PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 6
Strani 362–365

Marko Razpet:

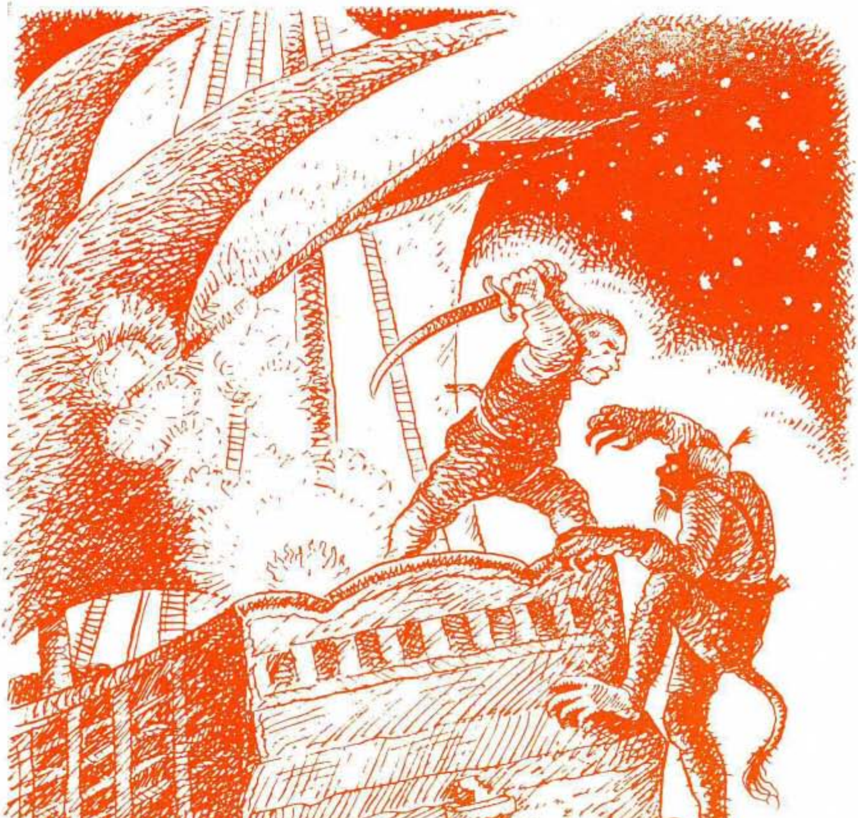
ZAKLAD NA SAMOTNEM OTOKU

Ključne besede: matematika, geometrija, analitična geometrija, neenakosti, koordinatni sistem, razdalja, aritmetična sredina, geometrična sredina, največja vrednost funkcije.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/915-Razpet.pdf

ZAKLAD NA SAMOTNEM OTOKU

Bilo je takrat, ko je bil Krjavelj še pri mornarjih. Nekega lepega dne je imel izjemno srečo. Iz morja je dvignil steklenico s sporočilom. Na kar dobro ohranjenem koščku papirja je bilo napisano nekako takole:



"Kako pa veš, da si ga presekal?" vpaša Francelj.

"Kaj bi ne vedel, saj je dvakrat padlo v morje; prvič je reklo: štrbunk! vdrugič pa se je slišalo: štr–bunk! Pa reci potlej, da ga nisem presekal, da ga nisem na dva kosa presekal."

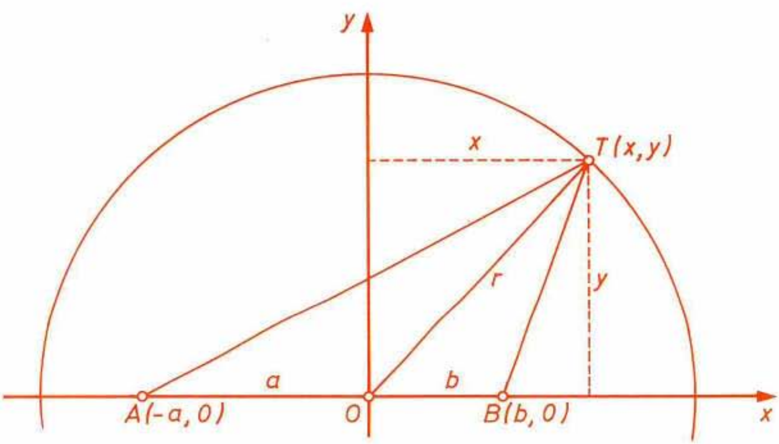
Sredi morja (sledijo zemljepisne koordinate) leži samoten otok. Približno na sredini otoka rasteta kokosova palma in kruhovec. Pojdi od palme do kruhovca in štej korake. Nazaj grede zabij v tla količek na drugi petini razdalje med drevesoma. Vsota razdalj zaklada od dreves mora biti največja, vendar je trikrat dlje od količka, kot je količek od kruhovca.

Krjavelj je ljubosumno spravil listek, steklenico vrgel nazaj v morje in odslužil mornarico. Vmes je doživel še tisto znamenito srečanje z vragom, ki pa se je, kot vemo, srečno končalo. Na kopnem mu je kmalu postalo dolgčas po morju, spomnil se je na porumeneli listič in se odločil, da izkoplje zaklad. Najel si je barko in poiskal omenjeni otoček. Drevesi sta bili še vedno tam, možakarju je kmalu uspelo zabiti količek na pravem mestu in kopati primerno daleč stran, zaklada pa ni in ni hotelo biti. Obupal je in se razočaran vrnil domov. O tem dogodku ni nikomur pripovedoval, raje se je postavljal z vragom.

Mi pa si oglejmo, kako bi s kancem matematike našli zaklad. V točki A naj raste palma, v B pa kruhovec. Količek je treba zabiti v točki O na daljici AB. Naj bo a razdalja med točkama A in O, b pa razdalja med O in B. Zaklad je zakopan v točki T. Naj bo r razdalja med O in T. Pri vsem tem mora biti vsota razdalj $AT + BT$ čim večja. Uvedemo še koordinatni sistem z izhodiščem v točki O, os x je usmerjena proti točki B. Iskana točka T naj ima koordinati x, y. Po Pitagorovem izreku je

$$AT^2 = (x + a)^2 + y^2, \; BT^2 = (x - b)^2 + y^2 \quad \text{in} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Vsota razdalj $f(x) = AT + BT$ je odvisna od abscise točke T. Ni težko videti, da velja:



$$f(x) = \sqrt{a^2 + r^2 + 2\,ax} + \sqrt{b^2 + r^2 - 2\,bx}$$

Bralec, ki mu je pojem odvoda že domač, bo zdaj nalogo rešil mimogrede. Mi pa se je bomo lotili z elementarnimi sredstvi.

Dovolj je obravnavati primer, ko je $a \geqslant b$, $0 < a < r$ in $0 < b < r$. V Krjavljevem primeru je namreč $b = 2(a+b)/5$ in $r = 6(a+b)/5$, iz česar dobimo $a = r/2$ in $b = r/3$.

Sedaj moramo poiskati tako absciso x, da je vrednost $f(x)$ čim večja. V ta namen uporabimo dva pomožna izreka.

Pomožni izrek 1. Geometrijska sredina $\sqrt{ab}$ pozitivnih števil a, b ne presega njune aritmetične sredine $(a+b)/2$. Obe sredini sta enaki natanko takrat, ko je $a = b$.

Dokaz: Ker sta a in b pozitivni števili, obstajata njuna kvadratna korena $\sqrt{a}$ in $\sqrt{b}$, kvadrat njune razlike pa je nenegativen: $0 \leqslant (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$ iz tega pa dobimo:

$$\sqrt{ab} \leqslant (a+b)/2$$

Obe sredini pa sta enaki samo v primeru, ko je $a = b$.

Pomožni izrek 2. Za poljubna pozitivna števila a, b, c, d velja neenakost:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+c)(b+d)} \tag{1}$$

pri čemer velja enakost natanko tedaj, ko je $ad = bc$.

Dokaz: Pri pogojih tega izreka sta tudi števili ad in bc pozitivni in po prvem pomožnem izreku velja:

$$2\sqrt{(ad)(bc)} \leqslant ad + bc$$

Enačaj velja natanko takrat, ko je $ad = bc$. Če v zadnji neenakosti na obeh straneh prištejemo število $ab + cd$, dobimo $ab + 2\sqrt{abcd} + cd \leqslant ad + bc + ab + cd$ ali po urejanju

$$(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 \leqslant (a+c)(b+d)$$

Po korenjenju dobimo neenakost (1).

Prepišimo $f(x)$ nekoliko drugače:

$$f(x) = \sqrt{a(a + r^2/a + 2x)} + \sqrt{b(b + r^2/b - 2x)}$$

Če v neenakosti (1) nadomestimo b z $a + r^2/a + 2\,x$, c z b in d z $b + r^2/b - 2x$, dobimo neenakost

$$f(x) \leqslant \sqrt{(a+b)(a + b + r^2/a + r^2/b)}$$

in po preureditvi

$$f(x) \leqslant (a+b)\sqrt{1 + r^2/(ab)} \tag{2}$$

Enačaj v (2) velja po pomožnem izreku 2 natanko takrat, ko je

$$b(a + r^2/a + 2x) = a(b + r^2/b - 2x)$$

Rešitev te enačbe je

$$x = \frac{a-b}{2ab} r^2 \qquad (3)$$

Pri tem je treba biti nekoliko previden. Veljati mora $-r \leqslant x \leqslant r$. Za Krjavljev primer dobimo $x = r/2$ ali $x = 3(a + b)/5$. Daljica OT mora oklepati z osjo x kot 60^0.

Nazadnje še nekaj nalog:

1. Koliko rešitev ima naša naloga pri pogoju $0 < b < a < r$?
2. Dokaži, da je za absciso x, ki je dana s (3), kot ATO enak kotu BTO. (Uporabi sinusni izrek!)
3. Z ravnilom in šestilom konstruiraj daljico, ki ima dolžino x v formuli (3).
4. Na okrogli biljardni mizi moraš kroglico iz točke A poslati v točko B (slika), tako da se odbije le enkrat na robu mize, pri čemer ležita točki A in B na nekem premeru mize. Pot kroglice mora biti najdaljša. Kje mora kroglica doživeti odboj? Središče mize ni nujno med točkama A in B.

Marko Razpet