

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 18 (1990/1991)

Številka 5

Strani 258-262

Janez Rakovec:

KAKO DOBIMO VSE TOČKE NA ENOTSKI KROŽNICI

Ključne besede: matematika, teorija števil.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/18/1054-Rakovec.pdf>

© 1991 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

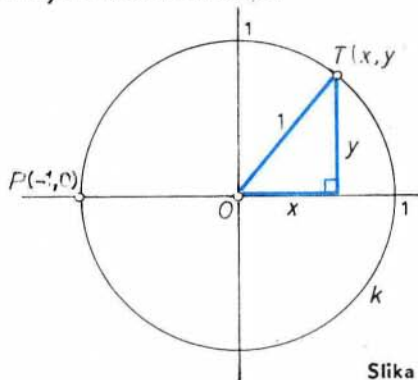
© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

KAKO DOBIMO VSE TOČKE NA ENOTSKI KROŽNICI

V Presekovi knjižnici je ravnokar v slovenskem prevodu izšla težko pričakovana knjiga *Matka!* znamenitega matematika Sergeja Langa. Eno njenih poglavij govori o *pitagorejskih trojicah*, to je o trojicah celih števil (a, b, c) , ki zadoščajo enačbi $a^2 + b^2 = c^2$. Avtor pokaže, kako dobimo prav vse pitagorejske trojice s tem, da poiščemo vse urejene pare racionalnih števil (x, y) , ki zadoščajo enačbi $x^2 + y^2 = 1$. To so, gledano geometrijsko, vse racionalne točke (ki imajo obe koordinati racionalni) na enotski krožnici.

V ravnini naj bo izbran pravokotni koordinatni sistem. Naj bo k enotska krožnica v tej koordinatni ravnini, to je krožnica s polmerom 1 in s središčem v izhodišču O koordinatnega sistema (slika 1). Torej je k množica vseh tistih točk $T(x, y)$ v ravnini, katerih koordinati zadoščata enačbi $x^2 + y^2 = 1$. (Upoštevati je treba, da je razdalja poljubne točke $T(x, y)$ od izhodišča O enaka $\sqrt{x^2 + y^2}$.)



Slika 1.

V knjigi *Matka!* izvemo, kako lahko dobimo točke na krožnici k na naslednji način. Naj bo t poljubno realno število in naj bosta koordinati x in y točke $T(x, y)$ tile funkciji t -ja:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad y = \frac{2t}{1+t^2} \quad (*)$$

Tedaj točka $T(x, y)$ leži na enotski krožnici k . Iz $(*)$ namreč izhaja:

$$x^2 + y^2 = \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} + \frac{4t^2}{1+2t^2+t^4} = \frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} = 1$$

Velja pa tudi tale, obratna trditev, ki jo zapišimo kot izrek:

IZREK. Za poljubno točko $T(x, y)$ na enotski krožnici k , različno od točke $P(-1, 0)$, obstaja takšno realno število t , da velja:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

Preden bomo to dokazali, ne bo odveč nekaj pojasnil. Izrek pove, da se koordinati vsake točke na krožnici k , razen $P(-1, 0)$, izražata s formulama (*). Če upoštevamo še prejšnjo ugotovitev, to pomeni: Ko t preteče vsa realna števila, tedaj točka $T(x, y)$, kjer je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$, preteče vso enotsko krožnico k , z izjemo točke $P(-1, 0)$. Lahko tudi rečemo: $Z(*)$ je dana preslikava (predpis), ki vsakemu realnemu številu $t \in \mathbb{R}$ priredi ustrezno točko $T(x, y) \in k$ in ki množico realnih števil $\mathbb{R}$ preslika na enotsko krožnico k brez točke $P(-1, 0)$. Neodvisno spremenljivko t navadno imenujemo *parameter*; pravimo, da je krožnica k z zvezama (*) podana *parametrično*.

$Z(*)$ smo torej dobili vse točke na enotski krožnici, razen točke $P(-1, 0)$. Če pa za t vstavimo poljubno racionalno število, sta očitno tudi $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ in $y = \frac{2t}{1+t^2}$ racionalni števili. Izkaže se: Ko t preteče vsa racionalna števila, tedaj ustrezna točka $T(x, y)$ preteče vse racionalne točke na enotski krožnici, razen točke $P(-1, 0)$. (Glej konec dokaza našega izreka.) Tako torej dobimo vse urejene pare racionalnih števil (x, y) , ki zadoščajo enačbi $x^2 + y^2 = 1$. Iz teh pa dobimo, kot že rečeno, vse pitagorejske trojice.

Že večkrat omenjena izjemna točka $P(-1, 0)$ ima koordinati $x = -1$, $y = 0$, ki se ne izražata s formulama (*). Če naj bo namreč $y = \frac{2t}{1+t^2} = 0$, mora biti $t = 0$ in potem je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$, torej x ni enak -1 .

Dokažimo naš izrek najprej po algebraini poti, kakor je to narejeno v knjigi *Matka!* (le da se tam avtor povsod omeji na racionalna števila). Naj bo $T(x, y)$ poljubna točka na enotski krožnici k , različna od $P(-1, 0)$. Želimo najti tako realno število t , da bosta izpolnjeni enačbi (*). Uganemo: Treba je vzeti $t = \frac{y}{x+1}$. Tedaj je $(x+1)t = y$ in potem $(x+1)^2 t^2 = y^2$. Ker je $T(x, y) \in k$, je $x^2 + y^2 = 1$ in tako je $y^2 = 1 - x^2$. Torej je

$$(x+1)^2 t^2 = 1 - x^2 = (1+x)(1-x)$$

Ker je $x \neq -1$ in tako $x+1 \neq 0$, lahko to enačbo delimo z $x+1$ in dobimo:

$$(x+1)t^2 = 1-x$$

Preuredimo:

$$x(1+t^2) = 1-t^2$$

In že imamo:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Potem je:

$$x+1 = \frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

In končno:

$$y = (x+1)t = \frac{2t}{1+t^2}$$

Torej za poljubno točko $T(x, y) \in k$, različno od $P(-1, 0)$, res obstaja tak $t \in \mathbb{R}$ (našli smo ga: $t = \frac{y}{x+1}$), da velja: $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$. (Če

ostri kot ψ pri oglišču P , zato so si podobni. Dolžine nekaterih njihovih stranic lahko že takoj ugotovimo: $|PO| = 1$, $|UO| = t$, $|PT'| = |PO| + |OT'| = 1 + x$, $|TT'| = y$.

Parameter t bomo izrazili s koordinatama x, y točke T .

Trikotnika PUO in PTT' sta podobna, zato je $\frac{|UO|}{|PO|} = \frac{|TT'|}{|PT'|}$.

Seveda je $\frac{|UO|}{|PO|} = \frac{t}{1} = t$ in $\frac{|TT'|}{|PT'|} = \frac{y}{x+1}$. Torej je $t = \frac{y}{x+1}$.

Koordinati x, y točke T pa bomo izrazili s parametrom t .

Za trikotnik PUO pove Pitagorov izrek: $|PU|^2 = |PO|^2 + |UO|^2 = 1 + t^2$. Torej je $|PU| = \sqrt{1 + t^2}$.

Trikotnika POS in PUO sta podobna, zato je $\frac{|PS|}{|PO|} = \frac{|PO|}{|PU|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Torej je $|PS| = |PO| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Potem je $|PT| = 2|PS| = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$.

Trikotnika PTT' in PUO sta podobna, zato je $\frac{|PT'|}{|PT|} = \frac{|PO|}{|PU|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Torej je $|PT'| = |PT| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{1+t^2}$. Ker je $|PT'| = 1 + x$, je $x = |PT'| - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Nadalje je $\frac{|TT'|}{|PT'|} = \frac{|UO|}{|PO|} = t$. Torej je $y = |TT'| = |PT'| \cdot t = \frac{2}{1+t^2} \cdot t = \frac{2t}{1+t^2}$.

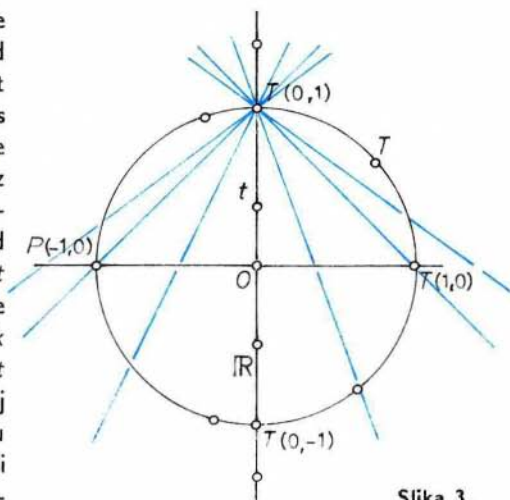
Tako smo dokazali naš izrek: Za poljubno točko $T(x, y) \in k$, različno od $P(-1, 0)$, smo našli tak $t \in \mathbb{R}$, da je $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$. Pri tem je t ordinata presečišča premice skozi P in T z ordinatno osjo, hkrati pa je $t = \frac{y}{x+1}$. (V primeru, ko je $T = P$, seveda takega t -ja ne moremo dobiti, saj gre skozi eno in isto točko $T = P$ nešteto premic.) Obratno pa je točka $T(x, y)$ presečišče krožnice k s premico skozi $P(-1, 0)$ in $U(0, t)$.

Slika 2 je narejena za primer, ko je $x > 0$ in $y > 0$. Bralec lahko sam nariše slike za druge možnosti lege točke $T(x, y)$, ki so seveda nekoliko drugačne; ogleda naj si sliko 3. Naš dokaz pa v bistvu velja za vse primere, le da bi ga bilo treba tu in tam še izostriti. (Tako namesto: $|UO| = t$, $|TT'| = y$ upoštevamo: $|UO| = |t|$, $|TT'| = |y|$, kar velja vedno, tudi kadar je $y < 0$ in s tem $t < 0$.)

Geometrijski pomen parametra t nam pomaga nazorno videti, kako ustrezna točka $T(x, y)$ (v smislu formul (*)) potuje po krožnici k , ko t teče po realnih številih. Dogovorimo se, da poljuben t kar enačimo s točko $U(0, t)$ na ordinatni osi; s tem pa množico realnih števil $\mathbb{R}$ enačimo z ordinatno osjo. Zdaj lahko rečemo za poljuben $t \in \mathbb{R}$: ustrezna točka T (v smislu formul (*)) je presečišče premice skozi P in t s krožnico k (slika 3).

Ob sliki ni težko ugotoviti, da velja naslednje. Ko je $t = 0$, je ustrezna točka T enaka $T(1, 0)$. Ko je $t = 1$, je $T = T(0, 1)$; ko pa je $t = -1$, je $T = T(0, -1)$. (V teh dveh primerih T sovpada s t .) Ko t narašča od 0 do

1, tedaj ustrezna točka T potuje po prvem kvadrantu krožnice k od $T(1, 0)$ do $T(0, 1)$. (Prvi kvadrant krožnice k je pač njen presek s prvim kvadrantom koordinatne ravnine.) Ko t narašča od 1 čez vsako mejo, tedaj T potuje po drugem kvadrantu krožnice k od $T(0, 1)$ proti $P(-1, 0)$. Ko pa t pada od 0 do -1 , tedaj T potuje po četrtem kvadrantu krožnice k od $T(1, 0)$ do $T(0, -1)$. Ko t pada od -1 pod vsako mejo, tedaj T potuje po tretjem kvadrantu krožnice k od $T(0, -1)$ proti $P(-1, 0)$. (Seveda bi do teh spoznanj lahko prav tako prišli na podlagi formul (*).)



Slika 3.

Iz vsega tega lahko povzamemo: Ko t preteče v pozitivnem smislu vso množico realnih števil $\mathbb{R}$, oziroma ordinatno os, tedaj ustrezna točka T preteče vso enotsko krožnico k , z izjemo točke $P(-1, 0)$, v pozitivnem smislu (ki je nasproten smislu urnega kazalca). Pri tem gre T skozi vsako posamezno točko na k samo enkrat, saj je tudi t s točko T natanko določen in zato dobimo vsako posamezno točko na k samo pri enem t -ju. Torej lahko rečemo:

Preslikava, ki vsakemu $t \in \mathbb{R}$ priredi ustrezno točko $T \in k$ (v smislu formul (*)), preslika množico realnih števil $\mathbb{R}$ *bijektivno* (povratno enolično) na enotsko krožnico k brez točke $P(-1, 0)$.

O tej preslikavi smo spregovorili že takoj za našim izrekom. Zdaj pa smo še dodali ugotovitev o njeni bijektivnosti.

Za bralce, ki dobro poznajo kotne funkcije, ne bo pretežka naslednja

NALOGA

Na sliki 2 sta označena kota $\sphericalangle TPT' = \psi$ in $\sphericalangle TOT' = \varphi$. Kakšna je zveza med njima? Parameter t (ordinato točke U) in koordinati x, y točke T izrazi s kotnimi funkcijami kota ψ . Odtod izpelji formuli: $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$.

Janez Rakovec

KAKO DOBIMO VSE TOČKE NA ENOTSKI KROŽNICI

- Rešitev s str. 262

Kot ψ je obodni, kot φ pa središčni kot nad istim lokom na krožnici k . (Glej sliko 2 na str. 260.) Zato je $\varphi = 2\psi$.

Očitno je $\tan \psi = \frac{t}{1}$, se pravi $t = \tan \psi$. Dalje je $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$. Potem je

$$x = \cos 2\psi = \cos^2 \psi - \sin^2 \psi = \cos^2 \psi \left(1 - \frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} \right) = \cos^2 \psi (1 - \tan^2 \psi)$$

$$y = \sin 2\psi = 2 \sin \psi \cos \psi = 2 \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \cos^2 \psi = 2 \tan \psi \cos^2 \psi$$

Ker je $1 + \tan^2 \psi = \frac{1}{\cos^2 \psi}$, je $\cos^2 \psi = \frac{1}{1 + \tan^2 \psi}$.

Upoštevajmo še, da je $\tan \psi = t$, pa dobimo:

$$x = (1 - \tan^2 \psi) \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \psi} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$y = 2 \tan \psi \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \psi} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Janez Rakovec