Univerza v Ljubljani

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO

VTO MATEMATIKA IN MEHANIKA

Peter Legiša

# HERMITSKI OPERATORJI IN IZOMETRIČNA STRUKTURA BANACHOVIH PROSTOROV

Doktorska disertacija

Ljubljana 1977

KAZALO

Delo sem pisal pod vodstvom (in z nemajhno pomočjo) profesorja Ivana Vidava. Od vseh drugih v ljubljanskem matematičnem kolektivu, ki so me bodrili in mi pomagali, pa naj napišem le docenta Josipa Globevnika.

## POVZETEK

Obravnavana snov sodi bolj ali manj v izometrično strukturo Banachovih prostorov. Prvi razdelek je posvečen izometričnim reprezentacijam von Neumannovih algebr na Banachovih prostorih. Če obstaja izometrična upodobitev (ohranjajoča identiteto) faktorja tipa I na Banachovem prostoru $X$, ugotovimo, da mora $X$ vsebovati Hilbertove podprostore in imeti (zlasti v nekaterih specialnih primerih) tudi sicer zanimivo strukturo.

V primeru, da imamo na $X$ naraščajoče posplošeno zaporedje hermitskih projektorjev z določenimi lastnostmi, pa pokažemo, da obstaja naravna izometrična reprezentacija von Neumannove algebre tipa I na $X$ in da $X$ nekako razpade na Hilbertove podprostore. To uporabimo pri kompleksnih Banachovih prostorih s hiperortogonalno bazo in poleg že znanih dobimo tudi nove rezultate.

Druga polovica dela je posvečena iskanju zadostnih pogojev za to, da je grupa $\mathfrak{G}$ vseh linearnih izometrij Banachovega prostora $X$ nase Banach-Liejeva grupa v normni topologiji. Najdena pogoja zahtevata, da obstajata dovolj majhni okolici $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ identitete v $\mathfrak{G}$, tako da lahko vsak element iz $\mathfrak{V}$ povežemo z identiteto s potjo po $\mathfrak{U}$, ki je bodisi odvedljiva bodisi ima končno dolžino. Pokažemo tudi, da $\mathfrak{G}$ je Banach-Liejeva grupa, če je $X$ kompleksen in ima hiperortogonalno bazo.


AMS(MOS) klasifikacija (19~~70~~ 85): 22E65, 46B99, 46H15, 46L10, 46L20, 47B05, 47C10, 47D10.
46L30,

# I. IZOMETRIČNE REPREZENTACIJE FAKTORJEV TIPA I NA BANACHOVIH PROSTORIH

Imejmo kompleksen Hilbertov prostor $K$, kompleksen Banachov prostor $X$ in izometrično reprezentacijo algebre $\mathcal{L}(K)$ vseh omejenih linearnih operatorjev na $K$ na prostoru $X$. Privzemimo še, da reprezentacija preslika identiteto v identiteto. Vprašamo se, kaj lahko potem povemo o strukturi prostora $X$.

O omejenih reprezentacijah algebre vseh omejenih operatorjev na Banachovem prostoru $X$ v algebri vseh omejenih operatorjev na Banachovem prostoru $Y$ govori članek E. Berksona in H. Porte [2]. Precej idej najdemo v članku Ivana Vidava The group of isometries and the structure of a finite dimensional normed space [24]. Najprej pa preglejmo nekaj definicij in pomožnih rezultatov.

<u>Definicija</u>. Naj bo $X$ Banachov prostor in $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ konvergentna vrsta v njem. Pravimo, da je ta vrsta <u>brezpogojno konvergentna</u>, če za vsako permutacijo $p\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} x_{p(i)}$ tudi konvergira v $X$.

<u>Definicija</u>. Naj bo spet $X$ Banachov prostor in $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ vrsta v njem. Pravimo, da je ta vrsta <u>šibko brezpogojno konvergentna</u>, če za vsak omejen linearen funkcional $f$ na $X$ ( $f \in X^*$ ) konvergira brezpogojno vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$.

<u>Definicija</u>. Naj bo $X$ linearen topološki prostor in $\{x_a; a \in A\} \subset X$. Z $\mathcal{B}$ označimo družino vseh končnih podmnožic v $A$, delno urejeno z inkluzijo. Pravimo, da vrsta $\sum x_a$ $(a \in A)$ <u>neurejeno konvergira</u>, če konvergira posplošeno zaporedje s členi $y_B = \sum x_b$ $(b \in B)$ $(B \in \mathcal{B})$.

1.1. Izrek. (Bessaga - Pelczynski [3]). Banachov prostor $X$ vsebuje vrsto, ki je šibko brezpogojno konvergentna, pa ni brezpogojno konvergentna, natanko takrat, ko $X$ vsebuje podprostor, izomorfen prostoru $c_0$ .

Potrebovali bomo tudi nekaj rezultatov iz teorije numeričnih zakladov operatorjev. Ustrezne dokaze lahko najdemo v knjižici Bonsalla in Duncana [4].

Naj bo od zdaj naprej $A$ kompleksna Banachova algebra z enoto $1$ , $\|1\| = 1$ , in $A^*$ prostor zveznih linearnih funkcionalov na $A$ .

Definicija. Algebrski numerični zaklad elementa $a \in A$ označimo z $V(a)$ in definiramo z $V(a) = \{f(a); f \in A^*, \|f\| = f(1) = 1\}$ .

1.2. Izrek. Za vsak $a \in A$ je $\max\{\mathrm{Re}\, z; z \in V(a)\} =$
$= \inf\{t^{-1}(\|1 + ta\| - 1); t > 0\}$.

Definicija. Element $h \in A$ je hermitski, če je $V(h) \subset \mathbb{R}$ .
Množico vseh hermitskih elementov algebre $A$ označimo s $H(A)$ .

Izrek. Naj bo $h \in A$ . Naslednje lastnosti so ekvivalentne:

(1) $h \in H(A)$

(2) $\lim_{t \to 0} t^{-1}(\|1 + ith\| - 1) = 0$

(3) $\|\exp(ith)\| = 1$ za vsak realen $t$

Vidimo, da o tem, ali je element $h$ hermitski, odloča le enorazsežni podprostor, napet na $1$ in $h$ .

Izrek.(Vidav). $H(A)$ je realen Banachov prostor in če sta $h, k \in H(A)$, je $i(hk - kh) \in H(A)$ .

1.3. Izrek.(Vidav). Naj bo $h \in H(A)$. Potem je $V(h)$ konveksna ogrinjača spektra elementa $h$ , $V(h) = \mathrm{co}\,\sigma(h)$ .

1.4. <u>Izrek</u>. (Sinclair). Naj bo $h \in H(A)$. Potem je spektralni radij elementa $h$ enak normi.

<u>Posledica</u>. Če je $p \in H(A)$ in $p^2 = p$, $p \neq 0$, je $\|p\| = 1$.

<u>Izrek</u>. $H(A) + iH(A)$ je zaprt podprostor v $A$; $H(A) + iH(A)$ je algebra natanko takrat, ko je za vsak $h \in H(A)$ tudi $h^2 \in H(A)$.

V $H(A) + iH(A)$ uvedimo involucijo takole: $(h + ik)^* = h - ik$ $(h,k \in H(A))$.

1.5. <u>Izrek</u>. (Vidav - Palmer). Če je $H(A) + iH(A)$ algebra, je C*-algebra.

Naj bo zdaj $X$ kompleksen Banachov prostor, $\mathcal{L}(X)$ algebra vseh omejenih linearnih operatorjev na $X$ in $T \in \mathcal{L}(X)$.

<u>Definicija</u>. <u>Prostorski</u> <u>numerični</u> <u>zaklad</u> operatorja $T$ označimo z $V(T)$ in definiramo kot

$$V(T) = \{f(Tx); f \in X^*, x \in X, \|f\| = \|x\| = f(x) = 1\}$$

1.6. <u>Izrek</u>. Zaprta konveksna ogrinjača množice $V(T)$ je algebrski numerični zaklad za $T$ kot element algebre $\mathcal{L}(X)$.

<u>Definicija</u>. Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ je <u>hermitski</u> natanko takrat, ko je $T$ hermitski element algebre $\mathcal{L}(X)$. Množico vseh hermitskih operatorjev na $X$ označimo s $\mathcal{H}(X)$. Operator $S \in \mathcal{L}(X)$ je <u>poševno</u> <u>simetričen</u>, če je $iS \in \mathcal{H}(X)$. Hermitski operator $A \in \mathcal{L}(X)$ je <u>pozitiven</u> natanko takrat, ko je vsaka točka spektra operatorja $A$ nenegativno realno število ( $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$ ).

1.7. <u>Lema</u>. Množica vseh hermitskih operatorjev na $X$ in množica vseh pozitivnih operatorjev na $X$ sta zaprti v šibki operatorski topologiji. Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ je hermitski (pozitiven) natanko takrat, ko njegov prostorski numerični zaklad leži v $\mathbb{R}$ ( $\mathbb{R}^+$ ).

Dokaz. Naj bo $T \in \mathcal{L}(X)$ . Iz 1.6 sledi, da je $T$ hermitski natanko takrat, ko njegov prostorski numerični zaklad leži na realni osi. Če je $\{T_i\}$ posplošeno zaporedje, sestavljeno iz hermitskih operatorjev na $X$ , ter $T_i \xrightarrow[i]{} T$ v šibki operatorski topologiji, v posebnem $f(T_i x) \longrightarrow f(Tx)$ za vse take $f \in X^*$, $x \in X$, da je $\|f\| = \|x\| = f(x) = 1$ . Ker so potem vsi $f(T_i x) \in \mathbb{R}$ , velja to tudi za $T$ in je tako $T$ hermitski.

Pokažimo še, da je operator $A \in \mathcal{L}(X)$ pozitiven natanko takrat, ko njegov prostorski numerični zaklad leži v $\mathbb{R}^+$ . Res, če je $A \in \mathcal{H}(X)$ in $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$, po 1.3 sledi, da je algebrski numerični zaklad operatorja $A$ (ki vsebuje po 1.6 prostorskega) vsebovan v $\mathbb{R}^+$ . Če je narobe prostorski numerični zaklad operatorja $A$ vsebovan v $\mathbb{R}^+$ , velja to tudi po 1.6 za algebrskega, ta pa vsebuje $\sigma(A)$ . Naprej pa gre dokaz kot zgoraj.

Do konca tega razdelka bomo imeli opravka z naslednjo situacijo: $K$ je kompleksen Hilbertov prostor, $X$ kompleksen Banachov prostor in $r: \mathcal{L}(K) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ izometričen homomorfizem algebr, ki preslika identiteto v identiteto. Algebro $r(\mathcal{L}(K))$ lahko na naraven način opremimo z involucijo: $r(A)^* = r(A^*)$ $(A \in \mathcal{L}(K))$. Ker je $\|r(A)^* r(A)\| = \|r(A^*A)\| = \|A^*A\| = \|A\|^2 = \|r(A)\|^2$ , je $r(\mathcal{L}(K))$ $C^*$-podalgebra v $\mathcal{L}(X)$ . Jasno je tudi, da je zaradi izometričnosti preslikave $r$ izpolnjena enakost $r(A)^* = r(A)$ natanko takrat, ko je $r(A)$ hermitski operator na prostoru $X$ , se pravi $r(A) \in \mathcal{H}(X)$ . Tako je $r: \mathcal{L}(K) \to r(\mathcal{L}(K))$ izometrični $*$-izomorfizem.

Eno naših osnovnih orožij bo tale rezultat:

1.8. Lema. Naj bo $\{P_i; i \in I\}$ družina paroma ortogonalnih ekvivalentnih neničelnih projektorjev v $\mathcal{L}(K)$ . Izberimo $i_o \in I$ in naj ekvivalenco med $P_{i_o} = P$ in $P_i$ posreduje $V_i$ : $V_i^* V_i = P$ in $V_i V_i^* = P_i$ . Vzemimo vektor $f$ z normo 1 v prostoru $r(P)X$ in označimo $f_i = r(V_i)f$ $(i \neq i_o)$, $f_{i_o} = f$ . Če je $\{t_i; i \in I\}$ množica kompleksnih števil, tako da $\sum |t_i|^2$ $(i \in I)$ konvergira, konvergira tudi $\sum t_i f_i$ $(i \in I)$.

Označimo $Z_f = \{\sum t_i f_i ; \sum |t_i|^2 < \infty\}$. Potem je $Z_f$ Hilbertov podprostor v $X$ (s tem hočemo reči, da je $Z_f$ Hilbertov prostor v normi, ki jo podeduje od prostora $X$) z bazo $\{f_i ; i \in I\}$. Če sta $f,g \in r(P)X$ linearno neodvisna, je $Z_f \cap Z_g = \{0\}$.

Dokaz. Vemo, da je $P_i V_i P = V_i$ in $V_i^* V_j = 0$ za $i \neq j$ $(i,j \in I)$. Tako je $r(P_i)f_i = r(P_i V_i)f = f_i$. Pa naj bo $\{t_i ; i \in I\}$ taka množica kompleksnih števil, da je $\sum |t_i|^2 = 1$. Potem je seveda le števno mnogo števil $t_i$ različnih od $0$. Če je $J$ končna podmnožica v $I$ in $T_J = \sum t_i V_i$ $(i \in J)$, je $T_J^* T_J = (\sum_{i \in J} |t_i|^2)P$. Od tod zelo lahko vidimo, da $\sum_{i \in I} t_i V_i$ konvergira. Res: če sta $K,L$ končni podmnožici v $I$ in $K \supset L$, je $\| \sum_{i \in K} t_i V_i - \sum_{i \in L} t_i V_i \|^2 =$ $= \| T_{K-L} \|^2 = \| T_{K-L}^* T_{K-L} \| = \sum_{i \in K-L} |t_i|^2$. Označimo $T = \sum t_i V_i$ $(i \in I)$. Očitno je potem $T^*T = (\sum_{i \in I} |t_i|^2)P = P$ in tako $T$ parcialna izometrija. Ker je $r$ izometrična preslikava, $\sum_{i \in I} t_i r(V_i)$ tudi konvergira, in sicer k $r(T)$. Ker je $1 = \|f\| = \|r(P)f\| =$ $= \|r(T^*)r(T)f\| \leqslant \|r(T^*)\| \, \|r(T)f\| = \|T^*\| \, \|r(T)f\| = \|r(T)f\| \leqslant$ $\leqslant \|r(T)\| \, \|f\| = 1$, je $\|r(T)f\| = 1$. No, $r(T)f = \sum t_i r(V_i)f =$ $= \sum t_i f_i$. Tako vrsta $\sum t_i f_i$ res konvergira in norma njene vsote je enaka $1$ $(= \sum_{i \in I} |t_i|^2)$. Očitno je $Z_f =$ $= \{\sum t_i f_i ; \sum |t_i|^2 < \infty\}$ izometrično izomorfen prostoru $\ell^2$ nad množico $I$ in tako Hilbertov prostor z ortonormirano bazo $\{f_i ; i \in I\}$.

Naj bosta $f,g \in r(P)X$ linearno neodvisna. Če je $x \in Z_f \cap Z_g$, lahko zapišemo $x = \sum s_i f_i = \sum t_i g_i$ in od tod $r(P_i)x = s_i f_i = t_i g_i = s_i r(V_i)f = t_i r(V_i)g$. Uporabimo na tej zadnji neenakosti $r(V_i^*)$, pa dobimo, da je $s_i f = t_i g$. Tako je $s_i = t_i = 0$ za vsak $i$ in od tod $x = 0$.

Naj bo zdaj $\{e_i; i \in I\}$ ortonormirana baza prostora $K$ in $P_i \in \mathcal{L}(K)$ definirani s $P_i x = \langle x, e_i \rangle e_i$, kjer je $\langle\, , \rangle$ skalarni produkt v $K$. Če je $J$ končna podmnožica v $I$, označimo še $E_J = \sum P_i \ (i \in J)$.

1.9. Trditev. Naj bo preslikava $r$ taka, da je $r(P_i)$ enorazsežen projektor za vsak $i \in I$ in da $\sum r(P_i)$ neurejeno konvergira k identiteti prostora $X$ v krepki operatorski topologiji. Potem je $X$ Hilbertov prostor in obstaja linearna izometrija $U$ prostora $K$ na prostor $X$, da je $r = U \cdot U^{-1}$. (Z drugimi besedami, $r$ je ekvivalentna identični upodobitvi.)

Dokaz. Uporabimo lemo 1.8 z oznakami vred. Vsi prostori $r(P_i)X$ so enorazsežni. Vzemimo poljuben $x \in X$. Potem je $r(P_i)x = t_i f_i$ $(t_i \in \mathbb{C})$. Od tod je $x = \sum r(P_i)x = \sum t_i f_i \ (i \in I)$. Ker je $Z_f$ poln, je $x \in Z_f$. Tako je res $X = Z_f$ Hilbertov prostor z ortonormirano bazo $\{f_i; i \in I\}$. Predpis $e_i \longmapsto f_i \ (i \in I)$ inducira izometrični izomorfizem $U\colon K \to X$, tako da je $f_i = Ue_i$. Za vsak $i \in I$ je $r(P_i)Ue_j = r(P_i)f_j = \delta_{ij} f_i = \delta_{ij} Ue_i$ in od tod $U^{-1}r(P_i)Ue_j = \delta_{ij} e_i$. Vidimo, da je $U^{-1}r(P_i)U = P_i$ oziroma $r(P_i) = UP_iU^{-1}$. Označimo $e_{i_o} = e$. $V_i$ je bil poljuben operator, ki posreduje ekvivalenco med projektorjema $P$ in $P_i$. Zato lahko mirno privzamemo, da je $V_i e = e_i \ (i \in I, i \neq i_o)$. Ker $V_i$ preslika $(PK)^{\perp}$ v $\{0\}$, je $V_i P_j = 0$ za $j \neq i_o$. Od tod je tudi $r(V_i)r(P_j) = 0$ za $j \neq i$, se pravi $r(V_i)UP_jU^{-1} = 0$ za $j \neq i$. Vemo pa, da je $r(V_i)Ue = r(V_i)f = f_i = Ue_i$ ali $U^{-1}r(V_i)Ue = e_i$. Iz prejšnjega pa sledi, da je tudi $U^{-1}r(V_i)UP_j = 0$ za $j \neq i$. Očitno je tako $U^{-1}r(V_i)U = V_i$ oziroma $r(V_i) = UV_iU^{-1}$.

Vzemimo poljuben operator $A \in \mathcal{L}(K)$. Ker je $P_iV_iP = V_i$ za vsak $i$, je $V_j^* AV_i = PV_j^* AV_iP$. Ker je $P$ enorazsežen projektor, je $P\mathcal{L}(K)P$ enorazsežna algebra, se pravi $V_j^* AV_i = t_{ji}P \ (t_{ji} \in \mathbb{C})$. Tako je tudi $r(V_j^*)r(A)r(V_i) = t_{ji}r(P)$, se pravi $UV_j^*U^{-1}r(A)UV_iU^{-1} = t_{ji}UPU^{-1}$ in $V_j^*(U^{-1}r(A)U)V_i =$ $= t_{ji}P$ . No, $V_j^*AV_ie = V_j^*Ae_i = t_{ji}e$ . Od tod je $P_jAe_i =$ $= V_jV_j^*AV_ie = t_{ji}V_je = t_{ji}e_j$ . Števila $\{t_{ji};i,j \in I\}$ tako natančno določajo operator $A$ . Torej je po zgornjem $U^{-1}r(A)U =$ $= A$ oziroma $r(A) = UAU^{-1}$ . Reprezentacija $r$ je ekvivalentna identični reprezentaciji in $r(\mathcal{L}(K)) = \mathcal{L}(X)$ .

Izpustimo zdaj zahtevo, da so prostori $r(P_i)X$ enorazsežni. Če sta $i,j \in I$ , sta prostora $r(P_i)X$ in $r(P_j)X$ izometrično izomorfna. V dokaz vzemimo, da kot v 1.8 ekvivalenco med $P_{i_o} = P$ in $P_i$ posreduje $V_i$ : $V_i^*V_i = P$ in $V_iV_i^* = P_i$ . Od tod je $r(V_i^*)r(V_i) = r(P)$ in $r(V_i)r(V_i^*) = r(P_i)$ in ni težko videti, da $r(V_i)$ preslika izometrično $r(P)X$ na $r(P_i)X$ .

1.10. <u>Izrek</u>. Naj bo reprezentacija $r$ taka, da končne vsote operatorjev $r(P_i)$ krepko konvergirajo k identičnemu operatorju na $X$ . Naj bo $\{f_c;c \in C\}$ poljubna algebrajska baza prostora $r(P)X$ . Obstaja družina $\{Z_c;c \in C\}$ Hilbertovih podprostorov v $X$, tako da je njihova algebrajska direktna vsota gosta v $X$ , da so ti podprostori invariantni za $r$ in da je na njih $r$ ekvivalentna identični reprezentaciji (se pravi, da so med drugim vsi $Z_c$ izometrično izomorfni prostoru $K$ ).

<u>Dokaz</u>. Spet uporabimo lemo 1.8 in njene oznake. Pokažimo, da podprostori $Z_f$ reducirajo upodobitev $r$ . Naj bo $A \in \mathcal{L}(K)$ . Dovolj je, da vidimo, da je $r(A)f_i \in Z_f$ za vsak $i \in I$ . Še manj, ker je za $i \neq i_o$ $f_i = r(V_i)f$ , je dovolj, da pokažemo, da je $x = r(A)f \in Z_f$ . No, ker je $V_iP = V_i$ in $PV_i^* = V_i^*$ , je $r(V_i^*)x = r(PV_i^*)r(A)r(P)f = r(PV_i^*AP)f$ . Ker je $P$ enorazsežen, je $PV_i^*AP = t_iP$ za neki $t_i \in \mathbb{C}$ , se pravi, da je $r(V_i^*)x =$ $= t_ir(P)f$ . Od tod je $r(P_i)x = r(V_iV_i^*)x = r(V_i)r(V_i^*)x =$ $= t_ir(V_iP)f = t_ir(V_i)f = t_if_i \in Z_f$ . Ker končne vsote operatorjev $r(P_i)$ krepko konvergirajo k identiteti prostora $X$ in je $Z_f$ zaprt, je res $x \in Z_f$ in tako $Z_f$ reducira upodobitev $r$ .

Na $Z_f$ pa deluje reprezentacija $r$ tako kot v 1.6 in je potem tu ekvivalentna identični reprezentaciji.

Naj bo zdaj $\{f_c; c \in C\}$ algebrajska baza za prostor $r(P)X$. Iz 1.6 vemo, da je za $c \neq d$ $Z_{f_c} \cap Z_{f_d} = \{0\}$. Naj bo $x \in X$ poljuben. Če je $\varepsilon > 0$, obstaja končna podmnožica $J \subset I$, da je $\| x - \sum_{i \in J} r(P_i)x \| < \varepsilon$. Ker $r(V_i)$ preslika $r(P)X$ izometrično na $r(P_i)X$, je $\{r(V_i)f_c; c \in C\}$ algebrajska baza za $r(P_i)X$. Tako je $r(P_i)x = \sum_c s_{ic} r(V_i) f_c$ (končna vsota!). Naj bo $x_c = \sum_{i \in J} s_{ic} r(V_i) f_c \in Z_{f_c}$. Potem je $\sum_c x_c = \sum_{i \in J} r(P_i)x$, se pravi $\| x - \sum_c x_c \| < \varepsilon$. Res je $\oplus \sum_c Z_{f_c}$ gosta v $X$.

Zdaj naj bo $r: \mathcal{L}(K) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ poljubna izometrična reprezentacija z lastnostjo $r(I_K) = I_X$. Če je $\{E_q; q \in Q\}$ naraščajoče posplošeno zaporedje projektorjev na $K$, ki krepko konvergira k $I_K$, ni rečeno, da posplošeno zaporedje $\{r(E_q); q \in Q\}$ konvergira k $I_X$ v krepki operatorski topologiji.

1.11. Primer. Označimo z $\mathcal{LC}(K)$ algebro vseh kompaktnih operatorjev na kompleksnem Hilbertovem prostoru $K$ in naj bo $\mathcal{C}(K) = \mathcal{L}(K)/\mathcal{LC}(K)$ Calkinova algebra ter $q: \mathcal{L}(K) \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ kvocientni homomorfizem. Ker je $\mathcal{C}(K)$ C*-algebra, obstaja Hilbertov prostor $K'$ in *-monomorfizem $r': \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathcal{L}(K')$, tako da je $r'(I) = I_{K'}$ ( $r'$ je recimo univerzalna reprezentacija). Naj bo $X$ Hilbertova vsota prostorov $K$ in $K'$ in reprezentacija $r$ direktna vsota identične reprezentacije na $K$ ter reprezentacije $r'q$. Očitno je $r$ *-monomorfizem in $r(I_K) = I_X$. Ker je operator $A \in \mathcal{L}(K)$ pozitiven natanko takrat, ko obstaja $B \in \mathcal{L}(K)$, da je $A = B^*B$, $r$ prevede pozitivne elemente v pozitivne in tako ohranja urejenost med hermitskimi operatorji. Naj bo $C \in \mathcal{L}(K)$. Iz enačbe $0 \leqslant C^*C \leqslant \|C\|^2 I$ dobimo, da je $0 \leqslant r(C)^* r(C) \leqslant \|C\|^2 I$. Od tod je $\|r(C)\| \leqslant \|C\|$. Ker pa $r$ vsebuje identično reprezentacijo algebre $\mathcal{L}(K)$, je $\|r(C)\| = \|C\|$ in tako $r$ izometrična.

Naj bo $\{E_q; q \in Q\}$ poljubno posplošeno zaporedje končno razsežnih projektorjev v $\mathcal{L}(K)$, ki krepko konvergira k $I_K$. Potem posplošeno zaporedje $\{r(E_q); q \in Q\}$ krepko konvergira k $P_K$, kjer je $P_K$ projektor na $K$ vzdolž $K'$. Od tod sledi, da algebra $r(\mathcal{L}(K))$ ni zaprta v krepki operatorski topologiji prostora $\mathcal{L}(X)$. Če bi namreč bila, bi bil $P_K \in r(\mathcal{L}(K))$, se pravi $P_K = r(E)$, kjer je $E$ projektor iz $\mathcal{L}(K)$. Ker $r^{-1}$ tudi ohranja urejenost in je $P_K = r(E) \geqslant r(E_q)$ za vsak $q \in Q$, bi bil $E \geqslant E_q$ za vsak $q \in Q$. Potem pa bi bil $E = I_K$ in od tod $r(E) = I_X \neq P_K$ - protislovje.

1.12. Vrnimo se spet k splošni situaciji. Naj bo spet $K$ Hilbertov prostor, $X$ Banachov prostor (oba nad $\mathbb{C}$) in $r: \mathcal{L}(K) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ izometrična reprezentacija, $r(I_K) = I_X$. Naj bo $\{P_i; i \in I\}$ sistem končno razsežnih paroma pravokotnih projektorjev v $\mathcal{L}(K)$, tako da je $I_K = \sum P_i$ $(i \in I)$ v krepki operatorski topologiji. $\mathcal{R}$ naj bo družina vseh končnih podmnožic v $I$ in za $R \in \mathcal{R}$ naj bo $E_R = \sum P_i$ $(i \in R)$. Naj bo $Y$ zaprtje linearnega prostora $Y' = \bigcup \{r(E_R)X; R \in \mathcal{R}\}$ in $Z = \bigcap \{\ker r(E_R); R \in \mathcal{R}\}$. Lahko je videti, da je $Y \cap Z = \{0\}$. Pokažimo, da $Y$ in $Z$ reducirata upodobitev $r$ in da sta neodvisna od izbire sistema $\{P_i; i \in I\}$.

Naj bo $L$ končno razsežen podprostor v $K$ in $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za $L$. Izberimo $\varepsilon > 0$. Obstajajo podmnožice $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{R}$, da je $\|E_S e_i - e_i\| < \varepsilon$, če je $S \in \mathcal{R}$ in $S \supset R_i$. Označimo $R = R_1 \cup \ldots \cup R_n$. Naj bodo $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ in $S \in \mathcal{R}$, $S \supset R$. Vidimo, da je $\|E_S(\sum_{i=1}^{m} t_i e_i) - \sum_{i=1}^{m} t_i e_i\| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{m} |t_i| \leqslant$ $\leqslant \varepsilon \sqrt{n} (\sum_{i=1}^{m} |t_i|^2)^{1/2}$. Tako je $\|E_S x - x\| \leqslant \sqrt{n}\varepsilon \|x\|$ za vsak $x \in L$. Naj bo zdaj $A$ izrojen operator iz $\mathcal{L}(K)$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja po zgornjem $R \in \mathcal{R}$, da za $S \supset R$ velja $\|E_S Ax - Ax\| \leqslant$ $\leqslant C\varepsilon \|Ax\| \leqslant C\varepsilon \|A\| \|x\|$ $(x \in X)$. (Tu je $C$ odvisen le od dimenzije prostora $AX$.) Tako je $\|E_S A - A\| \leqslant C\varepsilon \|A\|$. Dokazali smo, da je $\lim_S \|E_S A - A\| = 0$ in od tod seveda $\|r(E_S) r(A) - r(A)\| \xrightarrow[S]{} 0$.

Če je torej $Q$ poljuben končno razsežen projektor na $K$, $\| r(E_S)r(Q) - r(Q)\| \xrightarrow[S]{} 0$ in od tod je $r(Q)x = \lim_S r(E_S)r(Q)x$ $(x \in X)$, se pravi, da je $r(Q)X \subset Y$. Če je tako $\{Q_j; j \in J\}$ kak drug sistem končno razsežnih paroma pravokotnih projektorjev na $K$, je $\bigcup\{r(Q_j)X; j \in J\} \subset Y$. V primeru, da končne vsote teh projektorjev konverirajo k $I_X$ v krepki operatorski topologiji, pa lahko argument obrnemo in ugotovimo, da je $Y' \subset \overline{\bigcup\{r(Q_j)X; j \in J\}}$. Tako vidimo, da je $Y$ res neodvisen od izbire sistema $\{P_i : i \in I\}$.

Naj bo $A \in \mathcal{L}(K)$. Za vsak $R \in \mathcal{R}$ je $AE_R$ izrojen operator in po prejšnjem $r(E_S)r(AE_R) \xrightarrow[S]{} r(AE_R)$ po normi. Vidimo, da $r(A)$ preslika prostor $r(E_R)X$ v $Y$. Ker je $r(A)$ zvezen in $\bigcup_R \{r(E_R)X; R \in \mathcal{R}\}$ gosta v $Y$, $r(A)$ res ohranja $Y$.

Vzemimo, da je $z \in Z$ in naj bo $Q$ spet končno razsežen projektor v $\mathcal{L}(K)$. Ker $\| E_S Q - Q\| \xrightarrow[S]{} 0$, tudi $\| QE_S - Q\| = \| (E_S Q - Q)^*\| \xrightarrow[S]{} 0$ in seveda $\| r(Q)r(E_S) - r(Q)\| \xrightarrow[S]{} 0$. Tako je $r(Q)z = \lim_S r(Q)r(E_S)z = 0$. Kot prej vidimo, da je $Z$ neodvisen od izbire sistema $\{P_i; i \in I\}$. Če je $A \in \mathcal{L}(K)$, je $A^*E_R$ izrojen operator. Tako $\| E_S A^* E_R - A^* E_R\| \xrightarrow[S]{} 0$ in od tod $\| E_R A E_S - E_R A\| \xrightarrow[S]{} 0$. Se pravi, da je $E_R Az = \lim_S E_R A E_S z = 0$. Res je torej $Z$ invarianten za $r$. Če je $A$ izrojen operator v $\mathcal{L}(K)$, obstaja končno razsežen projektor $P$ v $\mathcal{L}(K)$, da je $PA = A$. Če je $z \in Z$, je $r(A)z \in Z$ in tako $r(A)z = r(PA)z = r(P)r(A)z = 0$ po zgornjem. Skratka, $r(A)|Z = 0$ za vsak izrojen operator $A$.

Naj bo $F_R = r(E_R)|Y$. Če je $y \in Y'$, je očitno $\lim_R r(E_R)y = y$. Ker je $\| r(E_R)\| = 1$ za vsak $R$, je $\lim_R r(E_R)y = y$ tudi za vsak $y \in Y = \overline{Y'}$. Torej operatorji $F_R$ na $Y$ krepko konvergirajo k identiteti. Za reprezentacijo $r_1 = r|Y$ lahko tako uporabimo izrek 1.10 . Opazimo še tole: če je $A \in \mathcal{L}(K)$ in $AE_R = 0$ za vsak $R \in \mathcal{R}$ , je $A = 0$ . Operator $r(A)$ je tako povsem določen z $r(A)|Y$ .

1.13. Denimo, da je $Z \neq 0$ . Oglejmo si redukcijo reprezentacije $r$ na $Z$ in jo označimo z $r'$. Za vsak izrojen operator $A \in \mathcal{L}(K)$ je po prejšnjem $r'(A) = 0$ . Ker je vsak kompakten operator na $K$ limita izrojenih ter $r'$ omejena, je $r'(\mathcal{LL}(K)) = 0$ . Očitno je $r'(I_K) = I_Z$ . Jedro reprezentacije $r'$ je pravi dvostranski ideal v $\mathcal{L}(K)$, ki vsebuje $\mathcal{LL}(K)$ . Zaradi lažje obravnave privzemimo, da je K separabilen. Potem je po [8] edini tak ideal kar $\mathcal{LL}(K)$ . V tem primeru obstaja homomorfizem $r'': \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathcal{L}(Z)$ (tu je $\mathcal{C}(K)$ Calkinova algebra), da je $r' = r''k$ , kjer je $k: \mathcal{L}(K) \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ kvocientni homomorfizem. Pri tem je $r''$ *-izomorfizem na C*-algebro $r'(\mathcal{L}(K))$ in tako tudi izometričen.

Prav lahko je videti, da $\mathcal{C}(K)$ vsebuje kontinuum paroma pravokotnih projektorjev, ekvivalentnih identiteti. Res: naj bo $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektivna preslikava. Vzemimo poljuben $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ in mu priredimo običajno zaporedje desetiških ulomkov $r_1, r_2, \dots$, ki konvergirajo k $x$ . Označimo $M_x = \{f(r_1), f(r_2), \dots\} \subset \mathbb{N}$ . Naj bo $\{P_i; i=1,2,\dots\}$ sistem paroma pravokotnih enorazsežnih projektorjev na $K$ in $I = \sum_{i=1}^{\infty} P_i$ $(i \in \mathbb{N})$ v krepki operatorski topologiji. Naj bo $P_x = \sum P_i$ $(i \in M_x)$ . Seveda je $P_x$ neskončno razsežen projektor na $K$ in tako ekvivalenten identiteti. Od tod je $k(P_x)$ tudi ekvivalenten identiteti algebre $\mathcal{C}(K)$ . Če je $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ in $y \neq x$ , je $P_x P_y$ očitno končno razsežen projektor. Tako je $k(P_x)k(P_y) = 0$ , se pravi, da sta $k(P_x)$ in $k(P_y)$ ortogonalna.

Od tu pa sledi po 1.8, da $Z$ vsebuje Hilbertov podprostor dimenzije kontinuum.

Pripomnimo še na tem mestu, da nam lema 1.8 pomaga lahko tudi pri raziskavi izometričnih reprezentacij faktorjev tipa II in III na Banachovem prostoru $X$ . (O tipih von Neumannovih algebr se lahko poučimo v Schwartzu [23]). Tako lahko v primeru faktorja tipa II zmeraj dobimo v njem poljubno število paroma pravokotnih ekvivalentnih neničelnih projektorjev in tako v $X$ Hilbertove podprostore s poljubno končno dimenzijo.

1.14. Vrnimo se spet k situaciji v 1.12 . Vprašamo se lahko, kdaj je $Y \oplus Z = X$ . Zadosten pogoj za to je, da $X$ ne vsebuje nobenega podprostora, izomorfnega prostoru $c_0$ . Res: vzemimo poljuben $x \in X$ , označimo $x_i = r(P_i)x$ in si oglejmo vrsto $\sum x_i$ $(i \in I)$. Če ta vrsta ne konvergira neurejeno, trdimo, da obstaja vrsta $\sum x_{i_n}$ $(n \in \mathbb{N})$, ki tudi ne konvergira. Obstaja namreč tako pozitivno število $\varepsilon$ , da za vsak $S_0 \in \mathcal{R}$ lahko najdemo tak $S_1 \in \mathcal{R}$ , da $S_1 \supset S_0$ in da je $\|\sum_{i \in S_1} x_i - \sum_{i \in S_0} x_i\| \geq \varepsilon$ . Potem lahko dobimo tak $S_2 \in \mathcal{R}$ , da $S_2 \supset S_1$ in da je $\|\sum_{i \in S_2 - S_1} x_i\| \geq \varepsilon$ . Vrsta $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k \in S_{\ell+1} - S_\ell} x_k$ očitno ne konvergira.

Vzemimo zdaj poljuben $f \in X^*$ . Če $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{i_n})$ ne bi absolutno konvergirala, bi za vsako pozitivno število $M$ lahko našli tak $R \in \mathcal{R}$ , da bi bila $|\sum_{i \in R} f(x_i)| \geq M$ . Ker pa je $|\sum_{i \in R} f(x_i)| = |f(r(\sum_{i \in R} P_i)x)| \leq \|f\|\|x\|$ $(R \in \mathcal{R})$ , vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{i_n})$ absolutno konvergira. Torej je $\sum_{n=1}^{\infty} x_{i_n}$ šibko brezpogojno konvergentna, in če $X$ ne vsebuje nobenega podprostora, izomorfnega $c_0$ , po 1.4 vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_{i_n}$ brezpogojno konvergira - protislovje.

Naj torej $\sum r(P_i)x$ $(i \in I)$ neurejeno konvergira. Njeno limito označimo s $Px$ . Očitno je $Px \in Y$ . Kot posledica izreka o enakomerni omejenosti je $P$ omejen linearen operator. Po lemi 1.7 je $P$ hermitski operator na $X$ . Ker je za vsak $R \in \mathcal{R}$ $\sum r(P_i)$ $(i \in R)$ projektor z normo $1$ , $(\sum_{i \in R} r(P_i))^2$ $(R \in \mathcal{R})$ konvergira k $P^2$ v krepki operatorski topologiji. Tako je res $P^2 = P$ . Videli smo, da je $PX \subset Y$ . Ker je $r(P_i)P = r(P_i)$

oziroma $r(P_i)(I - P) = 0$ za vsak $i$, je $(I - P)X \subset Z$.
Od tod je $PX = Y$ in $(I - P)X = Z$ ter $X = Y \oplus Z$.

1.15. Ostajamo pri situaciji iz 1.12 . Privzemimo zdaj, da je $X$ separabilen . Potem mora biti tudi $K$ separabilen. V nasprotnem primeru bi namreč $X$ po 1.8 vseboval neseparabilen Hilbertov podprostor. Prav tako vidimo iz 1.13, da mora biti v tem primeru $Z = \{0\}$. Velja pa še več: $X = Y$, kar nam pove lema 4.1 iz [2]. V našem primeru je dokaz nekoliko razumljivejši kot v referenci. Oglejmo si maksimalno komutativno C*-podalgebro v $\mathcal{L}(K)$, ki vsebuje vse projektorje $P_i$, in jo označimo z $\mathcal{A}$. Znano je ([20,str.16]), da je spekter $S$ te algebre Stonov prostor (zaprtje vsake odprte množice v $S$ je odprto). Oglejmo si zvezno linearno preslikavo $T:\mathcal{A} \longrightarrow X$, definirano s $T(A) = r(A)x$ $(x \in X)$. Zdaj uporabimo tale Grothendieckov rezultat ([16, str.168, korolar 1]): Naj bo $F$ Hausdorffov lokalno konveksen poln separabilen prostor in $K$ Stonov prostor. Vsaka zvezna linearna presikava iz $C(K)$ v $F$ je šibko kompaktna, se pravi, da preslika enotno kroglo prostora $C(K)$ v šibko relativno kompaktno množico.

Ker je množica $I$ števna, lahko privzamemo, da je $I = \mathbb{N}$. Naj bo $E_n = \sum r(P_i)$ $(i \leqslant n)$. Ker je algebra $\mathcal{A}$ izometrično izomorfna algebri $C(S)$, ima zaporedje s členi $T(\sum_{i \leqslant n} P_i) = E_n x$ vsaj eno stekališče $y$ v šibki topologiji. Za vsako naravno število $m$ naj bo $A_m = \{E_n x; n \geqslant m\}$ in $B_m$ zaprtje konveksne ogrinjače množice $A_m$ v normni topologiji. Potem je $B_m$ zaprta tudi v šibki topologiji. Točka $y$ leži v $B_m$ in jo lahko poljubno dobro aproksimiramo s konveksnimi kombinacijami elementov iz $A_m$. Naj bo $h$ poljubno pozitivno število. Obstajajo pozitivna števila $t_1, \ldots, t_k$ z vsoto 1 in naravna števila $n(1) \leqslant n(2) \leqslant \ldots \leqslant n(k)$, vsa večja ali enaka $m$, da je $\| \sum t_i E_{n(i)} x - y \| < h$. Vsekakor je $E_m( \sum t_i E_{n(i)} x - y) =$

$= (\sum t_i)E_m x - E_m y = E_m x - E_m y$ . Ker je $\|E_m\| = 1$ , je $\|E_m x - E_m y\| < h$ . No, $h$ je bil poljubno pozitivno število. Tako je $E_m x = E_m y$ za vsako naravno število $m$ . Vrnimo se nazaj k zgornji aproksimaciji in naj bo $r \geq n(k)$ . Potem je $E_r(\sum t_i E_{n(i)} x - y) = \sum t_i E_{n(i)} x - E_r y$ . Ker je $\|E_r\| = 1$ , je $\|E_r y - y\| < 2h$ . Torej je $\lim_{r\to\infty} E_r y = \lim_{r\to\infty} E_r x = y$ . Zaporedje $\{E_n\}$ tako konvergira v krepki operatorski topologiji. Limitni operator je zvezen in ga označimo s $P$ . Ker je $\|E_n\| = 1$ za vsak $n$ , $E_n^2 = E_n$ krepko konvergira k $P^2$ . Tako je $P^2 = P$ . Seveda je $E_n P = E_n$ . Če je $Px = 0$ , je $E_n x = 0$ za vsak $n$ . Tako je $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker E_n = Z = \{0\}$ . Od tod je $P = I_X$ in $X = Y$ .

## II. W*-ALGEBRE NA BANACHOVIH PROSTORIH

V tem razdelku bomo na problem izometričnih reprezentacij faktorjev tipa I in sploh von Neumannovih algebr na Banachovih prostorih pogledali malo drugače. Naj bo $\mathcal{H}(X)$ prostor vseh hermitskih operatorjev na kompleksnem Banachovem prostoru $X$. Če je $\mathcal{H}(X) + i\,\mathcal{H}(X)$ algebra, je po Vidav-Palmerjevem izreku (1.5) C*-algebra. Vprašamo se lahko, kdaj je ta C*-algebra tudi W*-algebra, se pravi, da je dual nekega Banachovega prostora. V literaturi najdemo o tem več člankov (ki se precej prekrivajo). Omenimo le [1] in [22] . Iz zadnjega članka poberemo

Izrek. Naj bo $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(X) + i\,\mathcal{H}(X)$ in $\mathcal{A}$ C*-algebra. Če je zaprtje $\mathcal{B}$ enotne krogle algebre $\mathcal{A}$ v šibki operatorski topologiji šibko operatorsko kompaktna množica, je $\bigcup\{k\mathcal{B}; k=1,2..\}$ W*-algebra.

Pogoji tega izreka niso najbolj simpatični. Še najbolj uporabna je tale

Posledica. Če je $X$ refleksiven in $\mathcal{H}(X) + i\,\mathcal{H}(X)$ algebra, je W*-algebra.

Namreč, $X$ je refleksiven natanko takrat, ko je enotna krogla v $\mathcal{L}(X)$ kompaktna v šibki operatorski topologiji.

V tem delu bomo pokazali, da obstaja razred Banachovih prostorov $X$ , ki niso nujno refleksivni, pa je pri njih $\mathcal{H}(X) + i\,\mathcal{H}(X)$ W*-algebra. Najprej pa si oglejmo primer prostora, pri katerem $\mathcal{H}(X) + i\,\mathcal{H}(X)$ je C*-algebra, pa ni W*-algebra.

Trditev. Naj bo $S$ kompakten Hausdorffov prostor in $C(S)$ prostor vseh zveznih kompleksnih funkcij na $S$ , opremljen z enakomerno normo. Operator $T \in \mathcal{L}(C(S))$ je hermitski natanko takrat, ko obstaja $h \in C(S)$ , $\overline{h} = h$ , tako da je $Tf = hf$ za vsak $f \in C(S)$ .

Če torej označimo $C(S) = X$ , dobimo preslikavo iz $C(S)$ na $\mathcal{H}(X) + i\,\mathcal{H}(X)$ , ki vsaki funkciji priredi ustrezni operator množenja. Še več: to je očitno izometrični *-izomorfizem C*-algebre $C(S)$ na C*-algebro $\mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X)$ .

Dokaz trditve same lahko najdemo v Bonsallu in Duncanu [5, str.91]. Prav nič težko pa tudi ni to pokazati s pomočjo klasične Banach-Stonove karakterizacije izometrij prostora $C(S)$ nase ([11, str.442]).

Posledica. Če je $X = C[-1,1]$ , $\mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X)$ je C*-algebra, pa ni W*-algebra.

Dokaz. Videli smo, da je $\mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X) = C[-1,1]$. Definirajmo za vsako naravno število $n$ funkcijo $f_n \in C[-1,1]$ takole: $f_n(t) = (1 - t)^n$ za $0 < t \leq 1$ in $f_n(t) = 0$ sicer. Zaporedje $\{f_n\}$ je naraščajoče in navzgor omejeno, pa nima supremuma v $C[-1,1]$ . Zato $C[-1,1]$ ni W*-algebra. (O lastnostih W*-algebr bomo podrobneje govorili kasneje. Če je $C(S)$ W*-algebra, je znano, da je $S$ Stonov prostor, se pravi, da je zaprtje vsake odprte množice v $S$ odprto.)

Po tem hitrem pregledu položaja sledi nekaj materiala iz teorije W*-algebr. Privzeli bomo, da poznamo osnove teorije von Neumannovih algebr na Hilbertovih prostorih. Ustrezni referenci sta Dixmier [9] in Schwartz [23]. Sicer pa se bomo v glavnem držali Sakaia [20].

Definicija. C*-algebra $A$ je W*-algebra, če je izometrično izomorfna dualu nekega Banachovega prostora $A_*$ , se pravi $A = A_*^*$ .

Izrek. C*-algebra $A$ je W*-algebra natanko takrat, ko obstaja Hilbertov prostor $H$ in *-izomorfizem algebre $A$ na neko von Neumannovo algebro na $H$ , to je *-podalgebro v $\mathcal{L}(H)$ , zaprto v šibki operatorski topologiji.

Izkaže se, da je prostor $A_*$ (do izometričnega izomorfizma) enolično določen. Šibko *-topologijo na $A$ (topologijo $\sigma(A,A_*)$) imenujemo kratko šibka topologija na $A$ ali $\sigma$-topologija . (Če je $A$ že šibko operatorsko zaprta *-podalgebra v $\mathcal{L}(H)$ , kjer je $H$ Hilbertov prostor, se na enotni krogli algebre $A$ $\sigma$-topologija in šibka operatorska topologija ujemata.) Množica sebiadjungiranih elementov v $A$ in množica pozitivnih elementov v $A$ sta zaprti v $\sigma$-topologiji.

Vsako naraščajoče navzgor omejeno posplošeno zaporedje sebiadjungiranih elementov v $A$ ima supremum, ki je obenem limita tega zaporedja v $\sigma$-topologiji. Za pozitiven linearen funkcional $f$ na $A$ pravimo, da je <u>normalen</u>, če za vsako naraščajoče omejeno posplošeno zaporedje $\{x_i;i\in I\}$ pozitivnih elementov v $A$ velja $f(\sup_{i\in I} x_i) = \sup_{i\in I} f(x_i)$. Znano je, da je pozitiven linearen funkcional na $A$ normalen natanko takrat, ko je $\sigma$-zvezen. Družina $T$ normalnih pozitivnih funkcionalov na $A$ je totalna na $A$, se pravi, da iz $a\in A$ ter $f(a) = 0$ za vsak $f\in T$ sledi $a = 0$. Zaprti linearni podprostor v $A^*$, ki ga generira množica $T$, je ravno $A_*$ (pravzaprav slika prostora $A_*$ pri kanonični vložitvi $A_* \longrightarrow A_*^{**} = A^*$ ).

Zelo važna bo za nas Kadisonova karakterizacija W*-algebr[17]:

2.1. <u>Izrek</u>. Naj bo $B$ C*-algebra, v kateri ima vsako naraščajoče navzgor omejeno posplošeno zaporedje sebiadjungiranih elementov supremum. Obstaja naj še družina $\{f_j;j\in J\}$ pozitivnih linearnih funkcionalov na $B$, ki je totalna na $B$ in njeni elementi ohranjajo supremume naraščajočih omejenih posplošenih zaporedij sebiadjungiranih elementov. Potem je $B$ W*-algebra.

Med prostori, s katerimi se bomo ukvarjali, so tudi prostori s <u>hiperortogonalno bazo</u>. Precizirajmo: zaporedje $\{x_n;n\in N\}$ elementov Banachovega prostora $X$ je <u>hiperortogonalna baza</u> prostora $X$, če lahko vsak element v $X$ zapišemo na en in en sam način kot konvergentno vrsto $\sum a_n x_n$ $(n\in N)$ ( $a_n$ skalarji) ter če iz $y = \sum b_n x_n$ $(n\in N)$ ter $|b_n| = |a_n|$ za vsak $n$ sledi $\|y\| = \|x\|$. Lahko je preveriti, da je operator $E_n$, ki vsakemu $x = \sum a_n x_n$ priredi vektor $a_n x_n$, enorazsežen hermitski projektor. Prostor $X$ ima tako kar precej hermitskih operatorjev. Fleming in Jamison sta v [12] in [13] dokazala, da kompleksen

Banachov prostor $X$ s hiperortogonalno bazo nekako razpade na Hilbertove podprostore in da je $\mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X)$ algebra. Karakterizirala sta tudi izometrije prostora $X$. Pri tem so jima bili v pomoč ustrezni rezultati za končno razsežne prostore s hiperortogonalno bazo, ki so jih neodvisno objavili Schneider in Turner [21] ter Vidav [24]. Pozneje sta Kalton in Wood [18] prišla do neke posplošitve z drugimi metodami. Tu si bomo ogledali spet drugačno posplošitev in pri tem dokazali še nekaj novega, namreč, da je v primeru, ko ima $X$ hiperortogonalno bazo, $\mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X)$ tudi W*-algebra. Idejo za to mi je dal profesor Ivan Vidav: najprej pokažemo, da je $\mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X)$ W*-algebra in od tod nadaljujemo študij lastnosti prostora $X$.

2.2. <u>Izrek</u>. Naj bo $X$ kompleksen Banachov prostor in $\{P_i; i \in I\}$ naraščajoče posplošeno zaporedje hermitskih projektorjev, ki krepko konvergira k identiteti prostora $X$. Za vsak $i \in I$ naj bo $\mathcal{H}(P_iX) + i\mathcal{H}(P_iX)$ končno razsežna algebra. Označimo še $\mathcal{A} = \mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X)$. Potem veljajo naslednje stvari:

a) Naj bo $\{A(b); b \in B\}$ naraščajoče navzgor omejeno posplošeno zaporedje pozitivnih elementov v $\mathcal{A}$. Potem ima to zaporedje supremum v algebri $\mathcal{A}$ in ta supremum je obenem limita posplošenega zaporedja $\{A(b)\}$ v krepki operatorski topologiji. Naj bo $\Pi(X) = \{(x,f) \in X \times X^*; \|x\| = \|f\| = f(x) = 1\}$. Za vsak $a = (x,f) \in \Pi(X)$ naj bo $g_a \in \mathcal{L}(X)^*$ definiran z $g_a(A) = f(Ax)$. Naj bo $\mathcal{F} = \{g_a|\mathcal{A}; a \in \Pi(X)\}$ ter $\mathcal{E}$ linearna lupina množice $\mathcal{F}$ (kot podmnožice v $\mathcal{A}^*$). Vsi elementi v $\mathcal{F}$ so normalni pozitivni funkcionali na algebri $\mathcal{A}$ in sestavljajo totalno družino na $\mathcal{A}$. Tako je $\mathcal{A}$ W*-algebra. Na enotni krogli v $\mathcal{A}$ se $\sigma$-topologija in šibka topologija, ki jo inducira množica $\mathcal{F}$, ujemata. Naj bo $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{A}^*$ zaprti podprostor, ki ga generirajo vsi normalni pozitivni funkcionali na $\mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{E}$ gost v $\mathcal{A}_*$ v normni topologiji.

b) Obstaja družina $\{G_z; z \in Z\}$ paroma pravokotnih centralnih projektorjev v $\mathcal{A}$, tako da je $G_z\mathcal{A}G_z$ faktor tipa I za vsak $z$ in da je $\mathcal{A}$ ($\ell^\infty$-) direktna vsota idealov $G_z\mathcal{A}G_z$.

c) Če sta $S, T \in G_z\mathcal{A}G_z$ poljubna minimalna projektorja, sta prostora $SX$ in $TX$ izometrično izomorfna. Dimenzijo vektorskega prostora $SX$ označimo z $n_z$. Obstaja družina $\{Z_c; c \in C\}$ Hilbertovih podprostorov v $G_zX$, tako da je $Z_c \cap Z_d = \{0\}$ za $c \neq d$, $\mathcal{L}(Z_c) = \{G_zAG_z | Z_c; A \in \mathcal{A}\}$, moč množice $C$ je enaka $n_z$ in algebrajska direktna vsota vseh podprostorov $Z_c$ $(c \in C)$ je gosta v $G_zX$.

d) Naj bo $V: X \to X$ surjektivna izometrija. Potem $V$ ohranja ali le zamenja podprostore $G_zX$. Če $V$ ohranja podprostor $G_zX$, lahko zapišemo $V|G_zX = UW$, kjer je $U$ unitaren element v $G_z\mathcal{A}G_z|G_zX$, $W$ pa komutira z vsakim elementom v $G_z\mathcal{A}G_z|G_zX$. Če je $Q$ poljuben minimalen projektor v $G_z\mathcal{A}G_z$, je delovanje izometrije $W$ na $G_zX$ določeno z delovanjem operatorja $W$ na $QX$.

<u>Dokaz</u>. Prvi korak: $\mathcal{A}$ je algebra.

Naj bo operator $A \in P_i\mathcal{A}P_i$. Potem $A$ preslika podprostor $P_iX$ vase. Tudi $\exp(itA) = I + itA + (1/2)(itA)^2 + \ldots =$ $= P_i\exp(itA)P_i + I - P_i$ preslika podprostor $P_iX$ vase. Torej je $\exp(itA)|P_iX$ izometrija prostora $P_iX$ nase za vsak $t \in \mathbb{R}$. Ker pa je $\exp(itA)|P_iX = \exp(it(A|P_iX))$, je $A|P_iX$ hermitski operator na $P_iX$. Preslikava $B \longmapsto B|P_iX$ očitno preslika $P_i\mathcal{A}P_i$ *-izomorfno v C*-algebro $\mathcal{H}(P_iX) + i\mathcal{H}(P_iX)$.

Naj bo zdaj $A \in \mathcal{H}(X)$. Vzemimo poljuben $t \in \mathbb{R}$ in poljuben $x \in X$ in pokažimo, da je $\|\exp(itA^2)x\| = \|x\|$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja indeks $i_0 \in I$, da je $\|P_ix - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $i \geqslant i_0$. Kot smo videli, je $A_i = P_iAP_i|P_iX$ hermitski operator na $P_iX$. Po predpostavki je $A_i^2$ hermitski na $P_iX$. Od tod je za $i \geqslant i_0$

$$\|\exp(it(P_iAP_i)^2)x\| = \|\exp(it(P_iAP_i)^2)P_ix + (I-P_i)x\| =$$
$$= \|\exp(itA_i^2)P_ix + (I-P_i)x\| \leqslant \|P_ix\| + \|(I-P_i)x\| < \|x\| + \varepsilon \quad .$$

Ker je (po 1.4) $\|P_i\| = 1$ za vsak $i$, posplošeno zaporedje $\{P_iAP_i\}$ krepko konvergira k $A$. Iz podobnega razloga

( $\|P_iAP_i\| \leqslant \|A\|$ ) $(P_iAP_i)^2$ krepko konvergira k $A^2$ . Lahko je videti, da tudi $\exp(it(P_iAP_i)^2)$ krepko konvergira k $\exp(itA^2)$. Če bo $i$ dovolj pozen in obenem še $i \geqslant i_o$ , bo tako

$\|\exp(itA^2)x\| < \|\exp(it(P_iAP_i)^2)x\| + \frac{\varepsilon}{2} < \|x\| + 2\frac{\varepsilon}{2}$

Ker je bil $\varepsilon$ poljubno izbran, je tako $\|\exp(itA^2)x\| \leqslant \|x\|$ . Od tod seveda takoj sledi, da je $\|\exp(itA^2)x\| = \|x\|$ in s tem konec dokaza prvega koraka.

Podlema 1. Naj bo $\{A(b); b \in B\}$ naraščajoče navzgor omejeno posplošeno zaporedje pozitivnih elementov algebre $\mathcal{A}$ . Potem ima to zaporedje supremum v algebri $\mathcal{A}$ in ta supremum je obenem limita tega posplošenega zaporedja v krepki operatorski topologiji.

Dokaz. Brez škode lahko privzamemo, da je $A(b) \leqslant I = I_X$ za vsak $b \in B$ . Naj bo $i \in I$ . Oglejmo si posplošeno zaporedje $\{P_iA(b)P_i; b \in B\}$ . Ker je za $b' \geqslant b$ element $A(b')-A(b) \geqslant 0$ , je tudi $P_i(A(b')-A(b))P_i = (P_i(A(b')-A(b))^{\frac{1}{2}})(P_i(A(b')-A(b))^{\frac{1}{2}})^*$ pozitiven element. Tako je $\{P_iA(b)P_i; b \in B\}$ naraščajoče posplošeno zaporedje, navzgor omejeno s $P_i$ . To zaporedje je vsebovano v C*-algebri $P_i\mathcal{A}P_i$ , ki je *-izomorfna neki podalgebri v končno razsežni C*-algebri $\mathcal{H}(P_iX) + i\mathcal{H}(P_iX)$ . Tako je $P_i\mathcal{A}P_i$ W*-algebra in $\sup\{P_iA(b)P_i; b \in B\}$ obstaja in je enak šibki limiti posplošenega zaporedja $\{P_iA(b)P_i; b \in B\}$. Prostor $P_i\mathcal{A}P_i$ je končno razsežen, zato je šibka limita na njem enaka normni. Posplošeno zaporedje $\{P_iA(b)P_i; b \in B\}$ torej konvergira v normi.

Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $b \in B$ , da je za $b' \geqslant b$ $\|P_i(A(b')-A(b))P_i\| < \varepsilon$ , se pravi

$\|((A(b')-A(b))^{\frac{1}{2}}P_i)^*((A(b')-A(b))^{\frac{1}{2}}P_i)\| = \|(A(b')-A(b))^{\frac{1}{2}}P_i\|^2 < \varepsilon$ .

Ker je $\|A(b')-A(b)\| \leqslant \|A(b')\| \leqslant 1$ , je $\|(A(b')-A(b))^{\frac{1}{2}}\| \leqslant 1$ .

Od tod je $\|(A(b')-A(b))P_i\| \leqslant \|(A(b')-A(b))^{\frac{1}{2}}\| \|(A(b')-A(b))^{\frac{1}{2}}P_i\|$. Vidi se, da je $\{A(b)P_i; b \in B\}$ Cauchyjevo posplošeno zaporedje v $\mathcal{A}$ in tako konvergentno. Za vsak $x \in X$ torej posplošeno zaporedje $\{A(b)P_i x; b \in B\}$ konvergira. Upoštevajmo, da je množica $\{P_i x; i \in I, x \in X\}$ gosta v $X$ (in tako druge kategorije v $X$), pa vidimo, da po Banach-Steinhausovem izreku $\lim\limits_{b} A(b)x$ obstaja za vsak $x \in X$. Če to limito označimo z $Ax$, je $A$ omejen linearen operator na $X$. Po lemi 1.7 je $A$ hermitski operator na $X$. Ker je vsaka točka množice $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$ robna, je $\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{L}(X)}(A)$. Naj bo $\mathcal{A}^+$ množica pozitivnih elementov algebre $\mathcal{A}$. Potem je (spet po 1.7) $A \in \mathcal{A}^+$. Pokažimo, da je $A = \sup\{A(b); b \in B\}$. Res: ker je $\|P_i\| = 1$ za vsak $i$, $P_i A(b) P_i \xrightarrow[b]{} P_i A P_i$ v krepki operatorski topologiji. Ker je algebra $P_i \mathcal{A} P_i$ končno razsežna, je $P_i A P_i = \sup\{P_i A(b) P_i; b \in B\}$. Fiksirajmo $b \in B$. Potem je $P_i(A-A(b))P_i = P_i A P_i - P_i A(b) P_i \in \mathcal{A}^+$ za vsak $i \in I$. Ker $P_i \xrightarrow[i]{} I$ v krepki operatorski topologiji in je $\|P_i\| \leqslant 1$, $P_i(A-A(b))P_i \xrightarrow[i]{\text{krepko}} A-A(b)$. Množica $\mathcal{A}^+$ je po 1.7 zaprta v krepki operatorski topologiji in zato je $A-A(b) \geqslant 0$, se pravi, da je $A$ zgornja meja posplošenega zaporedja $\{A(b)\}$. Denimo, da bi bil $A(b) \leqslant D \in \mathcal{A}^+$ za vsak $b \in B$. Fiksirajmo $i \in I$. Kot na začetku dokaza vidimo, da je $P_i A(b) P_i \leqslant P_i D P_i$ za vsak $b \in B$. Tako je $P_i D P_i \geqslant \sup\limits_{b} P_i A(b) P_i = P_i A P_i$. Se pravi, da je $P_i(D-A)P_i \in \mathcal{A}^+$ za vsak $i \in I$. Od tod kot zgoraj sledi, da je $D \geqslant A$. Res je $A = \sup\{A(b); b \in B\}$.

Nadaljujmo z dokazom točke a). Za vsak $T \in \mathcal{L}(X)$ je $\{g_a(T); a \in \Pi(X)\}$ ravno prostorski numerični zaklad operatorja $T$. Če je torej $a \in \Pi(X)$, je po 1.7 $g_a$ pozitiven linearen funkcional na $\mathcal{A}$ . Denimo, da je $C \in \mathcal{A}$ , $C^* = C$ in $g_a(C) = 0$ za vsak $a \in \Pi(X)$ . Potem je prostorski numerični zaklad operatorja $C$ enak $\{0\}$ . Po 1.3 in 1.5 sledi, da je $\sigma_{\mathcal{L}(X)}(C) = \{0\}$. Ker je $\sigma_{\mathcal{A}}(C) = \sigma_{\mathcal{L}(X)}(C)$ , je $C = 0$ . Družina $\mathcal{F}$ je tako res totalna na $\mathcal{A}$ .

Denimo, da imamo spet naraščajoče omejeno posplošeno zaporedje $\{A(b); b \in B\}$ pozitivnih operatorjev na $\mathcal{A}$ s supremumom $A$ . Naj bo $a = (x,f) \in \Pi(X)$ in $g = g_a$ . Po podlemi 1 je $Ax = \lim A(b)x$ . Tako je $g(A) = f(Ax) = \lim g(A(b))$ in od tod $g(A) = \sup\{g(A(b)); b \in B\}$ . Po izreku 2.1 je $\mathcal{A}$ res W*-algebra.

Označili smo $\mathcal{F} = \{g_a|\mathcal{A}; a \in \Pi(X)\}$ . Vsak element v $\mathcal{F}$ je, kot smo pravkar spoznali, normalen pozitiven funkcional na $\mathcal{A}$ in tako zvezen v $\sigma$-topologiji. Torej je $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_*$ . Šibka topologija, ki jo inducira množica $\mathcal{F}$ na $\mathcal{A}$ (kratko $\mathcal{F}$-topologija) je šibkejša od $\sigma$-topologije. Ker je družina $\mathcal{F}$ totalna, je $\mathcal{F}$-topologija Hausdorffova. Spomnimo se, da je $\sigma$-topologija pravzaprav šibka *-topologija in da je zato v njej enotna krogla v $\mathcal{A}$ kompaktna, pa vidimo, da se na enotni krogli v $\mathcal{A}$ $\mathcal{F}$-topologija in $\sigma$-topologija res ujemata. Ker je $\mathcal{E}$ linearna lupina množice $\mathcal{F}$ , je vsak element v $\mathcal{E}$ zvezen v $\mathcal{F}$-topologiji. $\mathcal{E}$-topologija je torej enaka $\mathcal{F}$-topologiji. Ker je že $\mathcal{F}$ totalna, je $\langle \mathcal{A}, \mathcal{E} \rangle$ dualnost za $\langle a,h \rangle = h(a)$ $(a \in \mathcal{A}, h \in \mathcal{E})$ . Če je torej $f \in \mathcal{A}^*$ zvezen v $\mathcal{F}$-topologiji, je $f \in \mathcal{E}$ . Pokažimo zdaj, da je $\mathcal{E}$ gost v $\mathcal{A}_*$ .

Naj bo $f \in \mathcal{A}_*$ . Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$ . Ker se na enotni krogli $\mathcal{A}_1$ algebre $\mathcal{A}$ $\sigma$-topologija in $\mathcal{F}$-topologija ujemata, obstaja zaprta konveksna uravnovešena okolica $U$ točke 0 v $\mathcal{F}$-topologiji, da je za vsak $x \in U \cap \mathcal{A}_1$ $|f(x)| < \varepsilon$ . Oglejmo si zdaj (znano) dualnost $\langle \mathcal{A}, \mathcal{A}^* \rangle$ . V okviru te dualnosti lahko zapišemo $f \in \varepsilon(U \cap \mathcal{A}_1)^o$ . (Tu je $C^o = \{f \in \mathcal{A}^*; |f(x)| \leq 1$ za vsak $x \in C\}$ ). Ker je $\mathcal{F}$-topologija šibkejša od $\sigma$-topologije, to je topologije $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ , ta pa šibkejša od $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ $(\mathcal{A}_* \subset \mathcal{A}^*)$ , je $U$ zaprta v $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ . Ker je $U$ tudi

konveksna in uravnovešena, je $U^{oo} = U$. Tudi $\mathcal{A}_1$ je zaprta v $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$, od tod v $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ in je tako $\mathcal{A}_1^{oo} = \mathcal{A}_1$.
Naj bo $N = U^o \cup \mathcal{A}_1^o$. Ker je $0 \in U^o \cap \mathcal{A}_1^o$, je $N \subset U^o + \mathcal{A}_1^o$.
Tako $U^o$ kot $\mathcal{A}_1^o$ sta konveksni, uravnovešeni, $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$-zaprti, $\mathcal{A}_1^o$ pa je tudi $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$-kompaktna, ker je $\mathcal{A}_1^o =$
$= \{f \in \mathcal{A}^*; |f(x)| \leq 1 \text{ za vsak } x \in \mathcal{A}_1\} = \{f \in \mathcal{A}^*; \|f\| \leq 1\}$.
(Spomnimo se še, da je $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$ ravno šibka *-topologija na $\mathcal{A}^*$). Tako je $U^o + \mathcal{A}_1^o$ $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$-zaprta množica, obenem pa konveksna in balansirana, na kratko $(U^o + \mathcal{A}_1^o)^{oo} = U^o + \mathcal{A}_1^o$.
No, $N^o = (U^o \cup \mathcal{A}_1^o)^o = U^{oo} \cap \mathcal{A}_1^{oo} = U \cap \mathcal{A}_1$. Po drugi strani pa $N^o \supset (U^o + \mathcal{A}_1^o)^o$ in od tod $N^{oo} \subset (U^o + \mathcal{A}_1^o)^{oo} = U^o + \mathcal{A}_1^o$.
Tako je $(U \cap \mathcal{A}_1)^o = N^{oo} \subset U^o + \mathcal{A}_1^o$. Torej je $f \in \varepsilon(U^o + \mathcal{A}_1^o)$.
Obstajata $g \in U^o$ in $h \in \mathcal{A}_1^o$, da je $f = \varepsilon g + \varepsilon h$ in od tod $\|f - \varepsilon g\| = \varepsilon \|h\| \leq \varepsilon$. Ker je $g \in U^o$, je $g(U) \subset \{z; |z| \leq 1\}$.
To pa se pravi, da je $g$ zvezen v $\mathcal{T}$-topologiji. Torej res lahko $f$ poljubno dobro po normi aproksimiramo s funkcionali iz $\mathcal{E}$. S tem smo pokazali, da je $\mathcal{E}$ gost v $\mathcal{A}_*$.

b) Videli smo, da je za vsak $i \in I$ $P_i \mathcal{A} P_i$ končno razsežna W*-algebra. Izberimo v njej minimalne paroma pravokotne projektorje $S_{i_1}, \ldots, S_{i_n}$, tako da je $S_{i_1} + \ldots + S_{i_n} = P_i$.
Naj bodo $\{S_t; t \in T\}$ vsi projektorji $S_{i_k}$, ki jih dobimo z razcepom vseh $P_i$. Očitno so $S_t$ minimalni tudi v celi algebri in je tako $S_t \mathcal{A} S_t$ enorazsežna algebra za vsak $t$. Z $G_t$ označimo centralno pokritje operatorja $S_t$ (to je, najmanjši centralni projektor, ki vsebuje $S_t$). Naj bo $G \in \{G_t; t \in T\}$.
Znano je, da je $G\mathcal{A}G$ tudi W*-algebra. Pokažimo, da je $G\mathcal{A}G$ faktor. Če je $Q$ neničeln centralni projektor v $G\mathcal{A}G$, je $Q$ centralen v $\mathcal{A}$. Res: za vsak $A \in \mathcal{A}$ je $QA = QGA = QGAG =$
$= GAGQ = AGQ = AQ$.

Ker posplošeno zaporedje $\{P_i; i \in I\}$ krepko konvergira k identiteti, obstaja $t \in T$, da je $QS_t \neq 0$.

Ker je $Q$ centralen, je $QS_t$ projektor, vsebovan v $S_t$. Upoštevajmo, da je $S_t$ minimalen, pa vidimo, da je $QS_t = S_t$. $G$ vsebuje $Q$ in $Q$ vsebuje $S_t$, zato je $Q = G$. Center algebre $G\mathfrak{A}G$ je tako trivialen in je $G\mathfrak{A}G$ faktor. Ker $G\mathfrak{A}G$ vsebuje minimalne projektorje $(S_t)$, ti pa so Abelovi, je to faktor tipa I. (Enako lahko dokažemo, da je cela algebra $\mathfrak{A}$ tipa I.)

Če je $G_tG_s \neq 0$, obstaja $z \in T$, da je $G_tG_sS_z \neq 0$. Kot prej je $G_sS_z = S_z$ in $G_tS_z = S_z$, pa vidimo, da je $G_t = G_s$. Naj bodo $\{G_z; z \in Z\}$ ravno vsa različna centralna pokritja projektorjev iz družine $\{S_t; t \in T\}$. Vsak operator $P_i$ je končna vsota projektorjev $S_t$. Od tod vidimo, da $\sum G_z$ $(z \in Z)$ neurejeno konvergira k $I_X$ v krepki operatorski topologiji.

<u>Podlema</u> 2. Denimo, da imamo za vsak $z \in Z$ dan operator $A_z \in G_z\mathfrak{A}G_z$, in naj bo $\sup\{\|A_z\|; z \in Z\} < \infty$. Obstaja natanko en $A \in \mathfrak{A}$, tako da je $G_zAG_z = A_z$ za vsak $z \in Z$. Pri tem je $\|A\| = \sup\{\|A_z\|; z \in Z\}$. Če so vsi $A_z$ hermitski, je $A$ hermitski.

Dokaz. Naj bo $K = \{z_1, \ldots, z_n\}$ končna podmnožica v $Z$. Označimo $G_{z_i} = G_i$ in $A_{z_i} = A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ in naj bo $A_K = \sum A_i$, $G_K = \sum G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ker je $A_i^* A_j = 0$ za $i \neq j$, je $\|A_K\|^2 = \|A_K^* A_K\| = \|\sum_{i=1}^{n} A_i^* A_i\|$. Naj bo $M = \sup\{\|A_z\|; z \in Z\}$ in $Q_K = A_K^* A_K$. Vzemimo poljubno naravno število $m$. Potem je $Q_K^m = \sum_{i=1}^{n} (A_i^* A_i)^m$ in od tod $\|Q_K^m\| \leq nM^{2m}$. Ker je $Q_K$ sebiadjungiran, je $\|Q_K^m\| = \|Q_K\|^m$. Tako je $\|Q_K\| \leq M^2 n^{1/m}$. Od tod takoj sledi, da je $\|Q_K\| \leq M^2$. Ker je $\|Q_K\| = \|A_K\|^2$, je

$$\|A_K\| \leq M$$

Vsak $A_z$ razcepimo: $A_z = B_z + iC_z$, kjer sta $B_z$ in $C_z$ hermitska operatorja v $G_z\mathfrak{A}G_z$. Razcepimo še $B_z$ takole:

$B_z = B_z^+ - B_z^-$ $(B_z^+, B_z^- \geq 0,\ B_z^+ + B_z^- = |B_z|)$. Ker je $\|B_z^+\| \leq \|B_z\| \leq \leq \|A_z\|$, tudi za $\{B_z^+; z \in Z\}$ veljajo pogoji podleme.

Spet naj bo za vsako končno podmnožico $K$ v $Z$ $B_K^+ = \sum B_z^+$ $(z \in K)$. Če množice $K$ delno uredimo z inkluzijo, je očitno $\{B_K^+\}$ naraščajoče in navzgor omejeno posplošeno zaporedje in ima tako v $\mathcal{A}$ supremum, ki ga označimo z $B^+$. Vemo, da je $B^+$ tudi limita posplošenega zaporedja $\{B_K^+\}$ v krepki operatorski topologiji (podlema 1). Za vsak $x \in X$ je tako $B^+G_z x = = \lim_K B_K^+ G_z x$. Če je $z \in K$, je $B_K^+ G_z = B_z^+$. Tako je $B^+G_z x = = B_z^+ x$ in od tod $B^+ G_z = B_z^+$.

Naj bo zdaj še $B^- = \lim_K B_K^-$ v krepki operatorski topologiji in $B = B^+ - B^-$. Potem je $BG_z = B_z$ za vsak $z$. Analogno izračunajmo $C$. Če torej označimo $A = \lim_K A_K$ v krepki operatorski topologiji, je $AG_z = A_z$ za vsak $z$.

Pa denimo, da je $B \in \mathcal{A}$ in $BG_z = AG_z$ za vsak $z$. Ker $\sum G_z$ $(z \in Z)$ krepko konvergira k identiteti, je $B = A$.

Enotna krogla algebre $\mathcal{A}$ je zaprta v $\sigma$-topologiji. Ker je $\|A_K\| \leq M$ za vsak $K$, je tudi $\|A\| \leq M = \sup\{\|A_z\|; z \in Z\}$. Jasno pa je, da je $\|A\| \geq \sup\{\|A_z\|; z \in Z\}$. Tako je res $\|A\| = = \sup\{\|A_z\|; z \in Z\}$.

Denimo še, da so vsi $A_z$ hermitski. Potem so vsi $A_K$ hermitski. Ker je $\mathcal{H}(X)$ po 1.7 zaprta v krepki operatorski topologiji, je tudi $A$ hermitski.

Podlema 2 nam tako daje *-izomorfizem direktne vsote algebr $G_z \mathcal{A} G_z$ $(z \in Z)$ v algebro $\mathcal{A}$. Seveda je ta izomorfizem na (inverzni izomorfizem je kar $A \longmapsto (G_z A G_z)_{z \in Z}$) in je tako $\mathcal{A}$ res direktna vsota idealov $G_z \mathcal{A} G_z$ $(z \in Z)$.

c) Naj bo $G \in \{G_z; z \in Z\}$ . Ker je $G\mathcal{A}G$ faktor tipa I , obstaja Hilbertov prostor $K$ in *-izomorfizem $r$ algebre $\mathcal{L}(K)$ na $G\mathcal{A}G$ . Če sta $S,T$ minimalna projektorja v $G\mathcal{A}G$ , sta $r^{-1}(S)$ in $r^{-1}(T)$ minimalna v $\mathcal{L}(K)$ , torej enorazsežna in zato ekvivalentna. Obstaja $V \in G\mathcal{A}G$ , da je $V^*V = S$ in $VV^* = T$ . Lahko je videti (te vrste sklepe smo imeli že v prvem poglavju), da $V$ izometrično preslika $SX$ na $TX$ .

Naj bo $J = \{t \in T; S_j \leq G\}$ . Kot smo videli, $\sum S_t$ $(t \in T)$ neurejeno konvergira k $I_X$ v krepki operatorski topologiji. Če $t \notin J$ , je $GS_t = 0$ in je tako za vsak $x \in GX$ $S_t x = 0$ . Od tod vidimo, da končne vsote operatorjev $S_j$ $(j \in J)$ krepko konvergirajo k $G$ , to je k identiteti algebre $G\mathcal{A}G$ . $G$ je po podlemi 1 tudi supremum teh končnih vsot. Operatorji $S_j$ $(j \in J)$ so minimalni v $G\mathcal{A}G$ in paroma pravokotni. Jasno je, da je preslikava algebre $G\mathcal{A}G$ v $\mathcal{L}(GX)$ , dana z $A \longmapsto A|GX$ , izometričen homomorfizem. Uporabimo torej izrek 1.10, pa je ta točka pri kraju.

d) Denimo, da je $V\colon X \longrightarrow X$ poljubna surjektivna izometrija. Če je $A$ hermitski operator na $X$ , je lahko videti, da je $VAV^{-1}$ spet hermitski operator na $X$ . Od tod je jasno, da predpis $A \longmapsto VAV^{-1}$ določa *-avtomorfizem $f$ algebre $\mathcal{A}$ . Če je $G \in \{G_z; z \in Z\}$ , je $G' = f(G)$ spet od 0 različen centralen projektor in $G'\mathcal{A}G'$ faktor. Obstaja $t \in T$ , da je $G'S_t \neq 0$ . Torej je $G' \geq G_t$ . Ker je $G'\mathcal{A}G'$ faktor in $G_t$ centralen, je očitno $G' = G_t$ , se pravi $VGV^{-1} = G_t$ ali $VG_t = G_tV$ . Tako je $V(GX) = G_t(VX) = G_tX$ in $V$ preslika $GX$ na $G_tX$ .

Denimo zdaj, da $V$ ohranja prostor $GX$ , se pravi $VG = GV$ . Preslikava $A \longmapsto VAV^{-1}$ in njej inverzna preslikava $B \longmapsto V^{-1}BV$ ohranjata algebro $G\mathcal{A}G$ . Torej je $A \longmapsto VAV^{-1}$ *-avtomorfizem algebre $G\mathcal{A}G$. Ker je $G\mathcal{A}G$ faktor tipa I, je to notranji avtomorfizem. Obstaja unitaren element $U \in G\mathcal{A}G$, da je $VAV^{-1} = UAU^{-1}$ za vsak $A \in G\mathcal{A}G$. Označimo $W = U^*V$. Potem je $WA = AW$ za vsak $A \in G\mathcal{A}G$.

Naj bo $Q$ minimalen projektor v $G\mathcal{A}G$. Potem $W$ ohranja $QX$. Ker je $G\mathcal{A}G$ faktor tipa I, lahko (kot v dokazu točke b) najdemo družino $\{Q_j; j \in J\}$ paroma pravokotnih ekvivalentnih minimalnih projektorjev v $G\mathcal{A}G$, tako da je $Q_{j_o} = Q$ za neki $j_o \in J$ in da je supremum končnih vsot teh operatorjev enak $G$. Po podlemi 1 te končne vsote tudi konvergirajo h $G$ v krepki operatorski topologiji. Denimo, da poznamo $W|QX$. Naj $V_j \in G\mathcal{A}G$ posreduje ekvivalenco med $Q$ in $Q_j$ $(j \neq j_o)$: $V_j^*V_j = Q$ in $V_jV_j^* = Q_j$. Če je $x \in Q_jX$, je $Wx = WQ_jx = WV_jV_j^*x = V_jWV_j^*x$. Ker je $V_j^*x \in QX$, je $Wx$ res določen z $W|QX$. Množica $\bigcup \{Q_jX; j \in J\}$ je gosta v $X$, pa smo s tem pri kraju.

Oglejmo si zdaj kot aplikacijo naših rezultatov prostore s hiperortogonalno bazo. Privoščimo si lahko majhno posplošitev:

2.3. <u>Definicija</u>. Množica $\{e_i; i \in I\}$ elementov Banachovega prostora $X$ je <u>razširjena</u> <u>hiperortogonalna</u> <u>baza</u> za $X$, če veljata naslednji dve stvari:

a) Obstaja enolično določena množica $\{f_i; i \in I\}$ linearnih funkcionalov na $X$, tako da za vsak $x \in X$ $\sum f_i(x)e_i$ $(i \in I)$ neurejeno konvergira k $x$.

b) Če je $y \in X$ in $|f_i(y)| = |f_i(x)|$ za vsak $i \in I$, je $\|y\| = \|x\|$.

Pokažimo, da so funkcionali $f_i$ v definiciji 2.3 zvezni. Res: naj bo $x = \sum_{i \in I} f_i(x)e_i$ in $y = -x + 2f_j(x)e_j =$

$= \sum_{i\neq j}(-f_i(x))e_i + f_j(x)e_j$ . Potem je $\|y\| = \|x\|$ in od tod $\|x + y\| = \|2f_j(x)e_j\| \leqslant \|x\| + \|y\| = 2\|x\|$ , torej $|f_j(x)| \leqslant \|x\|\|e_j\|^{-1}$ . Definirajmo linearni operator $E_j$ na $X$ takole: $E_j x = f_j(x)e_j$ . Očitno je $\|E_j\| = 1$ in $E_j$ je projektor.

Naj bo od zdaj naprej $X$ kompleksen Banachov prostor. Potem je $E_j$ hermitski projektor. Namreč: $\|\exp(itE_j)x\| = \|(e^{it}E_j + (I - E_j))x\| = \|\sum_{i\neq j} f_i(x)e_i + e^{it}f_j(x)e_j\| = \|x\|$ .

Naj bo $R$ končna podmnožica v $I$ in $P_R = \sum E_i$ $(i \in R)$ . Potem je $P_R X$ končno razsežen prostor s hiperortogonalno bazo $\{e_i; i \in R\}$ . Vidav ter Schneider in Turner so pokazali ([24],[21]), da je $\mathcal{H}(P_R X) + i\mathcal{H}(P_R X)$ potem algebra. Tako vidimo, da za $X$ veljajo pogoji izreka 2.2. Ker so projektorji $E_j$ enorazsežni, mnogi rezultati dobijo lepšo obliko, dokažemo pa lahko tudi nekaj novih. Najprej pa še ena definicija:

2.4. Definicija.([24]). Naj bo $X$ kompleksen Banachov prostor in $Y$ Hilbertov podprostor v $X$ . Pravimo, da je $Y$ pravilno vložen Hilbertov podprostor v $X$ , če obstaja podprostor $Z$ v $X$, da je $X = Y \oplus Z$ in da je za vsak unitaren operator $U$ na $Y$ operator $U \oplus I_Z$ izometrija prostora $X$ nase.

2.5. Izrek. Naj bo $X$ kompleksen Banachov prostor z razširjeno hiperortogonalno bazo in $\mathcal{A} = \mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X)$ . Potem je $\mathcal{A}$ W*-algebra. Če je $\{A(b); b \in B\}$ naraščajoče navzgor omejeno posplošeno zaporedje pozitivnih elementov v $\mathcal{A}$ , je njegov supremum enak limiti tega posplošenega zaporedja v krepki operatorski topologiji. Naj bo $\Pi(X) = \{(x,f) \in X \times X^* ; \|f\| = \|x\| = f(x) = 1\}$ . Za vsak $a = (x,f) \in \Pi(X)$ naj bo $g_a \in \mathcal{L}(X)^*$ definiran z $g_a(A) = f(Ax)$ . Naj bo $\mathcal{F} = \{g_a|\mathcal{A}; a \in \Pi(X)\}$ ter $\mathcal{E}$ linearna lupina množice $\mathcal{F}$ . Vsi elementi v $\mathcal{F}$ so normalni pozitivni funkcionali na algebri $\mathcal{A}$ in sestavljajo totalno družino na $\mathcal{A}$. Na enotni krogli v $\mathcal{A}$ se $\sigma$-topologija in šibka topologija, ki jo inducira množica $\mathcal{F}$, ujemata. Še več: naj bo $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{A}^*$ zaprti podprostor, ki ga generirajo vsi normalni pozitivni funkcionali na $\mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{E}$ gost v $\mathcal{A}_*$ v normni topologiji.

Obstaja družina $\{G_z; z \in Z\}$ paroma pravokotnih centralnih projektorjev v $\mathcal{A}$, tako da je $G_z X = X_z$ pravilno vložen Hilbertov podprostor v $X$ za vsak $z$ in da je preslikava $A \longmapsto \{G_z A G_z | X_z; z \in Z\}$ *-izomorfizem algebre $\mathcal{A}$ na direktno vsoto algebr $\mathcal{L}(X_z)$. Če je $V: X \to X$ surjektivna izometrija, $V$ ohranja ali le zamenja podprostore $X_z$. Kadar $V$ ohranja $X_z$, lahko zapišemo $V|X_z = U$, kjer je $U$ unitaren element v $G_z \mathcal{A} G_z$.

Dokaz. Naj bo $\{e_i; i \in I\}$ razširjena hiperortogonalna baza za $X$, $\{f_i; i \in I\}$ ustrezni funkcionali ter $E_i \in \mathcal{L}(X)$ definirani z $E_i x = f_i(x) e_i$. Videli smo, da so $E_i$ enorazsežni hermitski projektorji ter tako minimalni v $\mathcal{A}$. Če je $G \in \{G_z; z \in Z\}$, obstaja $j \in I$, da je $GE_j = E_j$. Ker je $E_j$ enorazsežen, po točki b izreka 2.2 obstaja Hilbertov podprostor $Z$ v $GX$, ki je gost v $GX$ (in tako enak $GX$), da je $\mathcal{L}(Z) = \{GAG|Z; A \in \mathcal{A}\}$. Jasno je, da je preslikava $A \longmapsto A|GX$ iz $G\mathcal{A}G$ v $\mathcal{L}(GX)$ izometrična in tako *-izomorfizem. Tako je zaradi 2.2 preslikava $A \longmapsto \{G_z A G_z | X_z; z \in Z\}$ res *-izomorfizem.

Pokažimo še, da so vsi prostori $X_z = G_z X$ pravilno vloženi Hilbertovi podprostori. Pa naj bo $U$ unitaren operator na $X_z$. Po prejšnjem je $U' = U \oplus (I - G_z) \in \mathcal{A}$. Seveda je $U'U'^* = U'^* U' = I$ in je tako $U'$ unitaren operator v $\mathcal{A}$. Jasno je, da je $U'$ tudi izometrija prostora $X$ nase.

Ostanek dokaza je trivialen.

2.6. Primer. Naj bo $X = c_o$ (prostor vseh kompleksnih zaporedij, ki konvergirajo k $0$, s supremum normo). Znano je, da $c_o$ ni refleksiven. Celo šibko poln po zaporedjih ni; se pravi, da obstaja zaporedje $\{x^n\}$ elementov v $c_o$, tako da $\{f(x^n)\}$ konvergira za vsak $f \in c_o^*$, pri tem pa $\{x^n\}$ nima šibke limite.

Za vsako naravno število $i$ naj bo $e_i \in c_o$ zaporedje, ki ima na $i$-tem mestu $1$, sicer pa same ničle. Očitno je $\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ hiperortogonalna baza prostora $c_o$. Uporabimo zdaj izrek 2.5 (z oznakami vred). Naj bo $E_i \in \mathcal{L}(X)$ projektor, ki zaporedju priredi njegov $i$-ti člen: $E_i x = x_i$. Ker so projektorji $G_z$ centralni, komutirajo z vsemi $E_i$. Če prostor $X_z = G_z X$ ne bi bil enorazsežen, bi vseboval prostor $\ell_2^\infty$ (to je $\mathbb{C}^2$ z "max"-normo) in tako ne bi bil Hilbertov. Torej so vsi $X_z$ enorazsežni, $Z = \mathbb{N}$ in $G_i = E_i$ za vsak $n$. Vsak linearen operator na $X_z$ je množenje z nekim kompleksnim številom. Torej je algebra $\mathcal{A}$ *-izomorfna W*-algebri $\ell^\infty$ na tale način: vsakemu $T \in \mathcal{A}$ priredimo $\{(Te_i)_i\}$. Inverzni izomorfizem vsakemu $u \in \ell^\infty$ priredi $T_u \in \mathcal{A}$, definiran s $T_u x = (u_i x_i)$.

Za vsak $a = (x,f) \in \Pi(X)$ je bil $g_a \in \mathcal{A}^*$ določen z $g_a(B) = f(Bx)$ in $\mathcal{F} = \{g_a|\mathcal{A}; a \in \Pi(X)\}$, $\mathcal{E}$ pa je bila linearna lupina množice $\mathcal{F}$. Poglejmo, kaj so vse te množice v našem primeru!

Pa naj bo $a = (x,f) \in \Pi(X)$ in $g = g_a$. Vemo, da je $c_o^* = \ell^1$, točneje rečeno, vsak zvezen linearen funkcional na $c_o$ je skalarno množenje z elementom prostora $\ell^1$. Zapišimo torej $f = (f_n) \in \ell^1$ in $x = (x_n)$. Potem je $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \max_n |x_n|$. Računajmo: $1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n = |\sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n||x_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = 1$. Torej je $\sum |f_n||x_n| = \sum |f_n|$. Naj bo $I = \{n \in \mathbb{N}; f_n \neq 0\}$. Ker je $|x_n| \leqslant 1$ za vsak $n$, mora biti očitno $|x_n| = 1$ za vsak $n \in I$. Element $(x_n)$ je v $c_o$, zato je $I$ končna množica. Za vsak $u \in \ell^\infty$ je $g(T_u) = f(T_u x) = f(u_n x_n) = \sum_{n \in I} f_n u_n x_n = \sum_{n \in I} (f_n x_n) u_n$. Od tod vidimo, da je $\mathcal{E}$ sestavljen iz skalarnih množenj z zaporedji, ki imajo le končno členov različnih od $0$.

Spomnimo se, da je $\ell^\infty = (\ell^1)^*$, točneje rečeno, zvezni linearni funkcionali na $\ell^1$ so ravno skalarna množenja z omejenimi zaporedji. Tako je vsako skalarno množenje s fiksnim zaporedjem iz $\ell^1$ $\sigma$-zvezen linearen funkcional na W*-algebri $\ell^\infty$ . Če je $f = (f_n) \in \ell^1$ in $f_n \geqslant 0$ za vsak $n$ , je $f$ normalen pozitiven funkcional. Definirajmo linearni funkcional $f'$ na $\mathcal{A}$ z $f'(T_u) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n$ . Predpis $u \longmapsto T_u$ je *-izomorfizem algebre $\ell^\infty$ na $\mathcal{A}$ in zato ohranja urejenost, supremume itd. Od tod je tudi $f'$ normalen pozitiven funkcional. Z $\mathcal{A}_*$ smo označili linearni podprostor v $\mathcal{A}^*$ , ki ga generirajo vsi normalni pozitivni funkcionali. Vidimo, da je $\mathcal{E}$ prava podmnožica v $\mathcal{A}_*$ .

# III. GRUPA IZOMETRIJ BANACHOVEGA PROSTORA

Vse naše dosedanje delo je bilo pravzaprav posvečeno vprašanju, kdaj imajo nekateri Banachovi prostori podobne lastnosti kot Hilbertov prostor. Tudi zadnje poglavje ne bo izjema. Surjektivne linearne izometrije Hilbertovega prostora so ravno unitarni operatorji. Unitarna grupa pa je v normni topologiji zmerom realna Banach-Liejeva grupa. Tako se odpravimo iskat pogoje, pri katerih je grupa surjektivnih linearnih izometrij v normni topologiji Banach-Liejeva grupa.

Naj bo torej $X$ Banachov prostor in $GL(X) \subset \mathcal{L}(X)$ grupa vseh obrnljivih elementov, opremljena z normno topologijo. S $\mathcal{G}$ označimo podgrupo v $GL(X)$, sestavljeno iz vseh izometrij. Ker je $\mathcal{G} = \{T \in GL(X); \|T\| = \|T^{-1}\| = 1\}$, je $\mathcal{G}$ zaprta podgrupa v $GL(X)$. Če je $X$ končno razsežen, je $GL(X)$ končno razsežna Liejeva grupa in tako tudi $\mathcal{G}$ Liejeva grupa. V neskončno razsežnem prostoru stvar ni tako preprosta. L.A.Harris in W.Kaup sta v članku [14] sicer pokazala, da $\mathcal{G}$ je Banach-Liejeva grupa, če je $X$ kompleksen in enotna krogla $B$ prostora $X$ homogeno področje (se pravi, da za poljubna $x,y \in B$ obstaja bijektivna preslikava $f: B \longrightarrow B$, tako da je $f(x) = y$ in da sta $f$ in $f^{-1}$ Fréchétovo odvedljivi v kompleksnem smislu). Obenem pa sta navedla primer kompleksnega Banachovega prostora $X$, za katerega $\mathcal{G}$ ni Liejeva grupa.

Tu se bomo problema lotili z druge strani. Pokazali bomo, da $\mathcal{G}$ je Banach-Liejeva grupa, če zadošča nekaterim - dovolj hudim - zahtevam. Mimogrede bomo tudi videli, da je za kompleksen Banachov prostor z (razširjeno) hiperortogonalno bazo grupa izometrij Banach-Liejeva grupa in celo Liejeva podgrupa v $GL(X)$.

Sklenimo še majhen dogovor. Če je $X$ Banachov prostor, $A \in \mathcal{L}(X)$ in $\|A-I\|<1$, definiramo <u>logaritem</u> operatorja $A$ takole:

$$\log A = A-I - (1/2)(A-I)^2 + (1/3)(A-I)^3 - \dots$$

Napravimo najprej kratek sprehod med definicijami in lastnostmi neskončno razsežnih Liejevih grup. Omejili se bomo na realne Liejeve grupe, čeprav vsi rezultati, razen tistih, pri katerih je posebej navedeno, da gre za realni primer, veljajo tudi v kompleksnem. Podrobnejšo in popolnejšo informacijo dobimo v Bourbakijevih knjigah Variétés différentielles et analytiques ter Groupes et algèbres de Lie [7,6] ter v članku [10].

Naj bosta $X,Y$ realna Banachova prostora in $n$ naravno število. Preslikava $P\colon X \to Y$ je <u>zvezen homogen polinom reda</u> $n$, če obstaja taka $n$-linearna zvezna preslikava $F\colon X\times\ldots\times X \to Y$, da je $P(x) = F(x,\ldots,x)$ za vsak $x \in X$. Če definiramo $\|P\| = \sup\{\|Px\|;\|x\| = 1\}$, postane prostor vseh zveznih homogenih polinomov reda $n$ iz $X$ v $Y$ Banachov prostor.

Denimo, da imamo za vsako naravno število $n$ dan zvezen homogen polinom $P_n$ reda $n$ iz $X$ v $Y$. Potem pravimo, da je $\{P_n; n \in N\}$ <u>formalna potenčna vrsta</u> iz $X$ v $Y$. To vrsto pišemo tudi kot $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$. Pravimo, da je $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ <u>konvergentna</u>, če je $\limsup_{n\to\infty} \|P_n\|^{1/n} < \infty$. (Inverzno vrednost tega števila imenujemo konvergenčni radij te vrste.)

<u>Definicija</u>. Naj bo $U$ odprta podmnožica v $X$. Preslikava $f\colon U \to Y$ je <u>analitična</u>, če za vsak $x_o \in U$ obstaja konvergentna formalna potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ iz $X$ v $Y$ in okolica $V$ točke $x_o$, da je za vsak $x \in V$ izpolnjeno $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-x_o)$.

Če je $f\colon U \to Y$ analitična, je $f$ v $U$ neskončnokrat odvedljiva v Fréchétovem smislu.

Naj bo $M$ topološki prostor. <u>Karta na</u> $M$ je trojica $(U,f,X)$, kjer je $U$ odprta podmnožica v $M$, $X$ realen Banachov prostor in $f$ homeomorfizem množice $U$ na odprto podmnožico v $X$.

Karti $(U,f,X)$ in $(U',f',X')$ na $M$ sta <u>kompatibilni</u>, če je bodisi $U \cap U' = \emptyset$ bodisi $U \cap U' \neq \emptyset$ in sta preslikavi $f \circ f'^{-1}: f'(U \cap U') \longrightarrow f(U \cap U')$ ter $f' \circ f^{-1}: f(U \cap U') - f'(U \cap U')$ analitični. Množica $\mathcal{A} = (U_i, f_i, E_i)$ kart na $M$ je <u>atlas na</u> $M$, če je $\{U_i\}$ pokritje za $M$ in so karte v $\mathcal{A}$ paroma kompatibilne. Atlasa $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ na $M$ sta <u>ekvivalentna</u>, če je $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ spet atlas na $M$. Ekvivalenčne razrede atlasov na $M$ imenujemo <u>analitične strukture na</u> $M$. Prostor $M$ s fiksno analitično strukturo imenujemo <u>realna analitična Banachova mnogoterost</u>. V prihodnje bomo "realna" in "Banachova" večkrat kar spuščali in govorili o <u>analitični mnogoterosti</u> $M$. Vsak atlas iz dane analitične strukture na $M$ imenujemo <u>atlas mnogoterosti</u> $M$. Karte atlasa mnogoterosti $M$ so <u>karte mnogoterosti</u> $M$. Pravimo, da je karta $(U,f,X)$ mnogoterosti $M$ <u>karta mnogoterosti</u> $M$ <u>v točki</u> $x$, če je $x \in U$.

Naj bo $M$ analitična mnogoterost in $N \subset M$. Denimo, da za vsak $x \in N$ obstaja karta $(U,f,X)$ mnogoterosti $M$ in razcep $X = X' \oplus X''$ prostora $X$ na dva zaprta podprostora, tako da je $f|U \cap N : U \cap N \longrightarrow f(U) \cap X'$ homeomorfizem. Potem obstaja natančno ena analitična struktura na $N$, tako da so $(U \cap N, f|U \cap N, X')$ karte mnogoterosti $N$. Pravimo, da je $N$ s to strukturo <u>podmnogoterost</u> mnogoterosti $M$.

"Tangentni funktor" $T$ za analitične mnogoterosti je definiran kot običajno. Naj bo $M$ analitična mnogoterost, $x \in M$ in $(U,f,X)$ karta mnogoterosti $M$, tako da je $x \in U$. Oglejmo si dvojice $(K,e)$, kjer je $K = (U,f,X)$ karta mnogoterosti $M$ v točki $x$ in $e \in X$. Definirajmo: $(K,e)$ in $(K',e')$ sta ekvivalentni, če odvod preslikave $f' \circ f^{-1}$ v točki $x$ preslika $e$ v $e'$. Ekvivalenčne razrede imenujemo <u>tangentne vektorje mnogoterosti</u> $M$ <u>v</u> $x$. Vsi tangentni vektorji v $x$ sestavljajo množico $T_xM$. Če je $K$ fiksna karta v $x$, preslikava $(K,e) \longmapsto e$ določa bijekcijo iz $T_xM$ v $X$. Množico $T_xM$ opremimo s strukturo Banachovega prostora, tako da je ta bijekcija izomorfizem. Lahko je videti, da je ta struktura do izomorfizma neodvisna od izbire karte $K$. $T_xM$ s to strukturo imenujemo <u>tangentni prostor mnogoterosti</u> $M$ <u>v točki</u> $x$.

Če je $N$ podmnogoterost mnogoterosti $M$ in $x \in N$, je $T_x N$ na naraven način zaprt podprostor z zaprtim komplementom v $T_x M$.

Naj bosta $M,N$ analitični mnogoterosti. Precizirajmo: zvezna preslikava $h: M \longrightarrow N$ je <u>analitična</u>, če za vsako karto $L = (V,g,Y)$ mnogoterosti $N$ in vsako karto $K = (U,f,X)$ mnogoterosti $M$, tako da je $h(U) \subset V$, velja, da je $g \circ h \circ f^{-1} : f(U) \longrightarrow g(V)$ analitična. Definirajmo še preslikavo $T_x h : T_x M \longrightarrow T_{h(x)} N$ s $(T_x h)(K,e) = [L, D(g \circ h \circ f^{-1})_{f(x)} e]$, kjer $D$ pomeni odvod. Velja, da je $T_x h$ zvezna in linearna.

Če sta $M,N$ analitični mnogoterosti, obstaja natančno ena analitična struktura na $M \times N$, tako da so njene karte produkti kart za $M$ in $N$.

Naj bo zdaj $G$ topološka grupa in realna analitična Banachova mnogoterost. Če je preslikava $(x,y) \longmapsto xy^{-1}$ iz $G \times G$ v $G$ analitična, pravimo, da je $G$ <u>realna Banach-Liejeva grupa</u> ( kratko <u>realna Liejeva grupa</u> ali celo Liejeva grupa).

<u>Primer</u>. Naj bo $X$ Banachov prostor in $GL(X)$ grupa vseh obrnljivih operatorjev iz $\mathcal{L}(X)$ (z normno topologijo). $GL(X)$ je odprta podmnožica v $\mathcal{L}(X)$ in tako analitična mnogoterost. Lahko je videti, da sta produkt in prehod k inverznemu elementu analitični preslikavi. Tako je $GL(X)$ Liejeva grupa.

Naj bo $G$ Liejeva grupa in $H$ podgrupa v $G$. Pravimo, da je $H$ <u>Liejeva podgrupa v</u> $G$, če je $H$ podmnogoterost v $G$.

3.1. <u>Izrek</u>. ([6,str.101]). Naj bo $G$ Liejeva grupa in $H$ podgrupa v $G$. Če obstaja taka odprta okolica $U$ enote v $G$, da je $H \cap U$ podmnogoterost v $G$, je $H$ Liejeva podgrupa v $G$.

Naj bo $G$ Liejeva grupa in $e \in G$ nevtralni element. Naj bo $(U,f,X)$ karta za $G$ v $e$. Prostor $T_e(G)$ lahko, kot vemo, opremimo s strukturo Banachovega prostora, tako da je izomorfen prostoru $X$ . Še več, v $T_e(G)$ lahko vpeljemo komutator $[\ ,\ ]$ , tako da postane $T_e(G)$ Liejeva algebra in da je preslikava $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ zvezna. Prostor $T_e(G)$ s to strukturo imenujemo Liejeva algebra grupe $G$ in označimo kratko $L(G)$ . Obstaja natanko ena analitična preslikava $\varphi : L(G) \to G$ , tako da je $\varphi(0) = e$ , $T_0\varphi = id_{L(G)}$ in $\varphi((s+s')b) = \varphi(sb)\varphi(s'b)$ za poljubne skalarje $s,s'$ ter $b \in L(G)$ . Preslikavo $\varphi$ imenujemo eksponentna preslikava za $G$ . Če je $f$ poljuben morfizem (to je, analitičen homomorfizem) iz Liejeve grupe skalarjev v $G$ in $(T_0f)1 = b$ , je $f(s) = \varphi(sb)$ za vsak skalar $s$ . Povejmo še, da eksponentna preslikava preslika $L(G)$ na neko okolico elementa $e$ v $G$ in da je za poljubna $x,y \in L(G)$

$$\varphi(x+y) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(n^{-1}x)\varphi(n^{-1}y))^n \qquad (1)$$

$$\varphi([x,y]) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(n^{-1}x)\varphi(n^{-1}y)\varphi(n^{-1}x)^{-1}\varphi(n^{-1}y)^{-1})^{n^2} \qquad (2)$$

Če je $G = GL(X)$ , kjer je $X$ Banachov prostor, je lahko videti, da je $L(G) = \mathcal{L}(X)$ , komutator običajni komutator ( $[A,B] = AB - BA$ ) in eksponentna preslikava kar običajna.

Oglejmo si Campbell-Hausdorffovo formulo v Dynkinovi verziji ([6, str.60-63]):

3.2. Izrek. Naj bosta $U,V$ taka operatorja na Banachovem prostoru $X$ , da je $\|U\| + \|V\| < (1/2)\ln 2$ . Potem obstaja $\log(\exp(U)\exp(V)) = h(U,V)$ in ga lahko zapišemo kot konvergentno vrsto, v kateri nastopajo kot členi $U,V$ ter operatorji oblike $[W_1[W_2[\ldots[W_{n-1},W_n]]\ldots]$ , kjer je $W_i$ bodisi $U$ bodisi $V$ , pomnoženi z racionalnimi števili. Velja še

$$\|h(U,V)\| \leq -(1/2)\ln(2 - \exp(2(\|U\|+\|V\|)))$$

Naj bo še $L$ Liejeva algebra in normiran prostor obenem. Obstaja naj tak $M > 0$ , da je $\|[x,y]\| \leq M\|x\|\|y\|$ za $x,y \in L$ . Vstavimo v vrsto za funkcijo $h(\ ,\ )$ kot argumenta elementa $x,y \in L$ . Potem nam to določa analitično funkcijo

$$h: \{(x,y) \in L \times L; \|x\|+\|y\| < M^{-1}\ln 2\} \longrightarrow L$$

Realne Liejeve grupe imajo nekatere prav lepe lastnosti. Tako velja ([6, str. 225-227]):

3.3. Izrek. Naj bosta $G, H$ realni Liejevi grupi in $f: G \to H$ zvezen homomorfizem. Potem je $f$ analitičen.

3.4. Izrek. Naj bo $G$ topološka grupa in $U$ odprta simetrična okolica enote $e$ v $G$. Denimo, da je $U$ opremljena z realno analitično strukturo in da obstaja odprta okolica $V$ enote v $G$, da je $V^2 \subset U$ in da je
a) $x \longmapsto x^{-1}$ analitična preslikava iz $U$ v $U$
b) $(x,y) \longmapsto xy$ analitična preslikava iz $V \times V$ v $U$
(Od tod sledi, da je $U$ realna lokalna Liejeva grupa ali realna Liejeva grupuskula v Bourbakijevi terminologiji.) Potem je $G$ realna Liejeva grupa.

Naj bo zdaj $X$ Banachov prostor in $\mathcal{H}$ podgrupa v $GL(X)$, opremljena z normno topologijo. Vprašamo se lahko, kdaj je $\mathcal{H}$ realna Liejeva grupa ali celo Liejeva podgrupa v $GL(X)$. Pa naj bo $L(\mathcal{H})$ Liejeva algebra za $\mathcal{H}$ in $\varphi: L(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ eksponentna preslikava. Vzemimo poljuben $a \in L(\mathcal{H})$. Preslikava $\varphi_a$ iz $\mathbb{R}$ v $\mathcal{H}$, dana s $s \longmapsto \varphi(sa)$, nam določa zvezno enoparametrično grupo v $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X)$. Obstaja natanko en operator $F(a) \in \mathcal{L}(X)$, da je $\exp(sF(a)) = \varphi(sa)$ za vsak $s \in \mathbb{R}$. Iz (1) in (2) (formuli pred izrekom 3.2) takoj sledi, da je $F: L(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ (realno) linearna preslikava, ki ohranja komutator. Če je $F(a) = 0$, je $\exp(sF(a)) = I$ za vsak $s$ in od tod $\varphi_a(s) = I$ za vsak $s \in \mathbb{R}$. Ker je $\varphi_a$ kompozitum preslikave $s \longmapsto sa$ in preslikave $\varphi$, je $(T_0\varphi_a)1 = a$. Od tod je seveda $a = 0$, se pravi, da je $F$ injektivna preslikava. Jasno je, da je $F$ homeomorfizem na $F(L(\mathcal{H}))$. Če v tem smislu izenačimo $L(\mathcal{H})$ in $F(L(\mathcal{H}))$, lahko rečemo, da je $L(\mathcal{H})$ podprostor v $\mathcal{L}(X)$ in da je eksponentna preslikava kar običajna. Še več, $L(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{L}(X);\ \exp(sT) \in \mathcal{H}\}$ za vsak $s \in \mathbb{R}$. Res, če je $\exp(sT) \in \mathcal{H}$ za vsak $s \in \mathbb{R}$, je $s \longmapsto \exp(sT)$ zvezen homomorfizem Liejeve grupe $\mathbb{R}$ v realno Liejevo grupo $\mathcal{H}$. Označimo ga s $\psi$. Po izreku 3.3 je $\psi$ analitičen in torej morfizem Liejevih grup. Označimo $(T_0\psi)1 = a \in L(\mathcal{H})$ . Potem je, kot smo rekli, $\psi = \varphi_a$ in od tod $F(a) = T$ .

Povzemimo: Če je $\mathcal{H} \subset GL(X)$ in $\mathcal{H}$ realna Liejeva grupa v normni topologiji, je $L(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{L}(X); \exp(sT) \in \mathcal{H}\}$ za vsak $s \in \mathbb{R}$ in eksponentna preslikava iz $L(\mathcal{H})$ v $\mathcal{H}$ kar običajna.

Zdaj bomo stvari nekoliko obrnili.

3.5. Lema. Naj bo $X$ Banachov prostor in $\mathcal{H}$ zaprta podgrupa v $GL(X)$ . Označimo $\mathcal{H}_I = \{T \in \mathcal{L}(X); \exp(sT) \in \mathcal{H}\}$ za vsak $s \in \mathbb{R}$ . Potem je $\mathcal{H}_I$ zaprt realen linearen podprostor v $\mathcal{L}(X)$ in celo realna Liejeva algebra za običajni komutator: $[T,S] = TS - ST$ .

Dokaz. Iz formul (1) in (2) pred izrekom 3.2 takoj sledi, da je $\mathcal{H}_I$ realna Liejeva algebra z običajnim komutatorjem. Pa denimo, da imamo zaporedje $\{T_n\} \subset \mathcal{H}_I$ in da $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T \in \mathcal{L}(X)$ . Pri fiksnem $s$ $\exp(sT_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(sT)$ . Ker je $\mathcal{H}$ zaprta, je tudi $\exp(sT) \in \mathcal{H}$ .

3.6. Trditev. Naj bosta $\mathcal{H}$ , $\mathcal{H}_I$ kot v 3.5 . Denimo, da je $\exp(\mathcal{H}_I)$ okolica enote v $\mathcal{H}$ . Potem je $\mathcal{H}$ realna Liejeva grupa z Liejevo algebro $\mathcal{H}_I$ .

Dokaz. Naj bo $\mathcal{U}'$ odprta okolica identitete $I$ v $\mathcal{H}$ , vsebovana v $\exp(\mathcal{H}_I)$ in v odprti enotni krogli okrog $I$ , ter $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cap \mathcal{U}'^{-1}$ . Tudi $\mathcal{U}$ je odprta okolica identitete v $\mathcal{H}$ . Vsak $A \in \mathcal{U}$ lahko zapišemo na en in en sam način kot $\exp(\log A)$, kjer je logaritem definiran z ustrezno potenčno vrsto. Seveda je $\log A \in \mathcal{H}_I$ in $\log(\mathcal{U})$ odprta podmnožica v $\mathcal{H}_I$ . Okolico $\mathcal{U}$ imamo lahko za analitično mnogoterost z eno samo karto $(\mathcal{U}, \log, \mathcal{H}_I)$ . Takoj vidimo, da je preslikava $x \longmapsto x^{-1}$ iz $\mathcal{U}$ v $\mathcal{U}$ analitična. Res: analitična je preslikava iz $\log(\mathcal{U})$ v $\log(\mathcal{U})$ , dana z $y \longmapsto \log(\exp(y)^{-1}) = -y$ . Naj bo zdaj $\mathcal{V}$

odprta okolica identitete v $\mathcal{H}$ , vsebovana v odprti krogli s polmerom r okrog identitete in taka, da je $\mathcal{V}^2 \subset \mathcal{U}$ . Videli bomo, da je preslikava iz $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ v $\mathcal{U}$ , dana z $(x,y) \longmapsto xy$ , analitična. Karta za $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ je kar $(\mathcal{V}\times\mathcal{V}, \log\times\log, \mathcal{H}_I\times\mathcal{H}_I)$ . Tako je treba pokazati samo še, da je $(u,v) \mapsto \log(\exp(u)\exp(v))$ analitična preslikava iz $\log(\mathcal{V})\times\log(\mathcal{V})$ v $\log(\mathcal{U})$ . Prav to pa trdi Campbell-Hausdorffov izrek (3.2), če je le polmer r krogle, v kateri je vsebovana $\mathcal{V}$ , dovolj majhen. Po 3.4 je $\mathcal{H}$ res realna Liejeva grupa.

S tem orožjem se bomo lotili najprej Banachovih prostorov z razširjeno hiperortogonalno bazo. Napišimo še tale izrek ([19, str. 309]):

3.7. <u>Izrek</u>. Naj bo H kompleksen Hilbertov prostor in $T\in\mathcal{L}(H)$ normalen operator. Obstaja homomorfizem $f \longmapsto f(T)$ algebre vseh omejenih Borelovih funkcij na $\sigma(T)$ v $\mathcal{L}(H)$ , tako da

$$\text{identiteta} \longmapsto T$$
$$\overline{f}(T) = f(T)^*$$
$$\|f(T)\| \leq \sup\{|f(t)|; t\in\sigma(T)\}$$

3.8. <u>Izrek</u>. Naj bo X kompleksen Banachov prostor z razširjeno hiperortogonalno bazo in $\mathcal{G}$ grupa vseh linearnih surjektivnih izometrij prostora X , opremljena z normno topologijo. Potem je $\mathcal{G}$ realna Liejeva grupa v GL(X) . Povezana komponenta $\mathcal{G}_0$ identitete v grupi $\mathcal{G}$ pa je unitarna grupa W*-algebre $\mathcal{A} = \mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X)$ . (Tu je $\mathcal{H}(X)$ prostor vseh hermitskih operatorjev na X ).

<u>Dokaz</u>. Po izreku 2.5 je $\mathcal{A} = \mathcal{H}(X) + i\mathcal{H}(X)$ W*-algebra in obstaja družina $\{G_z; z\in Z\}$ paroma pravokotnih neničelnih centralnih projektorjev v $\mathcal{A}$ , da je $G_zX = X_z$ Hilbertov podprostor v X za vsak z in da je $A \longmapsto \{G_zAG_z|X_z\ ; z\in Z\}$

$*$-izomorfizem algebre $\mathcal{A}$ na direktno vsoto algebr $\mathcal{L}(X_z)$ . Z $\mathcal{U}$ označimo grupo unitarnih operatorjev algebre $\mathcal{A}$ .

Če je $V \in \mathcal{G}$ , $V$ ohranja ali le zamenja podprostore $X_z$ (2.5). Denimo, da $V$ ohranja vse $X_z$ . Po 2.5 je $V|X_z = V_z$ unitaren operator za vsak $z$ . (Tako je $\mathcal{U}$ ravno množica vseh izometrij v $\mathcal{G}$ , ki ohranjajo vse podprostore $X_z$ .) Spekter operatorja $V_z$ leži na enotni krožnici. Obstaja funkcija $\ell : \sigma(V_z) \longrightarrow \mathbb{R}$ , zvezna povsod, razen morda pri $t = 1$ , da je $\exp(i\ell(T)) = t$ in $0 \leqslant \ell(t) < 2\pi$ za vsak $t \in \sigma(V_z)$ . Vzemimo homomorfizem iz 3.7 in označimo $A_z = \ell(V_z) \in \mathcal{L}(X_z)$ . Ker je $\ell$ realna funkcija, je $A_z$ hermitski operator. Velja še $\exp(iA_z) = V_z$ in $\|A_z\| \leqslant 2\pi$ . Obstaja natanko en hermitski operator $A \in \mathcal{A}$ , da je $A|X_z = A_z$ . Potem je seveda $\exp(iA) = V$ in $V$ leži na enoparametrični grupi $\{\exp(itA); t \in \mathbb{R}\}$ v $\mathcal{G}$ . Dokazali smo torej, da je $\mathcal{U}$ povezana in tako $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}_0$ .

Pa denimo, da je $V \in \mathcal{U}$ in $W \in \mathcal{G} - \mathcal{U}$ . Potem $W$ prevede neki podprostor $X_z$ v podprostor $X_{z'}$, kjer je $z' \neq z$ . Naj bo $x \in X_z$ . Iz računa $\|G_z(V-W)x\| = \|G_zVx - G_zG_{z'}Wx\| = \|G_zVx\| = \|Vx\| = \|x\|$ sledi, da je $\|G_z(V-W)\| \geqslant 1$ in od tod $\|V-W\| \geqslant 1$ . Torej sta tako $\mathcal{U}$ kot $\mathcal{G}-\mathcal{U}$ odprti podmnožici v $\mathcal{G}$ . Od tod je res $\mathcal{U} = \mathcal{G}_0$ .

Naj bo zdaj $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{L}(X); G_zAG_z|X_z \in \mathcal{H}(X_z)$ za vsak $z \in Z\}$. Očitno je $\mathcal{K}$ realen linearen podprostor v $\mathcal{L}(X)$ . Pokažimo, da je $\mathcal{K}$ zaprt! Res, če je $\{A_n\}$ zaporedje elementov v $\mathcal{K}$ in $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \in \mathcal{L}(X)$ , $G_zA_nG_z \xrightarrow[n\to\infty]{} G_zAG_z$ in seveda $G_zA_nG_z|X_z \xrightarrow[n\to\infty]{} G_zAG_z|X_z$ . Ker je $\mathcal{H}(X_z)$ zaprt, je tudi $G_zAG_z|X_z \in \mathcal{H}(X_z)$ . Označimo še $\mathcal{L} = i\mathcal{H}(X)$ . Tudi $\mathcal{L}$ je zaprt realen linearen podprostor v $\mathcal{L}(X)$ . Očitno je $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{K}$ .

Označimo zdaj $\theta = \{A \in GL(X); \|A-I\| < 1\}$ . Vemo, da je $(\theta, \log, \mathcal{L}(X))$ karta za $GL(X)$ v $I$ . Vemo še, da $\exp(\mathcal{L}) = \mathcal{U} \supset \theta \cap \mathcal{G}$. Tako je očitno $\log|\theta\cap\mathcal{G} : \theta\cap\mathcal{G} \longrightarrow \log(\theta)\cap\mathcal{G}$ homeomorfizem in je $\theta\cap\mathcal{G}$ podmnogoterost v $GL(X)$ . Po 3.1 je $\mathcal{G}$ Liejeva podgrupa v $GL(X)$ .

Denimo zdaj, da prostor $X$ zadošča samo pogojem izreka 2.2 . Spet je $\mathcal{A} = \mathcal{H}(X) + i\,\mathcal{H}(X)$ algebra in obstaja družina $\{G_z; z \in Z\}$ paroma pravokotnih centralnih projektorjev v $\mathcal{A}$ , da je $G_z \mathcal{A} G_z$ faktor tipa I za vsak $z$ in da je $\mathcal{A}$ direktna vsota idealov $G_z \mathcal{A} G_z$ . Spet naj bo $\mathcal{U}$ unitarna grupa algebre $\mathcal{A}$ , $\mathcal{G}$ grupa izometrij prostora $X$ in $\mathcal{G}_0$ njena povezana komponenta identitete. S $\mathcal{H}$ označimo podgrupo v $\mathcal{G}$ , sestavljeno iz vseh izometrij, ki ohranjajo vse $X_z$ . Če je $V \in \mathcal{G}$ , $V$ ohranja ali le zamenja podprostore $X_z = G_z X$ . Prav kot v dokazu prejšnjega izreka vidimo, da je $\mathcal{H}$ odprta in zaprta v $\mathcal{G}$ . Tako $\mathcal{H} \supset \mathcal{G}_0$ . Očitno je $\mathcal{H}$ tudi edinka v $\mathcal{G}$ in $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ diskretna grupa. Iz prejšnjega dokaza vidimo tudi, da je $\mathcal{U}$ povezana in tako $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}_0$. Dokažimo, da je $\mathcal{U}$ zaprta edinka v $\mathcal{H}$ . Res: naj bo $V \in \mathcal{H}$ in $D \in \mathcal{U}$ . Potem je $V|X_z = U_z W_z$ , kjer je $U_z$ unitaren element v $G_z \mathcal{A} G_z | X_z$ in $W_z$ komutira z vsemi elementi v $G_z \mathcal{A} G_z | X_z$ . Tako je $VDV^{-1}|X_z = (V|X_z)(D|X_z)(V^{-1}|X_z) = U_z W_z (D|X_z) W_z^{-1} U_z^{-1} = U_z (D|X_z) U_z^{-1} \in G_z \mathcal{A} G_z | X_z$ . Obstaja $U \in \mathcal{A}$ , da je $G_z U G_z | X_z = U_z$ za vsak z. Seveda je $U$ unitaren. Tako je $VDV^{-1} = UDU^{-1} \in \mathcal{U}$ . Torej je $\mathcal{U} < \mathcal{G}_0 < \mathcal{H} < \mathcal{G}$ , pri čemer je $\mathcal{U}$ zaprta edinka v $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$ odprta edinka v $\mathcal{G}$ .

Zdaj prehajamo k drugi točki našega programa. Pri privzetju nekaterih lokalnih lastnosti grupe izometrij Banachovega prostora bomo skušali dokazati, da je ta grupa Liejeva. Zapišimo kar

3.9. Izrek. Naj bo $X$ Banachov prostor (realen ali kompleksen) in $\mathcal{K}$ zaprta omejena podgrupa v $GL(X)$ . Denimo, da obstajata dovolj majhni okolici $\mathcal{U}$ , $\mathcal{V}$ identitete v $\mathcal{K}$ , tako da lahko vsak element iz $\mathcal{V}$ povežemo z identiteto z odvedljivo potjo po $\mathcal{U}$ . Potem je $\mathcal{K}$ v normni topologiji realna Banach-Liejeva grupa.

Za dokaz bomo potrebovali pomožne rezultate:

3.10. Lema. Naj bo $X$ normiran prostor in $A, B \in \mathcal{L}(X)$ . Potem je za vsako naravno število $n$

$$\|(I+n^{-1}(A+B))^n - (I+n^{-1}A)^n\| \leq \exp(\|A\|)(\exp(\|B\|)-1)$$

Dokaz. Računajmo:

$$(I+n^{-1}(A+B))^n = I + \binom{n}{1}n^{-1}(A+B) + \ldots + \binom{n}{n}(n^{-1}(A+B))^n =$$

$$= I + \binom{n}{1}n^{-1}A + \binom{n}{2}(n^{-1}A)^2 + \ldots + \binom{n}{n}(n^{-1}A)^n +$$

$$+ \binom{n}{1}n^{-1}B + \binom{n}{2}n^{-2}(AB+BA+B^2) + \ldots =$$

$$= (I+n^{-1}A)^n + R$$

Pri tem pa je

$$\|R\| \leqslant \binom{n}{1}n^{-1}\|B\| + \binom{n}{2}n^{-2}(\|A\|\|B\| + \|B\|\|A\| + \|B\|^2) + \ldots =$$

$$= (1+n^{-1}(\|A\|+\|B\|))^n - (1+n^{-1}\|A\|)^n =$$

$$= (1+n^{-1}\|A\|)^n((1+\|B\|(n+\|A\|)^{-1})^n - 1) \leqslant \exp(\|A\|)(\exp\|B\|-1)$$

3.11. Lema. Naj bo $X$ Banachov prostor in $\mathcal{K}$ zaprta podgrupa v $GL(X)$. Denimo, da je $U(t)$ odvedljiva pot v $\mathcal{K}$ in $A(t) = U^{-1}(t)U'(t)$. Potem je $\{\exp(sA(t)); s \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{K}$, se pravi, da je $A(t) \in \mathcal{K}_I$ (oznaka iz 3.5).

Dokaz. Zapišimo $U(t+s) = U(t) + sU'(t) + o(s) = U(t)(I+sA(t)) + o(s)$. Tako je $U(t)^{-1}U(t+s) = I + sA(t) + B(s)$, pri čemer je $\lim\limits_{s\to 0} s^{-1}\|B(s)\| = 0$. Fiksirajmo zdaj še $s$ in zapišimo

$$U(t)^{-1}U(t+(s/n)) = I + (s/n)A(t) + B(s/n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Vzemimo poljuben pozitiven $\varepsilon$ in naj bo $n$ tako velik, da je $\|B(s/n)\| < \varepsilon(s/n)$. Označimo $sA(t) = A$ in $nB(s/n) = B$. Vsekakor je $(I+n^{-1}(A+B))^n \in \mathcal{K}$. Ker $(I+n^{-1}A)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp A$, je po 3.10

$$\|(I+n^{-1}(A+B))^n - \exp A\| \leqslant \exp(\|A\|)(\exp(\|B\|)-1)$$

Po predpostavki je $\|B\| = \|nB(s/n)\| < \varepsilon s$. Za dovolj majhen $\varepsilon$ je izraz $\exp(\varepsilon s) - 1$ poljubno majhen. V vsaki okolici operatorja $\exp(sA(t))$ je torej element množice $\mathcal{K}$. Ker je $\mathcal{K}$ zaprta, je lema dokazana.

3.12. Lema. Naj bosta $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_I$ kot v 3.5 . Denimo, da imamo množico operatorjev $A_0,\ldots,A_n \in \mathcal{H}_I$ , tako da je $\|A_i\| < (1/32)\ln 2$ in

$$\Big\| \prod_{j=1}^{i} \exp(A_j) - I \Big\| < (1/4)\ln 2 \qquad (i=0,..,n) \qquad (1)$$

Potem obstaja $B \in \mathcal{H}_I$ , da je $\prod_{j=0}^{m} \exp A_j = \exp B$ in $\|B\| < 1$ .

Dokaz. Po Campbell-Hausdorffovi formuli (3.2) lahko zapišemo $\exp(A_0)\exp(A_1) = \exp B_1$ , kjer je $B_1 \in \mathcal{H}_I$ . Ocenimo:

$\|B_1\| \leqslant -(1/2)\ln(2 - \exp(2(\|A_0\| + \|A_1\|))) \leqslant$

$\leqslant -(1/2)\ln(2 - \exp((1/8)\ln 2)) = -(1/2)\ln(2 - 2^{1/8}) < 1$

Po oceni (1) je $\|\exp(B_1) - I\| < (1/4)\ln 2$ . Ker je

$B_1 = \log(\exp B_1) = \log(I + (\exp(B_1)-I)) =$

$= \exp(B_1)-I - (1/2)(\exp(B_1)-I)^2 + \ldots$ , je

$\|B_1\| \leqslant \|\exp(B_1)-I\| + (1/2)\|\exp(B_1)-I\|^2 + \ldots \leqslant$

$\leqslant (1/4)\ln 2 + (1/2)((1/4)\ln 2)^2 + \ldots = -\ln(1-(1/4)\ln 2) \doteq 0.19$ .

Ker je $(3/8)\ln 2 \doteq 0.26$ , je $\|B_1\| < (3/8)\ln 2$ . Od tod je

$\|B_1\| + \|A_2\| < (3/8)\ln 2 + (1/32)\ln 2 < (1/2)\ln 2$ .

Spet lahko uporabimo Campbell-Hausdorffovo formulo in zapišemo $\exp(B_1)\exp(A_2) = \exp B_2$ , kjer je $B_2 \in \mathcal{H}_I$ in $\|B_2\| < (3/8)\ln 2$ itd. Končno je $\prod_{j=0}^{m} \exp A_j = \exp B$ , kjer je $B \in \mathcal{H}_I$ in $\|B\| < (3/8)\ln 2 < 1$ .

Dokaz izreka 3.9 . Naj bo $M = \sup\{\|T\|; T \in \mathcal{K}\}$ . Ker je $I \in \mathcal{K}$ , je $M \geqslant 1$ . Definirajmo novo normo $|||\ |||$ na $X$ takole:

$$|||x||| = \sup\{\|Tx\|; T \in \mathcal{K}\} \qquad (x \in X)$$

Očitno je $|||x||| \leqslant M\|x\|$ . Ker je $\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leqslant M\|Tx\|$ za vsak $T \in \mathcal{K}$ , je $\|x\| \leqslant M|||x|||$ in je tako nova norma ekvivalentna prvotni. Tudi norma, ki jo $|||\ |||$ inducira v $\mathcal{L}(X)$ , je ekvivalentna običajni: za $x \neq 0$ in $A \in \mathcal{L}(X)$ je

$$M^{-2}\|Ax\|/\|x\| \leqslant |||Ax|||\,/\,|||x||| \leqslant (M\|Ax\|)/(M^{-1}\|x\|) = M^{-2}\|Ax\|/\|x\|$$

Vsi elementi v $\mathcal{K}$ so v novi normi izometrije. Torej lahko mirno privzamemo, da je $\mathcal{K}$ zaprta podgrupa v grupi surjektivnih linearnih izometrij prostora $X$.

Naj bosta $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ okolici z danimi lastnostmi. Privzemimo, da je $\mathcal{U}$ vsebovana v odprti krogli s polmerom $(1/8)\ln 2$. Naj bo $A \in \mathcal{V}$. Obstaja odvedljiva pot $U(t)$ po $\mathcal{K}$, da je $U(0) = I$, $U(1) = A$ in $\|U(t)-I\| < (1/8)\ln 2$ za vsak $t \in [0,1]$.

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$). Za vsak $t \in [0,1]$ obstaja tako pozitivno število $\delta(t)$, da je

$$\|U(t+h) - U(t) - hU'(t)\| < \varepsilon h$$
$$\|(U(t+h) - U(t))U^{-1}(t)U'(t)\| < \varepsilon \qquad (|h| \leqslant \delta(t))$$
$$2\delta(t)\|U'(t)\|^2 < \varepsilon$$
$$2\delta(t)\|U'(t)\| < \varepsilon$$

Intervalčki $(t-\delta(t), t+\delta(t))$ pokrivajo $[0,1]$. Od tod lahko dobimo končno podpokritje tega intervala. Označimo s $t_0, \ldots, t_n$ središča intervalčkov iz tega podpokritja. Mirno lahko privzamemo, da je $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1$. Izberimo za vsak $k$ med $1$ in $n$ še tako točko $s_k$, da je $s_k - t_{k-1} < \delta(t_{k-1})$ in $t_k - s_k < \delta(t_k)$. Privzemimo še, da je $s_0 = 0$ in $s_{n+1} = 1$. Naj bo $A(t) = U(t)^{-1}U'(t)$. Naj bo še $d_k = s_{k+1} - s_k$. Ocenimo zdaj:

$$\|U(s_{k+1}) - U(s_k)\exp(d_k A(t_k))\| =$$
$$= \|U(s_{k+1}) - U(s_k) - d_k U(s_k)U(t_k)^{-1}U'(t_k) -$$
$$- (1/2!)d_k^2 U(s_k)(U(t_k)^{-1}U'(t_k))^2 - \ldots\| \leqslant$$
$$\leqslant \|U(s_{k+1}) - U(s_k) - d_k U'(t_k) - (d_k(U(s_k)-U(t_k))U(t_k)^{-1}U'(t_k))\| +$$
$$+ (1/2!)d_k(d_k\|U'(t_k)\|^2) + (1/3!)d_k(d_k\|U'(t_k)\|^2)(d_k\|U'(t_k)\|) + \ldots <$$
$$< \|U(s_{k+1}) - U(t_k) - (s_{k+1}-t_k)U'(t_k)\| +$$
$$+ \|U(t_k) - U(s_k) - (t_k-s_k)U'(t_k)\| + d_k\varepsilon + (1/2!)d_k\varepsilon + \ldots <$$
$$< \varepsilon(s_{k+1}-t_k) + \varepsilon(t_k-s_k) + \varepsilon d_k(1 + (1/2!) + (1/3!) + \ldots) <$$
$$< 4\varepsilon d_k$$

Od tod hitro sledi, da je za $k = 0,1,\ldots,n$

$$\| U(s_{k+1}) - \prod_{r=0}^{k} \exp(d_r A(t_r)) \| < 4\varepsilon \qquad (1)$$

Res: $\| U(s_{k+1}) - \prod_{r=0}^{k} \exp(d_r A(t_r)) \| =$

$= \| U(s_{k+1}) - U(s_k)\exp(d_k A(t_k)) + U(s_k)\exp(d_k A(t_k)) -$

$- U(s_{k-1})\exp(d_{k-1} A(t_{k-1}))\exp(d_k A(t_k)) + \ldots \| <$

$< 4\varepsilon(d_k + d_{k-1} + \ldots + d_0) = 4\varepsilon s_k \leqslant 4\varepsilon$

Privzemimo zdaj, da je $\varepsilon$ tako majhen, da je $4\varepsilon < (1/8)\ln 2$ in označimo $d_r A(t_r) = A_r$ . Potem je

$\| A_r \| < 2\delta(t_r) \| U'(t_r) \| < \varepsilon < (1/32)\ln 2$ za vsak $r$

Ker je $\| \prod_{r=0}^{k} \exp(A_r) - I \| \leqslant \| \prod_{r=0}^{k} \exp(A_r) - U(s_{k+1}) \| +$ $+ \| U(s_{k+1}) - I \| < (1/8)\ln 2 + (1/8)\ln 2 = (1/4)\ln 2$ po (1) in so po 3.11 vsi $A_r$ v $\mathcal{K}_I$ , lahko uporabimo lemo 3.12 in zapišemo $\prod_{r=0}^{m-1} \exp A_r = \exp B$ , kjer je $B \in \mathcal{K}_I$ in $\|B\| < 1$ .

Naj bo $C = \log A$ . Po (1) je $\| \exp(C) - \exp(B) \| < 4\varepsilon$ . Ker je logaritem v krogu s polmerom 1 okrog identitete zvezna funkcija in je bil $\varepsilon$ poljuben, ugotovimo, da v vsaki okolici operatorja $C$ obstajajo elementi podprostora $\mathcal{K}_I$ . Po 3.5 je $\mathcal{K}_I$ zaprt. Tako je $C \in \mathcal{K}_I$ in trditev 3.6 dokonča dokaz.

Precej eleganten je tale izrek:

3.13. <u>Izrek</u>. Naj bo $X$ Banachov prostor, $\mathcal{G}$ grupa vseh linearnih surjektivnih izometrij na $X$ ter $\mathcal{K}$ maksimalna komutativna podgrupa v $\mathcal{G}$ . Denimo, da obstaja okolica $\mathcal{V}$ identitete v $\mathcal{K}$ (v topologiji, inducirani z normo), tako da za vsak $U \in \mathcal{V}$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja množica $\{U_0, \ldots, U_n\}$ elementov v $\mathcal{K}$ , da je $U_0 = I$ in $U_n = U$ ter $\sum_{i=0}^{n-1} \| U_{i+1} - U_i \|^2 < \varepsilon$ . Potem je $\mathcal{K}$ realna Banach-Liejeva grupa v topologiji, ki jo inducira norma na $\mathcal{L}(X)$ .

Za dokaz bomo potrebovali tri leme. V vseh naj bo $A$ Banachova algebra z enoto $1$ .

3.14. <u>Lema</u>. Naj bo $a \in A$ takšen, da je $\|a-1\| < 1/2$ . Potem je

$$\|\log a\| \leqslant 2\|a-1\| \quad \text{in}$$

$$\|\log(a) - (a-1)\| \leqslant \|a-1\|^2 .$$

<u>Dokaz</u>. $\log a = a-1 - (1/2)(a-1)^2 + \ldots$

$\|\log a\| \leqslant \|a-1\| + \|a-1\|^2 + \ldots = \|a-1\|(1 - \|a-1\|^{-1}) \leqslant 2\|a-1\|$

Podobno se dokaže druga ocena.

3.15. <u>Lema</u>. Naj bo $h \in A$ tak, da je $\|h\| < 1/2$ in $\|\exp h\| = \|\exp(-h)\| = 1$ . Potem je $\|1+h\| \leqslant 1 + \|h\|^2$ .

<u>Dokaz</u>. $\|1+h\| = \|\exp(h)\exp(-h)(1+h)\| \leqslant \|\exp h\|\|\exp(-h)(1+h)\| =$
$= \|\exp(-h)(1+h)\| \leqslant \|\exp(-h)\|\|1+h\| = \|1+h\|$ . Tako je
$\|1+h\| = \|\exp(-h)(1+h)\| = \|(1 - h + (1/2)h^2 - \ldots)(1+h)\| =$
$= \|1 + (1/2)h^2 + ((1/2!)-(1/3!))h^3 + \ldots\| \leqslant$
$\leqslant 1 + (1/2)\|h\|^2 + (1/2)\|h\|^3 + \ldots \leqslant 1 + (1/2)\|h\|^2(1-\|h\|^{-1}) \leqslant$
$\leqslant 1 + \|h\|^2$ .

Pravimo, da je element $a \in A$ <u>poševno simetričen</u>, če je $\|\exp(sa)\| = 1$ za vsako realno število $s$ .

3.16. <u>Lema</u>. Naj bo $a \in A$ tak, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja naravno število $n$ z lastnostjo $\|1 \pm n^{-1}a\| < 1 + n^{-1}\varepsilon$ . Potem je $a$ poševno simetričen.

<u>Dokaz</u>. Funkcija $f(t) = \|1+ta\| - 1$ je konveksna funkcija realne spremenljivke $t$ . Ker je $f(n^{-1}) < \varepsilon n^{-1}$ in $f(0) = 0$ , je $f(t) \leqslant \varepsilon t$ za $t \in [0,n^{-1}]$ . Podobno je $f(t) \leqslant \varepsilon|t|$ za $t \in [-n^{-1},0]$ . Torej je $\|1+ta\| \leqslant 1 + \varepsilon|t|$ za vsak $t \in [-n^{-1},n^{-1}]$. Naj bo zdaj $s$ poljubno realno število in $m$ tako naravno število, da je $m^{-1}|s| < n^{-1}$ . Potem je $\|(1 + (s/m)a)^m\| \leqslant$
$\leqslant \|1 + (s/m)a\|^m \leqslant (1 + \varepsilon(|s|/m))^m \leqslant \exp(\varepsilon|s|)$ po prejšnji oceni. Ker je $\lim_{m\to\infty} (1 + (s/m)a)^m = \exp(sa)$ , je tudi

$\|\exp(sa)\| \leqslant \exp(\varepsilon|s|)$ . No, $\varepsilon$ je bil poljuben in je tako $\|\exp(sa)\| \leqslant 1$ . Ker je tudi $\|\exp(-sa)\| \leqslant 1$ , je jasno, da je $\|\exp(sa)\| = 1$ . Tako je $a$ res poševno simetričen.

<u>Dokaz izreka 3.13</u> . Ker je $\mathcal{K}$ maksimalna komutativna podgrupa v $\mathcal{G}$ in je topologija na $\mathcal{G}$ Hausdorffova, je $\mathcal{K}$ zaprta v $\mathcal{G}$ in tako v $GL(X)$ . Privzamemo lahko, da je okolica $\mathcal{V}$ vsebovana v odprti enotni krogli s središčem v $I$ . Naj bo $U \in \mathcal{V}$ . Pokažimo, da je $A = \log U$ poševno simetričen operator. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ ( $\varepsilon < 1$ ) . Po predpostavki lahko najdemo elemente $U_0,\ldots,U_n$ v $\mathcal{K}$ , da je $U_0 = I$ , $U_n = U$ ter $\sum_{i=0}^{n-1} \|U_{i+1}-U_i\|^2 < (1/4)\varepsilon$ . Po 3.14 je $\|\log(U_i^{-1}U_{i+1})\| \leqslant$ $\leqslant 2\|U_i^{-1}U_{i+1}-I\| = 2\|U_{i+1}-U_i\|$ . Ker je $\mathcal{K}$ komutativna, je $\log(U_i^{-1}U_{i+1}) = \log(U_{i+1}) - \log(U_i)$ in tako $A = \log U =$ $= \sum_{i=0}^{n-1}(\log(U_{i+1})-\log(U_i))$ . Z uporabo leme 3.15 vidimo, da je $\|I \pm n^{-1}A\| = n^{-1}\|nI \pm A\| = n^{-1}\|\sum(I \pm \log(U_i^{-1}U_{i+1}))\| \leqslant$ $\leqslant n^{-1}\sum(1 + \|\log(U_i^{-1}U_{i+1})\|^2) \leqslant n^{-1}\sum(1 + 4\|U_{i+1}-U_i\|^2) <$ $< n^{-1}(n + \varepsilon) = 1 + n^{-1}\varepsilon$ .

Po 3.16 je $A$ res poševno simetričen operator. Seveda $A$ komutira z vsemi elementi v $\mathcal{K}$ . Tako tudi za vsako realno število $t$ izometrija $\exp(tA)$ komutira z vsemi elementi v $\mathcal{K}$. Ker je $\mathcal{K}$ maksimalna komutativna podgrupa v $\mathcal{G}$ , je $\exp(tA) \in \mathcal{K}$ . Po 3.6 takoj zaključimo, da je $\mathcal{K}$ Liejeva grupa.

V nekomutativnem primeru vsa stvar na žalost ni videti tako preprosta. Pri nekoliko ostrejših pogojih pa vseeno pridemo do istih zaključkov:

Definicija. Naj bo $X$ normiran prostor in $f: [a,b] \longrightarrow X$ funkcija. Če je $D = \{a=d_0 < d_1 < \dots < d_n=b\}$ poljubna končna delitev intervala $[a,b]$, naj bo $V_D(f) = \sum_D \|f(d_i)-f(d_{i-1})\|$. Če obstaja sup $V_D(f)$ po vseh mogočih delitvah $D$, mu pravimo krepki totalni razmah funkcije $f$ na $[a,b]$ in ga označimo z $V(f;a,b)$. Če je $p: [0,1] \longrightarrow X$ pot in $V(p;0,1)$ obstaja, pravimo, da je pot $p$ izmerljiva (rektifikabilna) in $V(p;0,1)$ njena dolžina.

3.17. Izrek. Naj bo $X$ Banachov prostor in $\mathcal{G}$ grupa vseh linearnih surjektivnih izometrij prostora $X$, opremljena z normno topologijo. Denimo, da obstajata dovolj majhni okolici $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ identitete v $\mathcal{G}$, tako da lahko vsak element iz $\mathcal{V}$ povežemo z identiteto z izmerljivo potjo po $\mathcal{U}$. Potem je $\mathcal{G}$ realna Banach-Liejeva grupa.

Dokaz. Privzemimo, da je $\mathcal{U}$ vsebovana v odprti krogli s polmerom $(1/8)\ln 2$ okrog identitete. Naj bo $H$ element okolice $\mathcal{V}$ in $U(t)$ ( $t \in [0,1]$ ) izmerljiva pot v $\mathcal{G}$, tako da je $U(0) = I$, $U(1) = H$ in $\|U(t)-I\| < (1/8)\ln 2$ za vsak $t$. Pokazali bomo, da je $\log H = \log(U(1))$ poševno simetričen operator.

Pa naj bo $0 \leq a < b \leq 1$ in $D$ delitev intervala $[a,b]$: $a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b$. V množico vseh delitev intervala $[a,b]$ vpeljemo delno urejenost na običajni način: $D \leq D'$, če je $D'$ nadaljevanje delitve $D$. Vsaki delitvi $D$ danega intervala priredimo operatorja

$$A_D = \sum_D \log(U(t_i)^{-1}U(t_{i+1})) \qquad B_D = \sum_D U(t_i)^{-1}(U(t_{i+1})-U(t_i))$$

ter število $c_D = \sum_D \|U(t_{i+1})-U(t_i)\|^2$. Trdimo, da obstaja $\lim_D A_D = A(a,b)$ in da je to poševno simetričen operator.

Ker je pot $U$ zvezna, lahko kot običajno dokažemo, da je $V(U;a,t)$ zvezna funkcija spremenljivke $t$. Za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo delitev $E = \{a=e_0 < e_1 < \dots < e_n=b$ , da je

$V(U;e_i,e_{i+1}) < \varepsilon$ za vsak $i$. Naj bo $E \leqslant D$. Potem je $\sum_D \|U(t_{i+1})-U(t_i)\|^2 \leqslant \sum_D \varepsilon\|U(t_{i+1})-U(t_i)\| \leqslant \varepsilon V(U;a,b)$. Dokazali smo, da je $\lim_D c_D = 0$.

Po 3.14 je $\|A_D-B_D\| \leqslant \sum_D \|U(t_i)^{-1}U(t_{i+1}) - I\|^2 =$ $= \sum_D \|U(t_{i+1})-U(t_i)\|^2 = c_D$. Če torej obstaja $\lim_D B_D$, obstaja tudi $\lim_D A_D$ in sta obe limiti enaki. Trdimo pa še več: v tem primeru je $A(a,b) = \lim_D A_D$ poševno simetričen operator.

Res, naj bo $\varepsilon$ dovolj majhno pozitivno število. Pišimo $A(a,b) = A$. Izberimo delitev $D$ intervala $[a,b]$, tako da je $\|A-A_D\| < (1/2)\varepsilon$ in $c_D < (1/8)\varepsilon$. Po 3.14 je
$\|\log(U(t_i)^{-1}U(t_{i+1}))\| \leqslant 2\|U(t_i)^{-1}U(t_{i+1}) - I\| = 2\|U(t_{i+1})-U(t_i)\|$.
Tako je $\sum_D \|\log(U(t_i)^{-1}U(t_{i+1}))\|^2 < 4c_D < (1/2)\varepsilon$. Naj bo $n$ število delilnih točk v $D$. Računajmo (z uporabo leme 3.15):
$\|I \pm n^{-1}A_D\| = n^{-1}\|nI \pm A_D\| = n^{-1}\|\sum(I \pm \log(U(t_i)^{-1}U(t_{i+1}))\| \leqslant$
$\leqslant n^{-1}\sum(1 + \|\log(U(t_i)^{-1}U(t_{i+1}))\|^2) < 1 + (1/2n)\varepsilon$
po zgoraj pridelani neenačbi. Od tod je
$\|I \pm n^{-1}A\| \leqslant \|I \pm n^{-1}A_D\| + n^{-1}\|A-A_D\| < 1 + 2(1/2n)\varepsilon = 1 + n^{-1}\varepsilon$.
Po 3.16 je $A$ res poševno simetričen operator.

Lotimo se zdaj eksistence $\lim B_D$. Denimo, da delitvi $D$ dodamo točko $s$ in dobimo novo delitev $C$. Naj bo $t_i < s < t_{i+1}$. Potem je

$$B_D-B_C = U(t_i)^{-1}U(t_{i+1}) - I - (U(t_i)^{-1}U(s)-I) - (U(s)^{-1}U(t_{i+1})-I) =$$
$$= (U(t_i)^{-1} - U(s)^{-1})(U(t_{i+1}) - U(s)) \qquad (t_i,t_{i+1} \in D)$$

Denimo zdaj, da med delilni točki $t_i$ in $t_{i+1}$ natresemo namesto ene točke $s$ več točk: $s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1}$. Novo delitev intervala $[a,b]$ označimo z $F$. Naj bo še $s_0 = t_i$ in $s_n = t_{i+1}$. Računajmo:

$$B_D-B_F = (U(s_0)^{-1}-U(s_1)^{-1})(U(t_{i+1})-U(s_1)) +$$
$$+ (U(s_1)^{-1}-U(s_2)^{-1})(U(t_{i+1})-U(s_2)) +$$
$$+ (U(s_{n-2})^{-1}-U(s_{n-1})^{-1})(U(t_{i+1})-U(s_{n-1}))$$

Ker je $\|U(s_i)^{-1}-U(s_{i+1})^{-1}\| = \|U(s_{i+1})-U(s_i)\|$ (ne pozabimo, da gre za izometrije), je

$$\|B_D-B_F\| \leqslant \sum \|U(t_{i+1})-U(s_{i+1})\|\|U(s_{i+1})-U(s_i)\| \qquad (1)$$

Funkcija $U$ je na $[a,b]$ enakomerno zvezna. Za vsako pozitivno število $\varepsilon$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $|t-t'| < \delta$ sledi $\|U(t)-U(t')\| < \varepsilon$. Če je $|t_{i+1}-t_i| < \delta$, je potem $\|B_D-B_F\| < \varepsilon \sum \|U(s_{i+1})-U(s_i)\| \leqslant \varepsilon V(U;s_i,s_{i+1})$. Od tod vidimo, da je v primeru, ko je delitev $D$ tako fina, da je $|t_{i+1}-t_i|<\delta$ za vsak $i$ in $F$ poljubno nadaljevanje delitve $D$, $\|B_D-B_F\| <$ $< \varepsilon V(U;a,b)$. Zato $\lim_D B_D$ res obstaja.

Označimo zdaj $M = V(U;0,1)$. Naj bo $n$ naravno število. Obstaja delitev $D$ intervala $[0,1]$, sestavljena iz točk $0=w_0 < w_1 < \ldots < w_n=1$, tako da je $V(U;w_i,w_{i+1}) = n^{-1}M$. Po lemi 3.14 je za dovolj velik $n$

$$\|\log(U(w_i)^{-1}U(w_{i+1})) - U(w_i)^{-1}(U(w_{i+1})-U(w_i))\| \leqslant$$
$$\leqslant \|U(w_{i+1})-U(w_i)\|^2 \leqslant (V(U;w_i,w_{i+1}))^2 = n^{-2}M^2$$

Mislimo si zdaj, da je v prejšnji obravnavi $a = w_i$ in $b = w_{i+1}$. Če je $D = \{w_i,w_{i+1}\}$, je $B_D = U(w_i)^{-1}(U(w_{i+1})-U(w_i))$. Upoštevajmo, da je $\lim_E B_E = A(w_i,w_{i+1})$, pa iz (1) vidimo, da je

$$\|A(w_i,w_{i+1}) - U(w_i)^{-1}(U(w_{i+1})-U(w_i))\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{\|U(w_{i+1})-U(s)\|; s \in [w_i,w_{i+1}]\} . V(U;w_i,w_{i+1}) \leqslant$$
$$\leqslant (V(U;w_i,w_{i+1}))^2 = n^{-2}M^2$$

Z uporabo prejšnje ocene lahko tako zapišemo

$$A_i = A(w_i,w_{i+1}) = \log(U(w_i)^{-1}U(w_{i+1})) + B_i \qquad (2)$$
$$\|B_i\| \leqslant 2n^{-2}M^2$$

Ocenimo zdaj izraz

$\|U(w_{i+1}) - U(w_i)\exp A_i\| = \|U(w_i)^{-1}U(w_{i+1}) - \exp A_i\| =$

$= \|\exp(\log(U(w_i)^{-1}U(w_{i+1}))) - \exp A_i\| = \|\exp(A_i - B_i) - \exp A_i\| \leqslant$

$\leqslant \exp(\|A_i\|)(\exp(\|B_i\|)-1)$ po lemi 3.10 .

Če je le $n$ dovolj velik, je po 3.14

$\|\log(U(w_i)^{-1}U(w_{i+1}))\| \leqslant 2\|U(w_i)^{-1}U(w_{i+1}) - I\| =$

$= 2\|U(w_{i+1})-U(w_i)\| \leqslant 2V(U;w_i,w_{i+1}) = 2n^{-1}M$ .

Iz (2) sledi od tod takoj, da je $\|A_i\| < 3n^{-1}M$ , če je le $n$ dovolj velik. Tako je

$\|U(w_{i+1}) - U(w_i)\exp A_i\| \leqslant \exp(3n^{-1}M)(\exp(2n^{-2}M^2)-1)$

Če je $n$ dovolj velik, je $\exp(3n^{-1}M) < 2$ in $\exp(2n^{-2}M^2) <$ $< 4n^{-2}M^2$ . Od tod je za dovolj velik $n$

$\|U(w_{i+1}) - U(w_i)\exp A_i\| \leqslant 8n^{-2}M^2$

Končno je v tem primeru

$\|U(w_{k+1}) - \prod_{i=0}^{k}\exp A_i\| =$

$= \|U(w_{k+1}) - U(w_k)\exp A_k + U(w_k)\exp A_k - \ldots\| \leqslant 8kn^{-2}M^2 \leqslant 8n^{-1}M^2$

Če je $n$ dovolj velik, lahko tako uporabimo 3.13 in zapišemo $\prod_{i=0}^{n-1}\exp A_i = \exp B_n$ , kjer je $B_n$ poševno simetričen operator z normo pod 1 . Od tod je po zgornjem

$\|\exp(\log(U(1))) - \exp B_n\| = \|U(1) - \prod_{i=0}^{n}\exp A_i\| < 8n^{-1}M^2$

Ker je $\mathcal{G}_I = \{T \in \mathcal{L}(X); \exp(sT) \in \mathcal{G}$ za vsak $s \in \mathbb{R}\}$ (prostor poševno simetričnih operatorjev) po 3.5 zaprt, je tudi $\log(U(1))$ poševno simetričen. Uporabimo še 3.6, pa smo končali.

Za konec napišimo še tale izrek, ki utegne biti zanimiv zlasti za refleksivne Banachove prostore $X$ (v katerih je enotna krogla v $\mathcal{L}(X)$ kompaktna v šibki operatorski topologiji) :

3.18. Izrek. Naj bo $X$ kompleksen Banachov prostor in $\{U_i\}$ posplošeno zaporedje linearnih surjektivnih izometrij prostora $X$, ki konvergira po normi k identiteti. Naj bo $A_i = \|U_i - I\|^{-1}(U_i - I)$, če je $U_i \neq I$, in $A_i = 0$ sicer. Denimo, da obstaja limita posplošenega zaporedja $A_i$ v šibki operatorski topologiji. Potem je ta limita poševno simetričen operator.

Dokaz. Naj bo $V(T)$ algebrski numerični zaklad operatorja $T$ v algebri $\mathcal{L}(X)$. Po 1.2 je $\max\{\mathrm{Re}\, z; z \in V(T)\} = \inf\{t^{-1}(\|I+tT\|-1); t > 0\}$. Od tod je $\max\{\mathrm{Re}\, z; z \in V(A_i)\} \leq \leq \|U_i - I\|^{-1}(\|I + \|U_i - I\|A_i\| - 1) = \|U_i - I\|^{-1}(\|U_i\| - 1) = 0$, če je $U_i \neq I$. Če je $U_j = I$, je $A_j = 0$ in od tod trivialno $\max\{\mathrm{Re}\, z; z \in V(A_j)\} \leq 0$. Podobno je $\max\{\mathrm{Re}\, z; z \in V(-A_i U_i^{-1})\} \leq 0$, se pravi, da $V(A_i U_i^{-1})$ leži desno od imaginarne osi.

Če je $f \in \mathcal{L}(X)^*$ in $\|f\| = 1$, je $|f(A_i) - f(A_i U_i^{-1})| = |f(A_i(I - U_i^{-1}))| \leq \|A_i\| \|I - U_i^{-1}\| = \|I - U_i^{-1}\| = \|U_i - I\|$. Od tod vidimo, da je $V(A_i)$ oddaljen od imaginarne osi na levo kvečjemu za $\|U_i - I\|$. Torej je algebrski numerični zaklad operatorja $A_i$ vsebovan v pasu $-\|U_i - I\| \leq \mathrm{Re}\, z \leq 0$. Prostorski numerični zaklad operatorja $A_i$ je po 1.6 vsebovan v algebrskem. Naj bo $A = \lim A_i$ v šibki operatorski topologiji. Ker $\|U_i - I\| \to 0$, je prostorski numerični zaklad operatorja $A$ na imaginarni osi. Algebrski numerični zaklad za $A$ pa je zaprta konveksna ogrinjača prostorskega (1.6). Tako je res $A$ poševno simetričen operator.

LITERATURA

1. E.Berkson, Action of W*-algebras in Banach spaces, Math.Ann. 189(1970),261-271.

2. E.Berkson & H.Porta, Representations of $\mathcal{B}(X)$ , J.Funct.Anal. 3(1969), 1-34.

3. C.Bessaga & A.Pelczynski, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, Studia Math.17(1958), 151-164.

4. F.F.Bonsall & J.Duncan, Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras, Vol.I, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1971.

5. F.F.Bonsall & J.Duncan, Numerical ranges II, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1973.

6. N.Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 2&3, Hermann, Paris 1972.

7. N.Bourbaki, Variétés différentielles et analytiques (Fascicule de résultats), Paragraphes 1 à 7, Hermann, Paris 1967.

8. J.W.Calkin, Two sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert spaces, Ann.Math. 42(1941), 839-872.

9. J.Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann), Gauthier-Villars, Paris 1957.

10. A.Douady, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné , Ann. Inst.Fourier 16(1966), 1-95.

11. N.Dunford & J.T.Schwartz, Linear operators, Part I, Interscience, New York 1957.

12. R.J.Fleming & J.E.Jamison, Hermitian and adjoint abelian operators on certain Banach spaces, Pacific J.Math. 52 (1974), 67-85.

13. R.J.Fleming & J.E.Jamison, Isometries on certain Banach spaces, J.London Math.Soc. (2)9(1974), 121-127.

14. L.A.Harris & W.Kaup, Linear algebraic groups in infinite dimensions, to appear in Ill.J.Math. .

15. E.Hille & R.S.Phillips, Functional analysis and semigroups, AMS Colloquium Publications 31, Amer.Math.Soc., Providence, R.I. 1957.

16. A.Grothendieck, Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espace du type C(K), Canadian J.Math. 5(1953), 129-173.

17. R.V.Kadison, Operator algebras with a faithful weakly closed representation, Ann.Math. 64(1956), 175-181.

18. N.J.Kalton & G.V.Wood, Orthonormal systems in Banach spaces and their applications, Math.Proc.Camb.Phil.Soc. 79(1976), 493-510.

19. W.Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, New York 1973.

20. S.Sakai, C*-algebras and W*-algebras, Springer, Erg.d.Math. 60, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

21. H.Schneider & R.E.L.Turner, Matrices Hermitian for an absolute norm, Linear and Multilinear Algebra 1(1973), 9-31.

22. P.G.Spain, W*-closure of a V*-algebra, J.London Math.Soc. (2)7(1973), 385-386.

23. J.T.Schwartz, W*-algebra, Notes on Mathematics and its Applications, Gordon & Breach, New York 1967.

24. I.Vidav, The group of isometries and the structure of a finite dimensional normed space, Linear Algebra Appl. 14 (1967), 227-236.