PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 3
Strani 134–137

Marko Razpet:

ŠE O ŠAHOVSKEM KRALJU

Ključne besede: matematika, kombinatorika, pot, povezava, binomski koeficienti, rekurzivna formula.

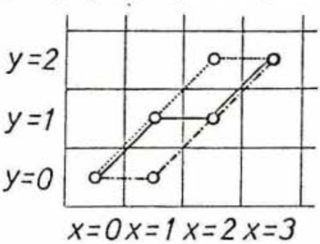
Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/982-Razpet.pdf

ŠE O ŠAHOVSKEM KRALJU

O šahovskem kralju, ki pa se sme sprehajati po polovični šahovnici le v treh predpisanih smereh, smo v Preseku že precej izvedeli. Odgovorili smo na vprašanje, na koliko različnih načinov lahko pride na poljubno polje z začetnega polja. Ta števila so nam pričarala lepe vzorce, če smo polja barvali z barvami, ki so jih narekovali ostanki pri deljenju z danim številom p. Tudi tokrat bomo prehodili približno tako pot, le da kralju šahovnice ne bomo odvzemali.
Mislimo si torej šahovskega kralja na poljubno veliki šahovnici. Polja zaznamujmo tako kot doslej z 0, 1, 2, ... v vodoravni in navpični smeri. Pozicijo na šahovnici bomo seveda podajali z urejenim parom (x, y) nenegativnih celih števil. Kralju pa dovolimo le poteze

$$(x, y) \to (x+1, y), \qquad (x, y) \to (x, y+1), \qquad (x, y) \to (x+1, y+1)$$

Začetno polje, s katerega gre kralj po šahovnici, bo vselej polje $(0, 0)$. Označimo z $M(x, y, k)$ število poti, po katerih lahko pride kralj iz izhodišča na polje (x, y) po k korakih. Pri tem je k tudi nenegativno celo število. Zaradi lažjega računanja bomo definirali: $M(x, y, k) = 0$, če je vsaj eno od števil x, y manjše kot 0 in $M(0, 0, 0) = 1$. Vse tabele in slike so urejene tako, kot smo označili šahovnico: od leve proti desni in od spodaj navzgor. Števila $M(x, y, k)$ imajo očitno lastnost simetričnosti za x in y: $M(x, y, k) = M(y, x, k)$ za vsa nenegativna cela števila x, y, k. Oglejmo si vse tiste poti, po katerih prispe kralj s polja $(0, 0)$ na polje $(3, 2)$ po treh potezah. Te so:



Slika 1

Prirejena tabela števil $M(x, y, 3)$ je takale:

1	3	3	1
0	3	6	3
0	0	3	3
0	0	0	1

Izven te kvadratne tabele števil so same ničle, ki pa jih ni smiselno pisati in z njimi tratiti prostora. Bralec sam bo po naslednjem premisleku zlahka sestavil take tabele tudi za drugačno število korakov k. Obstaja namreč zelo preprosta povezava med števili $M(x, y, k)$. Po k korakih pride kralj na polje (x, y) tako, da pride po $k - 1$ korakih na polja $(x - 1, y)$ ali $(x, y - 1)$ ali $(x - 1, y - 1)$, s teh pa na končno polje po enem samcatem koraku. Z enačbami to takole zapišemo:

$$M(x,y,k) = M(x-1,y,k-1) + M(x,y-1,k-1) + M(x-1,y-1,k-1) \quad (1)$$

Ni težko videti, da je $M(x,0,k) = 1$, če je $x = k$ in 0 sicer. Na polje $(x, 0)$ lahko pride kralj le vodoravno, torej na en sam način, toda le, če je $x = k$, sicer pa tega polja ne doseže. Če je polje (x, y) predaleč, ga po premajhnem številu korakov k kralj spet ne doseže. Če je število k preveliko, pa na polja, ki so preblizu ne more. Zato so v naši tabeli nekatera števila, ki tvorijo zase trikotno shemo tik ob izhodišču, enaka nič. Hitro lahko ugotovimo naslednje:
$M(x, y, k) = 0$, če je $x > k$ ali $y > k$ ali $x + y < k$.

V nadaljevanju bomo označevali z $m(x, y)$ manjšega, z $M(x, y)$ pa večjega od števil x, y. Potemtakem velja:

$$M(x,y) \leqslant k \leqslant x+y \Leftrightarrow M(x,y,k) \neq 0 \quad (2)$$

Na prvi pogled ugotovimo, da ležijo na diagonali in dveh stranicah prejšnje tabele ravno binomski koeficienti $\binom{3}{i}$. Ponovimo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad \text{(Pascalova identiteta)}$$

O binomskih koeficientih je bilo v Preseku že veliko napisanega, zato o njih tu ne bi razpravljali.

Z relacijo (1) so števila $M(x, y, k)$ natanko določena. Dokažimo:

$$M(x,y,k) = \binom{k}{y}\binom{y}{k-x} = \binom{k}{x}\binom{x}{k-y} \quad (3)$$

Na prvi pogled izraz za $M(x, y, k)$ ni simetričen v številih x in y. Toda

$$\binom{k}{y}\binom{y}{k-x} = \frac{k!y!}{y!(k-y)!(k-x)!(y-k+x)!} = \frac{k!}{(k-x)!(k-y)!(x+y-k)!} =$$

$$= \frac{k!x!}{x!(k-x)!(k-y)!(x-k+y)!} = \binom{k}{x}\binom{x}{k-y}$$

S Pascalovo identiteto pa se prepričamo, da zadoščajo števila $M(x, y, k)$ relaciji (1):

$$M(x,y,k) - M(x-1,y,k-1) - M(x,y-1,k-1) - M(x-1,y-1,k-1) =$$

$$= \binom{k}{y}\binom{y}{k-x} - \binom{k-1}{y}\binom{y}{k-x} - \binom{k-1}{y-1}\binom{y-1}{k-1-x} - \binom{k-1}{y-1}\binom{y-1}{k-x} =$$

$$= \binom{y}{k-x}\left[\binom{k}{y} - \binom{k-1}{y}\right] - \binom{k-1}{y-1}\left[\binom{y-1}{k-x-1} + \binom{y-1}{k-x}\right] =$$

$$= \binom{y}{k-x}\binom{k-1}{y-1} - \binom{k-1}{y-1}\binom{y}{k-x} = 0$$

Bralec, ki je že bolj vešč kombinatorike, bo morda preveril (3) s preprostim sklepanjem.

Za $x = 0$ dobimo iz (3): $M(0, y, k) = \binom{k}{y}\binom{y}{k}$. Če je $k < y$, potem je prvi faktor nič, če pa je $k > y$ pa drugi. Če je $k = y$, dobimo $M(0, k, k) = 1$. Torej $M(0, y, k) = 1$, če je $k = y$, in 0 sicer.

Za $k = x$ ali za $k = y$ dobimo čiste binomske koeficiente:

$$M(x, y, x) = \binom{x}{y} \quad \text{in} \quad M(x, y, y) = \binom{y}{x}$$

Tudi za $k = x + y$ dobimo lep rezultat:

$$M(x, y, x + y) = \binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}$$

Sedaj ni več težko prešteti število vseh poti, ki kralja pri dovoljenih potezah pripeljejo v dano točko (x, y). To število označimo z $r(x, y)$. Očitno velja zaradi omejitve (2):

$$r(x, y) = \sum_{k=M(x,y)}^{x+y} M(x, y, k) \tag{5}$$

in odtod zaradi (3):

$$r(x, y) = \sum_{k=M(x,y)}^{x+y} \binom{k}{y}\binom{y}{k-x} \tag{6}$$

Števil $r(x, y)$ nam ni treba računati po tej komplicirani formuli, kot nam ni treba računati binomskih koeficientov s fakultetami, saj imamo na razpolago Pascalov trikotnik, kjer shajamo samo s seštevanjem. S podobnim razmislekom kot smo dobili zvezo (1), dobimo relacijo

$$r(x, y) = r(x-1, y) + r(x, y-1) + r(x-1, y-1) \tag{7}$$

Ker je $r(x, y) = r(y, x)$ in $r(x, 0) = r(0, y) = 1$ za $x, y \geqslant 0$, lahko dobimo poljubno veliko tabelo števil $r(x, y)$:

. . . .

1	7	25	63	129	...
1	5	13	25	41	...
1	3	5	7	9	...
1	1	1	1	1	...

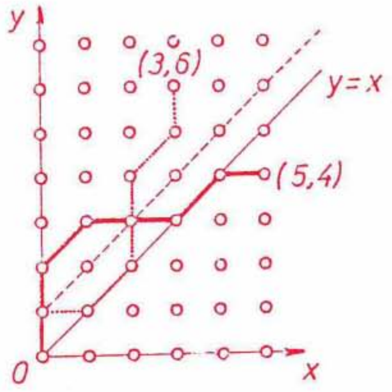
Tabelo začnemo izpolnjevati levo spodaj, vsako naslednje število je vsota treh, recimo 41 = 25 + 7 + 9, števila 41, 25, 7, 9 tvorijo v tabeli kvadrat števil. Preden preidemo na morda najzanimivejši del tega razglabljanja, še neobvezna naloga za bralce: dokaži, da velja za poljubni nenegativni celi števili x, y identiteta

$$r(x, y) = \sum_{k=0}^{m(x,y)} \binom{x}{k}\binom{x+y-k}{x} = \sum_{k=M(x,y)}^{x+y} \binom{k}{x}\binom{x}{x+y-k}$$

Števila $r(x, y)$ z rastočima x in y hitro naraščajo in vsa so liha. Izberimo si naravno število p večje od 2 in opazujmo tabelo ostankov števil $r(x, y)$ pri deljenju s številom p. Učeno rečeno, študirajmo števila $r(x, y)$ po modulu p, označimo jih z $r(x, y) (\mathrm{mod}\ p)$. Za $p = 3$ dobimo tako tabelo, sestavljeno iz števil 0, 1, 2 za $0 \leqslant x, y \leqslant 15$ (glej tabelo)

Tabelo dobimo po formuli (7), pri čemer računamo po modulu $p = 3$, se pravi, čim vsota na desni prekorači število p, odštejemo od nje tolikokrat p, da dobimo število med 0 in $p-1$ vključno. V tabeli so zanimive ničle. Te tvorijo pravilno razporejene kvadrate, katerih stranice štejejo 1, 3, 9, ... ničel. Z računalnikom lahko sestavimo zelo obsežne tabele na opisani način. Za $p = 5$ dobimo tako sliko:

```
1112221110000000
1210002120000000
1020002010000000
1110002220000000
1211211210000000
1022011021022011
1112221111112221
1021021020000000
1111111110000000
1212121212121212
1210002121210002
1020002011020002
1110002221110002
1211211211211211
1021021021021021
1111111111111111
```



Točka (x, y) je pobarvana temno, če je število $r(x, y)$ deljivo s številom p. Opazimo mali križec v večjem, ta je kasneje zopet v večjem itd. Zaporedje stranic temnih kvadratov raste po zaporedju 1, 5, 25, ...

Slika 2. $p = 5$

Marko Razpet