PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 6
Strani 345–347, 354

Boris Lavrič:

TEŽAVE S TRINAJSTO KROGLO

Ključne besede: matematika, geometrija, krogle v prostoru.

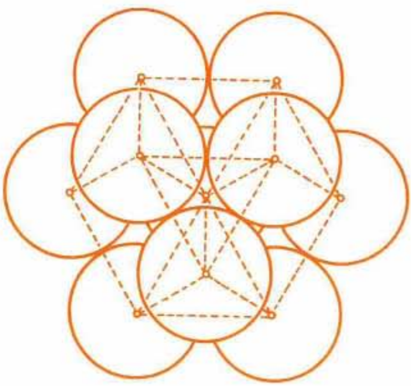
Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/915-Lavric-krogla.pdf

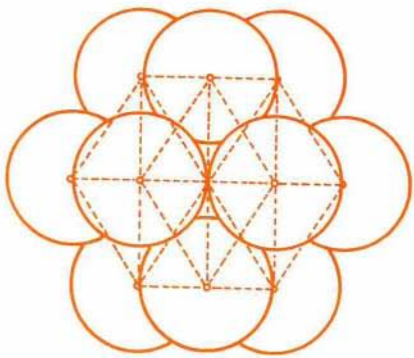
TEŽAVE S TRINAJSTO KROGLO

Ste že kdaj polagali kovance na ravno podlago – tesno drug ob drugega? Tudi če jih niste, boste v hipu znali odgovoriti na naslednje vprašanje: Koliko enakih krogov lahko položimo brez prekrivanja na ravnini k danemu enako velikemu krogu? Največ šest, seveda. Toda, recimo, da vam ne verjamem. Bi mi znali preprosto (ne s kovanci) dokazati, da imate prav?

Pospravimo kovance in namesto njih vzemimo med seboj enake kroglice, na primer frnikole. Najbrž še niste poskušali k eni od njih priložiti v prostoru čimveč drugih – saj tudi ni tako preprosto izvedljivo. Pa vendar bi šlo, denimo, s pomočjo kozarca kroglaste oblike s trikrat večjim premerom od kroglic – kot kaže slika na naslovni strani. Odgovora na podobno vprašanje, kot smo ga postavili za kroge, pa ne moremo kar iz rokava stresti. Problema se lotimo takole:

Okrog osrednje krogle pričvrstimo na isto ravnino še šest krogel tako, da se je vse dotikajo. Na to osnovo postavimo še tri krogle – vsaka naj sede v vdolbino, ki jo tvorijo tri spodnje sosede. Ni težko preveriti (na primer s pomočjo slike), da se vse tri dotikajo osrednje spodnje krogle in tudi med seboj. Seveda bi enako lahko storili še z druge strani (od spodaj) in tako dobili kepo



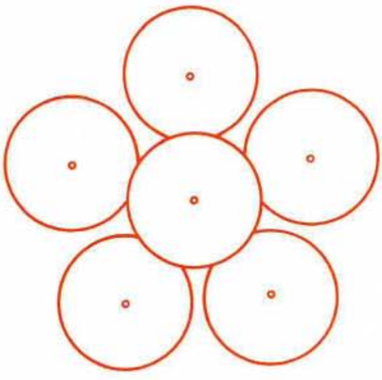


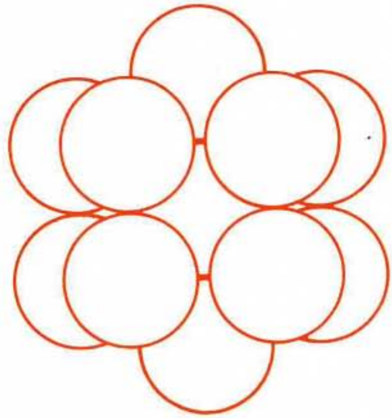
trinajstih enakih krogel, v kateri se jih dvanajst dotika osrednje. S tem pa smo naš problem že rešili, bo morda kdo pomislil. Tako lepo smo postavili dvanajst krogel okrog ene, da jih več zagotovo ne bi mogli. Toda le zakaj? Še nekoliko si razjasnimo problem.

Postavimo pet krogel na ravnino v venček, tako da bodo njihova središča tvorila pravilni petkotnik. Nanje v sredino položimo enako kroglo, nato pa venček enakomerno razmaknimo le toliko, da bo najnižja točka zgornje krogle v isti ravnini, kot so središča ostalih.

Kaj pa, če je bila zgornja krogla že prenizko? Tudi o tem bi se morali prepričati, a naj bo le izziv nejevernemu bralcu. Razlago najdete tudi na strani 361.

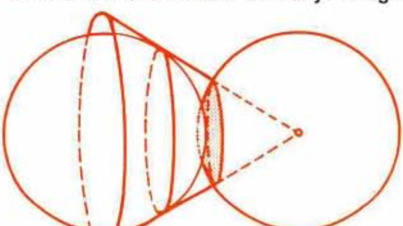
Ko smo to storili, na prvi venec krogel postavimo še enega – prav takega, nato pa še v sredino na vrh kroglico in pod nastalo zgradbo še eno (pol je bo pod osnovno ravnino).

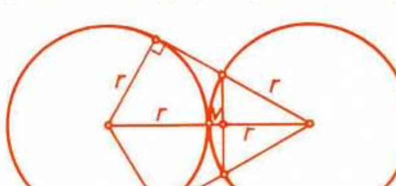




Na sliki vidimo, da se spet dvanajst krogel dotika srednje, vendar je tokrat ostalo še nekaj prostora (vsak venček je malce razmaknjen). Če bi krogle zgornjega venca nekoliko spustili med tiste v spodnjem, bi ob vrhu ostalo še več prostora. Zdaj ni več tako "očitno", da je iskano število res dvanajst. Morda pa je trinajst ali celo več. Pokažimo, da ne more presegati 14.

Ogrnimo katerokoli od priloženih krogel s plaščem stožca, ki se je dotika in ima vrh v središču osrednje krogle. Ta plašč od njenega površja odreže kapi-





co, katere površino bomo zdaj izračunali. Poglejmo na sliko in izrazimo višino *v* kapice s polmerom *r* krogle. Kot ob vrhu osnega preseka stožca meri 60^0, zato velja: $v = r(1 - \sqrt{3}/2)$. Od tod dobimo površino kapice:

$$P = 2\pi r v = (2 - \sqrt{3})\,\pi r^2$$

Kapici, ki ju določata dve različni priloženi krogli, se ne prekrivata, petnajst kapic skupaj pa bi tedaj pokrivalo več kot $15(2 - \sqrt{3})\,\pi r^2 > 4\pi r^2$. To pa ne gre, saj meri površina krogle $4\pi r^2$. Trditev smo s tem že dokazali.

Že davno je bilo znano, da tudi štirinajstih krogel ni mogoče priložiti k enako veliki. Vendar dokaz ni več tako preprost, nekaj znanja o geometriji na površju krogle (sferna geometrija) pa že zadošča za kratek dokaz te trditve. Ostane le še vprašanje, če gre s trinajstimi kroglami.

To pa je že znameniti problem trinajstih krogel. V knjigi *Škljarskij, Čencov, Jaglom*: Geometričeskie ocenki i zadači iz kombinatornoj geometrii (Nauka, 1974) najdemo njegovo zanimivo zgodovino. Razkrijmo vsaj nekaj njenih potez še našemu bralcu.

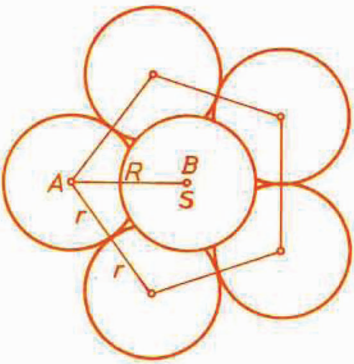
Težavnost problema opisuje že astronom J. Kepler, ki leta 1611 v svojem prispevku o snežinki (De nive sexangula) omenja da je ta problem star vsaj nekaj sto let, a kljub temu še ni rešen. Leta 1694 se je razvnela živahna polemika v zvezi z njim. Znani angleški naravoslovec tistega časa David Gregory je trdil, da lahko k dani krogli dodamo trinajst drugih, slavni Isaac Newton pa je menil, da to ni mogoče. Toda nihče od njiju ni znal z dokazom podpreti svoje domneve. Prva znana rešitev problema je šele iz leta 1874, avtorstvo pa pripada nemškemu matematiku Rudolfu Hoppeju. Ta je potrdil Newtonovo domnevo z dokazom, ki pa je težak in zapleten. Omenjena rešitev je bila dolga leta pozabljena, zato se je v petdesetih letih tega stoletja pojavil nov dokaz (na Nizozemskem), ki je bil kmalu še poenostavljen. Toda celo najenostavnejši znani dokaz je še vedno precej zapleten. Prav gotovo preveč, da bi ga ujeli v Presekov okvir. Zato s tem sklenimo zgodovino znamenitega problema, vztrajnemu bralcu pa postavimo še naslednje drobno vprašanje:

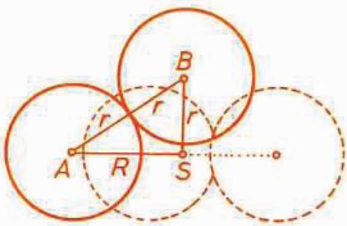
Ali lahko v kocko z robom $a = 3$ zapremo dve kroglici polmera $r = 1$? Odgovor najdete na strani 361.

Boris Lavrič

TEŽAVE S TRINAJSTO KROGLO – Rešitev s strani 345

1. Izračunajmo oddaljenost R središč venčnih krogel s polmeri r od sredine venca. Očitno je R natanko dolžina polmera kroga, ki je očrtan pravilnemu petkotniku s stranico $2r$. Torej velja $R = r\sqrt{2 + 2/\sqrt{5}}$ (poglej na primer na stran 353). Uporabimo še Pitagorov izrek za pravokotni trikotnik, katerega





oglišča so sredina venca in središči ene od venčnih kroglic ter zgornje kroglice (A in B na sliki). Tako dobimo iskano oceno:

$$|BS|^2 = (2r)^2 - R^2 = (2 - 2/\sqrt{5})\,r^2 > r^2$$

2. Odgovor: Ne moremo.

Boris Lavrič