 - 15x^2y^2z^3 + 5xy^2z^4) : 5xy^2z$.

81. $(6am - 12bm + 5an - 10bn) : (6m+5n)$.

82. $(a^2+2ab+b^2) : (a+b)$. **83.** $(x^2-2xy+x^2) : (x-y)$.

84. $(4x^2-9y^2) : (2x+3y)$. **85.** $(16a^2-b^2) : (4a-b)$.

86. $(x^{2m}-y^{2n}) : (x^m-y^n)$. **87.** $(81m^8-16n^6) : (9m^4+4n^3)$.

88. $(x^4-1) : (x+1)$. **89.** $(x^{4m}-1) : (x^m-1)$.

90. $(a^5+b^5) : (a+b)$. **91.** $(a^6-b^6) : (a^2-b^2)$.

92. $(a^{7m}+1) : (a^m+1)$. **93.** $(81x^8-16y^8 : (3x^2-2y^2)$.

94. $(x^3+x^2-2x-8) : (x-2)$.

95. $(14x^2 - 31x + 15) : (2x - 3)$.
96. $(6x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 19x - 5) : (3x - 1)$.
97. $(3a^2x^2 - abxy - 2b^2y^2) : (ax - by)$.
98. $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2) : (4a^2 - 2ab)$.
99. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5)$.
100. $(x^{3m} + x^{2m}y^n - x^my^{3n} - y^{4n}) : (x^{2m} - y^{3n})$.
101. $(x^3y^{3m} - x^{n+1}y^{2m+2} + x^{2n+2}y^{m+1} + x^{3n}y^3) : (x^2y^m - x^ny^2)$.
102. $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) : (m^2 + 2mn + n^2)$.
103. $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4) : (2a^2 - 3a + 4)$.
104. $(12x^4 - x^3y - 32x^2y^2 + xy^3 + 20y^4) : (4x^2 + xy - 5y^2)$.
105. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x^2)$.
106. $(15a^4 + 8a^3b - 41a^2b^2 + 10ab^3 + 8b^4) : (5a^2 + 6ab - 8b^2)$.
107. $(63y^8 + 10a^2y^6 - 155a^4y^4 + 10a^6y^2 + 63a^8)$
$: (9y^4 - 5a^2y^2 - 7a^4)$.
108. $(49a^6 + 6a^4 - 51a^2 - 25) : (7a^3 - 6a^2 + 3a - 5)$.
109. $(4x^6 + 15x^4y^2 + 10x^2y^4 - 9y^6) : (2x^3 + x^2y + 4xy^2 + 3y^3)$.
110. $(4 + 5a - 16a^2 - 4a^3 + 4a^4 - 5a^5 + 4a^6) : (4 - 3a + 2a^2 - a^3)$.
111. $(32 + 104x + 100x^2 + 26x^3 - 13x^4 + x^5)$
$: (8 + 12x + 6x^2 - x^3)$.
112. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 - 16b^6)$
$: (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3)$.
113. $[\{x^3 + (a + b - c)x^2 + (ab - ac - bc)x - abc\} : (x + a)]$
$: (x - c)$.
114. $\{(120 - 326x + 329x^2 - 146x^3 + 24x^4) : (4 - 3x)\} : (6 - 7x + 2x^2)$.
115. $(2 - 7x + 16x^2 - 17x^3 + 12x^4) : \{(2 - 7x + 12x^2 - 9x^3) : (2 - 3x)\}$.

---

3. Multiplication und Division mit algebraischen ganzen Zahlen.

Multiplication algebraischer Zahlen. (§. 59.)

1. $7a.(-4)$. **2.** $(-4x^3).2y$. **3.** $(-a^2).(-3a)$.
4. $(-3x).(5xy)$. **5.** $7ab.(-bc)$. **6.** $(-8ay^2).2a^2y$.
7. $(-6a^4).3a^2x$. **8.** $5a^2z^4.(-3b^2z)$.
9. $ab^2y^3.(-a^2b)$. **10.** $(-12m^3xy^2).(-4x^2y)$.
11. $7.(-3).(-5)$. **12.** $(-a).(-b).(-c)$.
13. $(-my).(-my).(-my)$. **14.** $(-5x).(-5x).(-x)$.
15. $(-2z)^3$. **16.** $(+3a^2)^3$. **17.** $(-4xy)^3$.
18. $(-2a^2).3ab^2.5a^2bx$. **19.** $4x^2y^3z.(-xy^2z^3).(-2x^2z)$.
20. $a^{2m-4}b^{3n+2}.(-a^mb^{n-4})$. **21.** $3bx^{2n}.(-4b^2x^{2n-2}).2bx^2$.
22. $3ax.(-4ay).(-2bx).ab.(-5bx)$.
23. $a^2xy.(-mx^2).ny^2.(-bz^2).(-bmx).(-bny)$.

24. $2ax.(-6by) - (-8bx).(-ay) + (-3ab).(-7xy)$.
25. $8.(-3) - (-5).(-6) - 9.(-2) + (-7).(-5)$.
26. Berechne den Ausdruck $x^2 - 6x - 16$ für $x = +8$ und für $x = -2$.
27. Welche Form nimmt der Ausdruck $\frac{xyz}{xy + xz + yz}$ an, wenn sich 1) x in $-x$, 2) x in $-x$ und y in $-y$, 3) x in $-x$, y in $-y$ und z in $-z$ verwandelt?
28. $(5x - 4y).(-3a)$.
29. $(3a - 5b + 7).(-2m)$.
30. $(-3x^2 + 3x - 1).(-5x^2)$.
31. $(5 + 4a - 3a^2).(-6a^2y)$.
32. $8x + (2x - 3y).-4$.
33. $(7a^2 - 4b^2).(-2b^2) + 14a^2b^2$.
34. $(6x^2 - 5z^2).(-2xy^2z) + 3xy^2.[-(3z^3 - 4x^2z)]$.
35. $(5 -- 7x + 6x^2).(-3x^2) + (9x^3 + 4x^2 - x).2x$.
36. $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4).(-2ab)$.
37. $(a + b).(-2a + 3b)$.
38. $(1 - m^2)(1 + m^2)$.
39. $(1 - a^2b^2)^2$.
40. $(-ax + by)^2$.
41. $(a + b - c)(-a + b + c)$.
42. $(-x^2 + 2xy - y^2)(x^2 + 2xy + y^2)$.
43. $(-3x + 5y - 7z)(-7x - 5y + 3z)$.
44. $(a + b - c)(a + b) + (a - b + c)(a + c) + (-a + b + c)(b + c)$.
45. $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)(1 - 3x + 5x^2 - 7x^3)$.
46. $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$.

Division algebraischer Zahlen. (§. 60.)

47. $(-4x) : 4$.
48. $8ab : (-2a)$.
49. $(-6bx^2) : (-bx)$.
50. $18a^7 : (-6a^4)$.
51. $(-12m^4) : (-4m^3)$.
52. $(-14a^4b^2) : 2a^2b$.
53. $(-15x^2y^5) : 3xy^4$.
54. $9ab^2c^3x : (-3ab^2c)$.
55. $(-288a^{3n+x-2}) : 9a^{2n-x+1}$.
56. $(-25a^{m+n}b^p) : (-5a^nb^{p-q})$.
57. $32x^{m-2n+3p}y^{2m-n-p} : (-8x^{m-3n+4p}y^{m-n-2p})$.
58. Berechne $\frac{x - 14}{5 - x} - x + \frac{x - 10}{7 - x} - \frac{5(x - 2)}{3(6 - x)}$ für $x = 8$.
59. $(24a^3b^3 - 15a^4b^2) : (-3a^3b^2)$.
60. $(18am^2y^3 - 27bmy^3 + 36cy) : (-3y)$.
61. $(1 - x^{2m}) : (1 - x^m)$.
62. $(1 - a^5) : (1 - a)$.
63. $(1 - 2x + x^2 - 6x^4 + 8x^6) : (1 - 2x)$.
64. $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10) : (-2x + 5)$.
65. $(30x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 10x - 2) : (-5x^2 + 3x - 1)$.
66. $(27 - 51x - 125x^2 - 2x^3 + 30x^4) : (-3 + 8x + 6x^2)$.
67. $(1 - m - 14m^2 - 14m^3 - 6m^3 - m^5) : (1 + 3m + m^2)$.
68. $(1 - 15x + 72x^2 - 54x^3 - 405x^4 - 243x^5) : (1 - 6x - 9x^2)$.

---

4. Dekadische ganze Zahlen.

(§§. 66 — 70.)

1. $240978 + 97477 + 504336 + 378264 + 615089$.

Addiere die nachfolgenden Zahlen zuerst in verticaler, dann in horizontaler Richtung:

	2.	3.	4.	5.	6.
7.	81312 +	433664 +	243936 +	596288 +	406560
8.	542080 +	216832 +	569184 +	379456 +	54208
9.	189728 +	677600 +	352352 +	27104 +	514976
10.	650496 +	325248 +	135520 +	487872 +	162624
11.	298144 +	108416 +	460768 +	271040 +	623392

12. Suche die Summe von 6 Zahlen, deren erste 235078, und jede folgende um 58505 größer als die vorhergehende ist.

13. $8754219 - 1910862$.

14. $33557799 - 8866442$.

15. Berechne $3874920 + 561083 + 6721859 + 55462873 + 9036199$, und subtrahiere dann von der erhaltenen Summe den ersten Summand, von dem Reste den zweiten Summand, u. s. f.

16. $719308 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 , 8 . 9$.

17. $380792 . 11 . 13 . 31 . 25 . 64 . 125$.

18. $146637 . 99 . 991 . 299$.

19. $734552 . 84399 . 100$.

20. $58379 . 25726 . 432789$.

21. $291728 . 740634 . 12500 . 7999$.

22. $6647830 . 710744 . 918497$.

23. Berechne $A = ab$, $B = ac$, $C = ad$, $D = bc$, $E = bd$, $F = cd$ für $a = 428792$, $b = 920664$, $c = 371963$, $d = 140846$.

24. $897715 : 91$

25. $134676 : 29$.

26. $5791338 : 63$.

27. $309644 : 778$.

28. $3552264 : 309$.

29. $5606912 : 752$.

30. $6245425 : 25$.

31. $22255125 : 125$.

32. Dividiere jede der Zahlen a) 23900625, b) 119503125, c) 167304375 durch jede der Zahlen m) 607, n) 315, p) 125.

33. $1472692768 : 14734$.

34. $36363918357 : 62883$.

---

5. Theilbarkeit der Zahlen.

Größtes gemeinschaftliches Maß. (§§. 73 und 76.)

Suche das gr. g. Maß folgender Zahlen:

1. 637 und 4277;

2. 2091 und 1353;

3. 1404 und 8658;

4. 3552 und 5143;

5. 7774 und 3718;

6. 27671 und 21708;

7. 14539 und 25728;
8. 55660 und 66055;
9. 39215 und 73997;
10. 24955 und 338625;
11. 1701, 6426, 10521;
12. 120582, 145530, 167706;
13. $12a^2 + 7a + 1$ und $6a^2 + 11a + 3$;
14. $x^3 - 49x - 120$ und $x^3 + 10x + 25$;
15. $4m^3 - 16m^2 + 23m - 20$ und $6m^2 - 7m - 20$;
16. $a^3 - a^2b + 3ab^3 - 3b^3$ und $a^2 - 5ab + 4b^2$;
17. $x^6 + 6x^4 + 5x^2 - 12$ und $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6$;
18. $6y^3 + 16y^2 - 22y + 40$ und $9y^3 - 27y^2 + 35y - 25$;
19. $28a^4 + 10a^3 + 39a^2 + 7a + 15$ und $14a^3 - 37a^2 + 15a - 25$;
20. $3z^4 - 8z^3 + 11z^2 - 8z + 3$ und $2z^3 - 9z^2 + 9z - 7$;
21. $15x^4 + 10x^3y + 4x^2y^2 + 6xy^3 - 3y^4$ und $12x^3 + 38x^2y + 16xy^2 - 10y^3$;
22. $6x^4 - 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ und $4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5$;
23. $6x^4 - 5x^2 - 1{,}5x^3 - 4x - 1$ und $2x^2 - 2$;
24. $a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 4a + 7$, $a^4 - 2a^3 + 10a + 7$ und $a^3 - 5a^2 + 11a - 7$.

Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches. (§§. 77 und 78.)

Suche das kl. g. Vielfache folgender Zahlen:

25. 874 und 943;
26. 561 und 1530;
27. 1716 und 2222;
28. 6987 und 8083;
29. 816, 765, 697;
30. 259, 3219, 7548;
31. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ und $2(x^2 - y^2)$;
32. $a^2 - 49a - 120$ und $a^2 + 10a + 25$;
33. $6x^3 - 13x^2 - 45x - 25$ und $x^3 + 2x^2 - 20x - 25$;
34. $a^4 + 3a^3 + 6a^2 + 5a + 3$ und $a^3 + 2a^2 + 2a + 1$;
35. $2a^5 - a^4 - 2a^3 - 2a^2 - 4a - 1$ und $2a^6 - a^5 - 5a^3 - 5a^2 - a$;
36. $21x^3 + 20x^2 - 3x - 2$, $6x^3 - 11x^2 - 12x + 5$ und $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$.

Theilbarkeit dekadischer Zahlen. (§§. 80 — 83.)

Durch welche von den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 25, 100, 1000 sind folgende Zahlen theilbar:

37. a) 312; b) 6225; c) 17280; d) 71016; e) 948656;
38. a) 720; b) 6472; c) 76450; d) 484572; e) 567000;
39. a) 534; b) 8625; c) 10692; d) 734520; e) 350496?

Zerlegung in Factoren. (§§. 85—91.)

40. Gib alle zwischen 1 und 200 liegenden Primzahlen an.

Zerlege folgende Zahlen in ihre Primfactoren:

41. a) 420; b) 504; c) 1260; d) 1694; e) 2025;
42. a) 2268; b) 3075; c) 3828; d) 5376; e) 10528;
43. a) $76a^3$; b) $66ab^2$; c) $26x^2y^2$; d) $72a^3b^2$; e) $60ax^2z^4$.

Suche alle Prim- und alle zusammengesetzten Factoren folgender Zahlen:

44. a) 48; b) 180; c) 210; d) 315; e) 810;
45. a) $18ab$; b) $36x^2$; c) $27mz^2$; d) $165xyz$; e) $114an^2x^3$.

Zerlege nach §. 88, 2. a) in zwei Factoren:

46. $18ab - 15ac$; **47.** $9x^2 - 24xy$;
48. $2a^4 - 4a^3 + 6a^2$; **49.** $ax^4y^2 + bx^3y^3 + cx^2y^4$;
50. $a^3b^2x - a^2b^2x^2 + ab^2x^3$; **51.** $5x^3z^2 - 15x^2z^3 + 25xz^4$.

Zerlege nach §. 88, 2. b) in Factoren:

52. $x^2 + 2x + 1$; **53.** $m^2 - 2m + 1$; **54.** $4a^2 + 12a + 9$;
55. $9b^2 - 12b + 4$; **56.** $y^2 + 10y + 25$; **57.** $x^2 - 6xy + 9y^2$;
58. $4x^2 - 1$; **59.** $9a^2 - 16b^2$; **60.** $25x^2 - 16y^2$;
61. $6x^2 - 54a^2$; **62.** $a^2 - (b - c)^2$; **63.** $(b + c)^2 - a^2$.

Zerlege nach §. 88, 2. c) in zwei Factoren:

64. $x^2 + (a + b)x + ab$; **65.** $x^2 + 7x + 10$;
66. $m^2 + 5mn + 6n^2$; **67.** $x^2 + 2ax + (a^2 - b^2)$;
68. $x^2 - (a + b)x + ab$; **69.** $a^2 - 4a + 3$;
70. $10y^2 - 7yz + z^2$; **71.** $x^2 - 2ax + (a^2 - b^2)$;
72. $x^2 + (a - b)x - ab$; **73.** $m^2 + m - 12$;
74. $a^2 + 2ab - 15b^2$; **75.** $x^2 + 2bx - (a^2 - b^2)$;
76. $x^2 - (a - b)x - ab$; **77.** $z^2 - 6z - 16$;
78. $b^2 - 4bc - 5c^2$; **79.** $x^2 - 2bx - (a^2 - b^2)$.

Suche mittelst Zerlegung in Factoren das gr. g. Maß folgender Zahlen:

80. 84 und 308; **81.** 360 und 680;
82. 108, 450 und 540; **83.** 560, 620 und 760;
84. 693, 819 und 945; **85.** 504, 756, 1260 und 1764;
86. $12acx$, $14a^2x$ und $16ax^2$; **87.** $10x^2y^4$, $5x^3y^3$ und $20x^4y^2$;
88. $m^2 + 2mn + n^2$ und $m^2 - n^2$;
89. $a^2 - 2ab - 8b^2$ und $a^2 + 2ab - 3ab^2 - 6b^3$;
90. $x^4 - 10x^2y^2 + 16y^4$ und $x^4 + 2x^2y^2 - 80y^4$.

Suche mittelst Zerlegung in Factoren das kl. g. Vielfache der Zahlen:

91. 300 und 620; **92.** 240 und 486;
93. 120, 168 und 182; **94.** 105, 144 und 270;

95. 3, 4, 6, 10 und 25; **96.** 2, 5, 9, 20, 21 und 24;
97. 4, 5, 6, 12, 18, 25, 70; **98.** 10, 12, 14, 15, 16, 18, 21;
99. 4, 6, 7, 26, 35, 40, 56; **100.** 8, 12, 16, 24, 32, 36, 256;
101. $a,\ 2a^2,\ 3ab^2,\ 12abm$; **102.** $6amn,\ 10am^2n,\ 5a^2n^2$;
103. $m,\ 5m^2,\ 3n,\ 8mn$ und $15m\,(m-n)$;
104. $3x,\ x-2,\ 5\,(x+2),\ 20\,(x^2-4)$ und $6\,(x+2)^2$.

---

6. Gebrochene Zahlen.

A. Gemeine Brüche.

Formveränderung der Brüche. (§. 96.)

1. Stelle die Brüche $\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8}$ mit dem gemeinschaftlichen Nenner 24 dar.

2. Bringe die Brüche $\frac{1}{a},\ \frac{2m}{3ab},\ \frac{5n}{6ax},\ \frac{3p}{10by}$ auf den Nenner $30abxy$.

Bringe folgende Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner:

3. $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{12}$; **4.** $\frac{7}{8},\ \frac{9}{16},\ \frac{11}{18},\ \frac{13}{20},\ \frac{8}{15},\ \frac{11}{12}$;

5. $\frac{1}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{2}{7},\ \frac{18}{35},\ \frac{19}{40},\ \frac{25}{56}$; **6.** $\frac{1}{m},\ \frac{5a}{3m^2},\ \frac{3bc}{4m^3},\ \frac{4def}{5m^4}$;

7. $\frac{a-1}{a+1},\ \frac{a-2}{a+2},\ \frac{a-3}{a+3}$; **8.** $\frac{y+1}{y-1},\ \frac{y-1}{y+1},\ \frac{y^2+1}{y^2-1}$;

9. $\frac{x+1}{x-1},\ \frac{x^2+2x}{x^2-1},\ \frac{3x}{x+1},\ \frac{x^2-1}{x^2+1}$;

10. $\frac{1-a}{1+a},\ \frac{1+a}{1-a},\ \frac{1+a^2}{1-a^2},\ \frac{1-2a+a^2}{1+2a+a^2},\ \frac{1+2a+a^2}{1-2a+a^2}$.

Kürze folgende Brüche ab:

11. a) $\frac{45}{54}$; b) $\frac{114}{250}$; c) $\frac{840}{1020}$; d) $\frac{1824}{7008}$; e) $\frac{4096}{7424}$;

12. a) $\frac{5.12.18}{4.10.27}$; b) $\frac{6.12.20.28}{4.8.16.30}$; c) $\frac{6.21.24.36.75}{8.27.50.56.60}$;

13. a) $\frac{391}{989}$; b) $\frac{637}{819}$; c) $\frac{765}{5304}$; d) $\frac{2079}{7029}$; e) $\frac{9082}{67735}$.

14. Bestimme den Wert von $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.2.3.4.5}$ für $n = 6$, dann für $n = 8$, und kürze die erhaltenen Brüche ab.

Kürze folgende Brüche ab:

15. a) $\frac{3abx}{12bmx}$, b) $\frac{12a^2x}{28ax^2}$, c) $\frac{15amx^3}{40bmx}$, d) $\frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}$;

16. $\frac{a\,(a+1)}{(a+1)\,(a+2)}$; **17.** $\frac{2m\,(m-1)}{m^2-1}$; **18.** $\frac{15\,(a+b)\,(x-y)}{24\,(a-b)\,(x-y)}$;

19. $\frac{9a+6b-3c}{12ax+8bx-4cx}$; 20. $\frac{12x^3y^3-6x^2y^4}{8x^4y^2+4x^3y^3}$; 21. $\frac{2a-ab-b+2}{3a+ab+b+3}$;

22. $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$; 23. $\frac{1+m-2m^2}{1+3m+2m^2}$; 24. $\frac{8a^2-6a+1}{16a^2-10a+1}$;

25. $\frac{m^2+6m-16}{m^2+5m-24}$; 26. $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2+6xy+5y^2}$; 27. $\frac{a^2-8ax+15x^2}{a^2-11ax-30x^2}$;

28. $\frac{x^4+4x^3-5x+2}{x^3-x^2-3x+2}$; 29. $\frac{2a^3-a^2+4a+7}{2a^4-15a^3+20a^2-48a+14}$.

Berechne:

30. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ für $x=2$; 31. $\frac{x^2-a^2}{2x^2-3ax+a^2}$ für $x=a$;

32. $\frac{x^2+6x-16}{x^2+5x-24}$ für $x=-8$; 33. $\frac{x^3-4x^2-3x+18}{3x^3-22x^2+51x-36}$ für $x=3$;

34. $\frac{y^4+y^3-y^2-4y-12}{y^4-2y^2-8}$ für $y=2$ und für $y=-2$.

Addition und Subtraction der Brüche. (§§. 97—99.)

35. $\frac{4x}{3}+\frac{2x}{3}$. 36. $\frac{3m}{4}-\frac{m}{4}$.

37. $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a$. 38. $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$.

Drücke die letzten zwei Formeln mit Worten aus.

39. $\frac{x}{10}-\frac{y+z}{10}$. 40. $\frac{x}{8}-\frac{y-z}{8}$.

41. $\frac{a+4x}{3}+\frac{2a-x}{3}$. 42. $\frac{5m+n}{4}-\frac{m-3n}{4}$.

43. $\frac{a+b+c}{3m}+\frac{a-b}{3m}+\frac{a-c}{3m}$. 44. $\frac{m-a}{m+n+p}+\frac{n-p}{m+n+p}+\frac{2p+a}{m+n+p}$.

45. $a+\frac{b}{a}$. 46. $3x-\frac{5y^2}{2x}$. 47. $a+\frac{x^2-1}{x}$.

48. $x-\frac{x^2-1}{x}$. 49. $m-\frac{m+n}{2}$. 50. $\frac{m+n}{2}-n$.

51. $1+\frac{a-b}{a+b}$. 52. $1-\frac{a-b}{a+b}$.

53. $\frac{(x+y)^2}{4xy}-1$. 54. $\frac{(x-y)^2}{4xy}+1$.

55. $x+y+\frac{2y^2}{x-y}$. 56. $a-1+\frac{a^2+1}{a+1}$.

57. $m+n-\frac{m^2+n^2}{m+n}$. 58. $a^2+b^2-\frac{a^4-2b^4}{a^2-b^2}$.

59. $1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$. 60. $1-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$.

61. $x^2 - y^2 - \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2 + x^2}$. 62. $x - 1 - \frac{4x^3 - 4x^2 + x}{4x^2 + 4x + 1}$.

63. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a}{a + 1}$.

---

64. $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b}$. 65. $\frac{3a - 2}{5} + \frac{2a + 3}{2}$.

66. $\frac{m + n}{2} + \frac{m - n}{3}$. 67. $\frac{a + b}{7} - \frac{a - b}{8}$.

68. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2$. 69. $1 - \frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}$.

70. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}$. 71. $\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} - \frac{z^2}{ab}$.

72. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$. 73. $\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$.

74. $\frac{3a + 4}{3} - \frac{7a + 5}{4} - \frac{8 - 7a}{6} + \frac{5 - 3a}{8} - \frac{3 - 7a}{12}$.

75. $\frac{a + x}{a} - \frac{2x}{a + x}$. 76. $\frac{1}{2(x - y)} - \frac{1}{2(x + y)}$.

77. $\frac{x}{x + 1} + \frac{y}{y + 1}$. 78. $\frac{x}{x - 1} - \frac{y}{y - 1}$.

79. $\frac{m + n}{m - n} + \frac{m - n}{m + n}$. 80. $\frac{m + n}{m - n} - \frac{m - n}{m + n}$.

81. Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ sollen 1) um m vermehrt, 2) um m vermindert werden; wie groß ist die Differenz zwischen dem gegebenen und dem jedesmal entstehenden neuen Bruche?

82. $\frac{6 + 3x^2}{9 - 4x^2} - \frac{2 - 3x^2}{3 + 4x^2}$. 83. $\frac{3a^2 - 4a + 5}{6a - 7} + \frac{4a^2 + 5a - 6}{8a - 9}$.

84. $\frac{2}{2x - 1} - \frac{5}{3x - 1} + \frac{4}{2x - 3}$. 85. $\frac{2x}{x - 1} + \frac{3x + 1}{x - 2} - \frac{4x - 3}{x - 3}$.

86. $\frac{2x + 3y}{6x(2x - 3y)} - \frac{2x - 3y}{6x(2x + 3y)}$. 87. $\frac{a^2 + 5ab - b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2} - \frac{a - b}{a + 2b}$.

88. $\frac{2x - 5y}{9x + 3y} - \frac{6x + 5y}{12x + 4y} + \frac{3x + 4y}{3x + y}$.

89. $\frac{1}{4 + 2a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a + a^2}$. 90. $\frac{2m - 4n}{3m - 3n} - \frac{1}{2} - \frac{m^2 - 5mn}{6m^2 - 6mn}$.

91. $\frac{1}{x - y} - \frac{x + y}{x^2 - xy} + \frac{x - 2y}{2xy}$. 92. $\frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{1}{(x + y)^2} + \frac{1}{(x - y)^2}$.

93. $\frac{a + 1}{a - 1} + \frac{a + 2}{a - 2} + \frac{a + 3}{a - 3}$. 94. $\frac{ab}{a + b} + \frac{ac}{a + c} + \frac{bc}{b + c}$.

95. $\frac{a + b - c}{ab} + \frac{a - b + c}{ac} + \frac{b + c - a}{bc}$.

96. $\frac{5a - 8b}{a + b} + \frac{3a - b}{a - b} - \frac{a - 4b}{a + b} + \frac{a + 5b}{a - b}$.

97. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-b^2} + \frac{2a}{a^2+2ab+b^2}$.

98. $\frac{y+1}{y-1} + \frac{y-1}{y+1} + \frac{y^2+1}{y^2-1} + \frac{y^2-2y+1}{y^2+2y+1}$.

99. $1 - \frac{a-1}{a+1} + \frac{a^2-a+1}{a^2+1} - \frac{a+1}{a-1} + \frac{a^2+a+1}{a^2-1} - \frac{2a-4}{a^4-1}$.

100. $\frac{1}{a-(b+c)} + \frac{1}{b-(a+c)} + \frac{1}{c-(a+b)}$.

101. $\frac{ab}{(a-c)(b-c)} - \frac{ac}{(a-b)(b-c)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)}$.

102. $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b + \frac{4}{5}c\right) + \left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c\right)$.

103. $\left(\frac{3}{4}x + \frac{7}{6}y\right) + \left(\frac{5}{3}x + \frac{4}{5}y\right) + \left(\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y\right)$.

104. $\left(\frac{2a}{3} - \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5}\right) - \left(\frac{a}{2} - \frac{2b}{3} + \frac{3c}{4}\right)$.

105. $\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{9}\right) + \left(\frac{5x^2}{6} - \frac{3xy}{5} + \frac{7y^2}{12}\right)$.

106. $\left(\frac{5a^2}{4} - \frac{4ab}{3} + \frac{3b^2}{2}\right) - \left(\frac{4a^2}{5} - \frac{3ab}{4} - \frac{2b^2}{3}\right)$.

107. $\frac{5x^2+9x+14}{2x^2+3x-2} - \frac{3x-5}{x+2} + \frac{x-4}{x-2}$.

108. $\frac{3m+n}{3m^2-mn} - \frac{2m+3n}{12mn-4n^2} + \frac{3m^2-mn-6n^2}{18m^2n-6mn^2}$.

109. $\frac{6x-9y}{6x^2-11x+3y^2} - \frac{2x-3y}{2x^2-7xy+6y^2} + \frac{3x+4y}{3x^2-7xy+2y^2}$. $\left[=\frac{1}{x-2y}\right]$

110. $\frac{x}{2x-y} + \frac{2x^2+2xy}{2xy+3y^2} - \frac{4xy}{4x^2+4xy-3y^2}$. $\left[=\frac{x}{y}\right]$

111. $\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{(x^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(a^2-b^2)} + \frac{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}{a^2(a^2-b^2)}$. $[=1]$

112. $\frac{2a^2-3ax}{2a-x} - \frac{2a^2-3ax}{2a+x} + \frac{10a^2x^2-7ax^3}{4a^3-4a^2x-ax^2+x^3}$. $\left[=\frac{ax}{a-x}\right]$

113. $\frac{5x^2}{18x^2-6y} - \frac{27x^4+x^2y}{54x^4-6y^2} + \frac{x^2+6y}{6y} - \frac{x^4-x^2y}{6x^2y+2y^2}$. $[=1]$

Multiplication und Division eines Bruches durch eine ganze Zahl. (§. 100.)

114. $\frac{ab}{4m}.3c$.

115. $\frac{a}{2m}.2m$.

116. $\frac{24x^2}{5y^2}.(-y^2)$.

117. $\frac{2a^2x^2}{15b^2y^2}.5y^2$.

118. $\frac{a-b}{2ab}.2b$.

119. $\frac{a+b}{m}.(a-b)$.

120. $\left(a+\frac{b^2-a^2}{a}\right).a$.

121. $\left(1+\frac{1-a}{1+a}\right).(1+a)$.

122. $\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{4xy}-1\right).2xy$.

123. $\left(\frac{3m^3}{4n^3}+\frac{2m^2}{3n^2}+\frac{m}{2n}\right).12n$.

124. $\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}\right).m^4$.

125. $\left(\frac{a^3}{x^3}-\frac{2a^2}{x^2}+\frac{3a}{x}+4\right).x^3$.

126. $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{2n}{n^2-1}\right).(n+1)$.

127. $\left(\frac{y^2+a^2}{a^3-a^2}-\frac{1}{a-1}\right).(a-1)$.

128. $\left(1 + \frac{a^2 b^2 - 2abc^2 + c^4}{4abc^2}\right) . (a^2 b^2 - 2abc^2 + c^4).$

129. $\left(\frac{2x^3}{5} - \frac{5x^2y}{8} + \frac{3xy^2}{4} - \frac{7y^3}{10}\right) . (4x^2 - 5xy + y^2).$

130. $\frac{2ab}{3m} : 2a.$ **131.** $\frac{12amx}{5bc} : -4ax.$ **132.** $\frac{2x}{3my} : 3my.$

133. $\frac{10m^3n^2}{xy^2} : 5m^2n^2.$ **134.** $\frac{24p^2q}{13xy} : 8qy.$ **135.** $\frac{3x^3y^3}{4a^2b} : 2ab^2.$

136. $\left(1 + \frac{m-n}{m+n}\right) : 2m.$ **137.** $\left(a + b - \frac{a^2+b^2}{a+b}\right) : (a+b).$

138. $\left(\frac{bx^2}{a} + \frac{ay^2}{b}\right) : ab.$ **139.** $\left(\frac{8a^3b^2}{m^2n^3} - \frac{12a^2b^3}{m^3n^2}\right) : 4a^2m^2.$

140. $\frac{6a + 5ab - 6b^2}{2a^2 + 3b} : (3a - 2b).$

141. $\frac{1 - 2m - 7m^2 - 4m^3}{1 - 2m + m^2} : (1 + 2m + m^2).$

Multiplication und Division durch einen Bruch. (§§. 101—104.)

142. $ax . \frac{2b}{y}.$ **143.** $4x^2y^2 . \frac{3ab}{2xy}.$ **144.** $2a^2 . \frac{bx^2}{2a^2c^2y^2}.$

145. $(a-2b) . \frac{2m}{3n}.$ **146.** $(a-x) . \frac{a+x}{ax}.$ **147.** $3ax . \left(a - \frac{b}{3ax}\right).$

148. $\frac{2ab}{cd} . \left(-\frac{3ax}{cm}\right).$ **149.** $\frac{6a}{7b} . \frac{2b}{3d} . \left(-\frac{14c}{15e}\right) . \left(-\frac{5d}{6a}\right).$

150. $\frac{2a}{3b} . \frac{4y^3}{9x^3} . \frac{6b}{5a} . \frac{3x^2}{2y}.$ **151.** $\frac{5a^2x^2}{6m^2y^2} . \frac{9b^3y^3}{10a^3z^3} . \frac{4mz^3}{5b^3x} . \frac{2amx}{3y^3}.$

152. $\frac{a+b}{m-n} . \frac{a-b}{m+n}.$ **153.** $\left(1 + \frac{b}{a}\right) . \frac{a-b}{2b}.$

154. $\left(\frac{2a+3x}{2a-3x}\right)^2.$ **155.** $\left(\frac{4a^2 - 9b^2}{12ab}\right)^2.$

156. $\frac{2a^2 - ax}{ax - x^2} . \frac{a^3x^3 - ax^4}{2a - x}.$ **157.** $\frac{x^2 + 2x + 9}{x^4 - 5x^2 + 12} . \frac{x^3 - 8x}{x + 7}.$

158. $\left(\frac{x+m}{x} - \frac{2x}{x-m}\right) . \frac{x-m}{x^2+m^2}.$ **159.** $\left(\frac{a^3}{2b} - \frac{a^2}{3b^2} - \frac{a}{4b^3}\right) . \frac{3b^3}{4a^3}.$

160. $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right) . \frac{a}{a+b} . \frac{b}{b-a}.$

161. $\left(\frac{3m}{m-1} - \frac{2m}{m+1} - \frac{m^2}{m^2-1}\right) . \frac{m^2-1}{m}.$

162. $\left(\frac{3a}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5}\right).$

163. $\left(\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} - 2\right)\left(\frac{7x^2}{10} + \frac{5x}{4} + \frac{2}{3}\right).$

164. $\left(\frac{5y^2}{12} - yz + \frac{5z^2}{3}\right)\left(\frac{6y}{5} - \frac{3z}{2}\right)\left(\frac{2y}{3} + z\right).$

165. $$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a-1} - \frac{3}{a+1} + \frac{4}{a+2}\right) \cdot \frac{a^2-1}{a^2+5a-6}.$$

166. $$\left(\frac{p^2x^2}{2q^2y^2} + \frac{2p^2x^3}{3q^3y} - \frac{3x^4}{4q^4}\right)\left(\frac{4p^2x^2}{3q^2y^2} - \frac{3px^3}{2q^3y} + \frac{2x^4}{q^4}\right).$$

---

167. $2am : \frac{2m}{b}.$ **168.** $6a^2x : -\frac{3b^2y}{2x}.$ **169.** $12a^3b^4 : \frac{4ab^2}{x^2y^2}.$

170. $(x+y) : \frac{x+y}{x-y}.$ **171.** $3y : \left(1 - \frac{y}{x}\right).$ **172.** $(x^2-y^2) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$

173. $(a^2 - b^2) : \frac{a+b}{a-b}.$ **174.** $\frac{32a^4y^4}{27b^4y^4} : \frac{4a^3x}{9b^3y}.$

175. $\frac{8x^3y^2z}{15mn^2p^3} : \frac{4m^2n^2p}{5xy^2z^3}.$ **176.** $\frac{21bx^2y^3}{25a^2cz^3} : \frac{14a^2y^2z}{45b^2c^2x}.$

177. $\left(\frac{8x^3}{27y^3} - \frac{2x^2}{9y^2}\right) : \frac{2x}{3y}.$ **178.** $\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) : \frac{xy}{x^2-y^2}.$

179. $\left(\frac{3x^3}{4y} - \frac{9x^2}{15} + \frac{xy}{10}\right) : \frac{3x}{5y}.$ **180.** $\left(\frac{x^9}{27} - \frac{8a^6}{125}\right) : \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2a^2}{5}\right).$

181. $\left(\frac{8x^6}{27y^3} - \frac{27a^3}{8b^6}\right) : \left(\frac{2x^2}{3y} - \frac{3a}{2b^2}\right).$ **182.** $\left(\frac{2a^2}{9} - \frac{ax}{12} - \frac{3x^2}{16}\right) : \left(\frac{2a}{3} - \frac{3x}{4}\right).$

183. $$\left(\frac{3x^2}{4a^8} - \frac{19y^2}{3a^2} + \frac{12a^4y^4}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{2a^4} + \frac{y}{3a} - \frac{2a^2y^2}{x}\right).$$

184. $$\left(\frac{3x^2}{a^4} - \frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{8x^2}{a^2} - \frac{4y^4}{b^4} + \frac{8y^2}{b^2} - 3\right) : \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1\right).$$

185. $$\frac{a^5 + 7a^4y + 25a^3y^2 + 48a^2y^3 + 36ay^4}{a^3y - 27y^4} : \left(a + 7y + \frac{25y^2}{a-3y}\right). \quad \left[= \frac{a}{y}\right]$$

186. $$\left\{\frac{12a^2+a-6}{12a^2-a-6} - \frac{6a^2-a-2}{6a^2+a-2}\right\} : \left\{\frac{3a+2}{4a-3} - \frac{12a+8}{12a^2-a-6}\right\}.$$
$$\left[= \frac{4a}{6a^2+a-2}\right]$$

187. $$\left\{\frac{a^2-2ab}{4a^2b-b^3} - \frac{2ab-b^2}{a^3-2a^2b}\right\} : \left\{\frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{9}{8}ab - \frac{9}{4}b^2}{2a^2-3ab-2b^2} - \frac{\frac{9}{8}ab - \frac{1}{2}b^2}{2a^2-ab}\right\}.$$
$$\left[= \frac{a+b}{ab}\right]$$

188. $$\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}.$$ **189.** $$\frac{\frac{a}{m+n}}{\frac{b}{m-n}}.$$ **190.** $$\frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x}{x^2-1}}.$$

191. $$\frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1-x}{1+x} + 1}.$$ **192.** $$\frac{a + \frac{bx-ay}{x+y}}{a - \frac{bx+ay}{x+y}}.$$ **193.** $$\frac{x - \frac{x^2-2x+3}{x}}{x - \frac{x^2-3x+2}{x}}.$$

194. $$\frac{\frac{a+b}{a-b} - 1}{\frac{a-b}{a+b} + 1} : \frac{a+b}{a-b}.$$ **195.** $$\frac{\frac{3x+3y}{2y} - \frac{5x+6y}{4y}}{\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}} \cdot \frac{4x + \frac{4y^2}{x}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}.$$

196. Bestimme den Quotienten $\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$

für $x = \frac{m-n}{m+n}$, $y = \frac{n-p}{n+p}$, $z = \frac{p-m}{p+m}$.

B. Decimalbrüche.

Verwandeln gemeiner Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

(§§. 107 und 108.)

Verwandle folgende gemeine Brüche in Decimalbrüche:

1. a) $\frac{89}{16}$; b) $\frac{7}{40}$; c) $\frac{63}{25}$; d) $\frac{103}{32}$; e) $\frac{2359}{128}$; f) $\frac{9084}{625}$.
2. g) $\frac{17}{6}$; h) $\frac{13}{72}$; i) $\frac{313}{11}$; k) $\frac{53}{37}$; l) $\frac{107}{176}$; m) $\frac{2345}{792}$.
3. n) $\frac{26}{41}$; o) $\frac{92}{205}$; p) $\frac{131}{14}$; q) $\frac{129}{130}$; r) $\frac{85}{222}$; s) $\frac{3121}{404}$.
4. t) $\frac{50}{73}$; u) $\frac{137}{96}$; v) $\frac{37}{106}$; x) $\frac{259}{444}$; y) $\frac{1211}{395}$; z) $\frac{5432}{615}$.

Verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine Brüche:

5. a) 0·25, b) 7·75; c) 0·072; d) 17·525; e) 0·9518.
6. f) $0\cdot\dot{6}$; g) $0\cdot\dot{1}\dot{8}$; h) $4\cdot\dot{0}\dot{6}$; i) $26\cdot\dot{7}5\dot{2}$; k) $6\cdot\dot{3}2\dot{4}$.
7. l) $0\cdot\dot{8}\dot{1}$; m) $0\cdot\dot{0}4\dot{1}$; n) $8\cdot\dot{5}6\dot{7}$; o) $0\cdot\dot{4}37\dot{8}$; p) $0\cdot\dot{9}024\dot{3}$.
8. q) $0\cdot7\dot{3}$; r) $15\cdot3\dot{5}\dot{1}$; s) $0\cdot79\dot{3}2\dot{4}$; t) $0\cdot290\dot{7}\dot{4}$; u) $0\cdot234\dot{6}8\dot{4}$.

Rechnen mit vollständigen Decimalbrüchen. (§§. 109—111.)

Addiere folgende Decimalbrüche zuerst in verticaler, dann in horizontaler Richtung:

	9.	10.	11.	12.	13.	14.
15.	19·78 +	35·096 +	8·71295 +	0·2087 +	4·178063 +	15·892;
16.	37·09 +	18·388 +	2·34966 +	0·2897 +	3·047585 +	74·418;
17.	5·35 +	56·905 +	7·58506 +	0·5375 +	7·493203 +	9·005;
18.	10·93 +	68·227 +	3·08751 +	0·1884 +	0·479728 +	56·793;
19.	71·93 +	43·683 +	4·86235 +	0·5679 +	5·637564 +	88·608.

20. 173·5879 — 91·3462.
21. 42·0073 — 17·658.
22. 54·3128 — 5·573.
23. 95·78 — 58·2834.
24. 748·625 — 283.
25. 473·5 — 281·937.
26. 500 — 374·9864.
27. 1 — 0·172635.
28. 79·24405 — 1·7786 + 88 — 88·30556 + $27\frac{5}{8}$.
29. Bestimme A = a + b + c, B = a + b — c,
    C = a — b + c, D = b + c — a
    für a = 23·4567, b = 39·0703, c = 51·809.
30. 1 Kilometer = 0·131823 österr. Meilen; wie viel österr. Meilen sind 10, 100, 1000 Kilometer?
31. 48·326.28.
32. 9·10993.315.
33. 7·1356.$\frac{2}{5}$.
34. 0·33047.$3\frac{1}{7}$.
35. 6·8912.2·1506.
36. 815·279.0·09156.
37. 15·30762.0·00975.
38. 91·3425.3·1416.

39. Dividiere 325·67 durch 10, 100, 1000, 10000.

40. 108·931 : 97.
41. 0·5226 : 39.
42. 8 : 1·25.
43. 0·235 : 0·56.
44. 0·5976 : 0·083.
45. 2·0093724 : 0·0054.
46. 30·9644 : 38·9.
47. 1·6820736 : 2·256.

Rechnen mit unvollständigen Decimalbrüchen. (§§. 112—117.)

48. Kürze auf 3 Decimalstellen ab:

a) 25·7917, b) 3·14159, c) 0·8398, d) 81·57924.

49. 0·91654 + 0·17357 + 0·23408 + 0·16999 + 0·879. (3 Decim.)

50. 19·3875... + 23·473.. + 38·378.. + 8·4531.. + 0·082..

51. Verwandle die Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.6} + \ldots + \frac{1}{10.11.12}$$

in Decimalbrüche und berechne die Summe auf 3 Decimalen.

52. Berechne ebenso auf 4 Decimalstellen die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{2.4 \cdot 6.8} + \frac{1}{2.4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8.10.12}.$$

53. 88·9397 — 51·4823. (2 Dec.)
54. 4·37147 — 1·6392. (3 Dec.)
55. 8·2315.. — 3·5678..
56. 35·79.. — 10·809..

---

57. 3·1415.9·2587. (3 Dec.)
58. 0·9156.23·851. (2 Dec.)
59. 12·0748.1·91345. (4 Dec.)
60. 81·2867.0·1234. (3 Dec.)
61. 8·14793.7·10936.2·51446. (4 Dec.)
62. 1·045.1·045.1·045.1·045. (6 Dec.)
63. Bestimme auf 4 Decimalstellen

$p = (a + b + c)\ (a + b - c)\ (a - b + c)\ (b + c - a)$

für $a = 1 \cdot 30785$, $b = 2 \cdot 09122$, $c = 2 \cdot 80116$.

64. Berechne die Reihe

$$1 + \frac{1}{m} . x - \frac{m-1}{2.m^2} . x^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{2.3.m^3} . x^3 - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2.3.4.m^4} . x^4$$

für $m = 3$ und $x = 0 \cdot 015$ auf 7 Decimalstellen.

65. 834 × 2·1335..
66. 0·37 × 15·0816..
67. 2·955.. × 0·1563..
68. 6·04.. × 0·0085..
69. 28·1354.. × 7·089..
70. 0·1956.. × 0·8091..
71. Gib in den Producten 65. bis 70. die Fehlergrenze an.

---

72. 45·12345 : 3·8265. (3 Dec.)
73. 986·256 : 127·85. (2 Dec.)
74. 13·794 : 28·376. (4 Dec.)
75. 0·7123 : 43·566. (4 Dec.)

76. $754\cdot06 : 0\cdot649$. (2 Dec.) **77.** $3\cdot1416 : 7\cdot825$. (3 Dec.)

78. $7\cdot24257 : 19\cdot14$. (3 Dec.) **79.** $0\cdot436861 : 18\cdot547$. (4 Dec.)

80. 1 Kilogramm = $1\cdot785523$ Wiener Pfund; wie viel Kilogramm beträgt 1 Wiener Pfund? (5 Dec.)

81. $\frac{5\cdot3145.3\cdot4906}{7\cdot2084.3\cdot7449}$. (3 Dec.) **82.** $\frac{3\cdot027.8\cdot2579}{9\cdot461.6\cdot3047}$. (3 Dec.)

83. $\frac{0\cdot35791.0\cdot46802.0\cdot14235.0\cdot37281}{0\cdot41885.0\cdot89134.0\cdot15786.0\cdot29173}$. (4 Dec.)

84. $3\cdot187 : 5\cdot3185..$ **85.** $912\cdot857 : 0\cdot118..$

86. $53\cdot4428.. : 9\cdot157$. **87.** $71\cdot293.. : 8\cdot8764$.

88. $0\cdot3497.. : 4\cdot284..$ **89.** $9\cdot2737.. : 0\cdot0856..$

90. $0\cdot00869.. : 3\cdot846..$ **91.** $30\cdot2582.. : 0\cdot71356..$

92. Gib in den Quotienten 84. bis 91. die Fehlergrenze an.

C. Kettenbrüche.

Verwandlung gemeiner Brüche in Kettenbrüche und umgekehrt.

(§§. 119 und 120.)

Verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche:

1. a) $\frac{92}{381}$; b) $\frac{61}{437}$; c) $\frac{115}{151}$; d) $\frac{67}{551}$; e) $\frac{113}{355}$.

2. f) $\frac{49}{235}$; g) $\frac{137}{196}$; h) $\frac{188}{487}$; i) $\frac{108}{887}$; k) $\frac{349}{1478}$.

3. l) $\frac{104}{31}$; m) $\frac{284}{83}$; n) $\frac{519}{53}$; p) $\frac{373}{250}$; p) $\frac{8658}{1405}$.

4. q) $0\cdot513$; r) $0\cdot0934$; s) $0\cdot7307$; t) $5\cdot13722$.

5. $\frac{rst + r + t}{prst + pr + pt + st + 1}$; **6.** $\frac{12x^2 + 17x + 7}{24x^3 + 46x^2 + 35x + 10}$.

Verwandle folgende Kettenbrüche in gemeine Brüche:

7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ **8.** $\frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

9. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7}$ **10.** $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+4}$.

Näherungsbrüche. (§§. 122—126.)

Verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche und bestimme deren Näherungsbrüche:

11. a) $\frac{129}{164}$; b) $\frac{111}{53}$; c) $\frac{135}{328}$; d) $\frac{100}{137}$; e) $\frac{157}{972}$.

12. f) $\frac{999}{439}$; g) $\frac{3361}{900}$; h) $0\cdot357$; i) $0\cdot8282$; k) $2\cdot7041$.

13. Gib die ersten fünf Näherungswerte des Decimalbruches 0·65438 und die Fehlergrenze eines jeden derselben an.

14. Verwandle $\frac{625}{3178}$ in einen Kettenbruch und weise an den Näherungsbrüchen die in den §§. 123 und 124 begründeten Eigenschaften nach.

15. Ein Wiener Pfund hat 0·56006 Kilogramm; welches sind die ersten fünf Näherungswerte dieser Verhältniszahl?

16. Ein Liter ist = 0·70685 Wiener Maß; suche die Näherungswerte.

17. Ein österr. Achtguldenstück enthält 5·80645, ein deutsches Zehnmarkstück 3·58423 Gramm feines Gold; drücke das Verhältnis zwischen diesen beiden Goldmünzen in kleineren Zahlen möglichst genau aus.

18. Der synodische Monat, d. i. die Zeit von einem Neumonde zum andern, hat 29·53059, das tropische Sonnenjahr 365·24222 Tage; bestimme die ersten acht Näherungswerte des Verhältnisses beider Zeiträume.

Auf dem sechsten Näherungsbruche $\frac{19}{235}$, welcher ausdrückt, dass 19 Sonnenjahre sehr nahe 235 synodische Monate ausmachen, beruht der Meton'sche Cyclus von 19 Jahren, nach deren Verlauf die Mondesphasen wieder nahezu auf die nämlichen Tage des Jahres fallen, sowie die goldene Zahl, welche anzeigt, das wievielte Jahr in diesem Cyclus ein bestimmtes Jahr ist.

7. Verhältnisse und Proportionen.

A. Verhältnisse.

(§. 130.)

1. Drücke folgende Verhältnisse in ganzen Zahlen aus:

a) $7\frac{3}{8} : 3\frac{5}{8}$; b) $\frac{9}{16} : \frac{7}{12}$; c) $\frac{11}{25} : 5\frac{13}{20}$; d) $23\frac{3}{16} : 15\frac{5}{9}$;

e) $8\frac{3}{5} : 2·02$; f) $0·215 : 3·0816$; g) $(a - b) : \frac{ab}{a + b}$.

2. Kürze folgende Verhältnisse ab:

a) $10 : 24$; b) $72 : 56$; c) $120 : 48$; d) $ax(m^2 - n^2) : ab(m + n)$.

3. Drücke folgende Verhältnisse in den kleinsten ganzen Zahlen aus:

a) $4 : 6\frac{2}{3}$; b) $12\frac{6}{7} : 8\frac{4}{7}$; c) $\frac{6}{7} : 1\frac{7}{8}$; d) $15\frac{3}{4} : 6\frac{9}{16}$;

e) $0·75 : 0·625$; f) $3·208 : 1·28$; g) $\frac{x + y}{ax} : \frac{x^2 - y^2}{bx^2}$.

4. Von zwei Körpern legt A in jeder Minute 80 Meter, A' 96 Meter zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

5. Der Körper A legt in a Zeiteinheiten dieselbe Strecke zurück, wie A' in a' Zeiteinheiten; in welchem Verhältnisse stehen ihre Geschwindigkeiten?

6. Ein Meter verhält sich zu einem Wiener Fuß, wie 174 : 55; wie verhält sich a) ein Wiener Fuß zu einem Meter, b) ein Decimeter zu einem Wiener Zoll?

7. Welches Wertverhältnis besteht in Deutschland zwischen Gold und Silber, da aus 1 Pfund feinen Goldes $139\frac{1}{2}$ Zehnmarkstücke geprägt werden, auf 1 Pfund feinen Silbers 30 Thaler gehen, und 1 Zehnmarkstück $3\frac{1}{3}$ Thaler gilt?
8. Wie verhalten sich die Flächen zweier Rechtecke, von denen das eine 28 Meter lang und 15 Meter breit, das andere 25 Meter lang und 16 Meter breit ist?
9. Von zwei Dampfmaschinen kann die eine in a Secunden b Kilogramm c Meter hoch, die andere in a' Secunden b' Kilogramm c' Meter hoch heben; wie verhalten sich die Leistungskräfte dieser Maschinen?

B. Proportionen.

(§§ 139—143.)

Löse folgende Proportionen auf:

10. $x : 5 = \frac{2}{3} : \frac{3}{8}$.

11. $3\frac{1}{8} : x = 15\frac{5}{8} : 5$.

12. $4\frac{1}{2} : 4\frac{4}{5} = x : 8\frac{8}{15}$.

13. $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4} : x$.

14. $x : 0{\cdot}35 = 2{\cdot}38 : 1{\cdot}25$.

15. $14{\cdot}35 : 218{\cdot}275 = 9{\cdot}18 : x$.

16. $\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = x : \frac{c}{q}$.

17. $x : 3\frac{3}{4} = m^3 : \frac{3m^2}{2}$.

18. $x : (m - 2n) = (6m + 8n) : (2m - 4n)$.

19. $(6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2)$.

20. $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \frac{m + n}{m - n} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m + n} : x$.

21. $\left(b + \frac{b^3}{a^2 - b^2}\right) : x = \left(b + \frac{b^2}{a - b}\right) : \frac{a + b}{b}$.

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{22.} & (x + a) : x = b : c. \\ \textbf{23.} & x : (a - x) = \frac{a}{a + b} : \frac{b}{a - b}\end{array}\right\}\ \text{mit Rücksicht auf §. 141, 1.}$$

24. Führe an der Proportion

$$20a(a + b) : 12a = 25(a^2 - b^2) : 15(a - b)$$

die in den §§. 140 und 141 bezeichneten Formänderungen durch.

25. Wenn $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 9$, $c : d = 3 : 5$ und $d : e = 3 : 8$ ist, wie verhält sich $a : b : c : d : e$?

26. Gegeben ist $a : d = 4 : 3$, $c : d = 5 : 6$, $b : e = 20 : 9$, $b : f = 5 : 9$; $e : c = 3 : 5$; wie verhält sich $a : b : c : d : e : f$?

27. Ein Kilogramm verhält sich zu einem Wiener Pfund wie 25 : 14, ein Kilogramm zu einem deutschen Pfund wie 2 : 1, ein deutsches Pfund zu einem Londoner Pfund wie 43 : 39, ein russisches Pfund zu einem Londoner Pfund wie 65 : 72; wie verhalten sich je zwei dieser Gewichte zu einander?

C. Anwendung der Proportionen.

Angewandte Aufgaben mit einfachen Verhältnissen. (§§. 145 und 146.)

28. 17 Kilogr. einer Waare kosten 15 fl. 64 kr.; a) wie viel kosten 43 Kilogr.; b) wie viel Kilogr. erhält man für 35 fl. 88 kr.?

29. Wenn die Luft auf eine Fläche von $1\frac{1}{2}$ □ Decimeter einen Druck von 154 Kilogr. ausübt, welcher Luftdruck lastet auf einer Fläche von 1 □ Meter?

30. Ein Land von m Quadratmeilen zählt r Einwohner; a) wie viele Einwohner kommen bei gleicher relativer Bevölkerung auf n Quadratmeilen; b) auf wie viele Quadratmeilen kommen s Einwohner?

31. Das Vorderrad eines Wagens hat a Meter, das Hinterrad b Metre im Umfange; wie oft hat sich ersteres umgedreht, wenn letzteres m Umläufe gemacht hat?

32. Ein sich gleichförmig bewegender Körper legt in a Secunden b Meter zurück; a) wie viel Meter legt er in t Secunden zurück; b) in wie viel Secunden legt er s Meter zurück?

33. Die Geschwindigkeiten zweier sich bewegender Körper verhalten sich wie $c : c'$; wie viel Zeit braucht der zweite zu einem Wege, zu welchem der erste t Stunden braucht?

34. Von einem Gasometer, welches 11·2 Cubikmeter fasst, werden für eine gewisse Zeit 92 Laternen mit Gas versorgt; wie viel Cubikmeter muss ein Gasometer halten, um 148 Laternen auf eben so lange Zeit mit Gas zu versehen?

35. Ein Manuscript gibt 162 Seiten, jede zu 50 Zeilen; wie viele Seiten wird es geben, wenn auf jede Seite 45 Zeilen kommen?

36. Ein Vorrath von Lebensmitteln reicht für a Personen auf b Tage; für wie viele Personen reicht der nämliche Vorrath c Tage länger?

$$a = 72,\ b = 52,\ c = 65.$$

37. Das aus Platin angefertigte, im Archive zu Paris aufbewahrte Mètre prototype ist bei der Temperatur des schmelzenden Eises nach den neuesten astronomischen Messungen der 10000856ste Theil eines Meridianquadranten unserer Erde. Bei wie viel Grad der 100theiligen Scala würde dieser Meterstab, wie ursprünglich angenommen wurde, genau eine dem 10000000sten Theile des Erdquadranten gleiche Länge haben, wenn der Ausdehnungscoefficient bei Platin für jeden Grad der Temperaturerhöhung 0·00000856 ist?

38. Eine Stadt hat 13750 Einwohner; wie viel sind 12 % dieser Bevölkerung?

39. Nach der Duvillard'schen Sterblichkeitstafel erreichen von 502216 20jährigen Menschen 297070 das 50ste Jahr; wie viel % sterben hiernach in dem Alter von 20 bis 50 Jahren?

40. Wie viel betragen 3 % α) auf Hundert, β) von Hundert, γ) in Hundert a) von 3758 fl.? b) von $2908\frac{4}{5}$ Mark? c) von 5230·65 Francs?

41. Jemand kauft eine Ware für a fl.; wie theuer muss er dieselbe verkaufen, um p % zu gewinnen?

42. Eine Ware wird mit p % Gewinn für a fl. verkauft; wie viel kostete dieselbe im Einkaufe?

43. Jemand kauft für 3480 fl. Ware, erhält aber bei contanter Bezahlung $3\frac{1}{2}$ % Sconto (Nachlass); wie viel beträgt der Sconto, wenn er a) von Hundert, b) auf Hundert gerechnet wird?

44. Jemand erhält für eine verkaufte Ware nach Abzug von 2 % Provision 2174 fl.; wie viel beträgt die Provision? (Rechnung in Hundert.)

45. Ein Staatslos im Nominalwerte von 250 fl. wird zum Curse 122·25 (für 100 des Nominalwertes) gekauft; wie viel muss man dafür bezahlen?

46. Jemand kauft eine Eisenbahn-Actie von 200 fl., welche jährlich 5 % Zinsen trägt, für 156 fl.; zu wie viel % legt er sein Geld an?

47. Ein Capital bringt in t Jahren z fl. Zins; a) wie viel Zins bringt es bei gleichem Procent in t' Jahren; b) in wie viel Jahren bringt es z' fl. Zins?

48. Zu wie viel Procent muss ein Capital angelegt werden, damit es in t' Jahren eben so viel Zins bringe, als es in t Jahren zu p % Zins bringt?

Angewandte Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen.

(§§. 147 und 148.)

49. a Kilogramm Garn geben b Meter Leinwand von c Centimeter Breite; α) wie viel Meter Leinwand von c' Centim. Breite geben a' Kilogr. desselben Garns; β) wie breit kann die Leinwand werden, wenn aus a' Kilogr. Garn b' Meter gefertigt werden sollen; γ) wie viel Kilogr. Garn braucht man, um b' Meter Leinwand von c' Centim. Breite zu erhalten?

50. Aus einer gewissen Quantität Wolle können 16 Stück $\frac{9}{8}$ Meter breites Tuch verfertigt werden, wenn das Stück 44 Meter hält. Aus einem Theil der Wolle werden 2 Stück $1\frac{1}{4}$ Meter breites Tuch verfertigt, jedes Stück zu 48 Meter; wie viele Stück $1\frac{1}{5}$ Meter breites Tuch, das Stück zu 40 Meter, können aus dem Reste verfertigt werden?

51. Eine Maschine hebt in a Secunden b Kilogr. auf eine Höhe von c Meter; in welcher Zeit kann sie b' Kilogr. c' Meter hoch heben?

52. Eine Mühle mahlt auf a Gängen bei b Umdrehungen pr. Minute in c Stunden d Hektoliter Getreide; auf wie viel Gängen können bei b' Umdrehungen pr. Minute in c' Stunden d' Hektoliter geliefert werden?

53. Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine a, das andere b Zähne; wenn nun das erste Rad in s Minuten m Umläufe macht, wie vielmal dreht sich das zweite Rad in t Minuten um?

54. 12 Centner werden 10 Meilen weit für $20\frac{1}{2}$ Mark geführt; a) wie weit werden $24\frac{3}{4}$ Ctr. für $30\frac{1}{2}$ Mark geführt; b) wie viel Ctr. wird der Fuhrmann für $23\frac{2}{5}$ Mark $18\frac{1}{4}$ Meilen weit führen; c) wie viel Frachtlohn wird man zahlen müssen, damit 37 Ctr. $25\frac{1}{2}$ Meilen weit geführt werden?

55. 6 Arbeiter vollendeten in 4 Tagen einen Graben, welcher 300 Meter lang, $8\frac{1}{2}$ Decim. breit und 6 Decim. tief ist. Bei einem zweiten Graben erfordert die Förderung von $2\frac{1}{3}$ Cubikmeter eben so viel Zeit als beim ersten die Förderung von $4\frac{1}{4}$ Cubikmeter. a) Wie viele Arbeiter vollenden den zweiten Graben in 9 Tagen, wenn er 245 Meter lang, $11\frac{2}{5}$ Decim. breit und $3\frac{1}{2}$ Decim. tief ist; b) in wie viel Tagen vollenden den zweiten Graben 10 Arbeiter, wenn derselbe 250 Meter lang, $9\frac{3}{4}$ Decim. breit und $4\frac{1}{2}$ Decim. tief ist?

56. Wie viel Zins bringen 3791 fl. zu 4 % in 3 Jahren?

57. Wie viel Zins geben a) 1287 fl., b) $3745\frac{1}{2}$ fl., c) 8391 fl. 34 kr. zu $5\frac{1}{2}$ % in α) 2 Jahren, β) $3\frac{1}{2}$ Jahren, γ) 2 Jahren 4 Monaten 18 Tagen?

58. Wie viel Zins tragen C fl. Capital in T Tagen zu 6 %?

59. Wie viel Zins bringen 3609 fl. Capital in 125 Tagen a) zu 6 %, b) zu 4 %, c) zu $4\frac{1}{2}$ %, d) zu 2 %?

60. Eine Staatsschuldverschreibung von 500 fl. wird am 17. August zum Curse von $74\frac{1}{2}$ eingekauft; wie viel muss man dafür bezahlen, wenn die rückständigen Zinsen (des Nominalwertes) à $4\frac{1}{5}$ % seit 1. Mai zu vergüten sind?

61. In welcher Zeit geben 4844 fl. Capital, zu $4\frac{1}{3}$ % angelegt, $892\frac{1}{10}$ fl. Zins?

62. Wie groß muss das Capital sein, welches zu $5\frac{1}{4}$ % in $2\frac{7}{12}$ Jahren $950\frac{3}{4}$ fl. Zins bringt?

63. Zu wie viel % müssen 1424 fl. angelegt werden, damit sie in $3\frac{1}{2}$ Jahren $237\frac{1}{8}$ fl. Zins geben?

64. Wenn c fl. Capital in t Jahren z fl. Zins tragen, a) welchen Zins bringen c′ fl. Capital in t′ Jahren; b) welches Capital bringt in t′ Jahren z′ fl. Zins; c) in wie viel Jahren bringen c′ fl. Capital z′ fl. Zins?

65. Ein Capital c wird nach t Jahren zurückgezahlt; zu welcher Summe (s) ist es bei p % einfachen Zinsen angewachsen?

$$s = c \cdot \frac{100 + tp}{100}.$$

66. Ein Capital c, welches nach t Jahren ohne Zinsen fällig ist, soll zu Anfang dieser Zeit ausgezahlt werden; wie viel (r) hat der Schuldner zu entrichten, wenn er wegen der früheren Zahlung $p\,\%$ einfache Zinsenvergütung anspricht?

Bei der Rechnung auf Hundert ist $r = c - \frac{c\,p\,t}{100 + p\,t} = \frac{100\,c}{100 + p\,t}$

" " " von Hundert " $r = c - \frac{c\,p\,t}{100}$.

Welche Rechnung ist die richtige, welche die bequemere?
Kaufleute berechnen den Discont bei Wechseln und den Sconto bei Warenbeträgen immer von Hundert.

67. Eine Wechselsumme von 2813 fl. 15 kr. wird 2 Monate vor der Verfallszeit mit 4 % discontiert; a) wie viel beträgt der Discont; b) wie viel hat der Käufer zu bezahlen?

68. Wie viel muss man heute gegen 6 % ausleihen, damit man nach 3 Jahren sammt Zinsen 2950 fl. zurückerhalte? (Auf Hundert.)

69. Jemand legt zu Anfang eines jeden Jahres ein Capital von 2000 Mark an und setzt dies durch 5 Jahre fort; wie groß ist der gegenwärtige Wert aller Capital-Anlagen bei 5 % einfacher Verzinsung?

70. Auf ein bestimmtes Kaufobject bietet A 24000 fl. sogleich zahlbar; B 16000 fl. contant und ferner je 3000 fl. nach 1, 2, 3 Jahren unverzinslich zahlbar; C 17000 fl. contant und ferner je 2000 fl. nach $1\frac{1}{2}$, 3, $4\frac{1}{2}$ und 6 Jahren unverzinslich zahlbar. Welches ist das vortheilhafteste Anbot, wenn 6 % Zinsenvergütung angenommen wird?

71. Die Capitalien $c', c'', c''' \ldots$ sind bezüglich nach $t', t'', t''', \ldots$ Zeiteinheiten (Jahren, Monaten, . . .) unverzinslich zu zahlen. Alle Zahlungen sollen auf einmal geleistet werden. Wann muss die Gesammtsumme $s = c' + c'' + c''' + \ldots$ gezahlt werden?

Heißt m der mittlere Zahlungstermin und nimmt man einfache Zinsen zu $p\,\%$ an, so ist

bei der Rechnung auf Hundert

$$m = \frac{\frac{c'\,t'}{100 + p\,t'} + \frac{c''\,t''}{100 + p\,t''} + \frac{c'''\,t'''}{100 + p\,t'''} + \ldots}{\frac{c'}{100 + p\,t'} + \frac{c''}{100 + p\,t''} + \frac{c'''}{100 + p\,t'''} + \ldots};$$

bei der Rechnung von Hundert

$$m = \frac{c'\,t' + c''\,t'' + c'''\,t''' + \ldots}{c' + c'' + c''' + \ldots}.$$

Diese Rechnung heißt die Terminrechnung; man wendet dabei gewöhnlich die vom Procent unabhängige Berechnung von Hundert an.

72. Jemand hat 2000 fl. nach 2 Monaten, 1500 fl. nach 5 Monaten, 2400 fl. nach 1 Jahre, 2500 fl. nach 1 Jahre 3 Monaten unverzinslich zu zahlen; wann muss die Zahlung geschehen, wenn die Summe aller jener Terminzahlungen auf einmal erlegt werden soll?

Theilregel. (§§. 149 und 150.)

73. Zu einem Unternehmen gibt A 3100 fl., B 3500 fl., C 4200 fl. her; wenn nun dabei 324 fl. gewonnen werden, wie viel kommt auf jeden?

74. Es soll die Zahl 3710 in 4 Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten, wie die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

75. Vier Gemeinden, von denen A 738 fl. 42 kr., B 815 fl., C 513 fl. 65 kr., D 618 fl. 83 kr. Steuern zahlt, sollen nach Verhältnis der Steuern zu einer Schulbaulichkeit, deren Kosten sich auf 924 fl. 30 kr. belaufen, beitragen; welcher Beitrag entfällt auf jede Gemeinde?

76. Eine Summe von s fl. ist in drei Theile a, b, c so zu theilen, dass sich $a : b = m : n$ und $b : c = p : q$ verhalte.

77. Unter drei Personen sind 3960 fl. so zu vertheilen, dass B doppelt so viel als A, und C dreimal so viel als B bekomme; wie viel bekommt jeder?

78. Drei Personen sollen 9150 fl. so unter einander theilen, dass A so oft 5 fl. als B 3 fl., und C so oft 3 fl. als B 4 fl. erhalte; wie viel erhält jede Person?

79. s Gulden sind in 4 Theile a, b, c, d so zu theilen, dass $a : d = m : n$, $b : d = p : q$ und $c : b = r : s$ sei.

80. Ein österr. Achtguldenstück enthält $\frac{9}{10}$ Gold und $\frac{1}{10}$ Kupfer; wie viel Gold und wie viel Kupfer braucht man, um 1000 Achtguldenstücke zu prägen, da 155 Stücke 1 Kilogramm wiegen?

81. Eine Erbschaft von 18420 fl. soll unter 4 Personen so getheilt werden, dass A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{3}{10}$ und D den Rest erhalte. Vor der Theilung stirbt jedoch A, und die übrigen drei theilen nun auch den Antheil des A im Verhältnisse ihrer ursprünglichen Antheile unter sich. Wie viel bekommt jeder?

82. Drei Gemeinden erhalten für geleistete Erdarbeiten 750 fl. Aus der Gemeinde A arbeiteten 11 Mann durch 10 Tage zu 9 Stunden, aus der Gemeinde B 9 Mann durch 9 Tage zu 10 Stunden, aus der Gemeinde C 15 Mann durch 2 Tage zu 6 Stunden täglich. Welchen Antheil an jener Entlohnung wird jede der drei Gemeinden haben?

83. A beginnt am Anfange des Jahres ein Unternehmen mit einem Fonde von 8000 fl.; nach zwei Monaten tritt B mit 5000 fl. bei, und noch zwei Monate später gesellt sich auch C mit 3000 fl. dazu. Beim Jahresabschlusse zeigt sich ein Gewinn von 1059 fl.; wie viel bekommt jeder davon?

84. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt A a' fl. und nach m' Monaten noch b' fl.; B a'' fl. und nach m'' Monaten noch b'' fl.; C a''' fl. und nach m''' Monaten noch b''' fl.; wie ist nach m Monaten der Gewinn von g fl. zu vertheilen?

Kettenregel. (§. 151.)

85. Wie viel Meter sind 2135 russische Fuß, wenn 55 Meter = 175 Wiener Fuß und 82 russische Fuß = 79 Wiener Fuß sind?

86. Wie viel Londoner Pfund wiegt 1 Londoner Cubikfuß reines Wasser, da 1 Cubik-Decimeter davon 1 Kilogramm wiegt? (25 Londoner Cubikfuß = 708 Cubik-Decimeter, 86 Londoner Pfund = 39 Kilogr.)

87. Ein österr. Guldenstück enthält 900 Tausendtheile feinen Silbers; wie viel Gramm wiegt es, wenn 45 Guldenstücke 500 Gramm feinen Silbers enthalten?

88. Wie viel fl. ö. W. ist ein deutsches Zehnmarkstück wert, da $139\frac{1}{2}$ Zehnmarkstücke $\frac{1}{2}$ Kilogramm feinen Goldes, 45 fl. ö. W. $\frac{1}{2}$ Kilogr. feinen Silbers enthalten, wenn sich dem Werte nach Gold zu Silber wie $15\frac{1}{2} : 1$ verhält?

89. Welchen Wert in Ducaten hat 1 Achtguldenstück, da 155 Achtguldenstücke 1 Kilogramm $\frac{9}{10}$ feinen Goldes und 67 Ducaten 1 cölnische Mark $23\frac{2}{3}$ Karat feinen Goldes enthalten? (1 cölnische Mark à 24 Karat = 233·87 Gramm.)

90. Ein Wiener Kaufmann bezieht von Hamburg Kaffee zu 98 Pfennig das Hamburger Pfund; wie viel % gewinnt er, wenn die Spesen 50% betragen und in Wien das Kilogr. zu 1 fl. 76 kr. verkauft wird? (1 Hamb. Pfund = $\frac{1}{2}$ Kilogr., 100 Pfenn. = 1 Mark und 100 Mark = 58 fl.)

Man beginnt den Ansatz: x fl. Einnahme geben 100 fl. Ausgabe, wenn u. s. w.

III. Potenzieren, Radicieren und Logarithmieren.

1. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

Verbindung des Potenzierens mit sich selbst. (§. 154.)

1. $(a^3)^2$. **2.** $(x^3)^m$. **3.** $(x^m)^3$ **4.** $(a^m)^{n-1}$.

5. $[(p^2)^4]^3$. **6.** $[(a^5)^0]^3$. **7.** $(x^{a+b})^{a-b}$. **8.** $(y^{3a-2b})^{2a-3b}$.

Verbindung des Potenzierens mit der Multiplication und Division.

(§§. 155 — 158.)

9. $(3a)^4$ **10.** $(2ax)^3$. **11.** $(abcd)^m$. **12.** $(2a^2)^4$.

13. $(ax^m)^p$. **14.** $(2a^3x^4)^2$ **15.** $(5x^2y^2z^3)^3$. **16.** $[(xy^2)^2 . z^2]^2$.

17. $[a^2(b-c)^3]^4$. **18.** $(7x)^3 (3y)^4 . (2az)^5$. **19.** $(a^{m+n}b^{m-n})^{m+n}$.

20. $a^3 . x^3$. **21.** $25^4 . 4^4$. **22.** $(5a)^2 . (3b)^2$.

23. $(x + a)^4 . (x - a)^4$. **24.** $(3x)^5 . (2y)^5 . (4z)^5$.

25. $x^n . \left(\frac{1}{x}\right)^n$. **26.** $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n . a^n$. **27.** $\left(\frac{2a}{5x}\right)^3 . \left(\frac{15x}{2a}\right)^3$.

28. $\left(\frac{2x}{3y}\right)^3$. **29.** $\left(\frac{8mn}{4pq}\right)^3$. **30.** $\left(\frac{a^2 b^3}{c d^4}\right)^2$. **31.** $\left(\frac{3ab^2}{2x^2y}\right)^5$.

32. $\left(\frac{a^m x^n}{b^n y^m}\right)^p$. **33.** $\left(\frac{a^4 b^5 c^2}{x^5 y^7}\right)^3$. **34.** $\left(\frac{3c^3x^2}{6a^2b^3}\right)^3 . \left(\frac{10a^4b}{9c^3x^2}\right)^3$.

35. $\left(\frac{2ax - 3by}{3b} + y\right)^4$. **36.** $\left(1 - \frac{2bx - 3a}{2bx}\right)^5$.

37. $(8ab)^4 : (2b)^4$. **38.** $(x^2 - y^2)^m : (x - y)^m$.

39. $x^n : \left(\frac{1}{y}\right)^n$. **40.** $\left(\frac{3ax}{4by}\right)^5 : \left(\frac{2x}{3b}\right)^5$.

41. $\left(\frac{a - b}{a}\right)^m : \left(\frac{a + b}{a}\right)^m$. **42.** $\left(x - \frac{y^2}{x}\right)^n : \left(\frac{x}{y} + 1\right)^n$.

43. $ax^m . bx^n$. **44.** $7a^3 . 3a^2$.

45. $2m^4 n^3 . 5m^4 n$. **46.** $3(a + b)^3 . 4(a + b)^2$.

47. $(3a^2 . 2b^2)^4 . (4ab)^3$. **48.** $(ab)^{m-2n} . (ac)^{2m-n} . (bc)^{n-m}$.

49. $6a^{m+n} : 2a^n$. **50.** $9a^{2n+1} : 3a^3$.

51. $\left(\frac{3x^2}{2y}\right)^3 . \left(\frac{3y^2}{4x}\right)^2$. **52.** $\left(\frac{ab}{2cd}\right)^4 . \left(\frac{2c}{3ab}\right)^3 . \left(\frac{3bc}{5a}\right)^2$.

53. $\frac{5ax^4}{6by^3} . \frac{b^2x^2}{ay} . \frac{3a^2y^4}{2b^3x^3}$. **54.** $\frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5} : \frac{4a^5x^3y}{5b^2cz^4}$.

55. $\left(\frac{a^4b^3c^2}{x^5y^7}\right)^3 . \left(\frac{x^4y^6}{a^3b^4c}\right)^4$. **56.** $\left\{\frac{(2x^3y^2)^3 (3x^4y^3)^2}{6x^2y^2}\right\}^3$.

57. $\left(\frac{2a^2x^2}{3by^3}\right)^3 . \left(\frac{6ax^2}{5b^2y}\right)^2 . \left(\frac{3b^2}{4a^2}\right)^4$. **58.** $\left\{\frac{(2xy^2)^5 . (3x^2z^2)^4 . (5y^3z)^3}{(10x^3y^2)^2 . (6y^2z^4)^3}\right\}^2$.

Verbindung des Potenzierens mit der Addition und Subtraction. (§. 159.)

59. $3a^2 + 4a^2 + 6a^2$. **60.** $5m^4 - 2m^4$.

61. $ax^3 + bx^2 + cx - x^3 - 2x^2 + 3x$.

62. $4x^m - 5x^n + 6x^p - x^n - 2x^m - 3x^p$.

63. $(2a^3 + 3b^3) . a^2b^2$. **64.** $(6x^4y^2 - 10x^3y^3) : 2xy^2$.

65. $(3a^3x^2 + 4b^2y^3)(3a^3x^2 - 4b^2y^3)$.

66. $(x^{3a-b} - x^{2a} + x^{a+b} - x^{2b} + x^{3b-a})(x^a + x^b)$.

67. $(x^{3m-n} - x^{2m} + x^{2n} - x^{3n-m}) : (x^m - x^n)$.

68. $(a^8 - b^8) : (a^5 + a^4b + ab^4 + b^5)$.

(Aufgaben 160 bis 170 Seite 214, ferner 99 bis 111 Seite 216.)

69. $(x^2 + a)^2$. **70.** $(a^2 - x)^2$. **71.** $(2a^2 + 3b^2)^2$.

72. $(x^m - y^n)^2$. **73.** $(5x^3 - 6y^3)^2$. **74.** $(mx^4 - n)^2$.

75. $(2a + b)^3$. **76.** $(3x - 2y)^3$. **77.** $(a^2 - 3b^2)^3$.

78. $(ax^3 - by^3)^3$. 79. $(2a^x + 3a^y)^3$. 80. $(mx^6 - nx^3)^3$.
81. $(5a^2 - 4x^2)^2 + (5a^2 + 4x^2)^2$. 82. $(ax^3 + by^3)^2 - (ax^3 - by^3)^2$.
83. $(a + bx + cx^2)^2$. 84. $(x^2 - abx + a^2b^2)^3$.

Potenzen mit algebraischer Basis. (§. 161.)

85. $(-a)^4$. 86. $(-x)^6$. 87. $[(-y)^3]^5$.
88. $(-a^2)^3$. 89. $(-a^3)^2$. 90. $[(-z^2)^3]^4$.
91. $(-a^{2m})^{2n-1}$. 92. $(-a^{2n-1})^{2m}$. 93. $(-a)^4 . (-a)^3$.
94. $(-a)^{2m+1} . (-a)^{2n-1}$. 95. $(-4b)^2 . (3x)^3$.
96. $(5x)^3 . (-2y)^4$. 97. $(-8a)^2 . (-3b)^5$. 98. $(m^3)^4 . (-n^2)^6$.
99. $\left(-\frac{3a^3x}{4b^2y^2}\right)^4$. 100. $\left[\left(-\frac{ab^2x^3}{c^3d^2z}\right)^3\right]^2$.

---

2. Wurzeln mit positiven ganzen Exponenten.

Verbindung des Radicierens mit sich selbst und mit dem Potenzieren.

(§§. 165—168.)

1. $\sqrt[m]{a^{mx}}$. 2. $\sqrt[3]{a^6}$. 3. $\sqrt[5]{a^{30}}$. 4. $\sqrt[p]{x^{mnp}}$.
5. $\sqrt[an]{x^{bm}}$. 6. $\sqrt[n]{a^{np+nr}}$. 7. $\sqrt[m+n]{x^{am+an}}$.
8. $(\sqrt{a^3})^2$. 9. $(\sqrt[6]{ab^2c^3})^3$. 10. $4a^2(\sqrt[n]{x^2})^n$.
11. $(\sqrt[p]{a^m})^{pq}$. 12. $\left(\sqrt[m]{\frac{a^n b^p}{c^q}}\right)^r$. 13. $\left(\sqrt[3]{\frac{ax\sqrt{x}}{\sqrt[4]{ax^3}}}\right)^4$.
14. $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x}}$. 15. $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$. 16. $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$. 17. $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a^{12}}}$.
18. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$. 19. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}}$. 20. $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^n$. 21. $(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}})^6$.
22. Wenn $\sqrt[3]{262144} = 64$ ist, wie groß ist a) $\sqrt[6]{262144}$, b) $\sqrt[9]{262144}$, c) $\sqrt[18]{262144}$?
23. Stelle folgende Wurzeln mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten dar:
a) $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x^2}$; b) $\sqrt[4]{x^3}$ und $\sqrt[6]{y^5}$;
c) $\sqrt[mn]{a^r}$ und $\sqrt[mp]{b^s}$; d) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$ und $\sqrt[5]{c^3}$.
24. Kürze folgende Wurzeln ab:
a) $\sqrt[4]{x^2}$; b) $\sqrt[6]{y^{15}}$; c) $\sqrt[18]{a^{12}}$: d) $\sqrt[mnp]{x^{mpq}}$.

Verbindung des Radicierens mit der Multiplication und Division.

(§§. 169 und 170.)

25. $\sqrt[m]{x^a y^b}$. 26. $\sqrt{9.49}$. 27. $\sqrt[3]{27a^3b^6}$.

28. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{b^3x^3}$. 29. $\sqrt{\sqrt[3]{16^3.81^3}}$. 30. $\sqrt[3]{\sqrt[m]{8^m.27^m}}$.

31. $\sqrt{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}$. 32. $\sqrt{\sqrt[m]{a^2b^4c^6}}$.

Befreie in den folgenden Wurzeln jene Factoren des Radicands, aus denen sich die Wurzel ziehen läßt, von dem Wurzelzeichen:

33. $\sqrt[n]{a^n b}$. 34. $\sqrt[2m]{a^{4m}x}$. 35. $\sqrt[x]{a^{2x}b^x c}$. 36. $\sqrt{4.5}$.

37. $\sqrt{1200}$. 38. $7\sqrt{75}$. 39. $\sqrt[3]{48}$. 40. $2\sqrt[3]{81}$.

41. $\sqrt[4]{80}$. 42. $\sqrt[m]{x^{m+n}}$. 43. $\sqrt{x^3}$. 44. $\sqrt{4a^3b}$.

45. $x\sqrt{y^3z^3}$. 46. $m\sqrt[3]{a^6b^5c^4}$. 47. $\frac{1}{xy}\sqrt[m]{x^{m+1}y^{m+1}}$.

48. $\sqrt{8}.\sqrt{2}$. 49. $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{200}$. 50. $6\sqrt{6}.5\sqrt{2}$.

51. $\sqrt[n]{a^p}.\sqrt[n]{a^q}$. 52. $\sqrt{n^5}.\sqrt{n}$. 53. $\sqrt[3]{a^7}.\sqrt[3]{a^5}$.

54. $\sqrt{\frac{x}{y}}.\sqrt{xy}$. 55. $\sqrt[3]{\frac{4a}{9b}}.\sqrt[3]{\frac{2b}{3a}}$.

56. $\sqrt{9x^2-4}.\sqrt{\frac{3x-2}{(3x+2)^3}}$. 57. $\sqrt[n]{ax^{n+1}}.\sqrt[n]{bx^{n-1}}$.

58. $\sqrt[m]{xy^2z^3}.\sqrt[m]{x^2y^{m-2}z^{2m-8}}.\sqrt[m]{x^{m-3}z^{5-m}}$.

59. $\sqrt{a}.\sqrt[3]{a}$. 60. $\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[4]{x^3}$. 61. $\sqrt[6]{a^5}.\sqrt[9]{a^7}$.

62. $3\sqrt[3]{b^2}.5\sqrt[4]{b^3}.\sqrt[12]{b}$. 63. $a\sqrt{xy}.b\sqrt[4]{x^3y^3}.c\sqrt[8]{x^7y^7}$.

Bringe in den folgenden Wurzeln den Factor unter das Wurzelzeichen:

64. $a\sqrt[n]{x}$. 65. $4\sqrt{5a}$. 66. $4x\sqrt[3]{x}$.

67. $x\sqrt{\frac{a}{x}}$. 68. $\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$. 69. $ab\sqrt[p]{\frac{1}{a^{p-1}b^{p-1}}}$.

70. $(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. 71. $\frac{x^2y}{a\cdot b}\sqrt[4]{\frac{a^3b}{x^3y}}$. 72. $\sqrt[5]{a^2\sqrt[3]{a^8}}$.

73. $\sqrt[m]{a^n\sqrt[p]{a^q}}$. 74. $x\sqrt[m]{x\sqrt[n]{x}}$. 75. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

---

76. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}}{b^{mp}}}$. 77. $\sqrt{\frac{49}{64}}$. 78. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$. 79. $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

80. $\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}}$. 81. $\sqrt{\frac{49}{16}-\frac{5}{2}}$. 82. $\sqrt[5]{\frac{a^5x^{10}}{b^5y^{10}}}$. 83. $\sqrt[3]{\frac{8a^4b}{27c^4}}$.

84. $5\sqrt{\frac{3x}{25a^2}}$. 85. $\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mn}}}$. 86. $\sqrt[3]{\frac{a^p}{a^6}}$. 87. $\sqrt{a^{m-2}}$.

88. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}b^{mp}c^{mq}}{x^{mr}y^{ms}}}$. 89. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{b^2}}$.

---

90. $\sqrt{75}:\sqrt{3}$. 91. $\sqrt[3]{108}:\sqrt[3]{4}$. 92. $3\sqrt{8}:2\sqrt{2}$.

93. $\sqrt[m]{ax}:\sqrt[m]{a}$. 94. $\sqrt[3]{48x}:\sqrt[3]{6x}$. 95. $\sqrt{ab}:\sqrt{bx}$.

96. $\sqrt{a}:\sqrt{\frac{a}{b}}$. 97. $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$. 98. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a-b}}$.

99. $1:\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. 100. $1:\sqrt{0\cdot25}$. 101. $1:\sqrt{\frac{x-2y}{x^3-3xy^2-2y^3}}$.

102. $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a}$. 103. $\sqrt[5]{a^4}:\sqrt[3]{a^2}$. 104. $m\sqrt{a}:\sqrt[4]{a}$.

105. $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}$. 106. $\frac{a}{x}:\sqrt{ax}$. 107. $a:\sqrt[n]{a}$.

108. $\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 109. $\frac{a^2-1}{\sqrt{a-1}}$. 110. $(x+y):\sqrt[m]{\frac{(x+y)^{m-1}}{x-y}}$.

Verbindung des Radicierens mit der Addition und Subtraction. (§. 171.)

111. $\sqrt[3]{a}+4\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{a}$. 112. $a\sqrt[m]{x^n}-b\sqrt[m]{x^n}$.

113. $a+b\sqrt{m}+c-d\sqrt{m}$. 114. $5\sqrt[8]{a^3}-2\sqrt[8]{a^3}+3\sqrt[8]{a^3}$.

115. $m\sqrt{a}+n\sqrt[3]{a}+2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{a}$.

116. $a\sqrt[m]{b}-2b\sqrt[n]{a}-2a\sqrt[m]{b}+8b\sqrt[n]{a}-5b\sqrt[n]{a}+6a\sqrt[m]{b}$.

Stelle mit gleichen Radicanden dar und reduciere:

117. $\sqrt{2}+\sqrt{8}+3\sqrt{50}$. 118. $4\sqrt{50}+2\sqrt{72}+\sqrt{128}$.

119. $6\sqrt{125}-3\sqrt{80}+2\sqrt{20}$. 120. $4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}$.

121. $6\sqrt{12}-4\sqrt{27}+7\sqrt{48}-5\sqrt{75}+2\sqrt{108}$.

122. $\sqrt{a^5}+\sqrt{a^3}+\sqrt{a}$. 123. $\sqrt{a^2x}+2\sqrt{b^2x}+3\sqrt{c^2x}$.

124. $5a\sqrt{12x^3}-2x\sqrt{27a^2x}$. 125. $4\sqrt[3]{3x}-2\sqrt[3]{24x}+\sqrt[3]{192x}$.

126. $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}+3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}$. 127. $3\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}-2\sqrt[4]{a^2\sqrt{a^3}}$.

128. $\sqrt{4x^3y}-5y\sqrt{xy}-x\sqrt{4xy}+\sqrt{25xy^3}$.

129. $4\sqrt{1+a^2}-\sqrt{9+9a^2}-2\sqrt{x^2+a^2x^2}+\sqrt{x^4(1+a^2)}$.

130. $(x-y)\sqrt{\frac{xy}{x^2-2xy+y^2}}-xy\sqrt{\frac{1}{xy}}+x\sqrt{\frac{y}{x}}$.

---

131. $(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}).\sqrt[3]{x}$. 132. $(3\sqrt{5a}+4).\sqrt[3]{4a}$.

133. $(2\sqrt{8}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}+4\sqrt{72}).\sqrt{2}$.

134. $(4+3\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$. 135. $(8-3\sqrt{5})(7+21\sqrt{5})$.

136. $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$. 137. $\sqrt{x+y+\sqrt{2xy}}.\sqrt{x+y-\sqrt{2xy}}$.

138. $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$.

139. $\sqrt{3+\sqrt{5}}.\sqrt{3-\sqrt{5}}$. 140. $(3\sqrt{7}+4\sqrt[4]{3})(2\sqrt{7}-3\sqrt[4]{3})$.

141. $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

142. $\sqrt{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}.\sqrt{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

143. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2+1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$. 144. $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\frac{3x+\sqrt{x}}{1-x}$.

145. $\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}\right)\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$.

146. $(\sqrt[3]{ab}+3\sqrt[3]{xy})(5\sqrt{ab}+4\sqrt{xy})$.

147. $(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

148. $(3\sqrt{8}-5\sqrt{20}):\sqrt{2}$. 149. $(\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}):\sqrt[3]{ab}$.

150. $(2\sqrt[3]{54}-3\sqrt{2}):\sqrt[3]{2}$. 151. $(6\sqrt{x}+8x):2\sqrt[3]{x}$.

152. $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[5]{a^4}):\sqrt[6]{a}$.

153. $(\sqrt{ax}-\sqrt{cx}+\sqrt{az}-\sqrt{cz}):(\sqrt{a}-\sqrt{c})$.

154. $\frac{B-b}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$. 155. $\sqrt{\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{m-n}}:\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}}$.

---

156. $(a+\sqrt{b})^2$. 157. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

158. $(5-2\sqrt{5})^2$. 159. $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$.

160. $(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{15})^2$. 161. $(1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$.

162. $(3x\sqrt{y}-2y\sqrt{x})^2$. 163. $(\sqrt{2x+a}-\sqrt{2x-a})^2$.

164. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$. 165. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$.

166. $\left\{\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{2}}\right\}^2$. 167. $\left\{\sqrt{\frac{4+\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{11}}{2}}\right\}^2$.

168. $\left\{\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right\}^2$.

169. $\left[\sqrt{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} \pm \sqrt{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right]^2.$

170. $\left[\sqrt{a^3+\sqrt{a^6-b^6}}-\sqrt{a^3-\sqrt{a^6-b^6}}\right]^2.$

171. $(4a\sqrt[3]{b}-3b\sqrt[3]{a})^3.$ **172.** $(a-3\sqrt[3]{a^2}+4\sqrt[3]{a})^3.$

Umformung von irrationalen Wurzelausdrücken. (§§. 173—175.)

Befreie folgende Brüche von dem irrationalen Nenner:

173. $\frac{2}{\sqrt{2}}.$ **174.** $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}.$ **175.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^2}}.$ **176.** $\frac{m}{\sqrt{x\sqrt{x}}}.$

177. $\frac{a-x}{\sqrt[3]{a+x}}.$ **178.** $\frac{3a^2}{5\sqrt[3]{2a}}.$ **179.** $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{3x}}.$ **180.** $\frac{3x\sqrt{5a}}{2\sqrt[4]{2a}}.$

181. $\frac{\sqrt{2x+3y}}{\sqrt{2x-3y}}.$ **182.** $a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a\sqrt{ab}}}.$ **183.** $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$

---

184. $\frac{1}{2+\sqrt{2}}.$ **185.** $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$ **186.** $\frac{4\sqrt{3}}{1+3\sqrt{3}}.$

187. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$ **188.** $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}.$ **189.** $\frac{2a+3\sqrt{b}}{3a-2\sqrt{b}}.$

190. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}.$ **191.** $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}.$ **192.** $\frac{m}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}.$

193. $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}.$ **194.** $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}}.$ **195.** $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}.$

196. $\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}.$ **197.** $\frac{a\sqrt{1-a^2}+b\sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}.$

198. $\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$ **199.** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}.$

200. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$ **201.** $\frac{2s}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$ **202.** $\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}}.$

203. $\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-y^4}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{x^4-y^4}}}.$ **204.** $\frac{\sqrt{2x+3\sqrt{xy}}}{\sqrt{2x-3\sqrt{xy}}}.$

205. $\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}.$ **206.** $\frac{2\sqrt{5}-4\sqrt{10}}{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}-2\sqrt{10}}.$

207. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}.$

208. $\frac{a}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$. **209.** $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}}$. **210.** $\frac{5}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$.

211. $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$. **212.** $\frac{\sqrt[3]{10}}{2+\sqrt[3]{7}}$. **213.** $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$.

214. $\frac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}{4\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}}$. **215.** $\frac{5\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{6}}$. **216.** $\frac{2+7\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{6}}$.

Verwandle folgende Summen und Differenzen von Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel:

217. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **218.** $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.
219. $\sqrt{12+\sqrt{23}}-\sqrt{12-\sqrt{23}}$. **220.** $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
221. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}$. **222.** $\sqrt{11+6\sqrt{2}}\pm\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.
223. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\pm\sqrt{7-2\sqrt{10}}$. **224.** $\sqrt{14+6\sqrt{5}}\pm\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.
225. $\sqrt{1+2a\sqrt{1-a^2}}\pm\sqrt{1-2a\sqrt{1-a^2}}$.
226. $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}\pm\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}$.

Verwandle jede der folgenden Quadratwurzeln in die Summe oder die Differenz zweier Quadratwurzeln:

227. $\sqrt{6+\sqrt{11}}$. **228.** $\sqrt{3-\sqrt{5}}$.
229. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$. **230.** $\sqrt{8+3\sqrt{7}}$.
231. $\sqrt{11\pm2\sqrt{10}}$. **232.** $\sqrt{11\pm2\sqrt{30}}$.
233. $\sqrt{18\pm8\sqrt{2}}$. **234.** $\sqrt{37\pm20\sqrt{3}}$.
235. $\sqrt{99\pm54\sqrt{2}}$. **236.** $\sqrt{7\sqrt{2}\pm4\sqrt{6}}$.
237. $\sqrt{2\sqrt{5}\pm\sqrt{15}}$. **238.** $\sqrt{6\sqrt{5}\pm4\sqrt{10}}$.
239. $\sqrt{4\sqrt{2}\pm2\sqrt{6}}$. **240.** $\sqrt{3\sqrt{7}\pm2\sqrt{14}}$.
241. $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$. **242.** $\sqrt{x^2+yz+2x\sqrt{yz}}$.
243. $\sqrt{x^2-2y\sqrt{x^2-y^2}}$. **244.** $\sqrt{2x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}$.
245. $\sqrt{a+b+ab+2\sqrt{ab(a+b)}}$.
246. $\sqrt{10a^4+a^2b^2+6a^3\sqrt{a^2+b^2}}$.

Wurzeln mit algebraischem Radicand. (§. 176.)

247. $\sqrt{+25}$. **248.** $\sqrt[3]{+27}$. **249.** $\sqrt[3]{-27}$.

250. $\sqrt[3]{-m^6}$. **251.** $\sqrt[5]{(-a)^{30}}$. **252.** $\sqrt[3]{(-x)^5.-x}$.

253. $(\sqrt[3]{-a})^5$. **254.** $\sqrt[3]{(-a^2)^4}$. **255.** $\sqrt{x}\,.\sqrt[3]{-x}$.

256. $7\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{-24}+4\sqrt[3]{-81}-\sqrt[3]{-192}$.

3. Potenzen und Wurzeln mit negativen und gebrochenen Exponenten.

Negative Exponenten. (§§. 177—180.)

1. Bestimme die Werte folgender Potenzen:

a) 2^{-6}, b) 6^{-2}, c) 4^{-3}, d) $0{\cdot}4^{-1}$, e) $0{\cdot}125^{-3}$;
f) $\frac{1}{3^{-4}}$ g) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-5}$, h) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-3}$, i) $\left(\frac{15}{16}\right)^{-1}$, k) $\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{m}{x}\right)^{-2}$.

2. Befreie von den negativen Exponenten:

a) $2x^2y^{-2}$ b) $3a^3b^{-3}$, c) $ab^{-1}x^{-1}y$;
d) $\frac{ax^{-m}}{by^{-m}}$, e) $\frac{3a^2m^{-3}y^{-1}}{4b^2n^{-2}x^{-2}}$, f) $\frac{13a^{-2}b^{-1}c^5}{8x^3y^{-5}z^{-2}}$.

3. Bringe auf die Form von ganzen Zahlen:

a) $\frac{5x}{y}$, b) $\frac{2ax^{-2}}{b^{-1}}$, c) $\frac{m^3x^2}{y^3z^{-2}}$, d) $\frac{12a^{-4}b}{25x^{-3}y^2}$.

Berechne und stelle die Resultate mit positiven Exponenten dar:

4. $(x^{-2})^4$. **5.** $(x^{-1})^{-1}$. **6.** $[(x^{-m})^n]^{-p}$.
7. $(-a^3)^{-2n}$. **8.** $(-a^{-2})^{2n-1}$. **9.** $(-a^{2n-1})^{-2}$.
10. $(a^{-3}b^4)^{-2}$. **11.** $(3a^2b^{-1}x^3y^{-1})^3$. **12.** $(-2x^{-3}y^3z^{-1})^4$.
13. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2}$. **14.** $\left(\frac{2a^2b^3}{3mx^{-2}}\right)^{-1}$. **15.** $\left(\frac{1}{x}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{-6}$.
16. $5^{-2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$. **17.** $(5a^{-1})^{-2}.(3b)^{-2}$. **18.** $(x^{-p})^{-s}.(y^{-q})^{-s}$.
19. $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{-m}:\left(\frac{x}{x-y}\right)^{-m}$. **20.** $\frac{(a^2b^{-1})^{-4}}{(x^{-3}y^{-2})^{-4}}$.
21. $a^5.a^{-3}$. **22.** $x^{m+2}.x^{-3}$. **23.** $(-3a^{-5}).(-2a^{-1})$.
24. $x^{n-3}:x^{-5}$. **25.** $a^{-4}:-a^4$. **26.** $-4a:a^{-4}$.
27. $6a^3b^{-2}:2a^4b^{-3}$. **28.** $36a^{-1}b^{-2}c^{-3}:6a^{-2}b^{-3}c^{-4}$.
29. $\frac{a^{-1}b^{-2}c^3}{m^{-3}n^{-2}p}\cdot\frac{m^{-2}n^{-5}p^{-2}}{a^{-1}b^{-3}c^{-1}}$. **30.** $\frac{x^{-m}y^{-m+1}}{a^{-2m}b^{m-n}}:\frac{x^ny^{n+1}}{a^{-m+n}b^{2m}}$.
31. $(ax^{-4}+bx^{-3}+cx^{-2}+dx^{-1}+e).x^4$.
32. $(x^{-1}y^{-5}-2xy^{-3}+3x^3y^{-1})(3x^{-1}y^{-5}+2xy^{-3}-x^3y^{-1})$.
33. $(a^{-5}-b^{-5}):(a^{-1}+b^{-1})$.
34. $(x+x^{-1})^2$. **35.** $(3a^{-3}x^2-4a^2x^{-3})^2$.
36. $(x^2-2x^{-2})^3$. **37.** $(2a^2b^{-3}+3a^{-3}b^2)^3$.

38. Bestimme die Werte folgender Wurzeln:

a) $\sqrt[-n]{x}$, b) $\sqrt[-3]{27}$, c) $\sqrt[-4]{16}$, d) $\sqrt[-2]{0\cdot25}$, e) $\sqrt[-m]{a^{-mn}}$.

Stelle folgende Ausdrücke in ihrer einfachsten Form ohne negative Exponenten dar:

39. $\sqrt[-2]{\sqrt[3]{64}}$.
40. $\sqrt[-m]{\sqrt[-n]{a^{-mn}}}$.
41. $\sqrt[-n]{x^{np}y^{nq}}$.
42. $\sqrt[-n]{a} \,.\, \sqrt[n]{a}$.
43. $a \,.\, \sqrt[-1]{a}$.
44. $\sqrt{a^3} \,.\, \sqrt[-2]{a}$.
45. $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[-2]{a}$.
46. $\sqrt{a} : \sqrt[-1]{a}$.
47. $\sqrt{a} : \sqrt[-2]{a}$.
48. $\sqrt[-2]{\frac{a^2}{b^2}}$.
49. $\sqrt[-3]{\frac{8}{125}}$.
50. $\sqrt[-3]{\frac{a^{-3}b^6c^{-9}}{x^{-6}y^3}}$.

Gebrochene Exponenten. (§§. 181 und 182.)

51. Verwandle in Wurzeln und berechne:

a) $25^{\frac{1}{2}}$, b) $16^{\frac{1}{4}}$, c) $8^{\frac{2}{3}}$, d) $32^{\frac{2}{5}}$;
e) $49^{0\cdot5}$, f) $81^{0\cdot25}$, g) $64^{1\cdot5}$, h) $16^{1\cdot75}$;
i) $9^{-\frac{1}{2}}$, k) $125^{-\frac{1}{3}}$, l) $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}$, m) $(\frac{27}{64})^{-\frac{2}{3}}$.

52. Verwandle in Wurzeln mit ganzen Exponenten und berechne:

a) $\sqrt[\frac{1}{2}]{3}$, b) $\sqrt[\frac{3}{4}]{8}$, c) $\sqrt[\frac{4}{5}]{5\frac{1}{16}}$, d) $\sqrt[0\cdot4]{9}$;
e) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{49}$, f) $\sqrt[-\frac{2}{5}]{36}$, g) $\sqrt[-\frac{4}{5}]{\frac{16}{81}}$, h) $\sqrt[-0\cdot2]{2}$.

Berechne und stelle die Resultate als Wurzeln und Potenzen mit positiven ganzen Exponenten dar:

53. $(x^n)^{\frac{1}{n}}$.
54. $(x^{\frac{m}{n}})^n$.
55. $(x^{-\frac{1}{n}})^{-\frac{1}{m}}$.
56. $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$.
57. $(a^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$.
58. $(a^{\frac{m+p}{n}})^{-\frac{n}{m-p}}$.
59. $\sqrt[m]{x^{-\frac{2m}{n}}}$.
60. $\sqrt[-3]{a^{\frac{3}{4}}}$.
61. $\sqrt[3]{(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}}$.
62. $(4.25)^{\frac{1}{2}}$.
63. $(xy^{-2}z^3)^{\frac{2}{3}}$.
64. $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}})^6$.
65. $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.
66. $\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{5}}$.
67. $\left(\frac{81\,n^5p^4}{16\,m^3q^6}\right)^{-\frac{3}{4}}$.
68. $a^{\frac{1}{3}} . b^{\frac{1}{3}}$.
69. $x^{-\frac{2}{5}} . (32\,y)^{-\frac{2}{5}}$.
70. $(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}} . (3\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} . (\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$.
71. $a^{\frac{2}{3}} . a^{\frac{1}{4}}$.
72. $5^{\frac{2}{3}} . 5^{\frac{1}{2}} . 5^{\frac{5}{6}}$.
73. $x^{0\cdot1} . x^{0\cdot02} . x^{0\cdot005}$.
74. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{n}{m}}$.
75. $a^{\frac{5}{9}} : a^{-\frac{2}{3}}$.
76. $a^{\frac{m}{n}} . x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{m-1}{n}}$.
77. $\frac{3^{\frac{1}{3}} . 4^{-\frac{1}{2}}}{5^{\frac{2}{3}} . 7^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{3^{\frac{2}{3}} . 5^{-\frac{4}{3}}}{4^{-2} . 7^{\frac{1}{4}}}$.
78. $\frac{a^{\frac{3}{4}} . x^{\frac{1}{5}}}{b^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{4}}} : \frac{a^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{6}{5}}}$.

79. $(x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{6}})$. **80.** $(2a - 3b^{\frac{5}{6}})(5a^{\frac{3}{4}} + 6b^{\frac{4}{5}})$.

81. $(a + a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}})(1 + a^{\frac{7}{3}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{6}})$.

82. $(6x^{\frac{7}{6}} - 8x^{\frac{5}{4}} + 3x^{\frac{29}{30}} - 4x^{\frac{21}{20}}) : (3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{4}})$.

83. $(24a^{\frac{4}{3}} + \frac{34}{3}a^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}) : (6a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2})$.

84. $(2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{-\frac{3}{4}})^2$. **85.** $(x^{-\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^3$.

---

4. Imaginäre und complexe Zahlen.

(§§. 183—186.)

1. Bringe auf die Form $b\sqrt{-1} = bi$ folgende imaginäre Zahlen:

a) $\sqrt{-16}$, b) $\sqrt{-49}$, c) $\sqrt{-64}$, d) $\sqrt{-100}$,
e) $\sqrt{-a^2}$, f) $\sqrt{-x^4}$, g) $\sqrt{-b^{2n}}$, h) $\sqrt{-y^{2m+2}}$,
i) $\sqrt{-2}$, k) $\sqrt{-3}$, l) $\sqrt{-45}$, m) $\sqrt{-72}$,
n) $\sqrt{-a}$, o) $\sqrt{-a^2b}$, p) $\sqrt{-x^5}$, q) $\sqrt{-x^{2n+1}y}$.

2. $i + 3i$. **3.** $ai - (a - b)i$. **4.** $5\sqrt{-2} + 3\sqrt{-2}$.

5. $\sqrt{-12} + \sqrt{-75}$. **6.** $\sqrt{-4} + \sqrt{-9} - \sqrt{-16}$.

7. $\sqrt{-4} - 2\sqrt{-36} + \sqrt{-100}$.

8. $2a\sqrt{-x^2} - b\sqrt{-4x^2}$.

9. $+i \,.\, +i$. **10.** $+i \,.\, -i$. **11.** $-i \,.\, -i$.

12. $5i \,.\, 3$. **13.** $\sqrt{-x^2} \,.\, \sqrt{-y^2}$. **14.** $\sqrt{-2} \,.\, -\sqrt{-3}$.

15. $a\sqrt{-a} \,.\, -b\sqrt{-b}$. **16.** $\sqrt{-xy} \,.\, \sqrt{-xy^2} \,.\, \sqrt{-x^2y^3}$.

17. $\sqrt{-ab} \,.\, \sqrt{-a^3b} \,.\, \sqrt{-ab^3} \,.\, \sqrt{-a^3b^5}$.

18. $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})(\sqrt{-a} - \sqrt{-b})$.

19. $(\sqrt{-2} + \sqrt{-3} - \sqrt{-4})(\sqrt{-2} - \sqrt{-3} + \sqrt{-4})$.

20. $\sqrt{-ab} : \sqrt{b}$. **21.** $\sqrt{-ab} : \sqrt{-b}$.

22. $x : \sqrt{-x}$. **23.** $\sqrt{80} : 2\sqrt{-5}$.

24. $5\sqrt{-6} : \sqrt{-3}$. **25.** $\sqrt{-xy^3} : \sqrt{-x^3y}$.

26. $(\sqrt{-ab} + \sqrt{-ac}) : \sqrt{-a}$.

27. $(\sqrt{-20} - \sqrt{-15}) : \sqrt{-5}$.

28. $(4\sqrt{-8} - 8\sqrt{-12} + 12\sqrt{-16}) : 4\sqrt{-4}$.

29. i^7. **30.** i^9. **31.** i^{12}. **32.** i^{14}.

33. $(\sqrt{-3})^3$. **34.** $(-2\sqrt{-3})^4$. **35.** $(a\sqrt{-bx})^6$.

---

36. $(3 + 2i) + (6 + 5i)$. **37.** $(4a + bi) \pm (2a - 3bi)$.

38. $(1 - \sqrt{-4}) + (3 - \sqrt{-25}) - (2 - \sqrt{-49})$.

39. $(3 + 2i)(3 - 2i)$. **40.** $(5 + 6i)(3 - 4i)$.

41. $(\sqrt{a} + \sqrt{-b})(\sqrt{a} - \sqrt{-b})$.

42. $(\sqrt{2} + 2\sqrt{-2})(\sqrt{2} - 2\sqrt{-2})$.

43. $(x + 1 + \sqrt{-3})(x + 1 - \sqrt{-3})$.

44. $(x + 1)(x - 1)(x + i)(x - i)$.

45. $(a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di)$.

Multipliciert man hier den ersten und zweiten, den dritten und vierten Factor, und dann die Producte mit einander, hierauf ebenso den ersten und dritten, den zweiten und vierten Factor, und dann die erhaltenen Producte, so geben die beiden Endproducte die merkwürdige Gleichung

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

46. $(2 - 3i)^2$. **47.** $(\sqrt{x} - yi)^2$.

48. $(3 - \sqrt{-5})^2$. **49.** $(\sqrt{2} - \sqrt{-2})^2$.

50. $\frac{a + \sqrt{-b}}{a - \sqrt{-b}} + \frac{a - \sqrt{-b}}{a + \sqrt{-b}}$. **51.** $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^3$.

52. $(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})^2 . (-1 + \sqrt{5} - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})^2$.

53. $(1 + \sqrt{-3})^4 + (1 - \sqrt{-3})^4$.

Befreie folgende Brüche von ihren imaginären Nennern:

54. $\frac{5}{2i}$. **55.** $\frac{\sqrt{a}}{bi}$. **56.** $\frac{2x^2}{3\sqrt{-2x}}$.

57. $\frac{1}{1 - i}$. **58.** $\frac{2}{3 + 4i}$. **59.** $\frac{a - b}{a + bi}$.

60. $\frac{a + \sqrt{-b}}{a - \sqrt{-b}}$. **61.** $\frac{1 - 20\sqrt{-5}}{7 - 2\sqrt{-5}}$. **62.** $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{-3}}{\sqrt{3} - \sqrt{-2}}$.

63. $\frac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{-a} + \sqrt{-b}}$. **64.** $\frac{6\sqrt{-6} + 5\sqrt{-5}}{6\sqrt{-5} - 5\sqrt{-6}}$.

65. $\frac{a + bi}{a - bi} + \frac{x + yi}{x - yi}$. **66.** $\frac{a - bi}{a + bi} - \frac{x + yi}{x - yi}$.

Verwandle folgende Summen oder Differenzen von Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel:

67. $\sqrt{-3 + 4i} + \sqrt{-3 - 4i}$. **68.** $\sqrt{-3 + 4i} - \sqrt{-3 - 4i}$.

69. $\sqrt{2 + \sqrt{-5}} \pm \sqrt{2 - \sqrt{-5}}$.

70. $\sqrt{2 + 2\sqrt{-35}} \pm \sqrt{2 - 2\sqrt{-35}}$.

Verwandle folgende Quadratwurzeln in Summen oder Differenzen von Quadratwurzeln:

71. $\sqrt{-3+4i}$, **72.** $\sqrt{-3-4i}$.
73. $\sqrt{8-6i}$. **74.** $\sqrt{1+\frac{3}{4}i}$,
75. $\sqrt{7+6\sqrt{-2}}$. **76.** $\sqrt{6+8\sqrt{-10}}$.
77. $\sqrt{12-10\sqrt{-13}}$. **78.** $\sqrt{20-10\sqrt{-5}}$.
79. $\sqrt{4-60\sqrt{-3}}$. **80.** $\sqrt{-a+2a\sqrt{-2}}$.
81. $\sqrt{2\sqrt{-3}}=\sqrt{0+2i\sqrt{3}}=\ldots$

5. Quadrieren und Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel.

Quadrieren. (§§. 187 und 188.)

1. $(3x+2y)^2$. **2.** $(2a^2-4b^2)^2$. **3.** $(2\cdot3a-1\cdot5b)^2$.
4. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$. **5.** $\left(\frac{3a^2}{4x}-\frac{2b^2}{9y}\right)^2$. **6.** $\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2$.
7. $(a+2b-3c)^2$. **8.** $(4+2y-y^2)^2$. **9.** $(3x-5y+8z)^2$.
10. $(6x^3-5x^2+4x-3)^2$. **11.** $(27x^6-54x^4+36x^2-8)^2$.
12. $\left(2-\frac{a}{2}+\frac{2a^2}{3}\right)^2$. **13.** $\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{4c}-\frac{4c}{5d}\right)^2$. **14.** $\left(\frac{3y^2}{4b^2}+\frac{2y}{3b}-\frac{1}{2}\right)^2$.
15. $(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$.
16. $[(a+x)^2+(b-y)^2]-[(a+x)^2-(b-y)^2]^2$.
17. 249^2. **18.** 5019^2. **19.** 72902^2. **20.** 73215^2.
21. 135709^2. **22.** 4612048^2. **23.** $5\cdot91^2$. **24.** $0\cdot887^2$.
25. $0\cdot738\ldots^2$. **26.** $0\cdot1509\ldots^2$. **27.** $(78^2)^2$. **28.** 317^4.

Ausziehen der Quadratwurzel. (§§. 189—193.)

29. $\sqrt{4a^2-12ab+9b^2}$. **30.** $\sqrt{9m^4-12m^2n^2+4n^4}$.
31. $\sqrt{\{x^4-6ax^3+11a^2x^2-6a^3x+a^4\}}$.
32. $\sqrt{\{16m^6+16m^5+4m^4-16m^3-8m^2+4\}}$.
33. $\sqrt{\{16a^6-24a^5+25a^4-20a^3+10a^2-4a+1\}}$.
34. $\sqrt{\{9y^6-12y^5+10y^4-28y^3+17y^2-8y+16\}}$.
35. $\sqrt{\{25-70a+139a^2-236a^3+235a^4-198a^5+121a^6\}}$.
36. $\sqrt{4a^2-16a\sqrt{-b}-16b}$. **37.** $\sqrt{1-4x}$.
38. $\sqrt{\{0\cdot16a^4-2\cdot4a^3-0\cdot16a^2b+9a^2+1\cdot2ab+0\cdot04b^2\}}$.
39. $\sqrt{\left[\frac{x^4}{9}-\frac{x^3}{3}+\frac{11x^2}{12}-x+1\right]}$.
40. $\sqrt{\left[\frac{9x^6}{16y^6}-\frac{x^5}{2y^5}-\frac{26x^4}{9y^4}+\frac{53x^3}{6y^3}+\frac{2x^2}{3y^2}-\frac{20x}{y}+25\right]}$.

41. $\sqrt{135424}$. 42. $\sqrt{556516}$. 43. $\sqrt{226576}$.
44. $\sqrt{1920996}$. 45. $\sqrt{26956864}$. 46. $\sqrt{53993104}$.
47. $\sqrt{395850816}$. 48. $\sqrt{422220304}$. 49. $\sqrt{54782211136}$.
50. $\sqrt{1406\cdot25}$. 51. $\sqrt{27\cdot973521}$. 52. $\sqrt{0\cdot00178929}$.
53. $\sqrt{785\cdot6809}$. 54. $\sqrt{0\cdot97535376}$. 55. $\sqrt{44105\,040144}$.
56. $\sqrt{\frac{676}{1681}}$. 57. $\sqrt[4]{\frac{178929}{797449}}$. 58. $\sqrt[8]{485380\frac{29}{169}}$.
59. $\sqrt{\sqrt{29986576}}$. 60. $\sqrt{362673936}$. 61. $\sqrt{1475789056}$.
62. $\sqrt{0\cdot1907\ldots}$ 63. $\sqrt{335\cdot779\ldots}$ 64. $\sqrt{0\cdot8423\ldots}$

Berechne folgende irrationale Wurzeln auf 5 Decimalen:

65. $\sqrt{28}$. 66. $\sqrt{320}$. 67. $\sqrt{6584}$. 68. $\sqrt{552747}$.
69. $\sqrt{3\cdot92}$. 70. $\sqrt{0\cdot101}$. 71. $\sqrt{8\cdot376}$. 72. $\sqrt{0\cdot07854}$.
73. $\sqrt{0\cdot123457}$. 74. $\sqrt{55\cdot25734}$. 75. $\sqrt{19\cdot383838}$.
76. $\sqrt{\frac{67}{3}}=\sqrt{\frac{201}{9}}=\ldots$ 77. $\sqrt{\frac{591}{67}}$. 78. $\sqrt{251\frac{7}{12}}$.
79. $\sqrt{2}$. 80. $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. 81. $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Berechne mittelst der Kettenbrüche auf 5 Decimalen:

82. $\sqrt{11}$. 83. $\sqrt{23}$. 84. $\sqrt{47}$. 85. $\sqrt{129}$.

Cubieren. (§§. 194 und 195.)

86. $(2x+3y)^3$. 87. $(5a^2-4bx^3)^3$. 88. $(0\cdot8x^2+0\cdot5y^2)^3$.
89. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3$. 90. $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^3$. 91. $\left(\frac{3a^2}{8x^2}-\frac{2x}{9a}\right)^3$.
92. $(y^2+2y-3)^3$. 93. $(x^2-3xy+2y^2)^3$.
94. $(1-2x-3x^2+4x^3)^3$. 95. $(1-2a^2+4a^4-8a^8)^3$.
96. $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-1\right)^3$. 97. $\left(4a-\frac{2x^2}{3a}+\frac{9x^4}{8a^3}\right)^3$.
98. 933^3. 99. 1585^3. 100. 6045^3. 101. 21704^3.
102. 90216^3. 103. 357946^3. 104. $45\cdot09^3$. 105. $5\cdot99203^3$.
106. $0\cdot858\ldots^3$. 107. $0\cdot8079\ldots^3$. 108. $(29^3)^3$. 109. $0\cdot865^6$.

Ausziehen der Cubikwurzel. (§§. 196—199.)

110. $\sqrt[3]{a^3x^6-3a^2bx^4y^2+3ab^2x^2y^4-b^3y^6}$.
111. $\sqrt[3]{\{8x^6-36x^5+78x^4-99x^3+78x^2-36x+8\}}$.
112. $\sqrt[3]{\{64x^6-144ax^5+204a^2x^4-171a^3x^3+102a^4x^2-36a^5x+8a^6\}}$.

113. $\sqrt[3]{\{8a - 60\sqrt[3]{a^2 b} + 150\sqrt[3]{a b^2} - 125 b\}}$.

114. $\sqrt[3]{a^3 + x^3}$. **115.** $\sqrt[3]{x^3 - a}$.

116. $\sqrt[3]{\left[\frac{a^3}{8b^3} - \frac{a^2 c}{b^2 d} + \frac{8ac^2}{3bd^2} - \frac{64c^3}{27d^3}\right]}$.

117. $\sqrt[3]{\left[1 + \frac{6x}{a} + \frac{15x^2}{2a^2} - \frac{10x^3}{a^3} - \frac{45x^4}{4a^4} + \frac{27x^5}{2a^5} - \frac{27x^6}{8a^6}\right]}$.

---

118. $\sqrt[3]{262144}$. **119.** $\sqrt[3]{3241792}$. **120.** $\sqrt[3]{8615125}$.

121. $\sqrt[3]{746142643}$. **122.** $\sqrt[3]{1767172329}$. **123.** $\sqrt[3]{627881709547}$.

124. $\sqrt[3]{0 \cdot 778688}$. **125.** $\sqrt[3]{474 \cdot 552}$. **126.** $\sqrt[3]{78 \cdot 402752}$.

127. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{20661046784}}$. **128.** $\sqrt[6]{1126162419264}$.

129. $\sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}$. **130.** $\sqrt[3]{32 \cdot 856 \ldots}$ **131.** $\sqrt[3]{0 \cdot 00008427 \ldots}$

Berechne folgende irrationale Wurzeln auf 5 Decimalen:

132. $\sqrt[3]{100}$. **133.** $\sqrt[3]{5213}$. **134.** $\sqrt[3]{8135}$. **135.** $\sqrt[3]{47838}$.

136. $\sqrt[3]{0 \cdot 3}$. **137.** $\sqrt[3]{25 \cdot 643}$. **138.** $\sqrt[3]{0 \cdot 0957}$. **139.** $\sqrt[3]{0 \cdot 12345}$.

140. $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{180}{216}} = \ldots$ **141.** $\sqrt[3]{\frac{37}{70}}$. **142.** $\sqrt[3]{8\frac{7}{12}}$.

---

6. Logarithmen.

(§§. 200—212.)

1. $\log abc$. **2.** $\log 6xyz$. **3.** $\log 3a(c+d)$.

4. $\log(a+b)(m+n)$. **5.** $\log(a^2 - b^2)$. **6.** $\log a(x^2 - 1)$.

7. $\log \frac{2ab}{3x}$. **8.** $\log \frac{1}{ab}$. **9.** $\log \frac{ab - cd}{mn - pq}$.

10. $\log \frac{5mx}{1 - m^2}$. **11.** $\log \frac{x^2 - y^2}{2xy}$. **12.** $\log \frac{3(a^2 - b^2)x}{(3a + 2b)y}$.

13. $\log a^x$. **14.** $\log ab^2$. **15.** $\log (ab)^2$.

16. $\log 2a^3$. **17.** $\log 5a^2x^3$, **18.** $\log (a+b)^{x+y}$.

19. $\log \frac{a x^m y^n}{b z^p}$. **20.** $\log \frac{2a^3}{3bx^2}$. **21.** $\log \frac{8mn^2x^3}{5pqy^4}$.

22. $\log \frac{1}{(2a^2)^3 (5b^3)^2}$. **23.** $\log \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^3\right]$.

24. $\log \sqrt{ab}$. **25.** $\log \sqrt{xy^3}$. **26.** $\log 8a^2 \sqrt[4]{bx^3}$.

27. $\log \sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}}$. **28.** $\log \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{5}}$. **29.** $\log \frac{x^2 \sqrt[3]{a}}{5by^3}$.

30. $\log (\sqrt[m]{x^n} \sqrt[p]{y^q})$. **31.** $\log \sqrt[n]{x^2 b^3 c^4}$. **32.** $\log \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^p})^q}$.

33. $\log (2\sqrt{2\sqrt{2}})$. **34.** $\log \sqrt[x]{a\sqrt[x]{a}}$. **35.** $\log x^{\log x}$.

36. $\log \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. **37.** $\log \frac{1}{b^2 \sqrt[5]{a^3 c}}$. **38.** $\log \frac{a(a+1)\sqrt[3]{a^2}}{b(b+1)\sqrt{b}}$.

39. $\log \sqrt{\frac{\sqrt[3]{28}}{2\sqrt{13}}}$. **40.** $\log m \sqrt[4]{\frac{a\sqrt{b}}{c^3}}$. **41.** $\log \sqrt{\frac{3^4 . \sqrt{17.13}}{7.14^2 . \sqrt[3]{69}}}$.

Bestimme den Ausdruck, dessen Logarithmus gleich ist:

42. $\log x + \log y - \log z$. **43.** $\log a - (\log b + \log c)$.

44. $3 \log a - 2 \log b + 4 \log c$.

45. $\frac{1}{5} \log a + \frac{1}{3} \log b - \frac{1}{4} \log c$.

46. $\log a + \frac{1}{x} \log a - \frac{1}{y} (\log a + \log b)$.

47. $\frac{n}{m} \log a - \left(\frac{q}{p} \log b + \frac{s}{r} \log c\right)$.

48. $2 \log (x - y) - \frac{1}{2} \log (x + y) - \frac{1}{2} \log (x^2 - xy + y^2)$.

49. $x \log (\log a)$. **50.** $x \log x - \log (\log x)$.

Suche aus den Logarithmentafeln zu folgenden Zahlen die Brigg'schen Logarithmen:

	a)	b)	c)	d)	e)
51.	7.	38.	218.	683.	995.
52.	1035.	4719.	5755.	7899.	9011.
53.	39070.	586100.	59·13.	9·015.	0·4792.
54.	86127.	78008.	0·68315.	85·201.	0·0075536.
55.	0·091457.	364228.	17·8193.	4·48197.	129·356.

Suche zu folgenden Brigg'schen Logarithmen die zugehörigen Zahlen:

	a)	b)	c)	d)
56.	0·24055.	1·57287.	2·98547.	0·61278.
57.	3·89009.	0·66058.	0·27161 — 1.	1·02816.
58.	2·95742.	1·01396.	0·46370 — 3.	2·40016.
59.	0·73048 — 2.	2·81350.	3·91001.	3·69831.
60.	0·55342 — 3.	0·68012 — 1.	1·85603.	4·43065.
61.	4·89195.	0·05168 — 2.	0·69960 — 1.	1·99828.

Berechne mit Hilfe der Logarithmen folgende Ausdrücke:

62. $1\cdot2345 . 1\cdot3456$. **63.** $9\cdot68453 . 0\cdot29758$.

64. $1\cdot025 . 1\cdot0792 . 1\cdot05625 . - 1\cdot0751$.

65. $0\cdot35679 . 1\cdot0765 . 1\cdot92234 . 0\cdot33258$.

66. $2\cdot00415 . 0\cdot56 . 0\cdot0741 . 0\cdot09972 . 1\cdot25463$.

67. $\frac{17\cdot846}{9\cdot157}$. **68.** $\frac{1}{3\cdot14159}$. **69.** $\frac{2488 . - 1926}{521347}$. **70.** $\frac{2\cdot3456 . 5\cdot2913}{769 . 0\cdot12345}$.

71. $\frac{413 . 5124 . 21358}{425 . 4998 . 76143}$. **72.** $\frac{2\cdot1457 . 9\cdot1248 . 1385 . 31\cdot273}{277 . 10\cdot7285 . 2\cdot2812 . 125\cdot092}$.

73. $(1\cdot05)^{12}$. **74.** $(1\cdot045)^{9}$. **75.** $(42\cdot456)^{-2}$. **76.** $2^{1\cdot235}$.

77. $\left(-\frac{323}{313}\right)^{17}$. **78.** $\left(\frac{54\cdot139}{55\cdot817}\right)^{11}$. **79.** $2\cdot45^{5\cdot172^{1\cdot05}}$.

80. $\frac{2035 . (0\cdot00876)^7}{3164 . (0\cdot00592)^5}$. **81.** $\frac{3\cdot14159^2 . 2\cdot0489^3 . 1\cdot07938^4}{4\cdot0932^4 . 0\cdot859^2 . 210\cdot895^3}$.

82. $\frac{4r^3\pi}{3}$ für $r = 1\cdot06234$ und $\pi = 3\cdot14159$.

83. $(3\cdot905)^{\frac{4}{5}}$. **84.** $\left(-\frac{89}{113}\right)^{\frac{2}{3}}$. **85.** $(11\cdot716)^{-1\frac{3}{4}}$.

86. $\sqrt{29}$. **87.** $\sqrt[3]{918}$. **88.** $\sqrt[5]{7135}$.

89. $\sqrt[6]{1\cdot8354}$. **90.** $\sqrt[8]{314\cdot2789}$. **91.** $\sqrt{13^{0\cdot3414}}$.

92. $\sqrt[5]{\frac{126}{115}}$. **93.** $\sqrt[12]{\left(\frac{395}{129}\right)^7}$. **94.** $\sqrt[8]{\frac{9}{13}\sqrt[3]{6}}$.

95. $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$ für $a = 2\cdot145$, $b = 3\cdot087$, $c = 3\cdot248$.

96. $\frac{35^4}{57^3} . \sqrt[5]{30\cdot9}$. **97.** $\frac{\sqrt[3]{37\cdot8} . \sqrt[4]{13^2}}{\sqrt[5]{7\cdot13945^3}}$. **98.** $\sqrt[4]{\frac{87 . \sqrt{8105}}{93\cdot24^2}}$.

99. $\frac{3\sqrt[8]{4 . \sqrt{6}}}{11\sqrt[5]{5\sqrt{124}}}$. **100.** $\sqrt[7]{340} . \sqrt[5]{\frac{24\cdot105 . 58\cdot937}{1\cdot47939^5}}$.

101. $\sqrt{10 + \sqrt{10}}$. **102.** $\frac{347\sqrt[5]{0\cdot35} + \sqrt{55\cdot33^2}}{4\cdot9275^3}$.

103. $\sqrt{\frac{4\cdot31957^3 . \sqrt[3]{3\cdot19338} . \sqrt[5]{17\cdot39}}{15^4 . \sqrt[3]{91\cdot34} - 9\sqrt[5]{3\cdot4071}}}$.

IV. Gleichungen.

Ordnen der Gleichungen. (§§. 214—216.)

Ordne folgende Gleichungen:

1. $3(x-5)=4(10-2x)$. **2.** $(a+b)x=2a-(a-b)x$.

3. $(9+x)(7-x)+(9-x)(7+x)=76$.

4. $(2-x)(3-x)=(4+x)(3+x)$.

5. $(x+a+b)(x-a+b)+(x+a-b)(x-a-b)=0$.

6. $\frac{5+x}{2}+\frac{13+7x}{3}=72$. **7.** $a-b-\frac{ab}{x}=0$.

8. $\frac{x+a}{x}+\frac{x}{x+a}=3$. **9.** $\frac{ax-2a}{ax-2b}=\frac{ax-2b}{ax+2a}$.

10. $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}+\frac{x-1}{4}=\frac{2x}{5}+\frac{7}{4}$. **11.** $3x=\frac{6x^2-3ax+b^2}{2x}+a$.

12. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{7}+\frac{x}{11}-9=x+\frac{23}{66}$.

13. $\frac{4}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{3x}{x-1}$. **14.** $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{a}{a^2-x^2}$.

15. $\frac{20}{3x+4}-\frac{3}{5x-3}=6$. **16.** $\frac{2a+x}{3a+2x}-\frac{3}{2}=\frac{3a-x}{3a+x}$.

17. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+4}{x-4}$.

Mache folgende Gleichungen rational:

18*. $\sqrt{4x^2+8x-11}=2x+1$.

19*. $\sqrt{(x-p)^2+y^2}=x+p$. **20*.** $\sqrt{13+x}=\sqrt{x}-13$.

21*. $\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-7}=1$.

22*. $\sqrt{a(2x+b)}-\sqrt{b(2x+a)}=(a-b)\sqrt{2}$.

---

1. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades.

Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. (§. 218.)

1. $13+x=24$. **2.** $5x+8=43$.

3. $b=a-x$. **4.** $3x-2a+b=a-5b$.

5. $17+8x=71-x$. **6.** $14a-6x+12=20-7x+9a$.

7. $5+(2x-15)=x$. **8.** $9-(5-2x)=3x+1$.

9. $5(x-2)-2x=2(x-1)$. **10.** $a(x-b)=b(a-x)-c$.

11. $m(x-a)-n(x-b)=(a+b)x$.

12. $3(2x+9)-9(4+x)=3(5+x)-2(x+6)$.

13. $(x+a):(x-a)=b:c$.

14. $(8x-1):(4x+2)=(6x-9):(3x-4)$.

15. $\{3(y-2)-5\}\,.\,5-4(2y-6)=y-19.$

16. $5(x+10)-4\{160-3(3x-2)+2x\}=2-x.$

17. $(z+1)(z-1)=z^2+z+1.$

18. $(2+x)(2x+1)+(2-x)(2x-1)=0.$

19. $x(x-2a)-(b-x)^2=3b^2-4a^2.$

20. $(a+x)(b+x)(c+x)-(a-x)(b-x)(c-x)=2(x^3+abc).$

21. Löse die Gleichung $2s=n(a_1+a_n)$ nach allen darin vorkommenden allgemeinen Zahlen auf.

22. $\frac{3-4x}{7}+3=4x.$

23. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=x+1.$

24. $\frac{a-x}{b}=\frac{b-x}{a}.$

25. $\frac{a-bx}{c}=\frac{m-nx}{p}.$

26. $\frac{5m}{x}-\frac{2(m-x)}{x}=3.$

27. $\frac{x^3-2x^2+3}{x^2+2x-1}=x-3.$

28. $\frac{m(a^2+x^2)}{ax}-\frac{mx}{a}=cm.$

29. $\frac{a-b}{b-x}=\frac{a}{x}.$

30. $\frac{m}{x-n}-\frac{n}{x-m}=0.$

31. $x-\frac{a-x}{b}+\frac{b-x}{c}=d.$

32. $\frac{a-b}{x}+1=\frac{a}{b}-\frac{a+x}{x}.$

33. $\frac{13}{x-5}+\frac{3}{4}=\frac{65}{2x-10}.$

34. $\frac{9x+8}{6x+5}=\frac{3x+2}{2x+1}.$

35. $\frac{8x-3}{2x-1}=\frac{3x+4}{x+1}+1.$

36. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}.$

37. $\frac{a+b}{a-b}.x-4ab=\frac{b-a}{a+b}.x.$

38. $\frac{x}{x+a}-\frac{x}{x-a}=\frac{b}{x+a}.$

39. $\frac{ax}{mx-a}+\frac{bx}{nx-b}=\frac{a}{m}+\frac{b}{n}.$

40. $(a+b)^2-\frac{ax}{bc}-\frac{bx}{ac}=\frac{cx}{ab}+\frac{2x}{c}-c^2.$

41. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-8}.$

42. $\frac{1}{ac-cx}-\frac{1}{bd-dx}=\frac{1}{ad-dx}-\frac{1}{bc-cx}.$

43. $\frac{7}{3}(2x+5)+3(2x-3)-\frac{3}{4}(5x-7)=1.$

44. $\frac{4}{5}(3x-7)-22=\frac{3}{7}[\frac{7}{9}(8x-63)-(2x+3)].$

45. $\frac{1}{4}\left(\frac{8}{9}\{\frac{7}{6}[\frac{3}{2}(x+1)+3]+2\}-4\right)=1.$

46. $4:\frac{2x}{3}=1:\left(15-\frac{x}{3}\right).$

47. $\frac{a+b}{a+1}:\frac{a-1}{x-1}=\frac{a-b}{a-1}:\frac{a+1}{x+1}.$

48. $\frac{3\cdot07x}{16}+\frac{x-0\cdot08}{5}=\frac{3x}{8}-0\cdot00925.$

49*. $3\sqrt{x-1}=4.$

50*. $\sqrt{2x+1}+5=4(\sqrt{2x+1}-1).$

51*. $\frac{\sqrt{6x+7}}{5}=\frac{\sqrt{5x-6}}{3}.$

52*. $x(1-a):\sqrt{x}=\sqrt{x}:x.$

53*. $(b-a\sqrt{x}):(a-b\sqrt{x})=a(b^2-1):b(a^2-1).$

54*. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=p.$

55*. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+5}.$

56*. $\frac{a+\sqrt{x}}{b-\sqrt{x}}=\frac{a(1+b)}{b(1-a)}$.

57*. $\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{3}}{3\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{4+3\sqrt{2}}{6+2\sqrt{3}}$.

58*. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$.

59*. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=a$.

60*. $4-\sqrt{x}=\sqrt{4+x}$.

61*. $\sqrt{x+2a}+\sqrt{x+a}=a$.

62*. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}}$.

63*. $\sqrt{8x-7}-\frac{2x-2}{\sqrt{2x+3}}=\sqrt{2x+3}$.

64*. $x-2a-\sqrt{x^2-b^2}=(x-a)\left\{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-b^2}}\right\}$.

Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten. (§§. 219—222.)

65. $8x-5y=25$,
$3x+7y=36$.

66. $3x+4y=4$,
$12x-6y=5$.

67. $16y-25z=7$,
$5z-24y=9$.

68. $x^2-y^2=a^2$,
$x+y=b$.

69. $x+2y=30$,
$\frac{3x}{5}+\frac{y}{2}=11$.

70. $\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}y=2$,
$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=4$.

71. $\frac{x+7}{y}=\frac{4}{5}$,
$\frac{x}{y+4}=\frac{1}{2}$.

72. $\frac{28}{x}+\frac{6}{y}=9$,
$\frac{9}{y}-\frac{4}{x}=2$.

73. $\frac{m}{n+y}=\frac{n}{m+x}$,
$\frac{n}{m-y}=\frac{m}{n-x}$.

74. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2b^2}$,
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{b^2}$.

75. $\frac{x-a+2b}{b}+\frac{y}{c}=\frac{b}{c}$,
$\frac{x}{ab}+\frac{y}{bc}=\frac{x+y}{ac}$.

76. $ax-by=a^2+b^2$,
$bx+ay=a^2+b^2$.

77. $(a+c)x+(a-c)y=2bc$,
$(b-c)x+(b+c)y=2ac$.

78. $\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a+b}$,
$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a-b}$.

79. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2$,
$\frac{x}{a-b}-\frac{y}{a+b}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$.

80. $\frac{2x-b}{a}-\frac{2y-a}{b}=2$,
$\frac{2x-a}{b^2}+\frac{2y+b}{a^2}=\frac{a+b}{ab}$.

81. $\frac{3x-2y}{5}+\frac{5x-3y}{3}=x+1$,
$\frac{2x-3y}{3}+\frac{4x-3x}{2}=y+1$.

82. $x-y=(2a+b)+\frac{4ab^2-2a(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$,
$ax-by=(a+b)^2-\frac{a-b}{a+b}+\frac{(a^2+b^2)-2ab(a^2-b^2+1)}{a^2-b^2}$.

83. $\frac{x+42\frac{1}{2}}{2}=y-42\frac{1}{3}$,
$x-23\frac{1}{2}=\frac{y+23\frac{1}{2}}{3}$.

84. $41x-32{\cdot}75y=10{\cdot}42$,
$5{\cdot}2x-36y+2{\cdot}5=0$.

85. $5x : 8 = (y + 5) : 2,$
$3x : 8 = (y - 2) : 1.$

86. $(4x + y) : (2x - y) = 16 : 5,$
$(2x + 7y) : (x + 8) = 14 : 5.$

87. $(3x + 2y - 4) : (2x + 3y - 1) = 3 : 2,$
$(x - 2y - 3) : (2x - 3y - 6) = 2 : 3.$

88. $x\sqrt{a} + y\sqrt{b} = a + b,$
$x + y = 2\sqrt{a}.$

89*. $3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 9,$
$2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1.$
Setze $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$.

90*. $\sqrt{x} + am = m(\sqrt{y} + b),$
$m(\sqrt{x} - a) = \sqrt{y} - bm.$

91*. $2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{y-2} = 3,$
$3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-2} = 5.$

92*. $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 6,$
$\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = 1.$

93*. $\frac{5}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y+2}} = 2,$
$\frac{15}{\sqrt{x-2}} - \frac{8}{\sqrt{y+2}} = 1.$

---

94. $x + 3y = 39,$
$3x + 2z = 48,$
$4x - 3z = 18.$

95. $3x - 4y = 6,$
$2x + 3z = 26,$
$5y - 6z = 18.$

96. $3x + y + 2z = 13,$
$x + 2y + 3z = 17,$
$2x + 3y + z = 12.$

97. $6x - 4y + 3z = 28,$
$4x - y - 3z = 7,$
$2x - 3y + 4z = 13.$

98. $a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$
$a_3x + b_3y + c_3z = d_3.$
Gib das Gesetz an, welches in den für x, y und z erhaltenen Ausdrücken vorherrscht.

99. $x + y + z = s,$
$x : y = a : b,$
$y : z = b : c.$

100. $0{\cdot}4x + 0{\cdot}5y + 0{\cdot}7z = 51,$
$0{\cdot}3x + 0{\cdot}4y + 0{\cdot}5z = 38,$
$0{\cdot}2x + 0{\cdot}3y + 0{\cdot}4z = 29.$

101. $\frac{x}{5} + \frac{3y}{4} + \frac{7z}{15} = 18,$
$\frac{2x}{5} + \frac{5y}{12} + \frac{2z}{3} = 19,$
$\frac{x}{10} + \frac{5y}{6} + \frac{4z}{5} = 23.$

102. $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 612,$
$\frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} = 612,$
$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z = 612.$

103. $3x - y - z = 10,$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 13,$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{5} = 10.$

104. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$
$\frac{ax - by}{a + b} = \frac{az - cy}{c},$
$\frac{by - cz}{b - c} = \frac{bx + az}{a}.$

105. $\frac{x + 1}{y + 1} = 2,$
$\frac{y + 2}{z + 1} = 4,$
$\frac{z + 3}{x + 1} = \frac{1}{2}.$

106. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c.$

107. $-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a,$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b,$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=c.$

108. $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=9,$
$-\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{8}{z}=10,$
$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}-\frac{6}{z}=20.$

109. $x+z=18,$
$z-y=2,$
$u+y=12,$
$u+2x=26.$

110. $u+x+y-z=a,$
$u+x-y+z=b,$
$u-x+y+z=c,$
$-u+x+y+z=d.$

111. $3u-x+y+2z=20,$
$2u+3x-y+z=17,$
$u+2x+3y-z=21,$
$-u+x+2y+3z=12.$

112. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z=6,$
$\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}y+\frac{1}{6}u=5,$
$\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}u=4,$
$\frac{1}{3}y+\frac{1}{5}z-\frac{1}{4}u=3.$

113. $2x-3y+4z-5u+6w=6,$
$3x+y-5z+u-3w=3,$
$-x+4y+2z-5u+w=8,$
$x-y+z-u+w=3,$
$x+y+z+u+w=15.$

Anwendung der bestimmten Gleichungen des ersten Grades.

(§§. 223 und 224.)

114. Das 3fache und das 4fache einer Zahl beträgt zusammen 196; wie groß ist die Zahl?

115. Von welcher Zahl ist der siebente Theil um 8 kleiner als der dritte Theil?

116. Wenn man eine Zahl mit 15 multipliciert, zu dem Producte 20 addiert, die Summe durch 4 dividiert und von dem Quotienten 14 subtrahiert, so erhält man das 3fache der fraglichen Zahl; welche Zahl ist es?

117. Wie heißt die stetige geometrische Proportion, deren drei Glieder um gleichviel größer sind als 1, 3 und 6?

118. Die Zahl a soll in zwei Theile so getheilt werden, dass das mfache des ersten Theiles um d größer sei als das nfache des zweiten Theiles.

119. In welche zwei Theile muss man 60 zerlegen, damit der größere Theil durch den kleineren dividiert 2 zum Quotienten und 3 zum Reste gebe?

120. Eine Zahl a in solche zwei Theile zu zerlegen, dass deren Quotient der gegebenen Zahl selbst gleich sei.

121. Welche Zahl muss man vom Zähler und vom Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ $(\frac{7}{13})$ subtrahieren, damit der neue Bruch gleich $\frac{c}{d}$ $(\frac{1}{3})$ werde?

122. Welche Zahl muss zum Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ addiert und vom Nenner desselben subtrahiert werden, damit der erhaltene Bruch der reciproke des früheren sei?

123. Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches 7 addiert, so erhält er den Wert $\frac{4}{5}$; subtrahiert man vom Zähler und Nenner 2, so erhält er den Wert $\frac{1}{2}$. Welches sind Zähler und Nenner des Bruches?

124. Zwei zweiziffrige Zahlen werden mit denselben zwei Ziffern geschrieben und verhalten sich wie 13 : 31; welche Zahlen sind es, wenn ihre Summe 88 beträgt?

125. Vermehre ich eine zweiziffrige Zahl um das 9fache ihrer Einer, so erhalte ich 80; vermehre ich sie dagegen um 18, so erscheinen in der Summe ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung; wie heißt die zweiziffrige Zahl?

126. Jemand wird nach 10 Jahren doppelt so alt sein, als er vor 4 Jahren war; wie alt ist er jetzt?

127. Ein Vater ist jetzt 48, sein Sohn 21 Jahre alt; vor wieviel Jahren war der Vater 10mal so alt als sein Sohn?

128. Ein Vater ist 36, sein Sohn 10 Jahre alt; wie viel Jahre muss der Vater noch leben, damit er gerade doppelt so alt werde, als es dann sein Sohn sein wird?

129. A ist jetzt $m$mal so alt und wird nach a Jahren $n$mal so alt sein als B; wie alt ist A?

Welche Beziehung muss zwischen m, n und a stattfinden, damit die Auflösung einen Sinn habe? (§. 224, Beispiel 2.)

130. Ein Vater ist gegenwärtig 3mal so alt als sein Sohn; vor 12 Jahren war er 9mal so alt als der Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

131. Ein Knabe sagt: meine Mutter ist 25 Jahre älter als ich, mein Vater ist 5 Jahre älter als die Mutter, und wir alle zusammen haben 91 Altersjahre. Wie alt ist der Knabe, die Mutter, der Vater?

132. Bei der Theilung einer gewissen Summe erhält A 1000 fl. und $\frac{1}{3}$ des Restes, B $\frac{1}{2}$ des neuen Restes und noch 500 fl. darüber, C die noch übrigen 2500 fl. Wie groß ist die Summe, wie viel erhält A, wie viel B?

133. Bei der Theilung einer gewissen Summe erhält A a fl. mehr als $\frac{1}{m}$ derselben, B b fl. mehr als $\frac{1}{n}$ des Restes, C den neuen Rest, welcher c fl. weniger beträgt als $\frac{1}{p}$ der ganzen Summe. Wie viel erhält jeder?

134. Unter drei Personen wird eine bestimmte Summe so vertheilt, dass B 20 fl. weniger als A, und C 20 fl. weniger als B bekommt; die ganze Summe ist um 25 fl. größer, als das 4fache dessen, was C bekommt. Wie viel erhält jeder?

135. Ein Vater verspricht seinem Sohne für jede fehlerfreie Aufgabe ein Geschenk von 10 Kreuzern; für jede fehlerhafte Aufgabe dagegen muss der Sohn dem Vater 5 kr. zurückzahlen. Bei 20 Aufgaben ergab sich nun, dass dem Sohne von den erhaltenen Geschenken 80 kr. übrig blieben; wie viele Aufgaben hat er ohne Fehler, wie viele fehlerhaft gearbeitet?

136. Jemand dingt einen Gärtner auf einen Monat (30 Tage); er verspricht ihm während dieser Zeit die Kost, und für jeden Tag, an dem er arbeitet, $\frac{4}{5}$ fl.; für jeden Tag, an dem der Gärtner nicht arbeitet, muss dieser dem Herrn $\frac{1}{5}$ fl. für die Kost bezahlen. Nach einem Monat erhielt der Gärtner 18 fl.; wie viele Tage hat er gearbeitet und wie viele nicht?

137. Zwei Arbeiter sollen einen Graben von 435 Meter Länge reinigen; der eine macht täglich 42 Meter, der andere 45 Meter fertig; wann wird die ganze Arbeit fertig sein?

138. Zwei Fässer enthalten 351 Liter Wein; nimmt man aus dem ersten den sechsten und aus dem zweiten den dritten Theil heraus, so bleibt in beiden gleichviel übrig. Wie viel Liter enthält jedes Fass?

139. In jedem von zwei Fässern ist eine gewisse Menge Wein. Gießt man aus dem ersten in das zweite so viel, als schon darin ist; dann aus dem zweiten in das erste so viel, als jetzt darin ist; dann wieder aus dem ersten in das zweite so viel, als darin übrig geblieben war, so enthalten beide Fässer gleich viel Wein, nämlich 72 Liter. Wie viel Liter enthielt jedes Fass?

140. In einer Gesellschaft waren doppelt soviel Männer als Frauen; nachdem 8 Männer mit ihren Frauen weggiengen, blieben noch viermal so viel Männer als Frauen. Wie viel Männer und Frauen waren anfangs in der Gesellschaft?

141. In einem Landtage, in welchem 64 Abgeordnete stimmten, wurde ein Antrag mit einer Stimmenmehrheit von 10 angenommen. Wie viele stimmten dafür, wie viele dagegen?

142. In einer Fabrik arbeiten 26 Arbeiter, theils Meister, theils Gesellen; jeder Meister erhält täglich 2 fl., jeder Geselle nur die Hälfte davon; würde man jedem Meister von seinem Lohne $\frac{1}{5}$ fl. abziehen und dafür jedem Gesellen so viel zulegen, so möchte der tägliche Lohn um $2\frac{4}{5}$ fl. mehr betragen. Wie viele Meister und wie viele Gesellen sind es?

143. A und B machen eine Wette von 12 fl.; gewinnt A, so hat er dreimal so viel Geld als B; verliert er, so hat er nur doppelt so viel als B. Wie viel Geld hat jeder?

144. Drei spielen mit einander; im ersten Spiele verliert der erste an jeden der anderen so viel, als jeder von diesen bei sich hatte; im zweiten Spiel verliert der zweite an den ersten und dritten so viel als jeder derselben hat; im dritten Spiele verliert der dritte an den ersten und zweiten so viel als jeder hat; nach geendigtem Spiel hat jeder 24 fl. Wie viel hatte jeder am Anfange des Spieles?

145. Die Vorderräder eines Wagens haben 1·1 Meter, die Hinterräder 1·4 Meter im Durchmesser; wenn nun ein Vorderrad von A bis B 780 Umdrehungen mehr gemacht hat als ein Hinterrad, wie viel Meter ist A von B entfernt?

146. Ein Kaufmann hat zwei Sorten einer Ware, eine bessere, das Kilogr. zu 60 kr., und eine geringere, das Kilogr. zu 40 kr.; er will von beiden eine Mischung von 80 Kilogr. bereiten, die er zu 45 kr. das Kilogr. verkaufen kann. Wie viel Kilogr. muss er dazu von jeder Sorte nehmen?

147. Ein Weinhändler hat zweierlei Weine, von dem ersten kostet das Hektoliter 60 fl., von dem zweiten 32 fl.; er will durch Mischung 7 Hektoliter zu 40 fl. bekommen. Wie viel Hektoliter wird er von jeder Gattung zu der Mischung nehmen müssen?

148. Feines Silber und 625 Tausendtheile feines Silber sollen zu Silber von 750 Tausendtheilen Feingehalt eingeschmolzen werden; wie viel von jeder Gattung kommt auf 24 Kilogr. dieser Legierung?

149 Wie viel Kupfer (Gehalt = 0) muss man mit 26 Kilogr. Silber, das $\frac{900}{1000}$ fein ist, legieren, um Silber, das $\frac{520}{1000}$ fein ist, zu erhalten?

150. Zu 24 Kilogr. $\frac{13}{16}$ feinem Silber werden 12 Kilogr. einer andern Silbersorte hinzugesetzt, wodurch die Mischung $\frac{3}{4}$ fein wird; welchen Feingehalt hat die zweite Sorte?

151. Jemand hat drei Metallstücke, deren jedes aus den Metallen A, B, C besteht. Das erste Stück enthält von A a_1, von B b_1, von C c_1 Dekagr.; das zweite Stück enthält von A a_2, von B b_2, von C c_2 Dekagr.; das dritte Stück enthält von A a_3, von B b_3, von C c_3 Dekagr. Man will nun eine Composition bilden, welche von A a Dekagr., von B b Dekagr., von C c Dekagr. enthalten soll. Wie viel Dekagr. muss man dazu von jedem der drei Metallstücke nehmen?

Wird $a_1 + b_1 + c_1 = s_1$, $a_2 + b_2 + c_2 = s_2$, $a_3 + b_3 + c_3 = s_3$ gesetzt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{a_1 x}{s_1} + \frac{a_2 y}{s_2} + \frac{a_3 z}{s_3} = a,$$
$$\frac{b_1 x}{s_1} + \frac{b_2 y}{s_2} + \frac{b_3 z}{s_3} = b,$$
$$\frac{c_1 x}{s_1} + \frac{c_2 y}{s_2} + \frac{c_3 z}{s_3} = c.$$

152. Von drei Metallstangen enthält

die erste	4	Dekagr. Gold,	8	Dekagr. Silber,	12	Dekagr. Kupfer,
die zweite	8	„ „	10	„ „	2	„ „
die dritte	10	„ „	6	„ „	14	„ „

Aus diesen will man durch Legierung eine Metallstange erhalten, welche 10 Dekagr. Gold, 10 Dekagr. Silber und 11 Dekagr. Kupfer enthält; wie viel Dekagr. muss man von jeder der drei Metallstangen dazu nehmen?

153. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die erste Röhre allein in a, durch die zweite allein in b Stunden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein, wenn man das Wasser durch beide Röhren zugleich fließen läßt?

Man setze die gesuchte Zeit $= x$ und den Cubikinhalt des Behälters $= v$. Die erste Röhre allein füllt in x Stunden $\frac{vx}{a}$, die zweite Röhre allein $\frac{vx}{b}$; beide Röhren füllen also in x Stunden $\frac{vx}{a} + \frac{vx}{b}$, d. i. den ganzen Behälter $= v$. Man hat demnach $\frac{vx}{a} + \frac{vx}{b} = v$; oder $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, daher $x = \frac{ab}{a+b}$.

154. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden; die erste Röhre allein füllt das Gefäß in 4 Stunden, die zweite Röhre allein in 6 Stunden, die dritte Röhre allein in 12 Stunden. In wie viel Stunden wird der Wasserbehälter gefüllt, wenn man das Wasser durch alle drei Röhren zugleich fließen läßt?

155. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die Röhren R_1 und R_2 in a, durch R_1 und R_3 in b, durch R_2 und R_3 in c Stunden; wie viel Zeit braucht jede Röhre allein dazu, um den Behälter zu füllen?

156. Zu einer Arbeit erbieten sich drei Personen, A, B und C; A und B würden zusammen die verlangte Arbeit in 18 Tagen liefern können, A und C zusammen könnten dies in 12 Tagen, und B und C zusammen in 9 Tagen. In welcher Zeit kann die Arbeit durch alle drei Personen zusammen geleistet werden?

157. Zwei Körper vom specifischen Gewichte s_1 und s_2 sollen so mit einander verbunden werden, dass der entstehende Körper p Kilogramm wiege und das specifische Gewicht s habe; wie viel Kilogramm eines jeden Körpers hat man zu nehmen?

Da die Summe der absoluten Gewichte der beiden Bestandtheile dem absoluten Gewichte der Verbindung, und ebenso die Summe der Cubikinhalte der Bestandtheile dem Inhalte der Verbindung gleich sein soll, so hat man, wenn die Verbindung x Kilogr. des ersten und y Kilogr. des zweiten Körpers enthält,

$$x + y = p \quad \text{und} \quad \frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} = \frac{p}{s}, \text{ und daher}$$

$$x = \frac{s_1 p (s - s_2)}{s(s_1 - s_2)} \quad \text{und} \quad y = \frac{s_2 p (s_1 - s)}{s(s_1 - s_2)}.$$

Die Auflösung ist nur möglich, wenn s zwischen s_1 und s_2 liegt.

158. Wie groß sind die specifischen Gewichte zweier Körper A und B, wenn a Kilogr. vom ersten und b Kilogr. vom zweiten zusammen das specifische Gewicht s, dagegen a_1 Kilogr. vom ersten und b_1 Kilogr. vom zweiten zusammen das specifische Gewicht s_1 haben?

159. Eine aus Gold und Silber gemachte Krone des Königs Hiero von Syracus wog 20 Pfund, unter Wasser getaucht nur $18\frac{3}{4}$ Pfund; wenn nun Gold im Wasser scheinbar $\frac{1}{19}$ und Silber $\frac{1}{10}$ von seinem Gewichte verliert, wie viel Gold und wie viel Silber war in der Krone?

160. Ein Pendel, das a Millimeter lang ist, macht bei der Acceleration g in einer Minute n Schwingungen; wie lang muss ein anderes sein, das bei der Acceleration g_1 in einer Minute n_1 Schwingungen machen soll?

$$x : a = \frac{g_1}{n_1^2} : \frac{g}{n^2}.$$

161. Das Secundenpendel hat in Paris eine Länge von 0·99385 Meter; wie lang muss ein Pendel sein, das in Wien in jeder Minute 80 Schwingungen machen soll, wenn die Acceleration für Paris 9·809, für Wien 9·808 Meter beträgt?

162. Ein Dampfschiff legte in einer Stunde stromaufwärts einen Weg von $10\frac{1}{5}$ Kilometer, stromabwärts einen Weg von $17\frac{3}{5}$ Kilometer zurück; welchen Weg würde das Schiff durch die Kraft der Maschine allein (bei stillstehendem Wasser), welchen Weg durch die Kraft des Stromes allein (bei stillstehender Maschine) in einer Stunde zurücklegen?

163. Zwei Körper K′ und K″ bewegen sich auf einer geraden Linie in derselben Richtung von den Punkten A′ und A″ gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c′ und c″. Der Körper K′ verläßt den Punkt A′, welcher um d Längeneinheiten rückwärts von A″ liegt, um t Zeiteinheiten später, als der Körper K″ den Punkt A″ verläßt. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten, von dem Abgange des Körpers K″ von A″ an gerechnet, werden beide zusammentreffen? (Vergl. §. 224, 3.)

Der Körper K′ legt den Weg $c'(T - t)$, der Körper K″ den Weg $c''T$ zurück; die Differenz beider Wege ist die Distanz d, daher $c'(T - t) - c''T = d$ und daraus

$$T = \frac{c't + d}{c' - c''}.$$

Discutiere dieses Resultat a) für positive Werte von d, t, c′ und c″, und für $c' \gtreqless c''$; b) für $d \leqq o$; c) für $t \leqq o$; d) für $c'' < o$.

164. Behalte die Daten der vorhergehenden Aufgabe, und bestimme die Entfernung (D) des Punktes, in welchem die beiden Körper zusammentreffen, von dem näher gelegenen Punkte A″.

Da $D = c''T$ ist, so hat man

$$D = \frac{c''(c't + d)}{c' - c''}.$$

Discutiere dieses Resultat für die in der vorigen Aufgabe angeführten Fälle.

165. A' und A'' sind durch eine Eisenbahn verbunden, deren Endpunkte 225 Kilometer von einander abstehen. Von A' geht gegen A'' ein Personenzug ab, der in jeder Stunde 30 Kilometer zurücklegt; zu gleicher Zeit geht von A'' gegen A' ein Lastenzug ab, der in jeder Stunde 20 Kilometer zurücklegt. Wann begegnen sich die beiden Züge?

166. Vom Orte A' aus geht des Morgens 5 Uhr eine Locomotive ab, welche in $4\frac{1}{2}$ Stunden 105 Kilometer zurücklegt. Eine halbe Stunde später wird von A'' aus, welcher Ort $52\frac{1}{2}$ Kilometer hinter A' liegt, der ersten Locomotive eine zweite nachgesendet, die 105 Kilometer in 3 Stunden fährt. Wann wird die zweite Locomotive die erste einholen?

167. Ein Courier M' geht von A' nach A'', ein anderer Courier M'' von A'' nach A'; M' tritt die Reise um 5 Tage früher an als M'', dagegen legt M'' täglich 20 Kilometer mehr zurück als M'. Nachdem M'' 240 Kilometer zurückgelegt hatte, trifft er mit M' zusammen und dann brauchte M' noch 4 Tage bis A'', und M'' noch 6 Tage bis A'. Wie viel Kilometer hat jeder täglich zurückgelegt und wie groß ist die Entfernung zwischen A' und A''?

168. A' und A'' sind durch eine 152 Kilometer lange Eisenbahn verbunden. Von A' geht um 8 Uhr 30 Min. vormittags ein Zug nach A'' ab mit der Geschwindigkeit von 10 Meter per Secunde; an demselben Vormittage um 9 Uhr 15 Minuten geht von A'' ein Zug mit der Geschwindigkeit von 9 Meter per Secunde nach A' ab. Wann und in welcher Entfernung von A'' begegnen sich diese Züge?

169. Ein Courier soll von A aus einem Regimente, das vor 6 Tagen von dort abmarschiert ist und täglich 28 Kilom. vorwärts geht, Ordre bringen. In welcher Entfernung von dem gemeinschaftlichen Abgangsorte wird er dasselbe erreichen, wenn er täglich 84 Kilometer zurücklegt?

170. Von A' geht ein Courier, welcher täglich 14 Meilen zurücklegt, nach A''; zu gleicher Zeit wird von A'' ein Courier, welcher dem ersten nach 5 Tagen begegnen soll, nach A' abgeschickt. Wie viel Meilen muss der zweite Courier täglich zurücklegen, wenn die Entfernung A'A'' 150 Meilen beträgt?

171. Um 8 Uhr morgens fährt von A' nach A'' ein Eilwagen, der jede Stunde $1\frac{1}{5}$ Meile zurücklegt; 20 Minuten nach 2 Uhr nachmittags verlässt ein Dampfwagen den Ort A'' und langt auf einer neben der Landstraße liegenden Eisenbahn, indem er stündlich 4 Meilen zurücklegt, zu derselben Zeit in A' an, zu welcher der Eilwagen in A'' ankommt; wie groß ist die Entfernung zwischen A' und A''?

172. Von A' nach A'' sind 315 Kilometer. Um Mittag geht von A'' ein Eilwagen ab, der $9\frac{3}{8}$ Kilom. in der Stunde macht. Um wie viel Stunden früher muss von A' eine Fahrpost, die in der Stunde nur

$5\frac{5}{8}$ Kilom. zurücklegt, abgehen, damit sie mit dem Eilwagen gleichzeitig in A'' eintreffe?

173. Zwei Körper bewegen sich von den Punkten A' und A'', deren Entfernung d Meter beträgt, gegen einander. Fängt der erste t' Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie T' Stunden nach dem Abgange des zweiten zusammen; fängt der zweite t'' Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie T'' Stunden nach dem Abgange des ersten zusammen. Wie viel Meter legt jeder in einer Stunde zurück?

174. Einem Körper K'', welcher in jeder Zeiteinheit c'' Längeneinheiten zurücklegt, folgt t Zeiteinheiten später von demselben Punkte aus ein zweiter K', welcher in jeder Zeiteinheit c' Längeneinheiten zurücklegt. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten, vom Abgange des Körpers K' an gerechnet, werden beide Körper d Längeneinheiten von einander entfernt sein?

175. Zwei Körper bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises, welche p Längeneinheiten beträgt, zu gleicher Zeit von demselben Punkte aus in derselben Richtung mit den Geschwindigkeiten c' und c''. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten werden sie wieder zusammentreffen?

Nimmt man an, dass der erste Körper den Umfang p in a', der zweite in a'' Zeiteinheiten zurücklegt, so ist $c' = \frac{p}{a'}$ und $c'' = \frac{p}{a''}$, und man hat für das weitere Zusammentreffen derselben

$$T c' - T c'' = p, \text{ daher } T = \frac{p}{c' - c''} = \frac{a' a''}{a'' - a'}.$$

176. Wie viel Zeit verfließt von einem Zusammentreffen der beiden Zeiger einer Uhr bis zum nächsten Zusammentreffen derselben?

177. Wie viel Minuten nach vier Uhr wird der Minutenzeiger einer Uhr über den Stundenzeiger zu stehen kommen?

178. Es sind 20 Minuten über 12 Uhr; nach wie viel Minuten werden sich beide Zeiger der Uhr decken?

179. Der Mond vollendet, von der Erde aus gesehen, seinen Umlauf am Himmel in 27·32158 Tagen (tropischer Monat), die Sonne dagegen vollendet ihren scheinbaren Umlauf in 365·24222 Tagen (tropisches Jahr); beide Himmelskörper schreiten durch die Sternbilder des Thierkreises von Westen gegen Osten fort. Geht während dieser Bewegung der Mond vor der Sonne vorbei, so haben wir Neumond. Wie viel Tage verfließen von einem Neumonde bis zum andern (synodischer Monat)? (Aufg. 18, Seite 230.)

180. Auf der Peripherie eines Kreises bewegen sich zwei Körper gleichförmig und in derselben Richtung; der erste beschreibt den Umfang in t Secunden und trifft mit dem zweiten alle T Secunden zusammen. In welcher Zeit vollendet der zweite einen Umlauf?

2. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

Auflösung in ganzen Zahlen. (§§. 228 und 229.)

1. $2x - 3y = 1.$
2. $2x + 3y = 17.$
3. $6x + 5y = 128.$
4. $7x + 11y = 18.$
5. $7x - 13y = 152.$
6. $8x - 11y = 200.$
7. $12x + 13y = 319.$
8. $5x - 7y = 1.$
9. $15x + 14y = 225.$
10. $13x + 19y = 73.$
11. $37x - 22y = 307.$
12. $23x - 13y = 2.$
13. $7x + 17y = 408.$
14. $24x - 35y = 10.$
15. $25x - 11y = 20.$
16. $36x - 115y = 643.$
17. $37x - 22y = 307.$
18. $115x = 424y - 539.$
19. $x + y + z = 12,$
$7x + 8y + 4z = 73.$
20. $x - 4y + 13z = 16,$
$7x + y + z = 45.$
21. $5x + 3y + 7z = 36.$
22. $8x + 11y - 20z = 6.$

Auflösung in ganzen positiven Zahlen. (§. 231.)

23. $5x - 7y = 13.$
24. $5x - 7y = 94.$
25. $7x - 12y = 300.$
26. $17x + 14z = 24.$
27. $23x + 57y = 412.$
28. $25x = 36y - 7.$
29. $29x + 17y = 250.$
30. $17x - 1 = 12y - 5.$
31. $28x + 12 = 19y + 17.$
32. $24x - 31y = 196.$
33. $6x + 17y = 500.$
34. $18x + 7y = 600.$
35. $19x - 10y = 7,$
$19x - 8z = 15.$
36. $x + y + z = 48,$
$2x + 3y - 3z = 11.$

Anwendung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades.

37. Suche zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit, dass das 8fache der ersten um das 3fache der zweiten vermehrt 91 zur Summe gibt.

38. Die Zahl 200 in zwei Theile zu zerlegen, von denen der eine durch 14, der andere durch 23 theilbar ist.

39. Suche zwei um 10 verschiedene Zahlen, deren kleinere durch 21, deren größere durch 34 theilbar ist.

40. Zerlege die Zahl 300 in zwei Theile so, dass der erste um 1 vermindert durch 9, der zweite um 7 vermehrt durch 11 theilbar sei.

41. Suche eine Zahl, welche durch 7 theilbar ist, aber durch 29 dividiert 13 zum Reste gibt.

42. Welche ist die allgemeine Form der positiven Zahlen, welche durch 19 dividiert 1, und durch 28 dividiert 3 zum Reste geben?

43. Welche positive Zahlen geben durch 24 dividiert 18, durch 13 dividiert 1 zum Reste?

44. Zerlege den Bruch $\frac{101}{110}$ in zwei andere Brüche, deren Nenner 5 und 22 sind.

45. Welche zwischen 1000 und 2000 liegende Zahlen würden sich, wenn sie um 5 größer wären, durch 13, und wenn sie um 5 kleiner wären, durch 17 ohne Rest theilen lassen?

46. Jemand kauft für 90 fl. zweierlei Sorten Tuch; von der einen kostet das Meter 4 fl., von der anderen 3 fl. Wie viel ganze Meter erhält er von jeder Sorte?

47. Jemand kaufte Kaffee und Zucker, zusammen für 48 fl. 40 kr.; 1 Kilogr. Kaffee kostete 1 fl. 72 kr., 1 Kilogr. Zucker 56 kr. Wie viel ganze Kilogr. Kaffee und wie viel ganze Kilogr. Zucker hat er gekauft?

48. Der Durchmesser der Achtguldenstücke beträgt 21, jener der Vierguldenstücke 19 Millimeter. Wie viel Acht- und Vierguldenstücke muss man in gerader Linie neben einander stellen, damit die Summe der Durchmesser 1 Meter betrage?

49. Von zwei gezahnten Rädern hat das eine 13, das andere 17 Zähne; beim Beginne der Bewegung greift der erste Zahn des ersten Rades in die erste Zahnlücke des zweiten Rades ein. Nach wie vielen Umdrehungen des ersten Rades wird der Zahn 1 dieses Rades wieder in die Lücke 1 des zweiten eingreifen?

50. Welche dreiziffrige Zahlen mit der Ziffernsumme 18 werden, wenn man ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung schreibt, um 198 kleiner?

51. Welche Zahlen geben der Reihe nach durch 11, 19, 29 dividiert bezüglich die Reste 5, 12, 4?

52. Die Zahl 50 ist in drei Theile zu zerlegen, die folgeweise durch 5, 6, 7 theilbar sind.

53. Der Bruch $\frac{121201}{4400}$ soll in drei Brüche zerlegt werden, deren Nenner 11, 16, 25 sind.

54. Für 30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, sind 60 fl. ausgegeben worden. Wenn nun die Ausgabe für einen Mann 4 fl., für eine Frau 2 fl. und für ein Kind 50 kr. beträgt, wie viel waren Männer, wie viel Frauen und wie viel Kinder?

55. Ein Kaufmann mischt drei Gattungen Spiritus, zu 70%, 64% und 50%, um 561 Liter Spiritus von 60% zu erhalten. Wie wird die Mischung geschehen, wenn er von jeder einzelnen Gattung nur eine ganze Zahl von Liter verwenden will?

56. Jemand hat Banknoten zu 10 fl. und Staatsnoten zu 5 fl. und 1 fl.; er will mit denselben eine Schuld von 682 fl. bezahlen. Wie viele Noten jeder Sorte wird er zur Zahlung verwenden, wenn die Zahl der Noten zu 10 fl. so groß sein soll als die Zahl der Noten zu 5 fl. und zu 1 fl. zusammen?

57. Bezeichnet N eine Jahreszahl der christlichen Zeitrechnung, so heißt

der Rest der Division $\frac{N+1}{19}$ die goldene Zahl,

" " " " $\frac{N+9}{28}$ der Sonnencirkel,

" " " " $\frac{N+3}{15}$ die Römerzinszahl

für jenes Jahr. Für welche Jahreszahlen ist a) die goldene Zahl 15 und der Sonnencirkel 9; b) die goldene Zahl 14 und die Römerzinszahl 3; c) der Sonnencirkel 10 und die Römerzinszahl 5; d) die goldene Zahl 2, der Sonnencirkel 15 und die Römerzinszahl 10?

---

3. Bestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. (§§. 233—236.)

1. $x^2 = 9.$ **2.** $x^2 + 4 = 0.$

3. $2x^2 - 1 = 2 - 4x^2.$ **4.** $3x^2 - 4093 = x^2 + 139.$

5. $(x+7)(x-7) = 51.$ **6.** $(2x-3)(2x+3) = 7.$

7. $a - x = \frac{2ab}{a+x}.$ **8.** $\frac{x+a}{x+b} + \frac{x-a}{x-b} = 0.$

9. $\frac{x}{150} = \frac{3}{2x}.$ **10.** $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) = \frac{5}{16}.$

11. $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{3}.$ **12.** $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{5}{2}.$

13. $\frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}.$ **14.** $\frac{a}{1+2x} + \frac{a}{1-2x} = 2b.$

15. $\sqrt{33 + 2x - x^2} = x + 1.$ **16.** $\frac{ax^2 + b^2}{\sqrt{bx^2 + a^2}} = \sqrt{bx^2 + a^2}.$

17. $\frac{2a^2}{x + \sqrt{4a^2 - x^2}} + \frac{2a^2}{x - \sqrt{4a^2 - x^2}} = x.$

18. $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{a}{b}.$

19. $\sqrt{x^2 + a^2 - 2a\sqrt{x^2 - b^2}} + x = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - b^2}}.$

20. $\sqrt[3]{\sqrt{5} + x} + \sqrt[3]{\sqrt{5} - x} = \sqrt[3]{5\sqrt{5}}.$

---

21. $x^2 - 4x = 21.$ **22.** $x^2 - 12x + 35 = 0.$

23. $x^2 + 15x + 56 = 0.$ **24.** $x^2 + x - 56 = 0.$

25. $x^2 - 4x + 4 = 0.$

26. $x^2 - 2x = 15.$

27. $x^2 - 6x + 7 = 0.$

28. $x^2 - 13x = 140.$

29. $x^2 + 9x + 5 = 0.$

30. $x^2 + 19x + 10 = 0.$

31. $x^2 - 7x = 7.$

32. $x^2 + 2x + 4 = 0.$

33. $5x^2 + 7x = 24.$

34. $12x^2 = 20x - 3.$

35. $5x^2 + 13x + 17 = 0.$

36. $18x^2 + 3x = 10.$

37. $x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{11}{16} = 0.$

38. $x^2 - 12x + 100 = 0.$

39. $x^2 - 0{\cdot}9x = 0{\cdot}2.$

40. $2x^2 - 13{\cdot}6x + 43{\cdot}68 = 0.$

41. $x^2 - 0{\cdot}685x + 0{\cdot}0133 = 0.$

42. $x^2 - 8{\cdot}71235x = 7{\cdot}23475.$

43. $x^2 + 3{\cdot}162x - 1{\cdot}4248 = 0.$

44. $x^2 + 7{\cdot}66441 = 0{\cdot}80183x.$

45. $x^2 + 2ax = 2ab + b^2.$

46. $x^2 - 2abx = a^4 + a^2b^2 + b^4.$

47. $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$

48. $x^2 - (a - b)x - ab = 0.$

49. $(a - b)x^2 - bx = a.$

50. $(2x - 5)(3x + 8) = 0.$

51. $\frac{5x^2}{6} - \frac{x}{2} = 9.$

52. $x + \frac{1}{x - 2} = 3.$

53. $\frac{10x + 3}{3x + 2} = x.$

54. $\frac{6x + 5}{2x - 3} = 4x - 15.$

55. $\frac{x + 18}{x + 6} = \frac{6}{x - 3}.$

56. $\frac{(2a - b)x - b^2}{2a + b - x} = \frac{2a(a - b)}{2a - x}.$

57. $\frac{3x - 4}{x - 4} - 10 = \frac{2 - x}{2} - 1.$

58. $\frac{5}{x} - \frac{5}{x + 1} = \frac{12}{x + 2}.$

59. $\frac{2a}{x} - \frac{1}{x^2} = a^2 - b^2.$

60. $\frac{a^2 - b^2}{2x} = \frac{a^2 + b^2}{x^2 + 1}.$

61. $ax - bx = \frac{a}{x} \cdot \frac{a - 2bx}{a + b}.$

62. $\frac{ab}{x} + abx = a^2 + b^2.$

63. $\frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{a}{b}.$

64. $\frac{a - x}{b + x} - \frac{b + x}{a - x} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}.$

65. $\left(\frac{a - x}{x - b}\right)^2 = 8\left(\frac{a - x}{x - b}\right) - 15.$ Setze $\frac{a - x}{x - b} = y.$

66. $\frac{x + 1}{x + 2} - \frac{2x - 3}{3x - 4} = \frac{1}{5}.$

67. $\frac{5x + 4}{2x + 1} + \frac{x - 1}{3x - 4} - 3 = 0.$

68. $\frac{2x - a}{4x + 5a} = \frac{x + 6a}{2x} + 7.$

69. $\frac{3x^2 - 3}{x + 9} + \frac{6x^2 - 4}{2x - 1} = 6x - 6.$

70. $\frac{3a + 5b}{2(a + b)} - \frac{a - b}{a - x} = \frac{b - x}{a + b}.$

71. $\frac{2a - (1 + a^2)x}{1 + a^2 - 2ax} = \frac{2b + (1 + b^2)x}{1 + b^2 + 2bx}.$

72. $x^2 + 2x\sqrt{5} = 2\sqrt{6}.$

73. $x(x + 2\sqrt{11}) = 6\sqrt{2}.$

74. $x : (x + 1) = (2x + 3) : (3x + 4).$

75. $x + 7\sqrt{x} = 30.$

76. $ax - b\sqrt{x} = c.$

77. $2x - 3\sqrt{x - 1} = 4.$

78. $x - 10 = 2\sqrt{x^2 - 3x + 5}.$

79. $\sqrt{2x + 1 - 2\sqrt{2x + 3}} = 1.$

80. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = x.$

81. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}}.$

82. $\sqrt{7x - 13} - 12 = \sqrt{5x + 1}$. 83. $\sqrt{2x + 2} + \sqrt{x + 2} = x$.

84. $\sqrt{\frac{a + x}{a + b}} + \sqrt{\frac{b - x}{a + b}} = 1$. 85. $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{c^2 + (b - x)^2}} = 0$.

Bilde Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben:

86. $+5$ und -5.
87. $+3\sqrt{2}$ und $-3\sqrt{2}$.
88. -3 und $+7$.
89. 12 und 7.
90. 10 und -1.
91. -9 und -13.
92. $\frac{3}{2}$ und $\frac{11}{2}$.
93. $\frac{7}{3}$ und $-\frac{2}{3}$.
94. $0 \cdot 7$ und $-2 \cdot 4$.
95. $1 \cdot 36$ und $0 \cdot 75$.
96. $\frac{a + b}{2}$ und $\frac{a - b}{2}$.
97. $1 + \sqrt{2}$ und $1 - \sqrt{2}$.
98. $2a + 3b\sqrt{2}$ und $2a - 3b\sqrt{2}$.
99. $2 + \sqrt{-1}$ und $2 - \sqrt{-1}$.

Zerlege folgende Trinome in Factoren:

100. $x^2 - 17x + 70$.
101. $x^2 + 3x - 88$.
102. $x^2 + x + 1$.
103. $x^2 - 9x - 10$.
104. $3x^2 - 14x + 8$.
105. $3x^2 - 10x - 153$.
106. $6x^2 + x - 1$.
107. $20x^2 + 17x - 24$.
108. $x^2 - ax + c(a - c)$.
109. $x^2 + 4abx - (a^2 - b^2)^2$.
110. $abx^2 + (a + b)x + 1$.
111. $abx^2 + (a^2 - b^2)x - ab$.
112. $acx^2 - (a^2 + bc)x + ab$.
113. $acx^2 - (3ab - bc)x - 3b^2$.

Bestimmte quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

(§§. 237 und 238.)

114. $x^2 + y^2 = 90,\quad x = 3y$.

115. $xy + x = 40,\quad x + y = 12$.

116. $xy = a,\quad x - y = b$.

117. $2x^2 - 3y^2 = 71,\quad 3x^2 + 2y^2 = 165$.

118. $xy + x = 4,\quad xy + y = 3$.

119. $xy + x = 18,\quad xy - y = 10$.

120. $x^2 + y^2 = a^2,\quad \frac{x}{y} = \frac{b}{c}$.

121. $x^2 - y^2 = 32,\quad \frac{x}{y} = 3$.

122. $x + y = 4,\quad \frac{8}{x} - \frac{12}{y} = 4$.

123. $\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = c,\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$.

124. $y = a_1 + (x - 1)d,\quad s_n = \frac{x}{2}(a_1 + y)$.

125. $x^2 + y^2 = r^2,\quad y = ax + b$.

126. $x : y = 4 : 1,$
$x : 6 = 6 : y.$

127. $x^2 : y^2 = a^2 : b^2,$
$a^2 - x = b^2 - y.$

128. $x^2 - y = 604,$
$x - y = 4.$

129. $x^2 - y^2 = 12,$
$x^2 + y = 14.$

130. $x^2 + y^2 = a,$
$x - y = b.$

131. $x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2,$
$x + y = 2a.$

132. $\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ xy &= b. \end{aligned}\right\}$ Setze $x^2 = u,\ y^2 = v.$

133. $x(x + y) = 40,$
$y(x + y) = 24.$

134. $x^2 + y^2 + x + y = a,$
$x^2 + y^2 - x - y = b.$

135. $x^2 + y^2 + x + y = 8,$
$xy = 2.$

136. $x^2 + y^2 - x - y = 12,$
$xy = 9.$

137. $x^2 + xy + y^2 = a,$
$x^2 + y^2 = b.$

138. $x^2 - xy + y^2 = a,$
$x - y = b.$

139. $x + y = 74,$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12.$

140. $x : 11 = 704 : y,$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 19.$

Setze $\sqrt{x} = u,\ \sqrt{y} = v.$

141. $x - y + \sqrt{\frac{x - y}{x + y}} = \frac{20}{x + y},$
$x^2 + y^2 = 34.$

Setze $x^2 - y^2 = u^2.$

142. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6},$
$x^2y + xy^2 = 30.$

Setze $xy = u,\ x + y = v.$

---

143. $x(x + y + z) = a,$
$y(x + y + z) = b,$
$z(x + y + z) = c.$

144. $x^2 + y^2 + z^2 = 94,$
$x(y + z) = 45,$
$x + y + z = 14.$

145. $\frac{xy}{z} = m,$
$\frac{xz}{y} = n,$
$\frac{yz}{x} = p.$

146. $\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} = 22,$
$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = 40,$
$\frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 42.$

147. $\frac{y + z}{xyz} + a^2 = 0,$
$\frac{x + z}{xyz} + b^2 = 0,$
$\frac{x + y}{xyz} + (a + b)^2 = 0.$

Auflösung: $x = \pm \frac{1}{a},$
$y = \pm \frac{1}{b},$
$z = \mp \frac{1}{a + b}.$

148. $x : y = y : z,$
$x + y + z = 26,$
$x^2 + z^2 = y^2 + 292.$

149. $x : y = z : u,$
$x + u = 13,$
$y + z = 20,$
$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 425.$

Anwendung der bestimmten Gleichungen zweiten Grades.

150. Welche Zahl gibt mit ihrer Hälfte multipliciert 162?

151. Das Product aus dem dritten und vierten Theile einer Zahl beträgt 108; welches ist die Zahl?

152. Welche Zahl muss um d vermehrt und um d vermindert werden, damit das Product der beiden neuen Zahlen a sei?

153. Das 12fache einer Zahl um 45 vermehrt gibt das Quadrat derselben; welches ist die Zahl?

154. Wenn man zu einer Zahl 40 addiert und die Summe durch die ungeänderte Zahl dividiert, so ist der Quotient um 2 kleiner als die ursprüngliche Zahl; wie groß ist diese?

155. Wenn man die Summe und die Differenz einer gewissen Zahl mit 5 bildet, so ist die Summe der Quadrate der so erhaltenen Zahlen 178; welches ist die Zahl?

156. Welche Zahl gibt zu ihrem reciproken Werte addiert a zur Summe?

157. Suche zwei Zahlen, deren Summe 30 und deren Product 189 ist.

158. Die Zahl 18 in zwei Theile so zu theilen, dass die Summe ihrer Quadrate 113 wird.

159. Die Zahl 15 in zwei Theile zu theilen, deren Quadrate sich wie 4 : 9 verhalten.

160. Die Zahl 18 in zwei Factoren zu zerlegen, deren Quadrate 27 zur Differenz geben. (Siehe Aufg. 132, Seite 271.)

161. Eine Zahl a in zwei Theile so zu zerlegen, dass der eine Theil die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und dem andern Theile wird.

162. Der Zähler und der Nenner eines Bruches betragen zusammen 33. Wäre der Zähler um 39, und der Nenner um 20 größer, so würde der Bruch doppelt so groß sein; welches ist der Bruch?

163. Man suche zwei Zahlen, deren Quadrate 45 zur Summe und 27 zur Differenz geben.

164. Von welchen zwei Zahlen ist das Product um 84 kleiner als die Summe der Quadrate, und um 44 größer als die Differenz der Quadrate?

165. Dividiert man eine zweiziffrige Zahl durch das Product ihrer Ziffern, so erhält man 6; vertauscht man die Ziffern, so ist die so erhaltene Zahl um 9 größer als die gesuchte; wie heißt die Zahl?

166. Zwei Zahlen verhalten sich wie 3:4, die Summe ihrer Quadrate ist 100; welche Zahlen sind es?

167. Suche zwei Zahlen von der Beschaffenheit, dass ihre Summe, ihr Product und die Differenz ihrer Quadrate gleich sind.

168. Drei Zahlen bilden eine stetige geometrische Proportion; ihre Summe ist 14, die Summe ihrer Quadrate 84; welche Zahlen sind es?

169. Die Summe dreier Zahlen, die eine stetige Proportion bilden, ist 39, ihr Product 729; welches sind die Zahlen?

170. In einer geometrischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder 18, die Summe der inneren Glieder 17 und die Summe der Quadrate aller vier Glieder 325; wie heißt die Proportion?

171. Die Summe der vier Glieder einer geometrischen Proportion ist 72, das Product der inneren Glieder 140, die Summe der Quadrate aller vier Glieder 2050; wie heißt die Proportion?

172. Eine bestimmte Arbeit kann von A und B ausgeführt werden; A allein braucht zu derselben um 6 Tage mehr, B allein um $4\frac{1}{6}$ Tage mehr, als sie beide brauchen würden, wenn sie zusammen arbeiten. Wie viel Tage brauchen beide zusammen zur Vollendung der Arbeit?

173. Jemand kauft für 117 fl. Weizen, und zwar kostet jedes Hektoliter davon um 4 fl. weniger als Hektoliter sind; wie viel Hektoliter Weizen hat er gekauft?

174. Jemand kaufte für 400 fl. Tuch; hätte das Meter 1 fl. weniger gekostet, so würde er für jenes Geld 20 Meter mehr erhalten haben. Wie viel Meter hat er gekauft?

175. A und B verkauften zusammen 100 Meter einer Ware, und zwar der eine mehr als der andere, aber beide nahmen dennoch dieselbe Geldsumme ein; hätte A so viel Meter gehabt als B, so würde er 63 fl. dafür eingenommen haben; hätte B so viel Meter als A gehabt, so würde er nur 28 fl. dafür erhalten haben. Wie viel Meter hat jeder verkauft?

176. Die Kosten einer Reise, welche mehrere Personen unternommen, betragen 432 Gulden; da zwei Personen frei gehalten wurden, musste jede der übrigen Personen um 3 Gulden mehr bezahlen. Wie viel Personen waren?

177. Ein Vater hinterließ seinen Kindern ein Vermögen von 14400 fl. zu gleichen Theilen; bald nach seinem Tode starben zwei Kinder, und es erhielt infolge dessen jedes der übrigen Kinder um 1200 fl. mehr, als es sonst bekommen hätte. Wie viel Kinder hinterließ der Vater?

178. Ein Mittagsessen, bei dem doppelt so viel Herren als Damen speisten, kostete 176 Zehner; jeder Herr zahlte doppelt so viel Zehner, als Herren waren, und jede Dame dreimal so viel Zehner, als Damen waren. Wie viel Herren und wie viel Damen waren da?

179. Zwei Röhren liefern zusammen in 20 Minuten 540 Liter Wasser; die erste Röhre braucht, um allein diese Quantität Wasser zu liefern, 9 Minuten mehr als die zweite. Wie viel Liter liefert jede in 1 Minute?

180. Ein Baumgarten bildet ein Rechteck, in welchem 560 Bäume in gleichen Entfernungen von einander stehen; eine Reihe nach der Länge enthält

8 Bäume mehr als eine Reihe nach der Breite. Wie viele Bäume stehen in jeder Reihe?

181. Ein Grundstück von der Form eines Rechteckes ist a Meter lang und b Meter breit; um wie viel Meter muss die Länge verkleinert und um wie viel Meter die Breite vergrößert werden, damit das Grundstück an Inhalt gleich bleibe, an Umfang aber um $a - 2b$ Meter kleiner werde?

182. In zwei Quadraten ist die Differenz der Diagonalen d, die Summe der Flächeninhalte a^2; wie groß sind die Seiten?

183. Man lässt einen Stein in einen Brunnen fallen und zählt t Secunden, bis man das Aufschlagen des Steines im Wasser hört. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Acceleration g, und die Geschwindigkeit des Schalles c ist?

Die Zeit t ist die Summe aus der Zeit τ, welche der Stein zum Falle bis in die Tiefe des Brunnens braucht, und aus der Zeit τ', in welcher der Schall aus der Tiefe des Brunnens in unser Ohr gelangt. Da sowohl die von dem Steine, als die von dem Schalle zurückgelegte Strecke der Tiefe x des Brunnes gleich ist, so hat man nach den Gesetzen der Physik $x = \frac{g\tau^2}{2}$ und $x = c\tau'$, daher $\tau = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ und $\tau' = \frac{x}{c}$. Es ist somit $\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{c} = t$, woraus man erhält

$$x = \frac{c}{g}\left(c + gt \pm \sqrt{c^2 + 2cgt}\right).$$

184. Berechne die vorhergehende Aufgabe für $t = 3$ Secunden, $g = 9{\cdot}81$ Meter und $c = 332{\cdot}25$ Meter.

185. Wie viel Zeit braucht ein mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfener Körper, um die Höhe h zu erreichen?

In x Secunden würde der Körper vermöge der ihm ertheilten Geschwindigkeit die Höhe cx erreichen; in derselben Zeit würde der Fallraum desselben $\frac{gx^2}{2}$ betragen, wo g die Acceleration bedeutet. Für die wirklich zurückgelegte Strecke h hat man demnach die Gleichung

$$h = cx - \frac{gx^2}{2}.$$

186. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen, t Secunden später wird ein zweiter Körper mit der Geschwindigkeit c' in die Höhe geworfen; nach wie viel Secunden erreicht dieser mit dem ersten die gleiche Höhe?

Discussion der erhaltenen Gleichung.

187. Ein Reisender braucht zu einem Wege von 520 Kilometer 3 Tage mehr als ein anderer, weil dieser täglich 12 Kilometer mehr zurücklegt als der erstere. Wie viel Tage braucht jeder zu dieser Reise?

188. Zwei Körper K' und K'' bewegen sich auf einer geraden Linie gleichförmig und in derselben Richtung zu gleicher Zeit von den Punkten A' und A'', von denen A' um d Längeneinheiten rückwärts von A'' liegt, und kommen beide nach t Zeiteinheiten zu dem Punkte B. Dabei braucht der Körper K′ zu einer Längeneinheit $\frac{1}{n}$ Zeiteinheiten weniger als K″. Wie viel (D) Längeneinheiten beträgt die Entfernung des Punktes B von A″?

K′ braucht zu einer Längeneinheit $\frac{t}{d+D}$, K″ dagegen $\frac{t}{D}$ Zeiteinheiten;

folglich $\frac{t}{D} - \frac{t}{d+D} = \frac{1}{n}$, und $D = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + ndt}$.

Welche Bedeutung haben in dieser Gleichung negative Werte von D, d, t, n?

189. Von zwei Orten, die 270 Kilometer von einander entfernt sind, gehen gleichzeitig zwei Eisenbahnzüge ab, von denen der eine zu einem Kilometer 0·5 Minuten mehr braucht als der andere. Wenn sich nun diese Züge 5 Stunden nach ihrer Abfahrt begegnen, wie viel Zeit braucht jeder zu einem Kilometer?

190. Zwei Reisende gehen gleichzeitig, der eine von A′ gegen A″, der andere von A″ gegen A′ ab. Der erste kommt in A″ in a′ Stunden, der zweite in A′ in a″ Stunden nach ihrer gegenseitigen Begegnung an. Wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten c′ und c″?

Bezeichnet d die Entfernung der Orte A′ und A″, so findet die Begegnung nach $\frac{d}{c'+c''}$ Zeiteinheiten statt; bis dahin haben die Reisenden die Wege $\frac{c'd}{c'+c''}$ und $\frac{c''d}{c'+c''}$ gemacht, sie haben daher bezüglich noch die Wege $\frac{c''d}{c'+c''}$ und $\frac{c'd}{c'+c''}$ zurückzulegen und brauchen dazu $\frac{c''d}{c'(c'+c'')}$ und $\frac{c'd}{c''(c'+c'')}$ Zeiteinheiten. Man hat daher $\frac{c''d}{c'(c'+c'')} = a'$ und $\frac{c'd}{c''(c'+c'')} = a''$.

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so erhält man

$$\frac{c'^2}{c''^2} = \frac{a''}{a'}, \text{ folglich } \frac{c'}{c''} = \frac{\sqrt{a''}}{\sqrt{a'}}.$$

191. Zwei Punkte bewegen sich gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c′ und c″ auf zwei sich rechtwinklig durchschneidenden geraden Linien zu dem Durchschnittspunkte hin. Ihre Entfernungen vom Durchschnittspunkte sind zu einer gewissen Zeit d′ und d″. Nach wie viel (t) Zeiteinheiten werden die beiden Punkte die Entfernung d von einander haben?

Nach t Zeiteinheiten ist

die Entfernung des Punktes K′ vom Durchschnittspunkte $= d' - c't$,
" " " " K″ " " $= d'' - c''t$;

folglich ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$d^2 = (d' - c't)^2 + (d'' - c''t)^2,$$

woraus

$$t = \frac{c'd' + c''d'' \pm \sqrt{d^2(c'^2 + c''^2) - (c'd'' - c''d')^2}}{c'^2 + c''^2} \text{ folgt.}$$

Discussion. a) Soll t reell sein, so muss $d^2(c'^2 + c''^2) \geqq (c'd'' - c''d')^2$, also $d \geqq \frac{c'd'' - c''d'}{\sqrt{c'^2 + c''^2}}$ sein. Die kleinste Entfernung, in welche die Punkte kommen können, ist demnach $d = \frac{c'd'' - c''d'}{\sqrt{c'^2 + c''^2}}$.

b) Für die Zeit, nach welcher die Punkte diese kleinste Entfernung haben werden, hat man $t = \frac{c'd' + c''d''}{c'^2 + c''^2}$.

c) Sollen die beiden Punkte im Durchschnittspunkte zusammentreffen, so muss ihre kleinste Entfernung $d = o$ werden, d. i.

$$c'd'' = c''d' \text{ oder } \frac{c'}{c''} = \frac{d'}{d''} \text{ sein.}$$

Welche Bedeutung haben hier die negativen Werte von t, c', c'', d', d''?

192. Zwei Punkte bewegen sich gleichförmig auf zwei sich senkrecht durchschneidenden geraden Linien nach dem Durchschnittspunkte hin, von dem sie die Entfernungen d' und d'' haben. Nach t Zeiteinheiten haben beide Punkte die kleinste Entfernung d von einander. Welche Geschwindigkeiten haben die beiden Punkte?

193. Die Entfernung zweier leuchtender Punkte ist d, die Lichtintensität des ersten a, des zweiten b. Welcher Punkt ihrer Verbindungsstrecke ist von beiden leuchtenden Punkten gleich stark erleuchtet?

Da die Stärke der Beleuchtung mit der Lichtintensität des leuchtenden Punktes gerade, mit dem Quadrate der Entfernung von demselben aber verkehrt proportioniert ist, so hat man, wenn die Entfernung des gesuchten Punktes von dem ersten leuchtenden Punkte x heißt,

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d - x)^2}, \text{ daher } x = d \, . \, \frac{a \pm \sqrt{ab}}{a - b}.$$

Discutiere dieses Resultat.

194. Zwei Himmelskörper, deren Massen sich wie $a : b$ verhalten, haben die Entfernung d. In welchem Punkte ihrer Verbindungsstrecke wird ein dritter Körper von beiden gleich stark angezogen?

195. In welcher Entfernung von der Erde würde zwischen dieser und dem Monde ein Körper schweben bleiben, wenn die Masse des Mondes $\frac{1}{81}$ der Erdmasse und die Entfernung des Mondes von der Erde 51800 Meilen beträgt?

---

4. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

Auflösung in ganzen positiven Zahlen. (§. 240.)

Löse in ganzen positiven Zahlen auf:

1. $5xy - 3y = 168$. **2.** $xy + x - y = 64$.

3. $3xy - 5y = 16x$. **4.** $7xy + 10y = 136x$.

5. $5xy - 2x - 3y = 18$. **6.** $x^2 + xy - 2x - 3y = 29$.

7. $12x^2 - xy - 3y + 87 = 0.$ **8.** $x^2 - 2xy + y = 4.$
9. $3x^2 - 2xy - y + 1 = 0.$ **10.** $x^2 - 2xy - 3x + 5y + 20 = 0.$
11. $x^2 + 3xy - 2x + 2y = 8.$ **12.** $2x^2 - 2xy - 4x + 3y = 0.$

Auflösung in rationalen Zahlen. (§§. 241 und 242.)

Löse in rationalen Zahlen auf:

13. $y^2 = 16x^2 + 5x + 7.$ **14.** $y^2 = 25x^2 - 39x + 12.$
15. $y^2 = 4x^2 - x + 3.$ **16.** $y^2 = x^2 - 4x - 3.$
17. $y^2 = 4x^2 - 5.$ **18.** $y^2 = x^2 + 1.$
19. $y^2 = 5x^2 - 7x + 4.$ **20.** $y^2 = 3x^2 - 2x + 1.$
21. $y^2 = 7x^2 + 9.$ **22.** $y^2 = 2x^2 + 3x + 4.$
23. $y^2 = 6x^2 - 5x - 6.$ **24.** $y^2 = 3x^2 + 17x + 10.$
25. $y^2 = 1 - x^2.$ **26.** $y^2 = 5x^2 + 42x + 16.$
27. $y^2 = 10x^2 + 5x + 6.$ **28.** $y^2 = 3x^2 + 4x + 2.$

Gib die Werte von x an, für welche folgende Ausdrücke rational werden:

29. $\sqrt{x^2 - 4}.$ **30.** $\sqrt{9x^2 - 5x + 7}.$ **31.** $\sqrt{16x^2 + 9x - 8}.$
32. $\sqrt{2x^2 + x + 4}.$ **33.** $\sqrt{3x^2 + 2x + 9}.$ **34.** $\sqrt{8x^2 - 3x + 1}.$
35. $\sqrt{x^2 - 1}.$ **36.** $\sqrt{6x^2 + 2x - 20}.$ **37.** $\sqrt{2x^2 - 5x + 6}.$

Löse folgende Gleichungen in rationalen Zahlen auf:

38. $x^2 - y^2 = 25.$ **39.** $3x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0.$
40. $3x^2 - 4xy + y^2 + 3y = 7.$ **41.** $4y^2 - 4xy + 6x - 8y = 1.$
42. $2x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 4y + 5 = 0.$
43. $5x^2 - 12xy - 4y^2 - 6x + 4y = 3.$
44. $7x^2 - 6xy + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0.$
45. $4x^2 + 2xy - y^2 + 11x - 4y + 9 = 0.$

Anwendungen.

46. Zwei ganze positive Zahlen zu finden, deren Summe zu dem Producte addiert 47 gibt.

47. Von welchen zwei ganzen positiven Zahlen ist das Product um 33 größer als ihre Differenz?

48. Zwei ganze positive Zahlen zu finden, deren Quotient und Summe zusammen 35 betragen.

49. Suche zwei ganze positive Zahlen, deren Quotient und Differenz gleich sind.

50. Von welchen zwei ganzen positiven Zahlen geben die Quadrate 35 zur Differenz?

51. Welche zweiziffrige Zahl gibt durch das Product ihrer Ziffern dividiert den Quotienten 5 mit dem Reste 2?

52. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit anzugeben, dass die Differenz ihrer Quadrate wieder ein Quadrat sei.

53. Suche die allgemeine Form einer Zahl, welche, wenn man sie entweder um 1 vermehrt oder um 1 vermindert, in beiden Fällen ein Quadrat gibt.

Setzt man $x + 1 = a^2$ und $x - 1 = a^2 - 2 = b^2$, ferner $b = \sqrt{a^2 - 2} = a - p$, so folgt $a = \frac{p^2 + 2}{2p}$ und $x = \frac{p^4 + 4}{4p^2}$.

(Vergleiche auch Aufgabe 54, Seite 255.)

54. Die Summe zweier Quadrate $a^2 + b^2$ in die Summe zweier anderer Quadrate zu verwandeln.

$a^2 + b^2 = x^2 + y^2$. Setzt man $y = \sqrt{a^2 + (b + x)(b - x)} = a + p(b - x)$, so folgt $x = \frac{2ap + bp^2 - b}{1 + p^2}$ und $y = \frac{2bp - ap^2 + a}{1 + p^2}$.

55. Drei Zahlen von solcher Beschaffenheit anzugeben, dass die Summe der Quadrate der beiden ersten dem Quadrate der dritten Zahl gleich sei.

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Setzt man für beliebige Werte $s^2 + m^2 = (s + n)^2$, so folgt daraus $s = \frac{m^2 - n^2}{2n}$ und $s + n = \frac{m^2 + n^2}{2n}$, daher

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{2n}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{m^2 + n^2}{2n}\right)^2,$$

oder, wenn man mit $4n^2$ multipliciert,

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Demnach sind

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

rationale Werte von x, y, z, welche der vorgelegten Aufgabe genügen, mögen für m und n was immer für rationale Zahlen gewählt werden.

Nimmt man für m und n ganze Zahlen, so erhält man auch für x, y, z ganze Zahlen.

Diese Aufgabe hat in der Planimetrie ihre Anwendung, um rechtwinklige Dreiecke zu erhalten, deren Seiten commensurabel sind (Pythagoräische Dreiecke). Drücken x und y die Katheten aus, so ist z die Hypotenuse, und man hat für

m = 2	3	4	4	5	5	6	6	...
n = 1	2	1	3	2	4	1	5	...
x = 3	5	15	7	21	9	35	11	...
y = 4	12	8	24	20	40	12	60	...
z = 5	13	17	25	29	41	37	61	...

56. Vier Zahlen von solcher Beschaffenheit anzugeben, dass die Summe der Quadrate der ersten drei dem Quadrate der vierten Zahl gleich sei.

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

Setzt man $s^2 + m^2 + n^2 = (s + p)^2$, so erhält man

$$s = \frac{m^2 + n^2 - p^2}{2p} \text{ und } s + p = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2p}; \text{ folglich ist}$$

$$\left(\frac{m^2 + n^2 - p^2}{2p}\right)^2 + m^2 + n^2 = \left(\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2p}\right)^2,$$

oder, wenn man mit $4p^2$ multipliciert,

$$(m^2 + n^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 + (2np)^2 = (m^2 + n^2 + p^2)^2.$$

Daher ist $x = m^2 + n^2 - p^2$, $y = 2mp$, $z = 2np$ und $u = m^2 + n^2 + p^2$.

Diese Aufgabe findet in der Stereometrie ihre Anwendung, um rechtwinklige Parallelepipede zu erhalten, in denen die drei Kanten und die Diagonale commensurabel sind.

---

5. Höhere Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen.

(§§. 243 und 244.)

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

2. $6x^4 - 11x^2 = 35.$

3. $x^6 + 27 = 28x^3.$

4. $3x^6 - 7x^3 = 6.$

5. $x^2 + \left(\frac{32}{x}\right)^2 = 260.$

6. $x\sqrt{25 - x^2} = 12.$

7. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0.$

8. $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) = c.$

9. $(x - 2)^2 + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{82}{9}.$

10. $\frac{x^3 + 3}{17 - x^3} = \frac{1}{x^3 + 3}.$

11. $\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 9.$

12. $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54.$

13. $\sqrt[3]{x^2} - n^2 = n + \sqrt[3]{x}.$

14. $\sqrt{x^3 + ax^3} = b.$

15. $x^2 - 8x + 5 = 2\sqrt{x^2 - 8x + 40}.$ Setze $x^2 - 8x + 5 = y$.

16. $(2x + \sqrt{2x})^4 - (2x + \sqrt{2x})^2 = 1260.$

---

17. $\left.\begin{aligned} x^4 + y^4 &= a, \\ x + y &= b. \end{aligned}\right\}$ Setze $x - y = z$.

18. $x^4 + y^4 = a,$
$x - y = b.$

19. $x^3 + y^3 = a,$
$x + y = b.$

20. $x^3 - y^3 = a,$
$x - y = b.$

21. $x^2 + y^2 = 97,$
$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1.$

22. $x + y = 72,$
$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6.$

23. $\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 1512, \\ x^2y + xy^2 &= 1440. \end{aligned}\right\}$ Suche zuerst $x + y$, dann xy.

24. $x^2(x + y) = a,$
$y^2(x + y) = b.$

25. $(x + y)(x^2 + y^2) = a,$
$(x - y)(x^2 - y^2) = b.$

26. $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + x - y &= a, \\ (x^2 + y^2)(x - y) &= b. \end{aligned}\right\}$ Setze $x^2 + y^2 = u$, $x - y = v$.

27. $\left.\begin{aligned} x^2 + y\sqrt{xy} &= 9, \\ y^2 + x\sqrt{xy} &= 18. \end{aligned}\right\}$ Setze $y = xz^2$.

28. $x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) = b,$
$x(x + y)(x + 2y)(x + 3y) = c.$

Man erhält $x = \frac{1}{4}\{b \mp \sqrt{5b^2 \pm 4m}\}$, und $y = \pm \frac{1}{6}\sqrt{5b^2 \pm 4m}$, wenn $\sqrt{b^4 + 144c} = m$ gesetzt wird.

29. $x(x+y)^2(x+2y)=p,$
$x^2+(x+2y)^2=s.$

30. $x(x+y)(x+2y)(x+3y)=p,$
$(x+2y)^2-(x+y)^2=d.$

31. $x+xy=b,$
$x^2+x^2y^2=c.$

32. $x+xy+xy^2=b,$
$x^2+x^2y^2+x^2y^4=c.$

In der Aufgabe 32. erhält man zunächst $xy=\frac{b^2-c}{2b}$ und dann durch Substitution in den beiden Gleichungen und durch weitere Transformationen

$$x=\frac{1}{4b}(b^2+c\pm m) \text{ und } y=\frac{1}{2(b^2-c)}(b^2+c\mp m),$$

wenn $\sqrt{(3b^2-c)(3c-b^2)}=m$ gesetzt wird.

Löse folgende reciproke Gleichungen auf:

33. $x^3+x^2+x+1=0.$

34. $x^3+3x^2-3x-1=0.$

35. $x^3+\frac{7x^2}{2}+\frac{7x}{2}+1=0.$

36. $x^3-\frac{7x^2}{3}+\frac{7x}{3}-1=0.$

37. $2x^3+3x^2-3x-2=0.$

38. $5x^3-21x^2-21x+5=0.$

39. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0.$

40. $x^4-12x^3+29x^2-12x+1=0.$

41. $x^4-\frac{x^3}{3}-8x^2-\frac{x}{3}+1=0.$

42. $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$

43. $24x^4-50x^3-173x^2-50x+24=0.$

44. $x^4-\frac{4x^3}{6}+\frac{4x}{3}-1=0.$

45. $x^5-\frac{13x^4}{6}+x^3-x^2+\frac{13x}{6}-1=0.$

46. $36x^5-15x^4-29x^3-29x^2-15x+36=0.$

---

6. Exponentialgleichungen. (§. 245.)

1. $47^x=255.$

2. $10^x=2\cdot71828.$

3. $x^x=x.$

4. $a^{mx+n}=b.$

5. $a^{px+q}\,.\,b^{rx+s}=c^t.$

6. $5^{3x-4}\,.\,2^{2+x}=5^x.$

7. $3^{2x}\,.\,5^{3x-4}=7^{x-1}\,11^{2-x}.$

8. $2^x\,.\,3^{x-1}\,.\,4^{x-2}=5.$

9. $4096^x\,.\,0\cdot5=4^{x+\frac{1}{3}}.$

10. $\frac{a^{mx}\,.\,b^{nx}}{c^{px}\,.\,d^{qx}}=s.$

11. $\left(\frac{123}{134}\right)^{\frac{x+1}{x+2}}=\frac{345}{456}.$

12. $2^{3x}=100.$

13. $3^x\,.\,5^y=405,$
$2^x\,.\,7^y=112.$

14. $a^x+b^y=m,$
$a^x-b^y=n.$

15. $a^x+b^y=m,$
$a^xb^y=n.$

16. $a^xb^y=m,$
$\frac{a^x}{b^y}=n.$

17. $2^x\,.\,5^y=2000,$
$3^x\,.\,6^z=2916,$
$4^y\,.\,7^z=3136.$

18. $\sqrt[x]{10} = 2.$ **19.** $\sqrt[10]{10} = \sqrt[x]{2 \cdot 57812}.$ **20.** $\sqrt[x]{2^{5+3x}} = 5.$

21. $\sqrt[x+1]{a} = b\sqrt[x+2]{c}.$ **22.** $\sqrt[x]{a} = b^x.$ **23.** $\sqrt[x+1]{5} = 2^{x+1}.$

24. $\sqrt[x+2]{2} = 4^{x+3}.$ **25.** $3 \, . \, 2^x = 4\sqrt[x]{9}.$ **26.** $\sqrt[mx+n]{a} = b^{px+q}.$

27. $3^{x^2-4x+5} = 1200.$ **28.** $a^{(x-m)(x-n)} = 1.$

29. $\frac{10\,(3^x + 100)}{3^x} = 15 \, . \, 3^x + 2.$ **30.** $735^{\frac{2x-1}{2x+1}} = 318^{\frac{3x-2}{3x+2}}.$

31. $\sqrt[x]{a} = m\sqrt[y]{b},$ **32.** $3^x \, . \, \sqrt[y]{1521} = 1053,$

$\sqrt[x]{c} = n\sqrt[y]{d}.$ $2^y \, . \, \sqrt[x]{1331} = 44.$

33. $6 \, . \, 7^{2x} + 7^x = 301.$ **34.** $3 \, . \, 4^{2x^2-2x+4} - 5 \, . \, 4^{x^2-x+2} = 28.$

35. $5\sqrt[2x]{3} + 3\sqrt[x]{3} = 10.$ **36.** $13\sqrt[3x]{10} - 5\sqrt[6x]{10} = 25.$

37. $x^y = y^x$. Setze $y = ux$. **38.** $x^{\log x} = 578.$

39. $x^{4-\log x} = 35 \cdot 3156.$ **40.** $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10.$

V. Progressionen.

1. Arithmetische Progressionen.

(§§. 247—249.)

Suche das allgemeine und das Summenglied der arithmetischen Reihen:

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6,....

2. 2, 4, 6, 8, 10, 12,....

3. —28, —25, —22, —19, —16, —13,....

4. 100, 97, 94, 91, 88,....

5. 100, $92\frac{1}{2}$, 85, $77\frac{1}{2}$, 70,....

6. Wie groß ist die Differenz einer Progression, deren erstes Glied 109, und deren 34stes Glied 10 ist?

7. Mit welcher Zahl fängt eine Progression an, deren Differenz 5, und deren 27stes Glied 139 ist?

8. Eine Progression fängt mit 1 an, und steigt nach der Differenz 5; das wievielte Glied ist 116?

9. Das erste Glied einer arithmetischen Progression ist 20, die Zahl der Glieder 10, das letzte Glied —16; wie groß ist die Summe?

10. Wie viele Anfangsglieder einer Progression muss man addieren, um 2808 zur Summe zu erhalten, wenn das erste Glied 2 und die Differenz 10 ist?

11. Die Summe einer Progression, deren Differenz 3 und deren letztes Glied 97 ist, beträgt 1612; wie groß ist a) das erste Glied, b) die Anzahl der Glieder?

12. Leite die allgemeinen Formeln ab, durch welche aus je dreien der Größen a_1, d, n, a_n und s_n (§. 248) die beiden anderen bestimmt werden.

Löse folgende Aufgaben:

	a_1	d	n	a_n	s_n
13.	125	35	13	a_n	s_n
14.	50	-5	n	15	s_n
15.	1	9	n	a_n	260
16.	250	d	18	1100	s_n
17.	$1\frac{4}{5}$	d	27	a_n	$926\frac{1}{10}$
18.	8	d	n	$-23\frac{1}{2}$	$-77\frac{1}{2}$
19.	a_1	-2	6	0	s_n
20.	a_1	0·27	16	a_n	52·08
21.	a_1	$8\frac{5}{11}$	n	99	630
22.	a_1	d	12	$7\frac{1}{4}$	54

23. Interpoliere in der Reihe 1, 5, 9, 13, 17, 21,... zwischen je zwei Glieder 8 Glieder, so dass wieder eine arithmetische Progression entsteht.

24. Zwischen p und q sollen r Glieder interpoliert werden; wie groß ist das nte dieser Glieder?

25. Wie viele Zahlen muss man zwischen 16 und 250 einschalten, damit man eine arithmetische Progression mit der Summe 1995 erhalte?

---

26. Wie viele durch p theilbare Zahlen liegen zwischen 0 und a?

$$(n-1)\,p \gtreqless a.$$

27. Wie viele Zahlen, welche durch 6 theilbar sind, liegen zwischen 0 und 100? Wie groß ist ihre Summe?

28. Die Zahl 225 soll in mehrere Theile so getheilt werden, dass jeder folgende um 2 größer als der vorhergehende, und der letzte 29 ist. Wie groß ist der erste Theil und wie groß die Anzahl der Theile?

29. Eine Summe Geldes wird unter mehrere Personen so vertheilt, dass die erste 80 fl. und jede folgende 4 fl. weniger bekommt; die letzte erhält 28 fl. Wie viel Personen sind betheilt worden, und wie groß ist die ganze Geldsumme?

30. Ein Diener war bei einem Herrn 6 Jahre im Dienste und erhielt in jedem folgenden Jahre 12 fl. an Lohn mehr als im vorhergehenden,

zusammen 900 fl. Wie viel erhielt er das erste, wie viel das letzte Jahr?

31. Es ist ein Brunnen von 12 Meter Tiefe zu graben; für das erste Meter zahlt man 4 fl. 40 kr., für jedes folgende 40 kr. mehr; wie viel zahlt man für das letzte Meter, wie viel für den ganzen Brunnen?

32. Ein Körper legt in der ersten Secunde a Meter, in jeder folgenden d Meter mehr zurück als in der vorhergehenden. a) Wie groß ist der in n Secunden zurückgelegte Raum; b) in welcher Zeit legt der Körper s Meter zurück?

$$a = 50, \quad b = 15, \quad n = 10, \quad s = 140.$$

33. Ein frei fallender Körper durchläuft in der ersten Secunde 4·9 Meter, und in jeder folgenden 9·8 Meter mehr als in der vorhergehenden; wie groß ist der Fallraum der 5ten Secunde, wie groß der Fallraum in 5 Secunden? (Der Widerstand der Luft bleibt unbeachtet.)

34. Wenn ein nach dem eben angeführten Gesetze von der Spitze eines Thurmes auf dessen Basis herabfallender Körper in der letzten Secunde 53·9 Meter zurückgelegt hat, wie hoch ist der Thurm?

35. Wenn eine vertical in die Höhe geschossene Kugel in der ersten Secunde 200 Meter, und in jeder folgenden 9·8 Meter weniger zurücklegt, wie hoch wird dieselbe steigen und in wie viel Zeit wieder auf die Erde zurückfallen?

36. Jemand setzt in die Lotterie auf eine Nummer 20 kr. und so lange er nicht gewinnt, jedes folgende Mal um 20 kr. mehr als das vorhergehende Mal. Wenn nun der Treffer einer Nummer mit dem 14fachen Einsatze bezahlt wird, bei welchem Spiele würde der Gewinnende sein ganzes bis dahin eingesetztes Geld zurückerhalten?

37. Eine unverzinsliche Schuld wird in Jahreszahlungen getilgt. Im ersten Jahre bezahlt man 600 fl., in jedem folgenden aber um eine bestimmte Summe mehr; für das sechste Jahr beträgt die Zahlung 850 fl.; wie groß ist die ganze Schuld?

38. Ein Capital c wird nach n Jahren sammt den einfachen Zinsen zu p% zurückgezahlt; wie viel beträgt die Zahlung?

39. Durch n Jahre wird am Anfange eines jeden Jahres ein Capital c zu p% auf einfache Zinsen angelegt; zu welchem Werte s sind sämmliche Anlagen bis zum Schlusse des nten Jahres angewachsen?

$$s = c\left\{n + \frac{n(n+1)p}{200}\right\}.$$

---

40. Das dritte Glied einer arithmetischen Reihe ist 5, das siebente 11; wie groß ist das zehnte Glied?

41. Die Summe der ersten 6 Glieder einer arithmetischen Progression ist 17, das vierte Glied ist 3; wie heißt die Progression?

42. In einer arithmetischen Progression beträgt die Summe der ersten 5 Glieder 75, die Differenz zwischen dem fünften und zweiten Gliede 18; wie groß ist a) das erste Glied, b) die Differenz?

43. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Differenz 4 ist; das Product der letzten zwei Zahlen beträgt 165; welche Zahlen sind es?

44. Zwei arithmetische Progressionen haben gleich viele Glieder, die erste fängt mit 1 an und endet mit 15, die zweite fängt mit 3 an und endet mit 24; wie groß ist die Summe jeder Reihe? (Die Lösung führt auf eine unbestimmte Gleichung.)

45. In einer arithmetischen Reihe, deren Glieder die Summen der gleichnamigen Glieder zweier arithmetischen Progressionen mit den Anfangsgliedern 2 und 3 sind, ist das $n$te Glied $9n - 4$. Wie heißen die beiden Progressionen, wenn die Differenz der zweiten doppelt so groß ist, als die Differenz der ersten?

46. Die Summe von drei Zahlen, welche eine arithmetische Progression bilden, ist 36, die Summe ihrer Quadrate 482; welche Zahlen sind es?

47. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Progression; ihre Summe ist 2, ihr Product 40; welche Zahlen sind es? (Vergl. Aufg. 28, Seite 279.)

48. In einer arithmetischen Progression von vier Gliedern ist das Product aller Glieder 880; die Differenz der Quadrate der beiden mittleren Glieder 39; welche Progression ist es?

49. Zwei Körper bewegen sich gleichzeitig von A aus in derselben Richtung; der eine legt in jeder Secunde 20 Meter zurück, der andere in der ersten Secunde 12 Meter und in jeder folgenden 2 Meter mehr als in der vorhergehenden. Nach wie viel Secunden holt dieser den ersten ein?

---

2. Geometrische Progressionen.

(§§. 250—253.)

Suche das allgemeine und das Summenglied der geometrischen Reihen:

1. 5, 15, 45, 135,....

2. 6, $4\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{8}$, $2\frac{17}{32}$,....

3. 10·5, 2·625, 0·65625, 0·1640625,....

4. 3, —12, 48, —192,....

5. Wie groß ist das erste Glied einer Progression, deren Quotient $1\frac{1}{2}$, deren 7tes Glied $68\frac{11}{32}$ ist?

6. Wie viele Anfangsglieder der geometrischen Progression 1, 3, 9, 27,... muss man addieren, um 3280 zur Summe zu erhalten?

7. Wie groß ist der Quotient einer Progression, deren erstes Glied 2, deren 12tes Glied 4096 ist?

8. Wie groß ist die Summe der ersten 8 Glieder der geometrischen Progression

$$a, -b, \frac{b^2}{a}, -\frac{b^3}{a^2}, \ldots$$

9. Bestimme die Summe der Reihe

$$\frac{r}{e} + \frac{r}{e^2} + \frac{r}{e^3} + \ldots + \frac{r}{e^{n-1}} + \frac{r}{e^n}.$$

10. Leite die allgemeinen Formeln ab, durch welche aus je dreien der Größen a_1, q, n, a_n und s_n (§. 251) die beiden anderen bestimmt werden.

Sind a_1, n und s_n gegeben, so erhält man für q und a_n; sind n, a_n und s_n gegeben, für a_1 und q Gleichungen des $(n-1)$ten Grades.

Löse folgende Aufgaben:

	a_1	q	n	a_n	s_n
11.	7	4	9	a_n	s_n
12.	6	$\frac{3}{4}$	n	$1\frac{217}{512}$	s_n
13.	4	3	n	a_n	118096
14.	4096	q	14	0·5	s_n
15.	31	q	n	$3827\frac{13}{81}$	$5454\frac{7}{81}$
16.	a_1	$-\frac{1}{2}$	5	$\frac{3}{4}$	s_n
17.	a_1	2	14	a_n	$2047\frac{7}{8}$
18.	a_1	3	n	117147	265720

Bestimme die Summe folgender Progressionen:

19. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}$.

20. $x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4$.

21. $a^6 - a^5 b + a^4 b^2 - a^3 b^3 + a^2 b^4 - a b^5 + b^6$.

22. Suche in der Progression $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ a) die Summe der ersten 2, 3, 4, 5, 6 Glieder, b) die Summe der Reihe selbst.

Bestimme die Summe folgender fallender Reihen:

23. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{4}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$

24. $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \frac{81}{256} - \ldots$

25. $1 + \frac{1}{1 \cdot 05} + \frac{1}{1 \cdot 05^2} + \frac{1}{1 \cdot 05^3} + \ldots$

26. $1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \ldots$ für $b < a$.

27. Die Summe einer fallenden geometrischen Progression, die mit 1 beginnt, ist 3; wie groß ist ihr Quotient?

28. Wie heißt das fünfte Glied einer fallenden geometrischen Reihe, deren Quotient $\frac{3}{4}$ und deren Summe 20 ist?

29. Ein rein periodischer Decimalbruch x mit der n ziffrigen Periode b soll in einen gemeinen Bruch dadurch verwandelt werden, dass man ihn als eine fallende geometrische Progression darstellt und diese summiert. (Vergl. §. 109, 2.)

30. Verwandle ebenso in gemeine Brüche:

a) $0\cdot\dot{6}$; b) $0\cdot\dot{8}\dot{1}$; c) $0\cdot\dot{1}0\dot{5}$; d) $8\cdot\dot{7}$.

31. In einem gemischt periodischen Decimalbruche x seien b die Ziffern der Periode, n die Anzahl derselben, ferner a die der Periode vorangehenden Decimalen und m ihre Anzahl; verwandle den Decimalbruch mit Anwendung der geometrischen Progression in einen gemeinen Bruch. (Vergl. §. 109, 3.)

32. Bestimme ebenso a) $x = 0\cdot6\dot{4}$; b) $x = 0\cdot12\dot{5}\dot{4}$; c) $x = 9\cdot3\dot{5}1\dot{3}$.

---

33. Zwischen 5 und 405 sollen 3 Glieder so eingeschaltet werden, dass dann alle fünf Glieder eine geometrische Progression bilden.

34. Interpoliere zwischen je zwei Glieder der Progression 1, 10, 100, 1000,… 5 neue Glieder.

35. Zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ sind 11 Glieder einer geometrischen Progression zu interpolieren. (Anwendung in der Tonlehre.)

36. Interpoliere zwischen x^8 und y^8 noch 7 Glieder, so dass eine geometrische Progression entsteht.

37. Zwischen das erste und zweite Glied der Reihe 16, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{256}$,… sollen mehrere Glieder so eingeschaltet werden, dass sie mit 16 und $\frac{1}{4}$ eine geometrische Progression bilden und mit diesen $31\frac{3}{4}$ zur Summe geben; wie viele Glieder sind einzuschalten und wie heißen sie?

---

38. Eine Summe von 248 fl. soll unter 5 Personen so vertheilt werden, dass jede folgende doppelt so viel als die vorhergehende erhalte; wie viel erhält jede?

39. Jemand setzt sechsmal in die Lotterie; das erstemal 10 Kreuzer, und jedes folgendemal doppelt so viel, als für die frühere Ziehung; das sechstemal gewinnt er, und es wird ihm der letzte Einsatz 4800 mal zurückgezahlt. Wie viel beträgt dieser Gewinn und wie viel hat er im ganzen eingesetzt?

40. Es legt Jemand im Monate Jänner einen Kreuzer zurück, in jedem folgenden Monate 3 mal so viel als im vorhergehenden; wie viel hat er im ganzen Jahre zurückgelegt?

41. Eine Schuld von 13000 fl. soll in 4 Raten, deren jede 3 mal so groß ist als die vorhergehende, zurückgezahlt werden; wie groß ist jede Ratenzahlung?

42. Der Erfinder des Schachspieles erbat sich als Belohnung die Summe Weizenkörner, die herauskommt, wenn für das erste Feld des Schachbrettes 1 Korn, für das zweite 2, für das dritte 4, und so fort für jedes folgende der 64 Felder doppelt so viel Körner gerechnet werden als für das vorhergehende. Wie viel Tonnen à 1000 Kilogramm würden diese Körner ausmachen, wenn 20000 Körner 1 Kilogramm wiegen?

43. In einem Fasse sind 100 Liter Wein. Man nimmt daraus 1 Liter und gießt dafür 1 Liter Wasser hinein; aus dieser Mischung nimmt man wieder 1 Liter und gießt eben so viel Wasser hinein. Wie oft kann man so verfahren, bis in der Mischung nur noch 50 Liter Wein übrig sind?

44. Ein Lichtstrahl verliert bei dem Durchgang durch eine Glasplatte $\frac{1}{10}$ seiner Intensität; wie groß wird diese noch sein, wenn er durch 10 hinter einander aufgestellte Platten hindurch gegangen ist?

45. Der Recipient einer Luftpumpe enthält 5·3 Cubik-Decimeter, der Stiefel sammt dem Verbindungsrohre 0·6 Cubik-Decimeter; nach wie viel Kolbenzügen wird die Luft im Recipienten nur noch $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Dichtigkeit betragen?

---

46. Drei Zahlen, von denen die zweite um 15 größer ist als die erste, die dritte um 60 größer ist als die zweite, bilden eine geometrische Progression; welche Zahlen sind es?

47. Die Summe von drei Anfangsgliedern einer geometrischen Reihe ist 156, das erste Glied 16; wie groß ist der Quotient?

48. Die Summe des ersten und dritten Gliedes einer geometrischen Progression ist $9\frac{3}{4}$, die Summe des zweiten und vierten Gliedes $14\frac{5}{8}$; wie heißt die Progression?

49. Acht Zahlen bilden eine geometrische Progression, die Summe der ersten vier ist 15, die Summe der letzten 240; welche Zahlen sind es?

50. In einer geometrischen Progression ist die Summe des dritten und vierten Gliedes b, die Differenz des dritten und fünften d; bestimme den Quotienten und das erste Glied.

51. In einer geometrischen Progression von 10 Gliedern ist die Summe der ungeraden Glieder 36905, die Summe der geraden 110715; wie groß ist der Quotient, wie groß ist das erste Glied?

52. Die Summe dreier Zahlen, welche eine geometrische Progression bilden, ist 21, die Summe ihrer Quadrate 189; welche Zahlen sind es? (Vergl. Aufg. 32, S. 280.)

53. Zerlege jedes Glied der geometrischen Progression

$$3, 48, 768, 12288, \ldots$$

in 4 Theile so, dass alle diese Theile untereinander wieder eine geometrische Progression bilden.

---

54. Multipliciere die gleichstelligen Glieder der arithmetischen Progression a, 2a, 3a, 4a,... und der geometrischen Progression 1, q, q^2, q^3,.. und bestimme das Summenglied S_n der dadurch entstehenden Reihe.

Bestimme ebenso die Summe folgender Reihen:

55. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots + nx^{n-1}$.

56. $1 + 5x + 9x^2 + 13x^3 + 17x^4 + \ldots + (4n-3)x^{n-1}$.

57. $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \ldots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} + \ldots$

58. $\frac{1}{2} + \frac{4}{2.3} + \frac{7}{2.3^2} + \frac{10}{2.3^3} + \ldots + \frac{3n-2}{2.3^{n-1}} + \ldots$

---

3. Zinseszins- und Rentenrechnung.

(§§. 254–258.)

1. Zu welchem Werte wächst ein Capital von 5800 fl. in 15 Jahren bei 5% Zinseszins an?
2. Jemand legt 5042 fl. in eine Sparcasse, welche die Einlagen zu 4%, und zwar halbjährig verzinset, ein; nach 20 Jahren behebt er das Capital sammt Zins und Zinseszins; wie groß ist die Summe?
3. Wie viel werden 7324 fl. 20 kr. zu $4\frac{1}{2}$% Zinseszins nach $23\frac{3}{4}$ Jahren wert sein?
4. Der Bestand eines Waldes wird gegenwärtig auf 42350 Cubikmeter geschätzt; wie groß wird derselbe bei einem jährlichen Zuwachs von 3% nach 10 Jahren sein?
5. Ein Land hat gegenwärtig 548200 Einwohner, wie groß wird die Bevölkerung bei einer jährlichen Zunahme von $1\frac{1}{2}$% nach 14 Jahren sein?
6. Ein Capital von 9000 fl. ist nach 10 Jahren unverzinslich fällig; wie groß ist sein Barwert, wenn Zinseszinsen zu 5% gerechnet werden?
7. Für ein durch 9 Jahre zu $4\frac{1}{2}$% Zinseszins angelegtes Capital erhält man 5234 fl.; wie groß war das ursprüngliche Capital?
8. Eine Stadt zählt gegenwärtig 36230 Einwohner; wie groß war bei einer jährlichen Zunahme von 2% die Bevölkerung vor 30 Jahren?
9. Ein Waldbestand wird gegenwärtig auf 180000 Cubikmeter veranschlagt; wie stark war derselbe vor 15 Jahren, wenn man annimmt, dass er sich während dieser Zeit regelmäßig jährlich um 3% vermehrt hat?
10. Ein Capital von 7537 fl. 80 kr. wächst in 20 Jahren mittelst Zinseszinsen auf 20000 fl. an; zu wie viel % war es verzinset?
11. 3200 fl. sind vor 80 Jahren angelegt worden und während dieser Zeit sammt Zinseszins auf 34059·83 fl. angewachsen; zu wie viel % war das Capital angelegt?
12. Wien hatte zu Ende 1869 622927, zu Ende 1880 705402 Einwohner; wie viel % beträgt die jährliche Zunahme der Bevölkerung?

13. In wie viel Jahren wird ein Capital a bei p% Zinseszins m mal so groß als es ursprünglich war?

Hier muss man $ae^n = ma$ setzen, daher ist $n = \frac{\log m}{\log e}$.

14. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Capital zu 5% Zinseszins?

15. In wie viel Zeit wird ein Capital zu 4% Zinseszins a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisierung auf das Dreifache anwachsen?

16. In wie viel Jahren erhöht sich die Bevölkerung eines Ortes bei $1\frac{1}{4}$% jährlicher Zunahme von 5200 Einwohnern auf 9433 Einwohner?

17. Von einer Schuld von 10000 fl. werden nach 3 Jahren 2500 fl., nach 6 Jahren 1000 fl. bezahlt; wie groß ist noch die Schuld nach 10 Jahren, wenn 5% Zinseszinsen gerechnet werden?

18. Ein Capital a wird zum Zinsfuße e verzinst, die Verwaltungskosten betragen v% und werden am Ende jedes Jahres abgerechnet; zu welcher Summe wächst das Capital in n Jahren an?

$$a_n = ae^n\left(1 - \frac{v}{100}\right)^n.$$

---

19. Durch 20 Jahre werden zu Anfang eines jeden Jahres 200 fl. angelegt; zu welchem Werte werden diese Capitalien bei 4% Zinseszins zur Zeit der letzten Anlage angewachsen sein?

20. Jemand erspart jährlich 280 fl. und legt diese am Ende eines jeden Jahres auf 5% Zinseszinsen an; über welche Summe wird er nach 15 Jahren auf diese Weise verfügen können?

21. Durch n Jahre wird jährlich ein Capital r zum Zinsfuße e angelegt, die Verwaltungskosten betragen jährlich v% und werden am Ende des Jahres abgerechnet; zu welcher Summe sind diese Capitalsbeträge zur Zeit der letzten Anlage angewachsen?

22. Jemand hat durch 12 Jahre am Anfange eines jeden Jahres den gleichen Geldbetrag zu $4\frac{1}{2}$% Zinseszins angelegt, und bezieht dafür nach dieser Zeit 1939 fl. 18 kr.; wie groß war die jährliche Einlage?

23. Ein Capital von 12500 fl. ist nach 7 Jahren fällig; es soll durch gleiche, am Anfange eines jeden der 7 Jahre zahlbare Summen getilgt werden. Wie groß sind die Theilzahlungen bei 5% Zinseszins?

24. Wie hoch müssen die am Ende eines jeden Jahres zu leistenden Abschlagszahlungen sein, damit eine nach 10 Jahren unverzinslich fällige Schuld von 8000 Mark getilgt werde, den Zins zu $4\frac{1}{4}$% gerechnet?

25. Ein Gutsbesitzer will seine Feldfrüchte im veranschlagten Werte von 6800 fl. gegen Hagel versichern; wie hoch wird die Assecuranz-Gesellschaft die jährliche Versicherungsprämie bei 5% Zinseszins ansetzen, wenn angenommen wird, dass der Hagelschlag die Feldfrüchte jener Gegend durchschnittlich alle 16 Jahre gänzlich vernichtet?

26. Ein zu $4\frac{1}{2}\%$ Zinseszins ausstehendes Capital von 5000 fl. wird am Ende jedes Jahres um 500 fl. vermehrt; wie hoch wird es in 8 Jahren anwachsen?

27. Von einem Walde, dessen jährlicher Zuwachs $2\frac{1}{4}\%$ beträgt, ist der gegenwärtige Bestand 145678 Cubikmeter; wie groß wird der Bestand nach 18 Jahren sein, wenn am Ende eines jeden Jahres 1175 Cubikmeter gefällt werden?

28. Jemand will eine Schuld von 10000 fl., die zu 5% zu verzinsen ist, in 10 gleichen Jahresraten abtragen; wie groß wird eine Ratenzahlung sein?

29. Dem Vormunde eines Kindes von 5 Jahren wird eine Summe von 6000 fl. mit der Verpflichtung überwiesen, das Kind bis zum 18ten Jahre zu erziehen; welches ist der Betrag des nachschussweise zahlbar angenommenen jährlichen Erziehungsgeldes, wenn 5% Zinseszinsen berechnet werden?

30. Eine Stadt will bei einer Bank ein Anlehen mit der Verpflichtung aufnehmen, dasselbe durch einen am Ende jedes Jahres zahlbaren Betrag von 28000 fl. binnen 25 Jahren zu tilgen; welche Summe wird die Bank der Stadt bei 5% Zinseszins darleihen?

31. Wie viel bleibt von einer Schuld von 26000 fl. bei 5% Zinseszins nach 10 Jahren übrig, wenn für Zinsen und Tilgung eines Theiles der Schuld jährlich 2000 fl. gezahlt werden?

32. Wie groß ist ein auf Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}\%$ angelegtes Capital, wenn von demselben bei einer am Ende eines jeden Jahres eintretenden Verminderung um 250 fl. nach 15 Jahren noch 1300 fl. übrig sind?

33. Ein Vater hinterläſst seinen 5 Kindern ein Vermögen von 20000 fl., welches zu 5% Zinseszins angelegt ist; davon beziehen die Kinder am Ende eines jeden Jahres 1500 fl. Wie viel erhält dann jedes der Kinder nach 6 Jahren, wenn der Rest des Vermögens zu gleichen Theilen unter sie vertheilt wird?

34. Jemand kauft ein Haus und bezahlt den Kaufschilling dadurch, daſs er durch 20 Jahre am Schlusse eines jeden derselben eine Abschlagszahlung von 1200 fl. leistet; wie groß ist der Kaufpreis, wenn jede Abschlagszahlung zugleich 5% Zinsen für die noch unbezahlte Schuld enthält?

35. Wie viel muſs man am Schlusse eines jeden Jahres zu einem Capitale von 4500 fl. hinzufügen, damit es sich bei 4% Zinseszins in 6 Jahren verdopple?

36. Jemand hat ein Capital von 12532 Mark zu $4\frac{1}{2}\%$ ausstehen und gebraucht davon jährlich 1000 Mark; nach wie viel Jahren wird das Capital erschöpft sein?

37. Ein Wald, dessen Bestand auf 150000 Cubikmeter Holz mit einem jährlichen Zuwachs von 2% veranschlagt wird, soll innerhalb 12 Jahren abgestockt werden; wie viel Holz wird man jährlich schlagen, um jedes Jahr gleich viel Holz zu erhalten?

38. Eine Eisenbahn-Gesellschaft macht eine Anleihe von 4 Millionen Gulden zu 5% und will dieselbe dadurch amortisieren, dass sie jährlich 250000 fl. zur Zinsenzahlung und theilweisen Tilgung des Anlehens verwendet; nach wie viel Jahren wird die Schuld getilgt sein?

39. Jemand ordnet in seinem Testamente an, dass seinem treuen Diener bis zu dessen Tode jährlich 100 fl. ausgezahlt werden. Die Erben werden mit dem Diener einig, ihm dafür auf einmal einen Betrag von 1200 fl. zu zahlen. Wie viel Jahre müsste der Diener noch leben, wenn er von dem Uebereinkommen weder Schaden noch Vortheil haben sollte, die Zinsen zu 5% gerechnet?

40. Jemand nimmt bei einer Sparcasse ein Capital von 8000 fl. auf, das er durch gleiche Theilzahlungen, die am Ende eines jeden Jahres fällig sind, in 15 Jahren tilgen will; wie groß ist eine Theilzahlung, wenn die Sparcasse verausgabte Gelder mit 5%, empfangene dagegen mit 4% Zinseszins in Rechnung bringt?

---

41. Ein Herr will seinem Diener bei einer Versicherungsanstalt ein nach 11 Jahren zahlbares Capital von 1000 fl. versichern; welchen Betrag muss er an die Anstalt zahlen, wenn dieselbe zu 5% verzinst?

42. Welchen Barwert hat eine durch 11 Jahre am Ende jedes Jahres mit 420 fl. zu leistende Rente, wenn 4% Zinsen gerechnet werden?

43. Jemand verkauft eine nachschussweise Jahresrente von 620 Mark, die er noch durch 10 Jahre zu genießen hat; wie viel wird er dafür erhalten, wenn 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

44. Ein Vater will für seinen Sohn, wenn dieser das 24ste Jahr erreicht hat, eine Summe versichern; er zahlt zu diesem Zwecke von der Geburt des Sohnes angefangen bis zu jener Zeit an eine Versicherungsanstalt am Anfange jedes Jahres 400 fl. Welchen Betrag wird die Anstalt bei 5% Zinseszins nach 24 Jahren auszuzahlen haben?

45. Jemand will für seinen Sohn bei einer Bank eine Summe von 1000 fl. versichern, welche dieselbe beim Beginne des 15ten Jahres auszahlen soll; welchen jährlichen Beitrag muss er am Anfange eines jeden Jahres bis zu jener Zeit zum Zinsfuße 1·045 leisten?

46. Ein Capital von 20000 fl. soll bei 4% Zinseszins durch eine jährliche Rente getilgt werden, die vom Ende des ersten Jahres beginnt und 30 Jahre dauert; wie groß muss die Rente sein?

47. Jemand erlegt 12000 fl. zu 4%, und will dafür durch 24 Jahre am Ende jedes derselben eine Rente beziehen; wie groß wird dieselbe sein?

48. Bei einer Anstalt werden 1000 fl. gegen Entrichtung einer jährlichen Prämie von 27 fl. versichert; nach wie viel Jahren ist bei $4\frac{3}{4}\%$ das versicherte Capital durch Prämien gedeckt?

49. Ein Capital von 8000 fl. soll durch die nachschussweise jährliche Rente von 801·12 fl. bei 4% Zins getilgt werden; wie lange muss die Rente gezahlt werden?

50. Wie viele Jahre hat eine nachschussweise Rente zu laufen, die jährlich 600 fl. beträgt und gegenwärtig einen Wert von 10000 fl. hat, die Zinsen zu 5% gerechnet?

51. Jemand versichert bei einer Anstalt auf den Todesfall 5000 fl. und muss am Anfange jedes Jahres eine Prämie von 180 fl. zahlen; wenn er nun nach 24 Jahren stirbt, wie groß ist der Gewinn oder Verlust der Anstalt bei 4% Zinseszins?

52. Wie groß muss die Jahresrente sein, die 10 Jahre hindurch zu zahlen ist, wenn sie einen gleichen gegenwärtigen Wert haben soll mit einer Jahresrente von 500 fl., die 15 Jahre zu laufen hat, die Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}\%$ gerechnet?

53. Jemand hat eine Jahresrente von 1800 Mark auf 30 Jahre zu beziehen; er wünscht aber statt derselben eine größere auf 20 Jahre zu haben; wie groß wird diese bei $4\frac{1}{2}\%$ Zins sein?

54. Eine Jahresrente r, die zum Zinsfuße e durch n Jahre zu zahlen ist, soll in eine andere r' zum Zinsfuße e' verwandelt werden; wie viel Jahre wird die neue Rente zu zahlen sein?

55. Jemand will durch 18 Jahre am Anfange eines jeden Jahres eine bestimmte Summe bezahlen, damit nach Verlauf dieser Zeit er selbst oder eine andere Person 10 Jahre hindurch eine am Ende jedes Jahres fällige Jahresrente von 500 fl. genieße; wie groß ist die jährlich zu zahlende Summe, wenn 5% Zinsen gerechnet werden?

56. Welche Einlage muss man durch 20 Jahre am Anfange jedes Jahres an eine Versicherungsanstalt machen, um nach Verlauf dieser Zeit bei 4% Verzinsung eine Jahresrente von 300 fl. durch 12 Jahre zu genießen?

57. Jemand zahlt durch 30 Jahre zu Anfange eines jeden Jahres 68 fl. in eine Rentenbank, welche zu 4% verzinst; welche nachschussweise Rente wird ihm die Bank durch die 7 folgenden Jahre geben?

58. Welche nachschussweise Jahresrente wird man durch 15 Jahre beziehen, wenn man vorher durch 25 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres einen Betrag von 125 fl. eingezahlt hat und wenn 5% Zinseszinsen gerechnet werden?

59. Jemand hält sich noch auf 20 Jahre für arbeitsfähig; wie viel muss er in dieser Zeit jährlich auf Zinsen à $4\frac{1}{2}\%$ legen, um nach Ablauf derselben noch 15 Jahre eine Jahresrente von 300 fl. zu genießen?

60. Jemand, der sich noch 15 Jahre für arbeitsfähig hält, spart in dieser Zeit jährlich 250 fl. und legt sie zu 4% auf Zinsen an; wie lange kann er dafür nach Ablauf jener Zeit eine Jahresrente von 400 fl. ansprechen?

61. Eine Rente, welche im ersten Jahre 400 fl. beträgt und in jedem folgenden Jahre um 50 fl. wächst, wird 10 Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres ausgezahlt; welches ist ihr Barwert, wenn $4\frac{1}{2}$% Zinseszinsen gerechnet werden?

VI. Combinationslehre.

1. Permutationen, Combinationen und Variationen.

Permutationen. (§§. 260—262.)

1. Wie viele und welche Permutationen erhält man aus den Buchstaben des Wortes ROMA?
2. Stelle für die Elemente a b c d e lexikographisch die Permutationen dar, die 1) mit a, 2) mit c anfangen.
3. Bilde die Permutationen aus den Elementen a a a b b c.
4. Wie groß ist die Zahl der Permutationen aus a^5b^3?
5. Wie viele vierziffrige Zahlen gibt es, deren jede die Ziffern 3, 0, 7, 4 enthält?
6. Wie viele fünfziffrige Zahlen enthalten die Ziffer 6 2mal, die Ziffer 3 2mal und die Ziffer 5 1mal?
7. Wie viele neunziffrige Zahlen lassen sich aus den neun arabischen Ziffern bilden, wenn die Ziffern jeder Zahl ungleich sein sollen?
8. Wie oft können 5 Tischgenossen ihre Plätze am Tische wechseln, bis sie in allen Ordnungen gesessen sind?
9. Wie viele verschiedene Stellungen geben 3 weiße, eine blaue und 2 rothe Kugeln?

Combinationen. (§§. 263—266.)

10. Bilde für die Elemente a b c d e die Amben und Ternen a) ohne Wiederholung, b) mit Wiederholung.
11. Bilde alle Combinationen ohne Wiederholung von den Elementen 123456.
12. Wie viele Amben und Ternen enthalten 6 Elemente a) ohne Wiederholung, b) mit Wiederholung?
13. Wie viele Elemente muss man haben, die mit Wiederholung combiniert für irgend eine Classe eben so viel Combinationen geben, als 10 Elemente ohne Wiederholung für dieselbe Classe combiniert?

14. Wie viele Unionen, Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen geben a) die 90 Nummern der gewöhnlichen Zahlenlotterie, b) die in einer Ziehung herausgehobenen 5 Nummern?

15. Welche und wie viele Würfe durchaus ungleicher Felder können mit 2 Würfeln geworfen werden?

16. Wie viele Dreiecke können durch 6 sich schneidende gerade Linien gebildet werden?

17. Wie viele und welche Verbindungen zu drei sind aus den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks möglich?

18. Welche Arten des Wechsels von je drei der 6 Farben: roth, orange, gelb, grün, blau, violett sind möglich?

19. Wie viele einfache und zusammengesetzte Factoren hat die Zahl 2310?

20. Auf wie viele Arten läſst sich das Product a b c d e in zwei Producte zerlegen, von denen das eine 2, das andere 3 Factoren enthält?

21. Auf wie viele Arten läſst sich a) das Product a b c d in Producte von 2 Factoren, b) das Product a b c d e f in Producte von 3 Factoren zerlegen?

22. Auf wie vielerlei Art lassen sich 32 Karten unter 4 Spieler so vertheilen, daſs jeder 8 Karten erhält?

Variationen. (§§. 267—270.)

23. Bilde die Variationen der 2ten Classe ohne Wiederholung von den Elementen a b c d e.

24. Bilde die Variationen der 2ten und 3ten Classe mit Wiederholung von den Elementen a b c.

25. Stelle die ersten 20 Variationen der 3ten Classe mit Wiederholung von den Elementen a b c d dar.

26. Wie viele Variationen der 2ten, 3ten, 4ten Classe a) ohne Wiederholung, b) mit Wiederholung geben 10 Elemente?

27. Wie viele dreiziffrige Zahlen gibt es, deren Ziffern von einander verschieden sind?

28. Wie viele vierziffrige Zahlen sind mittelst der Ziffern 3, 4 und 5 darstellbar?

29. Wie viele fünfziffrige Zahlen, deren jede mit 5 beginnt, lassen sich aus den Ziffern 1, 5, 9 bilden?

30. Wie viele verschiedene Würfe sind mit 2 Würfeln möglich?

31. Welche verschiedene Würfe geben bei 3 Würfeln 10 zur Summe?

32. Auf wie viele Arten kann man mit 4 Würfeln die Summe 15 werfen?

33. Wie viele Würfe sind mit 3 Würfeln möglich, von denen der eine weiß, der zweite gelb, der dritte roth ist, wenn man annimmt, daſs Würfe von gleichviel Augen aber in verschiedenen Farben als verschieden zu betrachten sind?

34. Ein optischer Telegraph hat 6 Arme, von denen jeder 4 verschiedene Stellungen einnehmen kann; wie viele verschiedene Zeichen kann der Telegraph geben?

35. Es sind 4 Fächer mit 7 verschiedenfarbigen Kugeln zu besetzen, so dass in jedes Fach eine Kugel zu stehen kommt; auf wie vielerlei Art kann dies geschehen?

---

2. Potenzen von Binomen.

(§. 273.)

1. $(x+a)^4$. **2.** $(x-y)^{10}$. **3.** $(x+3)^5$.

4. $(2-a)^8$. **5.** $(a-2b)^6$. **6.** $(3x+4y)^5$.

7. $(5a-3b)^6$. **8.** $(x^2+2y^2)^4$. **9.** $(3a^2-2b^2)^6$.

10. $(a+b)^n \pm (a-b)^n$. **11.** $(x^2+3)^5-(x^2-3)^5$.

12. Wie heißt a) das sechste Glied der Potenz $(5x^2+6a^2)^{10}$;
b) das achte Glied in $(3a-2)^{12}$?

13. Bestimme den Coefficienten
a) von x^5 in der Entwicklung von $(5x+3)^9$;
b) von a^{10} in $(3a^2-2b^2)^{10}-(2a^2-3b^2)^{10}$.

14. $\left(\frac{x}{2}+1\right)^5$. **15.** $\left(\frac{y}{3}-2\right)^6$. **16.** $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^5$.

17. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$. **18.** $\left(\frac{3a}{3b}+\frac{3b}{3a}\right)^5$. **19.** $\left(\frac{4m}{3n}-\frac{9n}{4m}\right)^6$.

20. $\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^5$. **21.** $\left(\frac{ax^2}{4by^2}+\frac{4b^2y}{a^2x}\right)^4$. **22.** $\left(\frac{3ab^2}{4c^2y^2}-\frac{2c^2y}{4a^2b}\right)^6$.

23. Gib an a) das fünfte Glied der Reihe $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)^9$;
b) das siebente Glied in $\left(\frac{5ax^2}{6by^2}+\frac{3by}{5ax}\right)^{10}$.

24. Wie heißt der Coefficient von x^9 in $\left(\frac{3x^2}{5a}-\frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$?

25. $(1\cdot03)^5=(1+\frac{3}{100})^5=\ldots$ **26.** $(0\cdot997)^4=(1-\frac{3}{1000})^4=\ldots$

Bestimme ebenso auf 6 Decimalstellen:

27. $(1\cdot025)^{15}$; **28.** $(1\cdot035)^{12}$; **29.** $(1\cdot055)^{14}$;

30. $(0\cdot98)^{18}$; **31.** $(0\cdot996)^{20}$; **32.** $(1\cdot999)^{16}$;

33. $(4+\sqrt{3})^6$. **34.** $(6-5\sqrt{2})^5$. **35.** $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8$.

36. $(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})^8$. **37.** $\left(2x-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^7$. **38.** $\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^6$.

39. $(1+\sqrt{-1})^6$. **40.** $(3-i)^5$. **41.** $(1+2i)^6$.

42. $(a+bi)^5$. **43.** $(\sqrt{-4}+\sqrt{-2})^6$. **44.** $(2\sqrt{a}-bi)^5$.

45. $(a + bi)^n \pm (a - bi)^n$.
46. $(1 + i\sqrt{5})^6 + (1 - i\sqrt{5})^6$.
47. $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^6$.
48. $\left(\frac{3 + i\sqrt{2}}{2}\right)^5 + \left(\frac{3 - i\sqrt{2}}{2}\right)^5$.

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Absolute und relative Wahrscheinlichkeit. (§§. 276 und 277.)

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Aufwerfen eines Münzstückes „Bild“ zu werfen?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Münzstücke eher „Bild“ als „Schrift“ zu werfen?
3. In einer Urne sind 15 Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) eine ungerade Zahl, b) eine gerade Zahl von Kugeln herauszuziehen?
4. In einer Urne befinden sich 10 weiße und 6 rothe Kugeln; welches ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?
5. In einer Urne sind 4 weiße, 3 rothe und 2 blaue Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 4 Kugeln eine weiße, zwei rothe und eine blaue zu greifen?
6. In einer Urne befinden sich 8 weiße, 6 rothe, 10 blaue und 5 schwarze Kugeln; welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, beim Herausziehen zweier Kugeln eher eine weiße und eine blaue, als eine rothe und eine schwarze Kugel zu ziehen?
7. Wie groß ist bei einem Spiel von 32 Karten die Wahrscheinlichkeit, a) eine rothe Karte, b) einen König zu ziehen?
8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln zwei gleiche Felder zu werfen?
9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 8 Augen zu werfen?
10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln auf einen Wurf a) gerade 3, 4 und 6, b) die Summe 6 zu werfen?
11. Wie groß ist die relative Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln a) eher 7 als 10, b) eher 7 als 5 zu werfen?
12. Von 8500 Prioritäts-Obligationen eines Eisenbahnanlehens werden 125 Stück verlost; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Verlosung eines Stückes?
13. Die gewöhnliche Zahlenlotterie enthält 90 Nummern, von denen jedesmal 5 herausgezogen werden; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
    a) eine genannte Nummer (Extrate) zu treffen,
    b) mit zwei genannten Nummern einen Ambo zu machen,
    c) mit drei genannten Nummern einen Terno zu machen?

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. (§§. 278—282.)

14. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mit 2 Würfeln auf den ersten Wurf einen Pasch, auf den zweiten die Augenzahl 8 werfe?

15. Wie groß ist bei 3 Würfeln die Wahrscheinlichkeit, zuerst die Summe 5, dann die Summe 4 zu werfen?

16. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln mehr als 9 Augen zu werfen?

17. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel a) in zwei Würfen das erstemal 1, das zweitemal 2 zu werfen, b) in sechs Würfen das erstemal 1, das zweitemal 2,... das sechstemal 6 zu werfen?

18. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 3mal nach einander einen Pasch zu werfen?

19. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem Würfel 3mal nach einander 1 wirft?

20. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Spielern, deren jeder ein Blatt von 32 Karten in Händen hat und die beide zugleich jeder eine Karte ziehen, A eine Figur und B keine Figur ziehe?

21. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten in den ersten zwei Zügen König und Dame derselben Farbe, jedoch in beliebiger Ordnung zu ziehen?

22. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten zuerst eine Zehn, darauf, wenn die zuerst gezogene Karte nicht wieder hinzugelegt wird, einen König zu ziehen?

23. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus 52 Karten das erstemal Coeur, das zweitemal Carreau, das drittemal Pique, das viertemal Treff zu ziehen?

24. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Kartenspiel von 52 Blättern 3mal hinter einander ein Aß zu ziehen?

25. In einer Urne sind 3 weiße, 4 rothe, 5 gelbe und 6 blaue Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße, rothe oder gelbe Kugel zu ziehen?

26. In einer Urne A befinden sich 4 weiße und 6 rothe Kugeln, in einer zweiten B 6 weiße und 8 rothe Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man, wenn man aus beiden Urnen zugleich zieht, aus jeder eine weiße Kugel ziehe?

27. In der Urne A befinden sich 4 Treffer und 20 Nieten, in der Urne B 6 Treffer und 24 Nieten, in der Urne C 8 Treffer und 28 Nieten; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen zufälligen Griff aus einer dieser Urnen einen Treffer zu ziehen?

28. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Herausziehen je einer Numer aus einer Urne von 90 Nummern das erstemal die Nummer 1, das zweitemal die Nummer 90 zu ziehen, a) wenn die zuerst gezogene Nummer wieder in die Urne zurückgelegt wird, b) wenn das nicht geschieht?

29. In einer Urne sind 12 weiße und 9 schwarze Kugeln. Man zieht 8mal je eine Kugel heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Ziehungen 5 weiße, und in den späteren drei Ziehungen 3 schwarze Kugeln gezogen werden, a) wenn man nach jeder Ziehung die Kugel in die Urne zurückwirft, b) wenn das nicht geschieht?

30. Auf einer Eisenbahn fahren von A nach B täglich 4 Züge mit 8 Wagen, deren jeder 3 Coupé's hat. Jemand macht die Fahrt eines Tages und weiß, dass sein Freund eben dieselbe 2mal wöchentlich macht. Welche Wahrscheinlichkeit hat er, mit ihm in demselben Coupé zusammenzutreffen?

Mathematischer Hoffnungswerth. (§§. 283 und 284.)

31. Jemand kann, wenn er mit 2 Würfeln die Summe 5 wirft, 2 fl. gewinnen; wie groß ist sein mathematischer Hoffnungswert?

32. Wie hoch kann der Einsatz sein, wenn beim Spiel mit zwei Würfeln jeder Pasch 1 fl. gewinnt, andere Würfe aber nicht zählen?

33. Zwei Spieler A und B kommen mit einander überein, dass derjenige den ganzen Einsatz erhalten solle, welcher zuerst 3 Partien gewinnt; nachdem aber A 1, B 2 Partien gewonnen hat, trennen sie sich; in welchem Verhältnisse ist nun der Einsatz zu theilen?

34. Jemand erbietet sich, demjenigen, der aus einer Urne mit 5 weißen, 6 rothen und 7 blauen Kugeln mit einem Griffe 2 weiße, 3 rothe und 4 blaue heraushebt, 1 fl. zu geben, wenn er selbst jedesmal 8 Kreuzer erhält, sobald 9 andere Kugeln herausgezogen werden; hat er zu seinem Vortheile oder zu seinem Nachtheile gewettet?

35. Jemand besitzt ein Los einer aus 10000 Losen bestehenden Lotterie, worin ein Treffer von 20000 fl., einer von 10000 fl., 10 Treffer von 1000 fl., 40 von 100 fl., und 1000 von 5 fl. enthalten sind; wie groß ist sein mathematischer Hoffnungswert?

36. Nach unseren Lottogesetzen wird a) für den Ambo der 240fache Einsatz, b) für den Terno der 4800fache Einsatz als Gewinn bezahlt; wie viel % Gewinn hat das Lotto, wenn man von den Verwaltungskosten absieht?

Wahrscheinlichkeit in Bezug auf die menschliche Lebensdauer. (§. 286.)

37. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 20jährige Person a) das 30ste, b) das 56ste, c) das 70ste Jahr erreiche?

38. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass a) eine 18jährige, b) eine 35jährige, c) eine 50jährige Person 60 Jahre alt werde?

39. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass a) ein neugebornes Kind, b) eine 12=, c) 18=, d) 36=, e) 55jährige Person nach 20 Jahren nicht mehr am Leben sei?

40. Ein Mann ist 50, seine Frau 40 Jahre alt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 20 Jahren a) noch der Mann lebe, b) noch die Frau lebe, c) noch beide leben; dass d) schon der Mann todt sei, e) schon die Frau todt sei, f) schon beide todt seien; dass g) der Mann die Frau überlebe, h) die Frau den Mann überlebe, i) entweder der Mann oder die Frau noch lebe, k) entweder der Mann oder die Frau schon todt sei?

Lebensversicherungsrechnung. (§§. 287—290.)

41. Welchen Betrag muss man an eine Versicherungsanstalt für ein 2jähriges Kind einzahlen, damit dieses nach erreichtem 24sten Lebensjahre, falls es dann lebt, ein Capital von 3500 fl. erhalte, die Zinsen zu 4% berechnet?

42. Ein 34jähriger Mann zahlt in eine Versicherungsanstalt 1000 fl.; welches Capital wird ihm die Anstalt nach 16 Jahren, falls er noch lebt, bei 5% Verzinsung auszahlen?

43. Zwei Eheleute, welche gegenwärtig 30 und 25 Jahre alt sind, wollen ein Capital von 4000 fl. versichern, das ihnen nach 30 Jahren, wenn sie dann noch beide leben, ausgezahlt werden soll; welchen Betrag müssen sie an die Versicherungsanstalt, die 4% Zinsen rechnet, einzahlen?

44. Wie groß ist bei 4% Zinseszins der gegenwärtige Wert einer Leibrente, welche eine 36jährige Person am Ende eines jeden Jahres im Betrage von 280 fl. zu beziehen hat?

45. Eine 56jährige Person will sich eine jährliche Leibrente von 300 fl. versichern; wie viel hat sie bei 4% Verzinsung an eine Rentenbank sogleich einzuzahlen?

46. Eine 45jährige Person kauft sich mit einer Einlage von 6000 fl. eine Jahresrente, welche von dem Ende des laufenden Jahres angefangen bis an das Lebensende dauern soll; wie groß ist die Leibrente bei 5% Zinseszins?

47. Ein 60jähriger Diener erhält von seinem Herrn für seine vieljährige treue Dienstleistung ein Abfertigungscapital von 2000 fl.; welche lebenslängliche Rente kann er sich dafür kaufen, wenn 4% Zinsen gerechnet werden?

48. Eine $n$jährige Person wünscht nach p Jahren eine Leibrente B, zahlbar am Ende jedes Jahres, zu erhalten; wie groß wird die Einlage M für eine solche auf p Jahre aufgeschobene Leibrente sein?

$$M = \frac{B\, a_{n+p}}{a_n\, e^p} \,.\, r_{n+p}.$$

49. A ist 42 Jahre alt und will auf den Todesfall seinen Erben ein Capital von 4800 fl. versichern; welche Einlage muss er zu diesem Zwecke bei 4% Zinseszins bei einer Versicherungsanstalt machen?

50. Eine 38jährige Person zahlt an eine Versicherungsanstalt 1000 fl. ein; welches Capital wird dafür bei 5% Verzinsung nach ihrem Tode die Anstalt an die Erben auszuzahlen haben?

51. Welche Prämie muss eine 32jährige Person zu Anfang jedes Jahres zahlen, um bei ihrem Ableben den Erben eine Summe von 2000 fl. zu sichern, den Zinseszins zu 4% gerechnet?

52. Eine $n$jährige Person will sich gegen eine am Anfange jedes Jahres zahlbare Prämie P ein Capital C so sichern, dass ihr dieses nach k Jahren, wenn sie dann noch lebt, ausgezahlt werden soll; welche Beziehung findet zwischen P und C statt?

$$P \,.\, [a_n\, e^k\, (1 + r_n) - a_{n+k-1}\, e \,.\, r_{n+k-1}] = C \,.\, a_{n+k}.$$

53. Ein Vater zahlt an eine Versicherungsanstalt zu Anfang jedes Jahres eine Prämie von 300 fl., damit die Anstalt seiner neugebornen Tochter, falls sie das 18te Jahr erreichen sollte, ein gewisses Capital auszahle; wie groß wird dieses bei 5% Verzinsung ausfallen?