Specielle Methodik des Rechenunterrichtes in der Volksschule.

Theoretischer Theil.

Von

Lukas Lautar.

Laibach.
Druck und Verlag von Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.
1888.

Specielle
Methodik des Rechenunterrichtes
in der Volksschule.

Theoretischer Theil.

Von

Lukas Lavtar.

Laibach.

Druck und Verlag von Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

1888.

Vorrede.

Dieses Buch verdankt seine Entstehung zunächst dem Umstande, dass die Vorträge über specielle Methodik des Rechenunterrichtes an Lehrer- und Lehrerinnen-Bildungsanstalten nach sogenannten Anleitungen den Zöglingen nicht jenen freien Blick über die Behandlung des Faches eröffnen können und daher nicht jene Selbständigkeit begründen, die jedem Lehrer eigen sein müsste. Durch die jetzige Einrichtung der Lehrer-Bildungsanstalten ist es möglich, den angehenden Lehrern eine derartige Fachbildung zu geben, die das schablonenmäßige Beibringen einer von Zeit zu Zeit sich verändernden, weil vervollkommnenden Methode überflüssig macht. Der Zögling soll mit dem Wesen des Faches, mit den daraus entspringenden Grundsätzen der Methode und mit den Errungenschaften auf diesem Gebiete vertraut gemacht werden; seine Aufmerksamkeit soll aber auch zugleich auf jene Punkte, in denen die verschiedenen Pädagogen nicht überreinstimmen, hingelenkt werden. Nur auf diese Weise haben wir ihn befähigt, an der Methode selbständig und mit Erfolg weiter zu bauen.

Das vorliegende Buch beginnt daher mit einer kurzen geschichtlichen Einleitung über die Entwicklung des Rechnens und der Rechenmethode. Der Zögling soll aus diesem Bilde erkennen, dass Jahrtausende vorübergehen mussten, um das Rechnen auf jene Stufe der Vollkommenheit zu bringen, auf der es heute steht; er soll erkennen, dass es vermessen wäre zu glauben, er allein wäre imstande, die Methode zur höchsten Vollendung zu bringen, und dass dies nur im Verlaufe einer längeren Zeit der vereinten Kraft aller Lehrer gelingen kann.

Das Buch bespricht die Numeration und jede Operation, das Kopf- und Zifferrechnen, das reine Rechnen mit unbenannten und benannten Zahlen, das angewandte Rechnen, das Bruchrechnen jedes für sich, um den stufenmäßigen Zusammenhang der einzelnen Partien bis ins kleinste möglichst hervorzuheben. Dabei wurden die Werke von Močnik, Hentschel, Böhme, Knilling, Salberg, Lüdemann, Stubba, Tanck, Heinze und Hübner u. a., französische und italienische Rechenbücher benützt und etwaige Meinungsverschiedenheiten derselben nebeneinandergestellt.

Auf Grund dieses Buches wurde dann der praktische Theil, der den Stoff auf jene Art und in jener Aufeinanderfolge behandelt, wie ihn der Lehrer in der Schule vorzunehmen hat, und die Rechenbücher zusammengestellt.

Da das Buch zunächst als Hilfsbuch für Lehrer- und Lehrerinnen-Bildungsanstalten bestimmt ist, so konnte die Behandlungsweise einzelner Partien nicht umgangen werden, es musste mit der Theorie auch die Praxis in Verbindung treten, um den Forderungen der Lehrer-Bildungsanstalten zu genügen. Deshalb hat das Buch einen praktischen Anstrich, obwohl es als theoretischer Theil bezeichnet wird.

Manchem wäre stellenweise eine kürzere Fassung vielleicht erwünschter, wogegen doch ernste Bedenken laut werden. Dem Verfasser ist es vor allem darum zu thun, seine Gedanken möglichst klar zu geben und insbesondere das zu zeigen, dass im Rechenunterrichte jede experimentierende Methode nicht nur überflüssig, sondern verwerflich ist, weil es ja für das Rechnen doch nur eine Methode gibt, und zwar jene, die dem Kinde vom Anfange an ermöglicht, d e n k e n d zu rechnen. Man soll nämlich zu jeder Partie den Grund derartig legen, dass die Schüler das übrige, was sich auf diesen Grund stützt, durch eigenes Nachdenken selbst finden können. Daher wurde in diesem Buche auch das Fassungsvermögen des Kindes genauer ins Auge gefasst, Partien, die erst im Verlaufe einer längeren Zeit geistig verarbeitet werden können, besonders betont und darauf hingewiesen, wenn Neues sich an das Vorangegangene anzuschließen hat.

Um Beurtheilung des Werkes wird jedoch erst gebeten, wenn dasselbe in Verbindung mit der Anleitung und den Rechenbüchern und durch die Erfahrung gründlich und ohne alles Vorurtheil geprüft wurde.

Marburg im October 1888.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Vierter Abschnitt.

Reines Rechnen mit benannten Zahlen.

Fünfter Abschnitt.

Brüche.

Sechster Abschnitt.

Angewandtes Rechnen.

Einleitung.

Entwicklung des Rechnens und der Rechenmethode.

§ 1. Der Mensch rechnet seit uralten Zeiten, und Jahrtausende mussten vorübergehen, bevor das Rechnen die heutige Stufe der Entwicklung erreicht hat. Das Benennen, das Bezeichnen der Zahlen, die Operationen mit denselben, insbesondere aber die Multiplication und Division bereiteten große Schwierigkeiten. Eine Wendung zum Besseren brachte die Entdeckung der Nulle durch die Inder. Seit diesem Momente begann sich das Rechnen kräftig zu entfalten, die Inder überbrachten es den Arabern (im 8. Jahrh.), durch die es sich über ganz Europa zu verbreiten anfieng (12. Jahrh.). Die Benennung der Zahlen blieb jedoch lange, lange noch eine sehr schwerfällige. Adam Riese z. B. spricht die Zahl 86.789,325.178 so aus: «Sechs und achtzig tausent, tausend mal tausendt, sieben hundert tausendt mal tausendt, neun vnnd achtzig tausend mal tausend, drei hundert tausend, fünf vnnd zwanzig tausend, ein hundert, acht und siebenzig» (1535); und diese Benennungsweise hat sich erst Anfangs des 18. Jahrhunderts durch die Einführung der höheren Zahlwörter Million, Billion u. s. w. vollends verloren.

Die Zahl der Operationen schwankt. Beim Araber Mohammed Ben Musa (9. Jahrh.) kommen noch neben den vier gewöhnlichen das Duplieren (Vervielfachen mit 2) und das Medieren (Division durch 2) vor, was man auch bei späteren Schriftstellern, sogar noch im 16. Jahrhunderte vorfindet. Sogar das Numerieren betrachtete man als eine Operation. Erst Ende des 18. Jahrhundertes rangen sich die Operationen zu einer bestimmten und zur einfachsten Form durch.

Die Addition als die einfachste Operation kam zuerst zum vollen Abschlusse; Ähnliches kann man auch von der Subtraction sagen. Eine Unschlüssigkeit zeigt sich, ob man die Operation rechts oder links anzufangen habe. Die Subtraction wurde oft in Verbindung mit der Addition ausgeführt. Z. B. subtrahiert Adam Riese (16. Jahrh.) 28 von 75 so: «8 von 10 = 2, 2 + 5 = 7, 3 von 7 bleibt 4.»

Die Grundlage der Multiplication ist das «Einmaleins». Dieses verursachte den Alten viel Kopfzerbrechen. Man suchte dasselbe wenigstens für die höheren einziffrigen Zahlen zu umgehen. So findet man bei Adam Riese z. B. 8 × 9 = 72 und andere Producte so ausgeführt: «8 + 9 = 17, die Einer 7 werden angeschrieben; 10 — 8 = 2, 10 — 9 = 1, 2 × 1 = 2, und 2 neben 7 gesetzt, gibt 72. Christoph Rudolff zu Wien 1588 gibt dieser Methode folgende Form für 7 × 8, 7 × 7, 7 × 9, 8 × 8 u. s. w.

7.3	7.3	7.3	8.2
8.2	7.3	9.1	8.2
5 6	4 9	6 3	6 4

Das *Schwankende* in der *Form* der Multiplication und Division soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

Bei Brahmegupta (7. Jahrh.) wird 235.288 ausgeführt wie folgt:

1.)

235	2	470
235	8	1880
235	8	1880
		67680

2.)

235	9	2115
235	8	1880
235	151	35485
235	120	28200
		67680

3.)

235	Man multiplicierte nun zuerst 200 im
288	Multiplicanden mit 288, dann 30 u. s. w.
288	und konnte dabei anfangen mit 2.2 oder
288	mit 8.2.

Bei Bhascara (12. Jahrh.) findet man das Beispiel 135.12 = 1620 folgendermaßen behandelt:

1.)

	1	3	5
1	1	/3	/5
2	/2	/6	1/0
	16	2	0

2.)

12	12	12
1	3	5
12		60
3		6
16		20

3.)	135	135	4.)	135	20	2700
	1	2		135	8	1080
		270				1620
		135				
		1620				

Bei Tartaglia (16. Jahrh.) findet man außer unserem Ansatze noch 6 andere Multiplicationsformen, die schon bei den Indern und Arabern vorkommen.

Nach Mohammed Ben Musa (9. Jahrh.) wird $2852 : 12 = 237\frac{8}{12}$ so ausgeführt:

12	
498	
237	237
2852	8
12	12
12	
12	

Dieses Verfahren entspricht dem «Übersichdividieren», welches vor dem unsrigen, dem «Untersichdividieren», sehr im Gebrauch war, nur sind hier die verrechneten Ziffern nicht durchgestrichen.

Nach Adam Riese (16. Jahrh.) rechnet man $3954 : 267 = 14$ aus, wie folgt:

2	
41	
24	
1386	
3954	
2677	14
26	

Die Erläuterung dazu lautet: «Man setzt 267 unter 395 und sagt: 2 in 3, 1mal. Nun wird 267 von der linken Seite an mit 1 multipliciert, und was bei jeder Ziffer herauskommt, gleich von dem, was gerade darüber steht, abgezogen. Man sagt also: 1 mal 2 ist 2, und dies von 3 abgezogen, bleibt 1, welches über 3 geschrieben, 3 und 2 aber durchgestrichen wird. Weiter ist 1 mal $6 = 6$, und 6 von 9 bleibt 3. 3 wird über 9 geschrieben, 6 und 9 oben gestrichen. Weiter ist 1 mal $7 = 7$, und 7 von 35 bleibt 28. 8 wird über 5 und 2 über 3 geschrieben; 3, 5 und 7 aber gestrichen u. s. f. So ist nun der Quotient 14 und der ungestrichene Rest 216.»

79695 | 3465		358 | 87304 | $243\frac{310}{358}$	
23		358..	
69	(79695 : 23 = 3465 nach Peschek 1741)	716..	($87304 : 358 = 243\frac{310}{358}$ nach Schmid 1774)
106		1570.	
23		358.	
92		1432.	
149		1384	
23		358	
138		1074	
115		310	
23			
115			

Eine ähnliche Vervollkommnung beobachtet man bei den Maßen und Gewichten, die für jedes Land, ja sogar für einzelne Städte in demselben Lande verschieden waren. In diesem Jahrhundert hat man dieselben dem dakadischen Systeme angepaſst und dadurch das Rechnen mit benannten Zahlen bedeutend vereinfacht. Gerade so, wie man beim reinen Rechnen in den früheren Jahrhunderten dem Schüler das Verständnis der Operationen nicht beibrachte, sondern ihn nach erlernten Regeln rechnen lies, hat man auch das angewandte Rechnen nur mechanisch betrieben. Es gab beinahe so viele Regeln, als angewandte Aufgaben für deren Lösung. Auch diesbezüglich stehen wir heutigen Tages schon auf einer verhältnismäßig hohen Stufe. Ueberhaupt scheint dieses Jahrhundert berufen zu sein, das Rechnen in seine richtigen Bahnen zu lenken. Der große Pädagoge Pestalozzi hat dazu den kräftigsten Anstoß gegeben. Sein Satz: «Aller Unterricht gehe von der Anschauung aus,» kam auch für den Rechenunterricht zur allgemeinen Geltung. Da aber Pestalozzi eine falsche Auffassung von der Anschauung der Zahl hatte, bekam sein Rechnen eine eigenthümliche geschraubte Form und konnte daher unmöglich Boden fassen, regte hingegen zu einem heilbringenden geistigen Kampfe an, aus dem schließlich die Methode des Rechenunterrichtes zur vollen Reife gelangen muſs. Jänicke schreibt in der Geschichte der Methodik von Kehr: «Die Controverspunkte drehten sich hauptsächlich um Lehrziel und Lehrgang bis in die zwanziger Jahre.»

In Bezug auf das Lehrziel verlangten die enragierten Pestalozzianer: Bildung der Kraft an der abstracten Zahl; die Gegner: Bildung für das Leben an concreten Fällen. Rücksichtlich des Lehrganges stritt man über Mittel und Weisen der Veranschaulichung, über die decimale Abstufung beim Fortschreiten, über Eintritt und Gebrauch der Ziffern, über Auswahl und Begrenzung des Lehrstoffes, über Stellung und Verhältnis des Kopfrechnens zum Tafelrechnen, des reinen zum angewandten Rechnen, über Anfang und Ausdehnung des Bruchrechnens, über Zulässigkeit sogenannter Kunstgriffe und über die Berechtigung gewisser Lösungsformen u. s. w. u. s. w., kurz: die Methode war in Fluss, im Process der Gährung und Läuterung, in der Periode «Sturm und Drang».

Nicht zu übersehen ist die sogenannte monographische Methode von Grube, die noch heutzutage, wenn auch in beschränkterem Maße, herrscht. Nach ihr soll jede Zahl von 1 bis 100 allseitig behandelt, d. h. es sollen bei jeder Zahl alle Operationen vorgenommen werden, damit jede Zahl in allen ihren Theilen vollends erschaut werde. Diese Methode gründet sich auf die Anschauung, dass man jede Zahl in allen ihren Theilen sich momentan vorstellen kann, was jedoch unmöglich ist. In neuester Zeit beginnt jedoch eine gewaltige Gegenströmung gegen die allseitige Behandlung der Zahlen, welche ihren Ausdruck am genauesten im Werke «Reform des Rechenunterrichtes» von Knilling findet.

Um sich den Weg zu einer klaren Erkenntnis der Rechenmethode zu bahnen, ist es nothwendig, den ganzen Rechenstoff bis ins kleinste zu zergliedern und den ganzen Bau aus diesen Theilen wieder zusammenzustellen.

Übersicht des Rechenstoffes.

§ 2. Die Grundlage alles Rechnens ist die Zahl; daher muss man bei der Einführung ins Rechnen zuerst von derselben sprechen. Man unterscheidet ganze und Bruchzahlen — gemeine und Decimalbrüche. Das Rechnen mit Brüchen basiert wieder auf dem Rechnen mit ganzen Zahlen, diese müssen also jenen vorangehen.

Das Rechnen wird eingetheilt in ein reines und angewandtes Rechnen. Beim ersteren, welches wieder in ein Rechnen mit unbenannten und benannten Zahlen zerfällt, ist die Operation (Addition, Subtraction, Multiplication, Division) direct gegeben, während man beim letzteren erst auf die Operation aus der Aufgabe zu schließen hat.

Man unterscheidet noch ein Kopf- und Zifferrechnen; ersteres ist für das praktische Leben von höchster Bedeutung und bewegt sich in einem engen Zahlenraume, letzteres gewinnt seine Bedeutung bei größeren Zahlen und complicierteren Aufgaben.

An gehobenen Volksschulen behandelt man auch die Verhältnisse und Proportionen, das Quadrieren und Cubieren, die Quadrat- und Cubikwurzelziehung. Letztere Rechnungsarten (Quadrieren und Cubieren u. s. w.) braucht man insbesondere bei geometrischen Berechnungen.

Erster Abschnitt.

Die ganze Zahl — die Numeration.

§ 3. Wiederhole das dekadische Zahlensystem.

Die Zahl ist der Ausdruck für ein Vielfaches gleichartiger Dinge oder gleicher Theile derselben. Sie hat den Zweck, mehrere gleichartige Vielheiten bezüglich ihrer Größe zu vergleichen.

Ein oberflächliches Urtheil diesbezüglich gewinnt man oft durch einen Blick. Aus den erschauten Dimensionen schließt man z. B.: in dieser Reihe stehen mehr Bäume als in jener, in diesem Haufen sind mehr Äpfel als in jenem u. s. f. Ein derartiger Vergleich des Wertes gleichartiger Größen ist jedoch ungenau; zu einem genaueren Resultat gelangt man durchs Zählen, d. h. wir müssen durch wiederholtes Hinzufügen der Einheit eine Reihe bilden, in welcher die Zahlen von der kleinsten bis zur größten geordnet erscheinen. Dies ist die sogenannte natürliche Zahlenreihe. Durchs Zählen finden wir z. B. das einemal 45, das anderemal 30 Äpfel beisammen und erkennen aus der Stelle in der Zahlenreihe nicht bloß, dass 45 größer ist als 30, sondern gewinnen auch ein klares Urtheil, wie groß 45, wie groß 30 im Vergleich zu jeder anderen Zahl in dieser Reihe ist.

Aus dem Gesagten sind die Grundbedingungen für ein klares Urtheil über den Wert einer Zahlengröße ersichtlich: Bildung der natürlichen Zahlenreihe und Orientierung derselben.

Die Orientierung in der Zahlenreihe wird um so schwieriger, je länger dieselbe wird, ja sie würde außerhalb einer gewissen Grenze unmöglich werden, wenn der Mensch nicht zu anderen Hilfsmitteln gegriffen hätte. Ein solches Hilfsmittel hat ihm die Natur buchstäblich an die Hand gegeben. Die 10 Finger führten ihn auf die Entdeckung des dekadischen Zahlensystems. Darnach zählt er eigentlich nur bis 10, sobald er daselbst anlangt, beginnt er von neuem zu zählen u. s. f.

Die unendliche Zahlenreihe hat er sich also in lauter kurze Reihen bis 10 zerlegt. 10 Zehnerreihen der niedrigsten Ordnung bilden eine Reihe der nächsthöheren Ordnung, 10 solcher Reihen bilden wieder eine Reihe einer zweithöheren Ordnung u. s. f. Im Raume 1 bis 1000 kann uns als Sinnbild dafür der Meterstab dienen. Derselbe stellt eine Reihe von 10 *dm*, jedes Decimeter eine Reihe von 10 *cm* und jedes Centimeter eine Reihe von 10 *mm* vor. Die natürliche Zahlenreihe erscheint demnach als eine Reihe, deren Theile Reihen von Reihen und deren niedrigste Reihen schließlich einfache Reihen sind. Wie man durch größere Maße eine bessere Übersicht über Längengrößen gewinnt, so erreicht man dasselbe für Zahlengrößen durch größere dekadische Einheiten (Zehner, Hunderter, Tausender u. s. f.). Dasselbe Streben nach Vereinfachung, um ein klares Urtheil über Größen zu gewinnen, zeigt der Mensch bei den übrigen Maßen, bei den Flächenmaßen, Körpermaßen, Münzen, Gewichten u. s. f. Für die Vorstellung am bequemsten sind die Längenmaße.

Durch die Einführung dekadischer Einheiten, resp. des dekadischen Zahlensystems, ward die Orientierung in der natürlichen Zahlenreihe ermöglicht. Diese Orientierung soll aber, um dem angegebenen Zwecke zu entsprechen, auch möglichst rasch stattfinden, was in der Wirklichkeit der Fall sein kann, wie uns die Erfahrung lehrt. Ein Moment scheint dabei von höchster Bedeutung zu sein, den wir am deutlichsten an geschichtlichen Beispielen erkennen.

In der Keilschrift der Babylonier finden wir, dass höchstens drei gleiche Zeichen nebeneinander sich befinden, mehr nicht, z. B.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Für 10 finden wir schon ein eigenes Zeichen vor. Die Zeichen für höhere Zahlen werden ähnlich zusammengestellt.

Auch bei den alten Phönikern ist der Grundsatz, drei gleiche Zeichen in eine Gruppe zusammenzustellen, angewendet worden. So schreiben sie z. B. 5 = || |||, aber 80 = *NNNN*, worin $N = 20$; sie schreiben von rechts nach links.

In der allgemein bekannten Schrift der Römer findet man für 4 schon ein neues und nicht ein aus vier nebeneinander stehenden Strichen bestehendes Zeichen; für 8 stehen wohl vier Zeichen nebeneinander, aber das erste ist wesentlich verschieden von den drei nebeneinander stehenden Strichen; für 9 stehen neben dem Zeichen für 5 nicht vier Striche mehr, dafür existiert wieder ein eigenes Zeichen u. s. f.

Merkwürdig ist, daſs die Sprache in älterer Zeit nur für die Grundzahlen eigene Benennungen schuf und für die drei ersten höheren Einheiten: für zehn, hundert und tausend; denn die jetzt gebräuchlichen Bezeichnungen für die höheren Stufen Million, Billion 2c. sind neueren Ursprungs. Und z. B. die Zahl 86.789,325.178 spricht Adam Riese (1535) so aus: «Sechs und achtzig tausent, tausend mal tausendt, sieben hundert tausendt mal tausendt, neun vnnd achtzig tausend mal tausend, drei hundert tausent, fünf vnnd zwanzig tausend, ein hundert, acht und siebenzig».

Um große Zahlen bequem lesen zu können, theilt man ihre Ziffern in Gruppen zu drei ein; dies folgt aus der Benennungsweise.

Auffallend sind noch andere Erscheinungen, die darauf hindeuten, daſs der Mensch eine Zahl von Gegenständen bis 3 bequem und, wie es scheint, momentan übersieht, während die Erkennung des Wertes einer größeren Zahl durch rasche Adition von Gruppen, bestehend aus drei oder zwei oder auch aus einem Gegenstande, stattfindet. Nägelschmiede z. B. zählen in einigen Gegenden nach Würfen (1 Wurf gleich 5 Nägeln); bei genauer Betrachtung sieht man, daſs sie zu jedem Wurfe in die eine Hand 3 Nägel, in die andere 2 nehmen, was natürlich mit großer Geschwindigkeit vor sich geht. Am Markte bemerkt man die Eier z. B. derartig zählen, daſs in eine Hand 3 und in die andere 2 Eier genommen werden.

Ein Kind, mit dem man nicht absichtlich Gegenstände zählt, erkennt die Zahlen 1, 2, 3 verhältnismäßig schnell, es vergeht aber ein auffallend größerer Zeitraum, bis es die Zahl 4 aufgefaſst hat.

Haben wir eine Strecke auf der Tafel in zwei oder in drei gleiche Theile nach dem Augenmaße zu theilen, so geht dies leicht; bei der Theilung in vier gleiche Theile halbieren wir zuerst die Strecke und dann wieder jede Hälfte u. s. f.

Aus allem dem geht also hervor, daſs man beim Orientieren in der Reihe bis 10 um 3, und nicht um mehr, scheinbar momentan nach vorwärts (resp. auch, wenn nothwendig, nach rückwärts) sieht. Man versuche die Zahl 5 ins Auge zu fassen; von der aus sieht man bis

8 bequem und von hier aus wieder bequem bis 10 nach vorwärts. Von 0 bis 5 übersieht man momentan die Zahlen bis 3 und dann bis 5. Durch die Zahl 5 wird die Zahlenreihe bis 10 in zwei gleiche Theile getheilt. Diese Zweitheilung ist, wie sich aus dem Obigen ergibt, bequem geistig zu überschauen. Daher spielt die Zahl 5 bei der Orientierung in der Zahlenreihe eine große Rolle. Diese Art der Orientierung möge durch das Wort «Dreiergruppierung» bezeichnet werden.

Alles bis jetzt Gesagte berücksichtigt, zeigt uns, dass eine Orientierung in der Zahlenreihe möglich ist und wie diese Orientierung möglichst rasch vor sich gehen kann. Innerhalb eines gewissen Zahlenraumes kann durch Übung eine derartig rasche Orientierung erworben werden, dass es einem vorkommt, als ob die Erkenntnis des Wertes einer Zahlengröße momentan stattfände. Diese scheinbar momentane Vorstellung einer Zahlengröße wird oft durch das Wort «unbewusstes Zählen» bezeichnet.

Einige Beispiele werden das Gesagte über die Orientierung in der Zahlenreihe noch ersichtlicher machen.

Die Zahl 8 sieht man nahe bei 10 mit dem Gefühle, dass sich inzwischen noch eine Zahl befindet, aber weiter weg vom Anfange der Reihe. Wollen wir uns diese Orientierung klarer zum Bewusstsein bringen, so schauen wir von 8 an über 5 zum Anfang, aber noch genauer über 5, 3 zum Anfang.

Die Zahl 30 sehen wir momentan als die 3 Zehner, die Zahl 50 in der Mitte der 10 Zehner, die Zahl 70 nahe bei 100 mit den dazwischenliegenden Spuren der Zahlen 80 und 90 und weiter weg vom Anfange der Zehnerreihe. Eine genauere Orientierung findet ähnlich statt, wie dies für die Zahl 8 gesagt worden ist.

Die Zahl 42 sehen wir zwischen 40 und 50 näher bei 40 und von 50 weiter weg; die Zahl 45 zwischen 40 und 50 in der Mitte; die Zahl 47 wieder näher bei 50 und weiter weg von 40. Die übrige Orientierung ergibt sich aus dem bereits Gesagten, sie geht in der Regel derartig rasch vor sich, dass der Orientierungsprocess nicht zum Bewusstsein kommt.

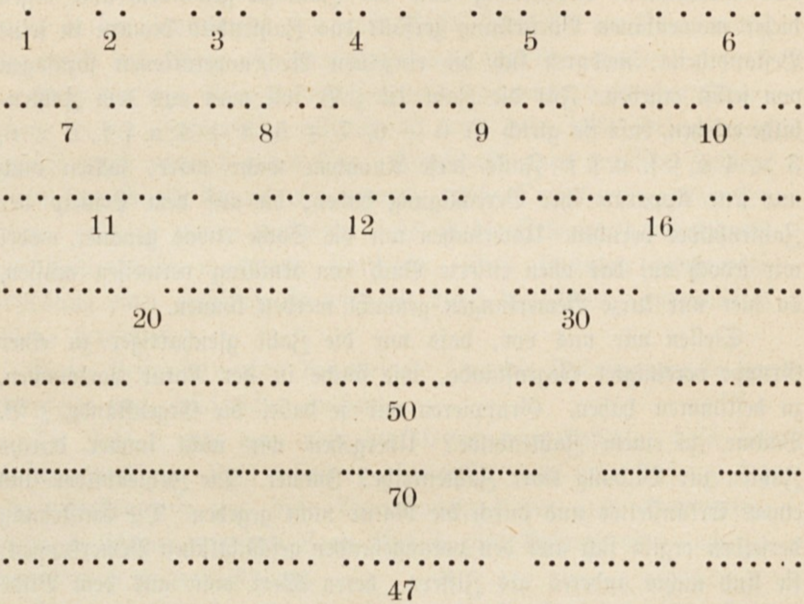
Zu dem über die Zahl Gesagten wäre noch hinzuzufügen, dass, je länger die Zahlenreihe wird, desto mehr die einzelnen Zahlen zusammenzurücken scheinen und dadurch die Übersicht der Zahlenreihe bequemer machen.

Eine Art von Rechenapparaten darf bei dieser Gelegenheit nicht übersehen werden, das sind jene, deren Construction auf dem Principe der sogenannten Zahlenbilder beruht.

Durch die sogenannten Zahlenbilder sei es möglich, behauptet man, eine momentane Vorstellung von der Zahl zu gewinnen, und wegen dieser momentanen Vorstellung zerfällt das Zahlenbild bequem in seine Bestandtheile, wodurch sich die einzelnen Rechenoperationen sozusagen von selbst ergeben. Für die Zahl 12 z. B. soll man aus dem Zahlenbilde ersehen, dass sie gleich ist 6 + 6, 7 + 5, 8 + 4 u. s. f., 2 × 6, 3 × 4 u. s. f. u. s. f. Falls diese Annahme wahr wäre, sollten auch nur jene Apparate ihre Berechtigung haben, die auf dem Princip der Zahlenbilder beruhen. Untersuchen wir die Sache etwas genauer, wobei wir jedoch auf das oben citierte Buch von Knilling verweisen müssen, da hier nur kurze Bemerkungen gemacht werden können.

Stellen wir uns vor, dass wir die Zahl gleichartiger zu einer Gruppe vereinigter Gegenstände, wie solche in der Natur vorkommen, zu bestimmen haben. Gruppieren wir je dabei die Gegenstände, z. B. Bäume, zu einem Zahlenbilde? Übergehen wir nicht immer durchs Zählen zur Bildung einer Zahlenreihe? Immer. Die Zahlenbilder sind etwas Erkünsteltes und durch die Natur nicht gegeben. Die Entstehung derselben ergibt sich aus den vorangehenden geschichtlichen Bemerkungen; sie sind nichts anderes als Ziffern, deren Wert man aus dem Bilde und nicht aus dem Inhalte erkennt. Die Fenster eines großen Hauses z. B. erkennen wir momentan als solche, und zwar aus dem Bilde desselben, zur Zahl der Fenster gelangen wir erst durchs Zählen, was bei gehöriger Übung und Begabung sehr rasch vor sich gehen kann. Gerade so verhält es sich mit einem Zahlenbilde im allgemeinen und mit der Abschätzung seines Wertes. Zur Erhärtung dessen stellen wir uns das Zahlenbild für 5, 12, 9, 7, 15 u. s. f. vor, und es frage sich jeder, wodurch er zur Abschätzung seines Inhaltes kommt. Er bekommt, jedes Vorurtheil bei Seite gelegt, die Antwort: dadurch, dass er die Zahl an ihre Stelle in der Zahlenreihe schiebt und sie diesbezüglich mit den übrigen vergleicht. Oder man zeige jemandem, der die Zahlenbilder nicht kennt, z. B. das Zahlenbild für 9. Er erkennt erst seinen Wert durchs Zählen. Man kommt also immer und immer wieder auf die Zahlenreihe zurück, daher haben auch nur jene Rechenapparate ihre Berechtigung, die die Zahlenreihe als Reihe veranschaulichen und den angeführten drei Bedingungen genügeleisten.

Eine Art Zahlenbilder erscheint nach dem Vorangehenden als die für den Rechenunterricht einzig passende, die Zahlenbilder in einer Reihe. Nachstehende Figur veranschaulicht solche für den Raum 1—100, wie sie sich aus dem Wesen der Zahl ergeben.



Damit also der Mensch ein Urtheil über den Wert einer Zahl sich verschafft, muss er

1.) zählen (die Zahlenreihe bilden);

2.) die Zahlenreihe in kurze Reihen zergliedern durch Einführung höherer dekadischer Einheiten (Zehner, Hunderter, Tausender u. s. f.), wodurch die Übersicht über dieselbe (die Orientierung in derselben) vereinfacht ist.

Durch die Einführung des dekadischen Zahlensystems erscheint das Zählen zurückgeführt auf ein Zählen von 1 bis 10. Für die Raschheit der Orientierung in der Zahlenreihe von 1 bis 10 scheint das «Dreierprincip» und die Zweitheilung dieser Reihe durch die Zahl 5 von besonderer Bedeutung zu sein.

Für den menschlichen Verkehr sind die Zahlen noch zu benennen und zu bezeichnen. Die Namenbildung ergibt sich unmittelbar aus dem Namen der ihrer Größe nach geordneten dekadischen Gruppen, von denen die Einheiten des höchsten Ranges immer den Anfang bilden.* Hat man z. B. 3 Hunderter, 4 Zehner (4zig) und 7 Einer, so entsteht der Name dieser Zahl durch eine geringe Umformung der Namen der dekadischen Einheiten, sie heißt 3hundert 7 und 4zig. Für das Schreiben der Zahlen braucht man die Zeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (die Ziffern), mit welchen man die Zahl jeder Art der in der Zahl vorkommenden dekadischen Einheiten aufschreibt. Die Zahl muss nur in die verschiedenen dekadischen Einheiten zusammengefasst und jede Art der Einheiten an eine bestimmte Stelle gesetzt werden: die Einer an die erste Stelle links, die Zehner an die zweite Stelle links u. s. f.

Auffassen der Zahl durch das Kind.

§ 4. Der Geist des Kindes ist erst in der Entwicklung begriffen, daher ist er nicht fähig, die ganze Zahlenreihe auf einmal aufzufassen und zu übersehen. Ebenso kann es sich nicht die vielen Namen der Zahlenreihe merken. Dies ergab die Erfahrung, und daher findet man in den Rechenbüchern jetzt allgemein, wenigstens bei den Deutschen, für das erste Alter des Kindes den Zahlenraum bis 10 bestimmt, welcher in der Regel noch in die Räume 1—5, 5—10 zerfällt. Nach dem vom Wesen der Zahl Gesagten sollte man noch den Zahlenraum 1—3 unterscheiden.

Für die Auffassung der übrigen Zahlen über 10 ist die Auffassung der Begriffe höherer Einheiten nothwendig. Diese Auffassung ist sehr schwierig für das Kind. Bezüglich des Zeitpunktes, wann die Begriffe höherer Einheiten dem Kinde beizubringen sind, ist man gar nicht einig. Einige besprechen den Zehner schon im ersten Schuljahre, z. B. Močnik, andere im zweiten, z. B. Lüdemann, und wieder andere erst im dritten Schuljahre, z. B. Knilling. Gewiss ist es, dass man sich mit dem Vorführen dieser Begriffe nicht übereilen darf. Das Kind soll auf dieselben vorbereitet, in dieselben nach und nach eingeführt werden. Dafür leisten besonders gute Dienste die Maße, Münzen u. s. f. Unter Anwendung passender Veranschaulichungsmittel kann wohl der Grund

* Merkwürdig ist die Erscheinung, dass alle Völker, mögen sie die Zahlen von links nach rechts oder von rechts nach links, oder von oben nach unten schreiben, immer mit den Einheiten höchsten Ranges beginnen.

für das dekadische Zahlensystem im Raume 1—100 gelegt werden. Wenn der Begriff der Zehner vom Kinde aufgefasst und im Laufe der Zeit gehörig geistig verarbeitet wurde, wird die Auffassung der Begriffe Hunderter, Tausender u. s. f. keine besonderen Schwierigkeiten mehr machen.

Nach dem Gesagten ergeben sich aus der Natur des Kindes und aus der Natur des dekadischen Zahlensystems zwei Grundstufen: der Zahlenraum 1—10 (welcher in die Räume 1 — 3, 3 — 5, 5 — 10 zerfällt) und der Zahlenraum 1 — 100.

Wohl wichtige Gründe, z. B. das Wesen des Kopfrechnens, Überführen auf die innere Anschauung der Zahl u. s. f., werden die Methodiker veranlasst haben, noch den Raum 1—1000 für sich zu behandeln, bevor man die Kinder in den unbegrenzten Zahlenraum einführt. Um aber dem Kinde das Wesen der Zahl und des dekadischen Zahlensystems aufzuschließen, muss man, was allgemein anerkannt wird, von der Anschauung ausgehen, diese Anschauung jedoch zu einer inneren erheben, was insbesondere durch fleißiges Zählen erreicht wird.

Veranschaulichung der Zahl.

§ 5. Hiebei kommen drei Fragen in Betracht: 1.) Was ist zu veranschaulichen, 2.) wie ist es zu veranschaulichen, 3.) wie wird die äußere Anschauung möglichst zu einer inneren?

Das Was der Veranschaulichung ist die Zahl. Nur muss man unterscheiden, ob die Zahl gerade so veranschaulicht wird, wie ein Haus, ein Baum, ein Pferd u. s. w., oder auf eine andere Art. Würde man sich die Zahl momentan vorstellen wie einen Baum, ein Haus, ein Pferd u. s. w., sollte man sie auch auf die gleiche Art veranschaulichen. Nun, dies ist nach dem Vorhergehenden nicht der Fall, und man muss die Veranschaulichung der Zahl ihrem Wesen entsprechend vornehmen. Man hat dem Kinde an sinnlichen Objecten zu zeigen, wie jede Zahl der Reihe nach entsteht, wie alle Zahlen eine Reihe bilden, an welcher Stelle der Zahlenreihe jede Zahl vorkommt, und die Entstehung der höheren Einheiten.

Da nun in der Natur, welche das Kind von seiner Geburt an beobachtet, verschiedenartige Objecte vorkommen und die gleichartigen in der Regel keine Reihe bilden, muss sich das Kind an ungeordneten gleichartigen Objecten, welche man öfters wechselt, durch wiederholtes Hinzufügen des Objectes (der Einheit) an die Zahl- und Reihenbildung angewöhnen, schließlich aber soll man zu einer fixen Reihe übergehen. Daraus ergeben sich die Eigenschaften der Veranschaulichungsmittel. Dieselben sollen anfangs wechseln; an der unteren Stufe (1—10) sollen sie frei beweglich sein, wie z. B. Stäbchen, Würfel, Cylinder, Griffel u. s. w. Um aber die Reihe zu fixieren, bediene man sich auch eines Rechenapparates, an welchem die Rechensteine in einer Reihe geordnet erscheinen. (Sieh «Der metrische Scheibchen-Rechenapparat» vom selben Verfasser.) An der unteren Stufe bediene man sich auch graphischer Veranschaulichungsmittel, um das Kind in die Bedeutung der Ziffer, wozu sich auch die Zahlenbilder sehr gut eignen, und andere Zeichen einzuführen. (Vergl. «Prakt. Theil, Raum 1—10.») Von besonderer Bedeutung ist es, die sinnliche Anschauung zu einer inneren zu erheben, was durch Erwähnung bekannter, aber nicht vorhandener Objecte gefördert wird, z. B. «1 Pferd und 1 Pferd sind 2 Pferde».

Nachdem das Kind an freien Objecten erschaut hat, wie die Zahl und die Zahlenreihe gebildet wird, dann genügt neben den Maßen, Münzen u. s. w. der Rechenapparat mit 100 Rechensteinen in einer Reihe. Dieser Apparat muss wohl die Entstehung der nächsthöheren Einheit deutlich zur Anschauung bringen, was durch den oben erwähnten metrischen Scheibchen-Rechenapparat vollkommen erreicht wird. Im Zahlenraume bis 1000 soll die sinnliche Anschauung ersetzt werden durch die innere. Man kann sich wohl der sogenannten «Hundertertafel» bedienen, ein Quadrat, welches in 10 Streifen und jeder Streifen in 10 Felder getheilt erscheint, worin in jedem Felde 10 Punkte gezeichnet sind; sie entspricht jedoch nicht dem Princip der Zahlenreihe. Man könnte sich besser einen Papierstreifen von der Zimmerlänge machen und auf diesem 1000 Punkte in einer Reihe aufzeichnen, in welcher die Zehner durch kürzere und die Hunderter durch längere Striche getrennt erscheinen. Sehr gut eignen sich zu diesem Zwecke die Längenmaße, der Meterstab mit *dm, cm* und *mm*. Auch folgendes Verfahren wäre zu empfehlen, um auf die innere Anschauung überzuführen: Die Kinder sollen sich 10 Rechenapparate in einer Reihe neben einander vorstellen, was man auch durch Zeichnung von 10 gleich langen Strecken nebeneinander unterstützen kann.

Im unbegrenzten Zahlenraume ist eine sinnliche Veranschaulichung überflüssig, an ihre Stelle tritt vollends die innere.

Anmerkung. Die sinnliche Veranschaulichung darf jedoch nie übertrieben werden. Sobald eine Operation den Schülern durch sinnliche Veranschaulichungsmittel zur klaren Auffassung gebracht wurde, hat die sinnliche Veranschaulichung nicht bloß ihre Berechtigung verloren, sondern sie wirkt auch hemmend in der Thätigkeit des Geistes. Das ist sehr zu beherzigen. Zeitweise ist es wieder von Vortheil, bei Wiederholungen den Rechenprocess von den Schülern veranschaulichen zu lassen, und zwar mit der Aufforderung z. B: «Zeige am Rechenapparate, wie viel 4 mal 6 ist!»

Zählen.

§ 6. Um den Kindern ein geläufiges Urtheil über den Wert einer Zahl aus ihrer Stelle in der Zahlenreihe anzueignen, übe man sie fleißig im Zählen. Das Zählen werde zunächst an gleichartigen Objecten vorgenommen, dies insbesondere in den unteren Zahlenräumen. Man lasse auch am Rechenapparate zählen, woran sich noch folgende zwei Übungen anschließen sollen.

1.) Bestimmung der Zahl der in der Gestalt eines Zahlenbildes (Vergl. S. 12) angesetzten Scheibchen, ohne (laut) zu zählen. Im Raume 1—3 genügt ein Blick auf die vorgeschobenen Scheibchen, um dieser Forderung zu genügen.

2.) Aufstellen einer bestimmten Zahl Scheibchen in Form eines Zahlenbildes durch die Schüler. (Vergl. «Der metrische Scheibchen-Rechenapparat» S. 16.) Die Bedeutung dieser beiden Übungen wird bei den einzelnen Operationen noch mehr erkannt.

Nachdem man das Zählen an Objecten geübt hat, lasse man die Zahlwörter ohne Benennung der Objecte anführen. Das Zählen wird in jedem Raume, also im Raume 1—3, 1—5, 1—10, 1—100 u. s. w., geübt, obwohl die ganze Reihe nicht immer zu durchlaufen ist. In dem Falle stelle man Aufgaben wie: «Zähle bis 8 (15, 40 u. s. w.); zähle von 7 an bis 10 (15, 33 u. s. w.)» Diese letztere Aufgabe wird insbesondere in den größeren Zahlenräumen vorwiegen.

Sehr wichtig ist die Übung: «Zähle von 5 (8, 12 u. s. f.) an um 2 (3, 5 u. s. f.) weiter.» Sie bereitet sehr gut auf die Addition vor.

Bei der Subtraction soll das Rückwärtszählen auf die gleiche Art geübt werden, es trägt sehr viel zur Orientierung in der Zahlenreihe bei, bereitet aber auch auf die Subtraction größerer Grundzahlen als 1 vor. Z. B. «Zähle von 7 an um 2 zurück; wie viel ist 7 weniger 2?»

Nach den Übungen 2 + 2 =, 2 + 2 + 2 = u. s. w., welche auf die Multiplication vorbereiten (vergl. S. 61 prakt. Theil), sollen die Schüler zu 2, zu 3, zu 4 u. s. f. zählen, und zwar insbesondere zu 2 bis 20, zu 3 bis 30 u. s. w., wodurch man auf das Einmaleins gehörig vorbereitet.

Nachdem das Vorwärtszählen zu 2, zu 3 u s. f. eingeübt ist, soll man auch nach rückwärts zu 2, zu 3 u. s. w. zählen lassen, und zwar insbesondere zu 2 von 20 an, zu 3 von 30 an u. s. f.

Zweiter Abschnitt.

Fundamente des Rechnens.

Zergliederung der vier Grundoperationen mit ganzen Zahlen.

§ 7. Wiederhole über die Operationen mit ganzen Zahlen.

Jeder kann sich an beliebig gewählten Beispielen von folgenden Sätzen überzeugen.

1.) Die Addition zweier dekadischer Zahlen läßt sich immer auf die Addition zweier einziffriger Zahlen (zweier Grundzahlen) zurückführen.

Da die Addition mehrerer einziffriger Zahlen auf die Addition einer Grundzahl zu einer zweiziffrigen (resp. mehrziffrigen) Zahl und dies wieder auf die Addition zweier Grundzahlen führt, so können wir obigen Satz auch auf die Addition mehrerer Zahlen überhaupt ausdehnen und sagen: Die Addition dekadischer Zahlen läßt sich immer auf die Addition zweier Grundzahlen zurückführen.

2.) Die Subtraction dekadischer Zahlen läßt sich auf die Subtraction einer einziffrigen Zahl von einer einziffrigen oder von einer zweiziffrigen Zahl, worin nur 1 Zehner ist, zurückführen.

3.) Die Multiplication dekadischer Zahlen läßt sich auf die Multiplication zweier Grundzahlen zurückführen.

4.) Die Division dekadischer Zahlen läßt sich immer auf die Division einer Grundzahl oder einer zweiziffrigen Zahl durch eine einziffrige zurückführen.

Daraus folgen die vier Fundamentalübungen für die vier Operationen:

1.) Addition zweier Grundzahlen oder das sogenannte «Einsundeins».

2.) Subtraction einer einziffrigen Zahl von einer einziffrigen oder von einer zweiziffrigen Zahl, worin nur 1 Zehner vorkommt; das sogenannte «Einsvoneins».

3.) Multiplication zweier Grundzahlen oder das sogenannte «Einmaleins».

4.) Division einer ein- oder einer zweiziffrigen Zahl durch eine Grundzahl; das sogenannte «Einsdurcheins».

Die ersten zwei Übungen bewegen sich, wenn man noch das 10 + 10 dazu rechnet, in dem Raume 1 — 20, die beiden letzten mit Einschluss der Übung 10 × 10 im Raume 1 — 100. Die Stufe 1 — 100 zerfällt also noch in eine wichtige Unterstufe 1 — 20.

Zusammenhang der Fundamentalübungen. — Aufsuchen der Operationsresultate.

Addition.

§ 8. Schon durch das Wort «Zusammenzählen» für die deutsche Bezeichnung der Addition wird der innigste Zusammenhang zwischen Addition und Zählen ausgedrückt. Um also die Summe von zwei Gruppen gleichartiger Objecte zu finden, zählt man zuerst die erste Gruppe von Objecten ab, und dann zählt man noch die Objecte der zweiten Gruppe dazu. Wenn man jedoch die Zahl der Objecte der ersten Gruppe schon kennt, vereinfacht sich das Verfahren dahin, dass man zu der Zahl der ersten Gruppe die Objecte der zweiten Gruppe gleich dazuzählt. Man zählt z. B. 1, 2, 3, 4, 5 Bäume (erste Gruppe) — 6, 7, 8 Bäume, wenn in der ersten Gruppe 5, in der zweiten Gruppe 3 Bäume sind; oder man zählt nur 6, 7, 8, wenn man schon von früher die Zahl der ersten Gruppe kennt.

Ein derartiges Addieren ist naturgemäß.

Es ist wahr, dass man aus dem Zahlenbilde (Zerlegebild) ⁙ | ⁝ auf eine sehr einfache Art erkennt, dass 5 und 3 gleich 8 ist. Nur muss man sich alle Zahl- und Zerlegebilder merken, um dieselben wieder finden zu können, wenn man die Resultate vergessen hat. Das Addieren mit Hilfe der Zahlenbilder ist eine Last fürs Gedächtnis und nicht naturgemäß, sondern künstlich.

Nach der Methode des Weiterzählens braucht man dem Kinde nur an einigen Fundamentalübungen das Zahlengesetz für die Ausführung der Addition zu veranschaulichen, die Resultate für die übrigen Fundamentalübungen kann es dann **selbst** finden.

Tanck schreibt: «Gleichzeitig leidet das ganze Verfahren (Grube's) an einem schlimmen inneren Widerspruch, nämlich dem: Es sollen aus der Betrachtung der Einzelzahlen die verschiedenen Operationen — Addition, Subtraction etc. — gewonnen werden (Grube S. 30), während sie gleichzeitig von vorneherein als bekannt vorausgesetzt werden, indem sie von Anfang an für die Betrachtung die Unterlage oder die logische Kategorie bilden.»

Bei den Fundamentalübungen mit Übergang in den nächsten Zehner kann man das Verfahren noch dahin vereinfachen, dass man zuerst den Zehner ergänzt und dann den Rest noch dazuzählt. Z. B. 7 + 8 =; 7 und 3 ist 10 und 5 ist 15. Dieses Verfahren soll jedoch nicht verfrüht vorgeführt werden.

Subtraction.

§ 9. Der Ausdruck «Wegzählen» für die Subtraction spricht schon den Zusammenhang zwischen der Subtraction und dem Zählen aus. Um also zu finden, wie viel z. B. 8 — 3 ist, hat man nur von 8 um 3 zurückzuzählen. Bei den Fundamentalübungen mit Übergang in den ersten Zehnerraum hat man nach der ersten, der natürlichsten Methode des Wegzählens auch die Methode, wie z. B. 15 — 7 =, 15 weniger 5 ist 10, weniger 2 ist 8, 15 weniger 7 ist 8, jedoch nicht verfrüht anzuwenden.

Die Subtraction steht auch in innigem Zusammenhange mit der Addition. Weiß man nämlich, wie viel 5 + 3 ist, so weiß man auch, dass 8 — 3 gleich 5 ist. Tanck schreibt: «Dieserweise die Subtraction als Gegenstück der Addition zu lehren, geben wir den Vorzug, weil sie enger an das bereits Gelernte anschließt und schneller zum Ziel führt. Damit soll nicht gesagt sein, dass wir das Einzelnabzählen gar nicht lehren und dulden wollen; im Gegentheil, die Kinder sollen auch dies Verfahren wegen seiner überzeugenden Kraft kennen; aber dasselbe ist für den gewöhnlichen Gebrauch zu umständlich.» Durchs Rückwärtszählen kann das Kind das Resultat gleich selbst suchen, während es den Zusammenhang zwischen der Addition und Subtraction nicht so rasch erkennt. Sonst vergleiche das über Addition Gesagte.

Multiplication.

§ 10. Die Multiplication ist nichts anderes, als eine abgekürzte Ausdrucks- und Bezeichnungsweise der Addition gleicher Summanden. Z. B. statt 4 und 4 und 4 und 4 und 4 sagt man bequemer 5 mal 4. Daraus folgt aber, dass sich die Multiplication auf die Addition stützt. Das Resultat 5 mal 4 findet man, indem man spricht: 4 und 4 ist 8 und 4 ist 12 und 4 ist 16 und 4 ist 20.

Das Kind kann die Resultate für das «Einmaleins» bestimmt erst dann selbständig suchen, wenn es das «Einsundeins» und auch das Zuzählen der Grundzahlen zu zweiziffrigen Zahlen geläufig heraus hat.

Die sonstigen Bemerkungen über die Addition gelten mit einigen Umformungen auch für die Multiplication.

Division.

§ 11. Die Division beruht auf der Zerlegung der Zahlen in mehrere gleiche Theile, und zwar hat man 1.) aus der Größe eines Theiles die Zahl der Theile zu bestimmen (das Messen), oder 2.) aus der Zahl der Theile die Größe eines Theils (Theilen). Beides kann man nur mit Einsicht machen, wenn man das «Einmaleins» in vollster Gewalt hat, es vollends innerlich durchschaut, d. h. z. B. das 3 mal 4 nicht bloß weiß, dass es gleich 12 ist, sondern auch die Stelle der Zahlenreihe 4, 8, 12 mit möglichster Geläufigkeit ꝛc. geistig durchlaufen kann. Die Division stützt sich also auf die Multiplication. Dem Kinde müssen daher die Reihen 1 + 1 =, 1 + 1 + 1 =, 1 + 1 + 1 + 1 =, ... 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = u. s. f. mit allen Grundzahlen und das «Einmaleins» möglichst geläufig sein, damit man es für die Auffassung der Division reif nennen kann.

Was Zahlenbilder anbelangt, vergl. die Addition.

Trennung der Operationen.

§ 12. Schon aus dem Gesagten ergibt sich, dass die Operationen anfangs getrennt zu behandeln sind. Jedoch dürften einige Bemerkungen anderer Pädagogen die Sache noch ins richtigere Licht setzen.

Hentschel, der nicht wenig von seinen Schülern verlangt, behandelt die Addition und Subtraction und die Multiplication und Division nebeneinander und bemerkt über seine Multiplications- und Divisionsaufgaben im Raum 1—20: «Diese Multiplications- und

Divisionsaufgaben mit der Zahl 2 sind sorgfältig und fleißig zu üben, dass womöglich hier schon die betreffenden Resultate dem Gedächtnisse fester eingeprägt werden. Man hüte sich jedoch auch, um dies bei allen zu erreichen, die Übungen bis zur Ermüdung der Kleinen fortzusetzen. Wiederholung biete Abwechslung; wir kommen ja auch späterhin im Zahlenraum 1—100 darauf zurück.»

Saatzer, ein Vertreter der allseitigen Behandlung der Zahl, sagt an einer Stelle seiner Anleitung zum Rechenunterrichte in der Volksschule: «Jeder erfahrene Schulmann wird uns gern beistimmen, wenn wir behaupten, dass das Erfassen des Zahlenraumes 1—20 für dieses Jugendalter sehr schwer ist, und dass nur dann ein gedeihlicher weiterer Unterricht ermöglicht wird, wenn eben das Kind das Ziel des ersten Schuljahres von 1 bis 20 ordentlich erreicht hat. Häufig läfst die erste Classe hierin Lücken, das Abstrahieren der reinen Zahl von den praktischen Beispielen geht sehr mühsam, bei dem Zerlegen, Vervielfältigen, Wegnehmen (?) und Theilen bis 20 konnte trotz aller Mühe **keine Sicherheit** erlangt werden.»

J. Egger («Methodisch-praktisches Rechenbuch für schweizerische Volksschulen und Seminarien,» Bern 1874) schreibt von der Grube'schen Methode: «Dieselbe entspricht namentlich der natürlichen geistigen Entwicklung des Kindes nicht, wenn sie an die eben eintretenden Schulkinder die hohe Anforderung stellt, gleich anfangs — wenn auch in einem geringen Zahlenumfange — zu multiplicieren und dividieren . . . . . Jener neue Stufengang legt also zu viel Gewicht auf den Fortschritt nach der Zahl und zu wenig auf den Fortschritt nach den neuen Zahlengesetzen.»

J. C. Hug («Mathematik der Volksschule», 2 Theile, Zürich 1854 und 1856), äußert: «Wer also zugleich beim ersten Rechnungsunterrichte alle Operationsformen einführt, der handelt gegen die historische Entwicklung. Wer aber die Schüler von Anfang an alle Operationen anwenden läfst, um sie die Zahlen erwerben und allseitig auffassen zu lassen, der verlangt, dass sie Mittel benützen sollen, die für sie noch gar nicht existieren, d. h. er handelt gegen die psychologische Entwicklung.»

Tanck schreibt: «Ich weiß aus Erfahrung, dass die kleinen Rechenschüler, selbst nachdem sie sich schon dreiviertel Jahre mit Zusammenzählen und Subtrahieren beschäftigt hatten, den Begriff des Multiplicierens noch schwer fassten.»

Und wirklich findet man bei einer genaueren Beobachtung des Kindes, daſs es, obwohl es weiß, daſs man statt 4 + 4 + 4 auch 3 × 4 sagen kann, den Multiplicationsbegriff noch nicht heraus hat, wenn man ihm eine einfache, aus seinem Gesichtskreise entnommene angewandte Aufgabe stellt. Man frage es z. B.: «1 Tisch hat 4 Füße; wie viel Füße haben 4 solche Tische?» so rechnet es: «4 F. und 4 F. sind 8 F. und 4 F. sind 12 F.» und nicht «3 mal 4 F. sind 12 F.» Die abgekürzte Redeweise bei angewandten Aufgaben eignet es sich erst nach Monaten an — ja der Verfasser dieser Schrift hat bei einem nach der jetzt herrschenden Methode unterrichteten Knaben des vierten Schuljahres noch immer den Additions- und nicht den Multiplicationsschluſs machen gehört — und erst dann, wenn der Multiplicationsschluſs dem Kinde sich von selbst ergibt, hat es den Multiplicationsbegriff eigen.

Woher dies kommt, ist leicht zu erklären. Der Multiplicator ist eine abstracte Zahl; jedes Abstracte muſs an mehreren Fällen abstrahiert werden — wenigstens gilt dies für andere Fächer — was durch die allseitige Behandlung der Zahl durchaus nicht befolgt wird. Ferner sagt die Erfahrung, daſs das Kind im ersten Schuljahre für den Multiplicationsbegriff noch nicht reif ist.

Schließlich läſst sich durchaus nicht bestreiten, daſs das «Einmaleins» auf dem «Einsundeins» und auf dem Zuzählen der Grundzahlen zu zweiziffrigen Zahlen beruht, daher also erst dann gehörig verstanden werden kann, wenn dem Kinde diese Übungen geläufig sind.

Die Fundamentalübungen für die Multiplication sind also jedenfalls in den Zahlenraum 1—100 zu verweisen. Im Raum 1—20 sind nur Vorübungen vorzunehmen, wie:

$$1 + 1 =, \quad 1 + 1 + 1 =, \quad 1 + 1 + 1 + 1 =,$$

$$\ldots . 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 =, \; 2 + 2 =,$$

$$2 + 2 + 2 =, \; \ldots 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =$$

u. s. f. mit allen Grundzahlen, so weit der Raum 1—20 es zuläſst, woran man nach fertiger Einübung auch die abgekürzte Rede- und Schreibweise anschließen kann.

Veranschaulichung der Fundamentalübungen.

§ 13. Die Veranschaulichung muſs jedenfalls mit der Vorstellung der Operation übereinstimmen. Die auftretenden Zahlen müssen also immer derartig zur Anschauung gebracht werden, wie es schon im Vorhergehenden (S. 15) besprochen wurde. Auch über die Wahl der Objecte ist mit Rücksicht auf das Vorangegangene nichts mehr zu sagen. Hier ist nur noch die Veranschaulichung der Art des Operierens zu besprechen. Aber auch dieses ergibt sich aus dem vom Zusammenhange der Operationen Gesagten. Es soll nur noch an einigen Beispielen hervorgehoben werden, dass die Rechenapparate mit 10 Reihen die Operationen nicht so zu veranschaulichen imstande sind, wie sie den Denkgesetzen entsprechen. Für $8 + 3 = 11$ denken wir uns alle Rechensteine in einer Reihe; bei den erwähnten Rechenapparaten ist der elfte Rechenstein unten in einer anderen Reihe. 4×6 bleibt entweder immer 4×6, wenn je 6 Rechensteine auf 4 Reihen vorgeschoben werden, es wird nie zu 24; sonst ist aber das Bild für die verschiedenen 6 verschieden. 3×32 kann man gar nicht mit den erwähnten Rechenapparaten veranschaulichen u. s. w. (Sieh die Schrift «Der metrische Rechenapparat u. s. w.», woselbst die Handhabung des Rechenapparates genauer besprochen ist.)

Eines darf jedoch nicht übersehen werden: Es genügt nicht, die Fundamentalübungen bloß zur Auffassung zu bringen, sie müssen, weil sie die Grundlage fürs ganze Rechnen bilden, dem Gedächtnisse vollkommen eingeprägt werden, und zwar das «Einsundeins» und «Einsvoneins» im Raume 1—20, das «Einmaleins» und das «Einsineins» im Raume 1—100.

Dritter Abschnitt.

Rechnen mit unbenannten Zahlen.

A. Kopfrechnen.

Nutzen des Kopfrechnens.

§ 14. Das Kopfrechnen begann mit dem Rechnen überhaupt und ist dem schriftlichen Rechnen gewiss vorangegangen. Den Wert desselben jedoch erkannte man erst recht zu Pestalozzi's Zeiten, der zu einseitig das schriftliche Rechnen wenig würdigte. Die Bedeutung des Kopfrechnens möge durch die Worte Köhlers und Arendts hervorgehoben werden:

«Das Kopfrechnen ist für den gemeinen Verkehr nothwendig, zur Abwechslung in den Classen dienlich, zur Erlangung der Fertigkeit unentbehrlich, für die Kinder angenehm und vergnüglich und zur Vervollkommnung ihrer Seelenkräfte förderlich.» (Köhler 1797.)

«Es beschäftigt und schärft den Verstand, übt die Einbildungskraft und das Gedächtnis, fordert Fixierung der Gedanken, gewöhnt an ein ordentliches und consequentes Denken.» (Arendt 1806.)

Ein wesentlicher Nutzen des Kopfrechnens besteht auch darin, dass von einem wahren Kopfrechnen aus dem Schüler vielfach das rechte Verständnis des mechanischen Zifferrechnens erst aufgeht. Ferner bewegt sich der Schüler beim Kopfrechnen ungehinderter als beim schriftlichen.

Grundsatz des Kopfrechnens.

§ 15. Die Zahl der Vorstellungen muss möglichst gering sein, damit das Gedächtnis nicht überbürdet werde.

Aus diesem Grundsatze folgt unmittelbar, dass die Gesetze des Kopfrechnens sich von den Gesetzen des schriftlichen Rechnens wesentlich unterscheiden. Bei der Addition oder auch Subtraction mehrziffriger Zahlen hat man in der Regel den ersten Summand, resp. den Minuend, unzerlegt zu lassen. Würde man z. B. beim Ausrechnen von 456 + 196 den Gang des schriftlichen Rechnens befolgen, so müsste man sich zunächst 1.) die einzelnen Ziffern jeder Zahl vorstellen, das gibt sechs Vorstellungen; 2.) die einzelnen Ziffern gehörig untereinander; 3.) bei der Summierung von 6 und 6 die beiden Einer für sich und einen Zehner zu 9 und 5; Ähnliches gilt für die Summierung höherer Einheiten; 4.) alle Ziffern der Summe von rechts nach links und dann von links nach rechts. Ähnliches gilt für die übrigen Operationen.

Ein rasches Urtheil über den Wert einer Zahl gewinnen wir, wenn wir zuerst die höchsten Einheiten ins Auge fassen; deshalb haben auch alle Völker die höchsten Einheiten der Zahlen zuerst geschrieben, und die niederen Einheiten immer nach den höheren. Dies scheint auch bezüglich des Gedächtnisses von Bedeutung zu sein, und das Kopfrechnen wird erleichtert, wenn man bei den höheren Einheiten zu rechnen beginnt. Z. B. 456 + 196: 456 und 100 ist 556 und 90 ist 646 und 6 ist 652.

Grenzen des Kopfrechnens.

§ 16. Die Grenzen des Kopfrechnens lassen sich nicht ganz bestimmt aus der Natur des Rechnens ableiten. Jedoch nimmt man dieselben im allgemeinen zwischen 1 und 1000 an. Hentschel und andere übersteigen auch diese Grenze, obwohl sie selbst auf die besonderen Schwierigkeiten des Kopfrechnens im unbegrenzten Zahlenraume aufmerksam machen und vor Überbürdung der Kinder warnen. In höheren Zahlenräumen rechnet man lieber schriftlich. Aus Beispielen, wie 3000 + 4000, 54,000.000 + 42,000.000 u. s. f. einerseits und 827 : 32 u. s. f. andererseits erhellt, dass diese Grenzen auch überschritten werden können und umgekehrt eingeengt werden müssen.

Darnach umfasst die Stufe des Kopfrechnens die drei Stufen 1 — 20, 1 — 100, 1 — 1000. In diesen Räumen wird jedoch auch das schriftliche Rechnen gepflegt, welches sich aber dem mündlichen eng anschließt.

Stützen des Kopfrechnens.

§ 17. «Man erlaube nicht das Aufschreiben der Exempel, denn alsdann wird das Gedächtnis nicht geübt.» (Biermann 1790.)

«Je mehr man es den Kindern erlaubt, zu Schreibmaterialien ihre Zuflucht zu nehmen, desto verzagter werden sie beim Kopfrechnen.

Dieser Umstand würde ein großes Hindernis für den Fortschritt sein.» (Köhler 1797.)

Arendt (1806) gestattet weniger fähigen Schülern Stützen für das Gedächtnis. Und Hentschel schreibt: «Es ist kein Fehler oder Verstoß gegen die harmonische Ausbildung der Schüler, vielmehr etwas durchaus Berechtigtes, bei *zusammengesetzten* Aufgaben einige oder alle Zahlen zur Erleichterung der Schüler durch Ziffern an der Wandtafel zu notieren. Die *Urtheilskraft* kann *freier* wirken, wenn dem *Gedächtnisse* ein Anhalt gegeben ist.» Und diese seine Worte bekräftigt er durch die Worte Dr. Ungers, der unter anderem bemerkt, daſs durch das Niederschreiben der gegebenen und bereits berechneten Zahlen die ungetheilte Aufmerksamkeit den eigentlichen Bedingungen der Aufgabe geschenkt werden kann.

«Die Kinder sind an das Behalten der Aufgabe zu gewöhnen; sollte es bei den mit mehrziffrigen Zahlen schwierig sein und das Rechnen selbst dadurch beeinträchtigt werden, so notiere man (wenigstens anfänglich) die Aufgabe an die Wandtafel.» (Hentschel.)

«Zur Erleichterung des Rechnens dient, wenn er (der Schüler) die auszurechnende Aufgabe geschrieben vor sich hat ...... Dieser geradezu praktisch zu nennenden Form des Kopfrechnens bedient sich z. B. der Geschäftsmann, der etwa beim Schreiben einer Rechnung deren einzelne Posten berechnet.» (Menzel.)

«Man lasse die Schüler nicht mehr als zwei Posten auf einmal zusammenzählen, wenn auch der Betrag von mehreren Posten gesucht werden sollte; denn sehr schwer würden die Kinder auch nur drei Posten auf einmal im Gedächtnisse behalten, noch weniger deren Betrag finden; daher sind viele Posten von größeren Zahlen zum Kopfrechnen gar nicht geeignet. — Hat man die Summen zweier Posten gefunden, dann wird erst die dritte Post angegeben und zu der schon gefundenen Summe addiert. So ist auch bei der vierten und den übrigen etwa noch zu addierenden Posten zu verfahren.» (Wenzl Arzt 1837.)

Genauere Zergliederung des Kopfrechnens in Stufen.

§ 18. Anmerkung. Der Kürze wegen wird die weitere Zergliederung der einzelnen Stufen nur durch einzelne Beispiele angedeutet; ebenso wird die Ausführung an speciellen Fällen möglichst kurz behandelt, wenn es nicht nothwendig erscheint, dieselbe genauer zu besprechen. Bei den einzelnen Stufen wird in Klammern auf diejenigen zurückgewiesen, auf die sie sich stützen. In manchen Fällen müssen einzelne Zahlen zerlegt werden, jedoch wird dabei nicht auf den betreffenden Paragraph zurückgewiesen, ja es wird öfters die Zerlegung, weil sie sich von selbst versteht, gar nicht angedeutet. Für den Raum 1—100 vergl. «Der metrische Scheibchen-Rechenapparat u. s. w.»

Addition.

Raum 1—20.

1.) 5 + 3 (7 + 3, 10 + 4, 8 + 5). — Ausführung vergl. § 8.
2.) 5 + 10. — 5 + 10 = 10 + 5 u. s. w.
3.) 14 + 3 (14 + 6). — 4 + 3 = 7, 14 + 3 = 17. (1.)
4.) 5 + 12. — 5 und 10 ist 15 und 2 ist 17, 5 + 12 = 17. (2., 3.)

Raum 1—100.

5.) 40 + 7. — Vergl. Zahlbildung.
6.) 6 + 50. — 6 + 50 = 50 + 6 u. s. w. (5.)
7.) 30 + 40 (80 + 20). — 3 Z. + 4 Z. = 7 Z., 30 + 40 = 70. (1.)
8.) 34 + 3 (34 + 6, 34 + 8). — 4 + 3 = 7, 34 + 3 = 37; 4 + 6 = 10, 34 + 6 = 40; 4 + 8 = 12, 34 + 8 = 42.
9.) 5 + 57. — 5 und 50 ist 55 und 7 ist 62. (6., 8.)
10.) 60 + 24. — 60 und 20 ist 80 und 4 ist 84, 60 + 24 = 84. (7., 5.)
11.) 43 + 50. — 40 + 50 = 90, 43 + 50 = 93. (7., 5.)
12.) 43 + 25 (26 + 54, 56 + 37). — 43 und 20 ist 63 und 5 ist 68, 43 + 25 = 68. (11., 8.)

Raum 1—1000.

13.) 300 + 5, 5 + 300, 300 + 20, 20 + 300, 300 + 32, 32 + 300, 306 + 20, 320 + 6. — Vergl. Zahlbildung.
14.) 70 + 80. — 7 Z. + 8 Z. = 15 Z., 70 + 80 = 150. (1.) Oder 70 + 30 ist 100 und 50 ist 150, 70 + 80 = 150. (7., 13.)
15.) 300 + 400. — 3 H. + 4 H. = 7 H., 300 + 400 = 700. (1.)
16.) 754 + 8. — 54 + 8 = 62, 754 + 8 = 762. (8.)
17.) 400 + 520. — 400 und 500 ist 900 und 20 ist 920, 400 + 520 = = 920. (15., 13.)
18.) 740 + 30 (740 + 60, 740 + 80). — 740 und 60 ist 800 und 20 ist 820, 740 + 80 = 820. (7., 14., 13.)

19.) 450 + 200. — 400 und 200 ist 600 und 50 ist 650, 450 + 200 = 650.
20.) 50 + 83. — 50 und 80 ist 130 und 3 ist 133, 50 + 83 = 133. (14., 13.)
21.) 83 + 50. — 80 und 50 ist 130 und 3 ist 133, 83 + 50 = 133. (14., 13.)
22.) 643 + 20 (643 + 60, 643 + 80). — 640 und 80 ist 720 und 3 ist 723, 643 + 80 = 723. (18., 3.)
23.) 425 + 300. — 400 und 300 ist 700 und 25 ist 725, 425 + 300 = = 725. (15., 13.)
24.) 85 + 43 (85 + 48). — 85 und 40 und 3 u. s. w. (21., 16.)
25.) 463 + 32 (463 + 37, 463 + 72, 463 + 78). — 463 und 30 und 2 u. s. w. (22., 16.)
26.) 437 + 360 (437 + 370, 437 + 390). — 437 und 300 und 60 u. s. w. (23., 22.)
27.) 532 + 364 (532 + 358 u. s. w.). — 532 und 300 und 60 und 4 u. s. w. (23., 22., 16.)

Subtraction.

Raum 1 — 20.

1.) 8 — 3 (10 — 3, 15 — 7). — Ausführung vergl. § 9.
2.) 15 — 2. 5 — 2 = 3, 15 — 2 = 13. (1.)

Raum 1 — 100.

3.) 50 — 30. 5 Z. — 3 Z. = 2 Z., 50 — 30 = 20. (1.)
4.) 70 — 3. 70 — 3 = 67.
5.) 54 — 4 (54 — 6). 54 weniger 4 ist 50 weniger 2 ist 48, 54 — 6 = 48. (4.)
6.) 50 — 36. 50 weniger 30 weniger 6 u. s. w (3., 4.)
7.) 56 — 30. 50 weniger 30 und 6 u. s. w. (3., 4.)
8.) 56 — 35 (56 — 39). 56 weniger 30 weniger 5 u. s. w. (7., 5.)

Raum 1 — 1000.

9.) 600 — 200. 6 H. — 2 H. = 4 H., 600 — 200 = 400. (1.)
10.) 425 — 3 (425 — 5, 425 — 9). 25 — 3 = 22, 425 — 3 = = 422. (5.)
11.) 400 — 60. 100 — 60 = 40, 400 — 60 = 340. (3.)
12.) 460 — 20 (420 — 70). 60 — 20 = 40, 460 — 20 = 440. (3.) 420 weniger 20 ist 400 weniger 50 ist 350, 420 — 70 = 350. (3.)
13.) 460 — 6. 60 — 6 = 54 u. s. w. (4.)
14.) 524 — 300. 500 — 300 = 200, 524 — 300 = 224. (9.)

15.) 684 — 30 (634 — 80). 84 weniger 30 u. s. w. (7.)
634 weniger 30 ist 604 weniger 50 ist 554, 634 — 80 = 554.

16.) 800 — 56. 800 weniger 50 weniger 6 u. s. w. (11., 13.)

17.) 800 — 250. 800 weniger 200 weniger 50 u. s. w. (9., 11.)

18.) 800 — 257. 800 weniger 200 weniger 50 weniger 7 u. s. w. (9., 10., 13.)

19.) 576 — 43 (534 — 57). 576 weniger 40 weniger 3 u. s. w. (15., 10.)

20.) 864 — 340 (864 — 370). 864 weniger 300 weniger 40 u. s. w. (14., 15.)

21.) 864 — 342 (864 — 347, 864 — 372, 864 — 387).
864 weniger 300 weniger 40 weniger 2 u. s. w. (14., 15., 10.)

Multiplication.

Raum 1—20.

Nur vorbereitende Übungen.

Raum 1—100.

Anmerkung. Der Multiplicator wird immer links vom Multiplicand geschrieben.

1.) 6 × 7. — 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 u. s. w. Vergl. «Der metrische Scheibchen-Rechenapparat» u. s. w.

2.) 4 × 20. — 4 × 2 Z. = 8 Z., 4 × 20 = 80. (1.)

3.) 3 × 32. — 3 × 30 = 90, 3 × 2 = 6, 90 + 6 = 96, 3 × 32 = 96. (1., 2.)

4.) 20 × 4. — 10 × 4 = 40, 2 × 40 = 80. Veranschaulicht sehr gut der metrische Scheibchen-Rechenapparat. (2.)

5.) 23 × 3. — 20 × 3 = 60, 3 × 3 = 9, 60 + 9 = 69, 23 × 3 = 69. (2., 1.)

Raum 1—1000.

6.) 7 × 80. Ergänzung zur zweiten Stufe.

7.) 3 × 200. — 3 × 2 H. = 6 H., 3 × 200 = 600. (1.)

8.) 5 × 63. Ergänzung zur dritten Stufe.

9.) 4 × 230. — 4 × 200 + 4 × 30 u. s. w. (7., 6.)

10.) 4 × 243. — 4 × 200 + 4 × 40 + 4 × 3 u. s. w. (7., 8., 1.)

11.) 60 × 8. Ergänzung zur vierten Stufe.

12.) 300 × 2. — 100 × 2 = 200, 3 × 200 = 600, 300 × 2 = 600. (7.)

13.) 43 × 7. Ergänzung der fünften Stufe.

14.) 312 × 2. — 300 × 2 + 10 × 2 + 2 × 2 u. s. w. (12., 4., 1.)

15.) 20×30. — $10 \times 30 = 300$, $2 \times 300 = 600$, $20 \times 30 = 600$. (7.)
16.) 10×43. — $10 \times 40 + 10 \times 3$ u. s. w. (15., 1.)
17.) 40×23. — $10 \times 23 = 230$, $4 \times 230 = 920$, $40 \times 23 = 920$. (15., 9.)
18.) 13×24. — $10 \times 24 + 3 \times 24$ u. s. w. (16., 8.)

Anmerkung zur Stufe 18. Wenn der Multiplicator eine in Factoren zerlegbare Zahl ist, ist der am Beispiele 18×23 veranschaulichte Vorgang zu empfehlen, nämlich: $6 \times 23 = 138$, $3 \times 138 = 414$, $18 \times 23 = 414$.

Division.

Raum 1—20.

Vorbereitende Übungen möglich, jedoch ist es besser, auch diese zu übergehen.

Raum 1—100.

1.) 8 : 2 (56 : 7). — Messen: Zerlegung in gleiche Theile zu 2. — Theilen: Zerlegung in zwei gleiche Theile.
2.) 80 : 4 (60 : 4, 50 : 4). — Messen: $80 = 40 + 40$ u. s. w.
Theilen: der vierte Theil von 8 Z. = 2 Z. oder 20.
$\frac{1}{4}$ v. $80 = 20$. — $\frac{1}{4}$ v. $50 =$, $50 = 40 + 10$ u. s. w. (1.)
3.) 96 : 3 (75 : 3, 47 : 3). — Messen: $96 = 30 + 30 + 30 + 6$ u. s. w.
Theilen: $\frac{1}{3}$ v. $90 = 30$, $\frac{1}{3}$ v. $6 = 2$, $\frac{1}{3}$ v. $96 = 32$.
$75 = 60 + 15$, $47 = 30 + 17$ u. s. w. (1., 2.)
4.) 40 : 20. — Messen: 2 Z. in 4 Z. = 2 mal, 20 in 40 = 2. (1.)
Theilen: $\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{10}$ v. 40 u. s. w. (2.)
5.) 56 : 20. — $56 = 40 + 16$ u. s. w. (4.)

Raum 1—1000.

6.) 400 : 8 (120 : 2, 316 : 4); $10 <$ Quotient < 100. —
Messen: 8 in $40 = 5$ und in 40 Z. 50 mal.*
Theilen: $\frac{1}{8}$ v. 40 Z. = 5 Z. oder $\frac{1}{8}$ v. $400 = 50$. (1.)
$316 = 280 + 36$ u. s. w.
7.) 600 : 3 (450 : 3, 674 : 4); Quotient > 100. — Messen: 3 in $6 = 2$, 3 in 6 H. = 200, 3 in $600 = 200$. — $674 = 400 + 240 + 34$ u. s. w.
Theilen: $\frac{1}{3}$ v. 6 H. = 2 H. u. s. w. u. s. w. (1.)

---

* Vergleiche das Messen benannter Zahlen z. B. 2 *cm* in 2 *dm* =, 2 *cm* sind in 2 *cm* 1 mal und in 2 *dm* 10 mal enthalten.

8.) 600 : 200 (400 : 20, 700 : 20, 240 : 30, 267 : 80). — Messen: 2 Z. in 6 Z. u. s. w.; 20 in 40 = 2, in 40 Z. = 20 u. s. w. 267 = 240 + 27 u. s. w.

Theilen: $\frac{1}{200}$ v. 600 = $\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{100}$, v. $\frac{1}{600}$ u. s. w.

9.) 648 : 200. — 648 = 600 + 48 u. s. w.

10.) 824 : 32. — Theilen: $\frac{1}{32}$ v. 824 = $\frac{1}{4}$ v. $\frac{1}{8}$ v. 824 u s. w.

Die erste Theilung wenigstens muss eine ganze Zahl als Quotienten ergeben.

Bemerkungen zu den voranstehenden Unterstufen.

§ 19. 1.) Die Grundlage alles Kopfrechnens ist die Anschauung, durch die ist jede Stufe zur klaren Auffassung zu bringen. Wie dieselbe vorzunehmen ist, ergibt sich aus dem in § 6 und § 13 Gesagten. Genauer wird dies im praktischen Theil und in der Schrift «Der metrische Scheibchen-Rechenapparat u. s. w.» vom selben Verfasser besprochen. Im Raume 1—1000 hat an die Stelle der äußeren die innere Anschauung zu treten. Um sich über diese bei den Schülern zu orientieren, muss man sie die Auflösungen möglichst selbst suchen lassen; treffen die Schüler das Normalverfahren nicht, und schlagen sie Umwege ein, so führt sie der Lehrer auf dasselbe hin, worin er sie vollständig sicher zu machen hat. Überhaupt soll man bestrebt sein, die Selbstthätigkeit der Schüler in dem Maße, als sie heranwachsen, zu steigern (Hentschel).

2.) Eine Durchsicht der vorangehenden Stufen führt uns zum Resultate, dass sich die späteren Stufen auf frühere stützen. Die Reihenfolge der Übungen ist also genau vorgeschrieben.

3.) Die aus den vorangehenden Stufen sich ergebenden Übungen zerfallen in zwei Arten, und zwar 1.) in solche, bei welchen die Einübung derartig zu geschehen hat, dass mit der gegebenen Aufgabe allsogleich das Resultat im Geiste vorschwebt; z. B. sobald das Kind 5 + 3 hört, muss es auch schon ohne Nachdenken die Zahl 8 sagen können; 2.) in solche, bei denen man den Schülern insbesondere die Art und Weise des Vorganges (das Normalverfahren) beim Berechnen beizubringen hat, die aber die Einübung der ersten Art, worauf sie sich stützen, schon voraussetzen; z. B. bei der Aufgabe 36 + 23 hat man dem Kinde nur das Verfahren 36 und 20 ist 56 und 3 ist 59 beizubringen.

Zur ersten Art gehören vor allem die Fundamentalübungen: das «Einsundeins», das «Einsvoneins», das «Einmaleins», das «Einsineins» (Einsdurcheins); ferner noch andere, und zwar beim Addieren die Stufen: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16; 10 und 11 sollen wenigstens möglichst geläufig ausgerechnet werden können;

beim Subtrahieren: 2, 3, 4, 5, 9, 10, 12, 13; 6, 7, 11, 14, 15 sollen wenigstens möglichst geläufig ausgerechnet werden können;

beim Multiplicieren: 2, 4, 6, 7, 11, 12, 15, 16;

beim Dividieren die durch Beispiele angedeuteten Übungen: 80 : 4, 40 : 20, 600 : 3, 600 : 200, 400 : 8 (?).

Zur zweiten Art gehören die übrigen Übungen. — Nur wenn die erste Art der Aufgaben zur vollsten Sicherheit eingeübt wurde, kann die zweite Art mit Erfolg behandelt werden; denn nur dann kann die Aufmerksamkeit des Schülers bei der Abstraction des Normalverfahrens (des Zahlengesetzes) ungetheilt erhalten werden. Z. B. der Schüler hat bei der Ausführung der Aufgabe 4 mal 23 den Vorgang: 4 mal 20 = 80, 4 mal 3 = 12, 80 + 12 = 92, 4 mal 23 = 92 zu durchschauen, was er am bequemsten erreicht, wenn ihm die Resultate für 4 mal 20 und 4 mal 3 allsogleich vorschweben.

Überhaupt hat man auf das, was die Grundlage für Anderes bildet, hauptsächlich das Augenmerk zu richten. So z. B. wenn das «Einmaleins» vollkommen geistiges Eigenthum des Schülers geworden ist, kann das «Einsineins, Einsdurcheins» leicht erfasst und im ganzen erkannt werden, wenn der Schüler nur durchschaut, wie man von der Multiplication auf die Division umkehrt. — Auch ein Grund, dass die Division nach der verarbeiteten Multiplication vorzunehmen sei.

4.) Der erste Weg, den man bei einer neuen Übung einschlägt, ist wohl immer ein solcher, der zur Einsicht in das Verfahren führt; schließlich muss die Rechnung möglichst kurz durchgeführt werden. Z. B. 70 + 80 =; zuerst spricht man: 7 Z. und 8 Z. sind 15 Z., 70 + 80 = 150; schließlich muss jedoch sogleich angegeben werden: 70 + 80 = 150.

5.) Beim Kopfrechnen spielt die Zerlegung der Zahlen eine wichtige Rolle. Abgesehen von den Zerlegungen, die man mit den Zahlen im Raume 1—20 vornimmt, z. B. 8 = 5 + · u. s. w., sind noch folgende hervorzuheben: a) Zerlegung einer Zahl in mehrere gleiche Theile (Raum 1—100), wichtig für die Fundamentalübungen der Division;

b) Zerlegung einer Zahl in die verschiedenen dekadischen Einheiten; c) Zerlegung des Dividends in solche Theile, die alle bis auf den niedersten durch den Divisor theilbar sind. Dies ist in folgenden, durch Beispiele angedeuteten Fällen nothwendig:

α)	50 : 4 = ;	50 = 40 + 10	u. s. w.
β)	47 : 3 = ;	47 = 30 + 17	»
γ)	80 : 30 = ;	80 = 60 + 20	»
δ)	56 : 20 = ;	56 = 40 + 16	»
ε)	540 : 3 = ;	540 = 300 + 240	»
ζ)	916 : 4 = ;	916 = 800 + 80 + 36	u. s. w.
η)	500 : 2 = ;	500 = 400 + 100	u. s. w.
ϑ)	267 : 80 = ;	267 = 240 + 27	»
ι)	824 : 300 = ;	824 = 600 + 224	»

Für diese Art der Zerlegung sind Vorübungen rathsam. Für die Übungen *α)*: Zerlegungen der Zahlen 30, 50, 70, 90 für den Divisor 2; 40, 50, 70, 80 für den Divisor 3; 50, 60, 70, 90 für den Divisor 4 u. s. w.

Für die Übungen *β)* sind ähnliche Vorübungen vorzunehmen, man nimmt nur statt 30 z. B. 37 u. s. f. Ähnliche Vorübungen ergeben sich für die übrigen Stufen.

6.) Die Übungen, die in der Stufenordnung vorzunehmen sind, werden später auch außer der Ordnung vorgenommen, damit die erkannten Zahlengesetze durch Nebeneinanderstellung noch schärfer zum Ausdruck gelangen.

7.) Ein besonderes Augenmerk ist auf die Ergänzungen der Zehner oder der Hunderter und auf die Übergänge in andere Zehner oder in andere Hunderter zu richten. Als vorbereitende Übungen zu diesem Zwecke sind daher solche wie 7 + · = 10, 5 = 3 + ·, 67 + · = 70 u. s. w. von Bedeutung.

Besonders verdienen auch berücksichtigt zu werden: die Multiplication mit 10, 100 und die Division durch 10, 100.

8.) Die Aufgaben sind entweder einfache oder zusammengesetzte; letztere werden insbesondere bei Wiederholungen und beim Schnellrechnen angewendet. Hauptsache bleibt jedoch, nur 2 Summanden, resp. 2 Factoren zu nehmen.

9.) Im Raume 1—100 sind hauptsächlich, jedoch nicht ohne Ausnahme, die Übungen dem Gedächtnisse einzuprägen, im Raume 1—1000 ist die Erkenntnis des Normalverfahrens vorwiegend.

10.) Das Kopfrechnen wird auch in den höheren Zahlenräumen gepflegt; dasselbe besteht jedoch größtentheils in Wiederholungen. Die im Folgenden angeführten Beispiele zeigen jedoch, dass es bequeme Kopfübungen gibt, die den Zahlenraum 1000 übersteigen.

900 + 800, 3000 + 4000, 2500 + 3000, 4280 + 5000, 5000 + 3276, 320 + 970, 834 + 750, 753 + 546 u. s. w.

9000 — 2000, 2400 — 1300, 6040 — 3020, 6000 — 800, 3000 — 90, 4000 — 3, 4200 — 3800, 1630 — 950 u. s. w.

6 × 300, 2 × 4000, 4 × 830, 5 × 426 u. s. w.

4000 : 2, 6300 : 3, 8470 : 7, 9045 : 5, 1250 : 25, 3672 : 36, 2000 : 500 u. s. w.

Die Addition und Subtraction, wobei beide Zahlen vier bedeutende Ziffern enthalten, beginnt sehr unbequem zu werden und wird daher lieber schriftlich ausgeführt. Vergleiche das Dreierprincip.

11.) Es gibt auch Rechnungsvortheile, wie z. B. 34 + 29 = ? 34 + 30 ist 64, weniger 1 ist 63; 86 — 49 = ? wird ähnlich behandelt u. s. w. Wann man mit Rechnungsvortheilen anzufangen hat, ist wohl eine offene Frage. Močnik z. B. nimmt sie in den Raum 1—1000 auf, während Hentschel sie in den höheren Zahlenraum verweist. Jedenfalls haben die Vortheile so lange keine Berechtigung, als das Normalverfahren nicht vollends eingeübt ist.

12.) Die Seele alles Unterrichtes ist fortwährende Wiederholung des bereits Erkannten. Dieser Grundsatz kann für's Rechnen nicht genügend eingeschärft werden und insbesondere für die Übungen, die dem Gedächtnisse unmittelbar eingeprägt werden müssen. Wiederholen soll man öfters im Laufe des Jahres nach dem Abschlusse bestimmter Partien, wiederholen soll man im Anfange jedes Schuljahres, bevor man mit Neuem beginnt.

Reihenübungen.

§ 20. Die Reihenübungen sind von höchster Bedeutung. Durch Reihen wird die Orientierung in der Zahlenreihe zu einer möglichst klaren und geläufigen, der Rechenunterricht wird lückenlos ertheilt; durch Reihen kann ein mehreren Übungen zugrunde liegendes Gesetz abstrahiert werden; die Reihen eignen sich insbesondere für Schnellrechnen, für Wiederholungen und auch für die stille Beschäftigung. Jede Reihenübung hat erst aufzutreten, wenn die Übungen, auf die sie sich stützt, schon durchgearbeitet sind. Solche Reihenübungen kommen bei allen vier Grundrechnungsarten vor.

1.) Fortschreitendes Zuzählen der Grundzahlen zu dem jedesmal erhaltenen Resultate.

1 + 1 = 2	1 + 2 = 3	2 + 2 = 4	1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	
2 + 1 = 3	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6	4 + 3 = 7	5 + 3 = 8	u. s. w.
3 + 1 = 4	5 + 2 = 7	6 + 2 = 8	7 + 3 = 10	8 + 3 = 11	
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	

Dabei soll man den Raum, in dem man sich befindet, nicht überschreiten. — Das Bildungsgesetz dieser Reihen ist leicht zu erkennen; es wäre daher überflüssig, Reihen für das Zuzählen der übrigen Grundzahlen anzusetzen. Ähnlich wird im Nachstehenden mit den Reihen abgebrochen.

Hentschel bemerkt: «Übrigens kann durchaus nicht davon die Rede sein, auf gegenwärtiger Stufe (1 — 100) alle Reihen zur Fertigkeit bringen zu wollen. Man wird sich mit dem Zuzählen der 2 und 3 zuerst sehr wohl begnügen können; nur nach und nach geht man zu anderen Summanden über. Es bildet dieses reihenweise Addieren eine ganz besondere Übung für sich, zu der man wiederholend und erweiternd immer von neuem zurückkehren muss, wie weit auch der übrige Unterricht bereits fortgeschritten sein möge. (Stoff zu täglichen Studien!)»

Bei gehöriger naturgemäßer Vertheilung des Stoffes bieten diese Reihen keine besonderen Schwierigkeiten, im Gegentheile, die Kinder beginnen ihre Kraft zu fühlen und rechnen mit besonderer Vorliebe in Reihen; daher dürfte die Bemerkung Hentschels «übrigens kann durchaus nicht davon die Rede sein, auf gegenwärtiger Stufe (1 — 100) alle Reihen zur Fertigkeit bringen zu wollen», etwas zu ängstlich sein. Insbesondere mögen folgende Reihen als vorbereitende Übungen auf die Multiplication gepflegt werden:

2 + 2 = 4,	4 + 2 = 6,	6 + 2 = 8	u. s. f. bis 20
3 + 3 = 6,	6 + 3 = 9,	9 + 3 = 12	u. s. f. bis 30
4 + 4 = 8,	8 + 4 = 12,	12 + 4 = 16	u. s. f. bis 40

u. s. f.

Schließlich haben diese Übungen in kurze Zählübungen zu übergehen:

2, 4, 6, 8 . . . 20; 3, 6, 9 . . . 30; 4, 8, 12 . . . 40 u. s. f.

2.) Fortschreitendes Zuzählen der Zehner zu dem jedesmal erhaltenen Resultate.

10 + 10 = 20	10 + 20 = 30	20 + 20 = 40	10 + 30 = 40	u. s. f.
20 + 10 = 30	30 + 20 = 50	40 + 20 = 60	40 + 30 = 70	
30 + 10 = 40	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	
u. s. w.				

Die Reihen gehen bis 100 oder bis 1000, je nach dem Raume, in dem man sich befindet. Schließlich haben diese Übungen in kurze Zählübungen überzugehen.

10, 20, 30 . . . 100; 10, 30, 50, 70, 90 u. s. f.

3.) Fortschreitendes Zuzählen der Zehner zu gemischten Zahlen und zu dem jedesmal erhaltenen Resultate.

a) zu zweiziffrigen gemischten Zahlen, b) zu Zahlen aus Hundertern und Zehnern bestehend, c) zu Zahlen aus Hunderten, Zehnern und Einern bestehend.

Z. B. 14 + 20 = 34, 34 + 20 = 54 u. s w.

Die zweiziffrigen Zahlen werden dabei möglichst abgewechselt und jede Zehnerzahl genommen. Die Reihen gehen bis 100 oder bis 1000, je nach dem Raume, in dem man sich bewegt.

Mit Rücksicht auf 2. und auf a) lassen sich bequem die Reihen nach b) und c) bilden.

4.) Zuzählen der Grundzahlen zu Zahlen, in welchen die Zahl der Einer unverändert bleibt.

Dabei kann jede Grundzahl und im ersten Summanden jede Einerzahl genommen werden.

Z. B. 8 + 7 = 15, 18 + 7 = 25, 28 + 7 = 35 u. s. w.

Insbesondere sind dabei auch Reihen von Bedeutung, die Ergänzungen zu reinen Zehnern, resp. Hundertern sind.

Z. B. 7 + 3, 17 + 3, 27 + 3 u. s. w.

Im Raume 1 bis 1000 auch Reihen wie 160 + 40, 260 + 40, 360 + 40 u. s. w., also Zuzählen der Zehnerzahlen zu Zahlen, die aus Hundertern und Zehnern bestehen und in denen die Zehnerzahl unverändert bleibt.

5.) Wegzählen der Grundzahlen von dem jedesmal erhaltenen Resultate.

Die Reihen werden ähnlich gebildet, wie die in 1., nur dass sie nach entgegengesetzter Richtung von oben nach unten gehen, und zwar von 10, 20, 100, 1000 an, je nach dem Raum, in dem man sich befindet. Als Beispiel für den Raum 1 — 100 möge folgende Reihe angeführt werden: 92 — 7 = 85, 85 — 7 = 78, 78 — 7 = 71 u. s. f. Hentschels Bemerkung zu 1. möge auch hier berücksichtiget werden.

6.) Wegzählen der Zehnerzahlen von dem jedesmal erhaltenen Resultate, wenn a) der Minuend keine gemischte Zahl, b) eine gemischte Zahl ist.

Die Bildung der Reihen erhellt aus 2. und 3., nur dass das Wegzählen von oben und nicht von unten beginnt. Im Raume 1 — 100 kann man bei jeder beliebigen Zehnerzahl, resp. gemischten Zahl, wegzuzählen anfangen, die größer ist als der Subtrahend. Z. B. 90 — 30 oder 87 — 20. Eine ähnliche Bemerkung gilt für den Raum 1 — 1000.

7.) Wegzählen der Grundzahlen von Zahlen, in denen die Einerzahl unverändert bleibt.

Dabei kann man bei jeder Zahl unter 100, resp. unter 1000, die Reihe zu bilden anfangen; als Subtrahend kann jede Einerzahl genommen werden.

Z. B. 97 — 4, 87 — 4, 77 — 4 u. s. f.; 72 — 7, 62 — 7 u. s. f.

Derartige Übungen sind insbesondere wichtig für den Übergang in den nächst niederen Zehner, sie mögen daher häufig vorgenommen werden.

8.) Im Raume 1 — 1000 können auch Reihen gebildet werden, in welchen zu dem bereits erhaltenen Resultate eine zwei- oder auch dreiziffrige Zahl addiert wird. Ähnliches gilt für die Subtraction.

9.) Das «Einmaleins», «Einseins» (Einsdurcheins) sind Multiplications- und Divisionsreihen.

10.) Multiplication der Zehnerzahlen mit den Grundzahlen.

Z. B. 1 × 60 = 60, 2 × 60 = 120 u. s. f.

11.) Multiplication gemischter Zahlen überhaupt mit jeder Grundzahl.

12.) Multiplication der Zehnerzahlen mit jeder Zehnerzahl.

Z. B. 10 × 10, 10 × 20, 10 × 30 u. s. f.

13.) Division der Zehnerzahlen durch jede Grundzahl, wobei der Quotient a) eine reine Zehnerzahl, b) eine gemischte Zahl ist.

Z. B. 20 : 2, 40 : 2, 60 : 2 u. s. f.; 20 : 2, 30 : 2, 40 : 2 u. s. f.

14.) Im Raume 1 — 1000 könnte man auch Reihen bilden, wobei reine Hunderter durch jede Grundzahl dividiert werden.

Z. B. 300 : 3, 600 : 3, 900 : 3; 300 : 3, 400 : 3, 500 : 3 u. s. f.

Diese Übungen können im höheren Zahlenraume auch die Zahl 1000 überschreiten. Im allgemeinen aber werden im höheren Zahlenraume die Übungen bis 1000 wiederholt.

B. Zifferrechnen.

Wechselbeziehung zwischen Kopf- und Zifferrechnen.

§ 21. Das Kopfrechnen wird 1.) in ein selbständiges, 2.) in ein auf das Zifferrechnen vorbereitendes und 3.) in ein solches, welches mit dem Zifferrechnen in Verbindung ist, eingetheilt.

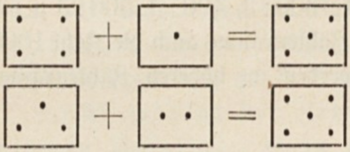
1.) Das selbständige Kopfrechnen wird hauptsächlich im Raume 1 — 100, aber auch im Raume 1 — 1000 gepflegt. An dieses schließt sich das Zifferrechnen innig an und hat insbesondere die Aufgabe, die Schüler im Lesen und Schreiben der schriftlichen Zeichen einzuüben und sie an eine bestimmte Form anzugewöhnen und auch das Kopfrechnen zu unterstützen. Dadurch wird zugleich ermöglicht, die Schüler stille zu beschäftigen und ihnen Hausarbeiten zu geben.

Die schriftlichen Zeichen, mit denen die Schüler vertraut gemacht werden müssen, sind: die Zeichen für die Zahlen, die Operationszeichen und das Gleichheitszeichen.

Die Zahlen werden dargestellt a) durch eine Reihe von Strichen, von Punkten u. s. w., b) durch Zahlbilder, c) durch Ziffern.

Hentschel schreibt: «Sind nun die Schüler schon so weit gefördert, dass sie mit den Zahlzeichen (Ziffern) sogleich auch die Zahlvorstellung verbinden, und sind sie dazu noch im Schreiben der Ziffern hinreichend geübt, so gehe man sogleich zum Zifferrechnen. Liegen aber gegründete Bedenken dagegen vor, so lasse man die ersten Additions- und Subtractionsübungen, sagen wir bis in den Bereich der 5 oder 6 hin, mit Zahlbildern (nicht aber mit Reihen von Strichen 2c.) ausführen, schreite aber, sobald es möglich ist, zu den Ziffern vor. Die Ziffern weiter hinaus zu schieben, als unbedingt nöthig ist, wohl gar noch schriftliche Übungen des Multiplicierens und Dividierens in Strichgruppen oder Zahlbildern ausführen zu lassen, ist entschieden zu verwerfen.»

Daran schließt Hentschel folgende Beispiele als Aufgaben im Bereiche der Zahl 5 an.



$4 + 1 =$ $\quad$ $3 + 2 =$
$1 + 4 =$ $\quad$ $2 + 3 =$
$5 - 1 =$ $\quad$ $5 - 2 =$
$5 - 4 =$ $\quad$ $5 - 3 =$

und setzt folgende Bemerkung hinzu:

«Manche ziehen es vor, sich bei sämmtlichen Übungen dieser Stufe (1 — 10) der Anwendung der Ziffern noch gänzlich zu enthalten, um nicht die Anschaulichkeit des Unterrichtes zu beeinträchtigen und eine Verwechslung von Sache und Zeichen, Zahl und Ziffer zu veranlassen. Die Schüler arbeiten dann in dieser Weise:

a) ||| + |||| = ||||||| $\quad$ c) ||| × || = ||||||
b) ||||||| — |||| = ||| $\quad$ d) || in |||||| = |||

oder auch dasselbe mit Zahlbildern.

Dabei ist zu erwägen:

α) Darstellungen wie diese bei b), und vor allen bei c) und d), sind nur anschaulich in Bezug auf die Zahlen, mit welchen der Schüler rechnen soll, nicht aber inbetreff des Rechnens selbst.

β) Was ferner das Rechnen mit Strichreihen betrifft, so ist gewiss, dass die Kinder nicht mehr als 4 Striche als ein Ganzes mit einem Blicke übersehen können. Demnach vermögen sie ihre eigenen, in Strichen gemachten Aufzeichnungen überall, wo Zahlen über 4 vorkommen, nicht unmittelbar wieder zu lesen, sondern sie sind, wenn das Lesen gefordert wird, zu einem fortwährenden mühsamen und geistlähmenden Nachzählen einzelner Striche gezwungen.

γ) Wo soll der Lehrer in einer großen Elementarclasse die Zeit hernehmen, die in Strichen ausgeführten Arbeiten einer zahlreichen Abtheilung von Schülern zu prüfen? In Ziffern Geschriebenes lernt man mit einem Blick übersehen (dasselbe gilt in gewissem Sinne auch von den Zahlbildern); bei Aufzeichnungen in Strichen ist dies unmöglich.»

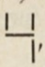
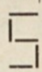
Nach Winter und Stubba tritt die Ziffer auf, nachdem sämmtliche vier Operationen im Zahlenkreis von 1—10 durchgearbeitet wurden.

Böhme gebraucht die Ziffer, nachdem er die vier Grundoperationen an Zahlbildern durchgenommen hat, wozu nach seiner Meinung ein viertel Jahr, unter Umständen längere Zeit gehört.

Die Monographen Wiedemann und Volkmann, ebenso Močnik, lassen die Ziffer sofort nach der Betrachtung der betreffenden Zahl schreiben und Tanck, sobald die Kinder das Zeichen richtig fassen und es nachmachen können.

Diejenigen, die die Ziffer möglichst weit hinausschieben, kleben wohl immer am Gedanken, dass man die Zahl ihrem Inhalte nach momentan erkennen kann. Inwieferne ihre Anschauung begründet ist, erkennt man aus dem Vorangehenden. «Eines nach dem Andern», dieser Grundsatz soll auch bezüglich der schriftlichen Zeichen gelten. Und vom Bekannten soll man ausgehen. In einer Rechenfibel sollen also die ersten Zahlen durch bekannte Objecte, Messer, Gabel, Schlüssel u. s. w., und wohl auch durch Striche, Punkte u. s. w. dargestellt werden. Vergl. Heinze und Hübner.

Bei der Zahl 2 treten dann die Zeichen $+$, $=$ auf, auf welche man beim mündlichen Unterrichte schon vorbereitet hat. (Vergl. prakt. Theil.) Die Zahlen 2 und 3 werden aus dem Grunde, damit diese Zeichen intensiver erkannt werden, in zwei Bestandtheile zerlegt; diese Zerlegung im Raume 1—3 ist mit einem Blick ersichtlich und wird daher keine besonderen Schwierigkeiten bereiten. (Vergl. die Rechenfibel.)

Auf die Ziffern sollen Zahlbilder, von denen jene am geeignetsten erscheinen, welche, aus Strichen bestehend, mit den Ziffern die größte Ähnlichkeit haben, wie z. B. ,  u. s. w., vorbereiten und im Raum, in welchem man mit Ziffern beginnt, diesen gegenübergestellt werden. (Vergl. die Rechenfibel.) Im Raume 1—10 treten die Ziffern in den Vordergrund, während die Zahlbilder ihre Rolle ausgespielt haben.

2.) Das auf das Zifferrechnen vorbereitende Kopfrechnen hat die Aufgabe, die Auffassung der Regeln zu erleichtern. Z. B. wird die Regel für die Multiplication mit reinen Zehnern leicht aufgefasst, wenn man folgende an einem Beispiele angedeutete Kopfrechnungen vornimmt. 30 mal 24 bekommt man, wenn man das 3fache von 24 10mal nimmt. $3 \times 24 = 72$, $10 \times 72 = 720$, $30 \times 24 = 720$.

Regel: «Man multipliciert 24 mit 3 und setzt zum Producte rechts eine Nulle.»

Schriftlich:
$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ \ 30 \\ \hline 720 \end{array}$$

3.) Mit dem Zifferrechnen ist das Kopfrechnen immer in Verbindung. So z. B. bei jeder Operation die Fundamentalübungen und noch andere. Dasjenige, worauf sich das Zifferrechnen stützt, soll zur vollsten Fertigkeit und Sicherheit eingeübt werden, damit die Auffassung der Regel dadurch nicht gehemmt wird.

§ 22. Hentschel verlangt bezüglich der Form: 1.) Nummer und Buchstabe der Aufgabe sollen oben links deutlich zur Aufgabe geschrieben werden; 2.) das Endresultat hebe man mit zwei wagrechten Strichen heraus; 3.) die Ziffern sollen deutlich sein. (1—1000.)

Močnik bemerkt im Raume 1—5: Die Form für die schriftliche Ausrechnung sei anfangs vollständig; z. B.

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 1 = \\ \hline 1 + 2 = 3 \\ 3 + 1 = 4 \\ \hline 1 + 2 + 1 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4 - 2 + 3 = \\ \hline 4 - 2 = 2 \\ 2 + 3 = 5 \\ \hline 4 - 2 + 3 = 5 \end{array}$$

. . . . In keinem Falle soll jedoch die folgende, durchaus falsche und sinnlose Darstellung geduldet werden:

$$1 + 2 = 3 + 1 = 4 \qquad 4 - 2 = 2 + 3 = 5$$

Bei vorgeschrittener Übung können sich die Schüler auch bloß der kürzeren Darstellungsweise bedienen; sie sprechen z. B. 4 weniger 2 ist 2 und 3 ist 5 und schreiben sogleich

$$4 - 2 + 3 = 5.$$

Selbständiges Zifferrechnen.

§ 23. Auf welcher Stufe das selbständige Zifferrechnen anzufangen hat, folgt aus dem über die Grenzen des Kopfrechnens Gesagten. Im unbegrenzten Zahlenraume, also im Raume über 1000, muss im allgemeinen an die Stelle des Kopfrechnens das Zifferrechnen treten. Bei genauerer Einsicht in die vorhandenen Rechenbücher findet man jedoch in der Regel das selbständige Zifferrechnen schon im Raume 1—1000 behandelt. Böhme bemerkt: «Um das schriftliche Verfahren zur völligen Einsicht zu bringen, knüpfen wir es stets an das Material an, mit dem der Schüler bereits bekannt ist, nämlich an den Kreis 1 bis 1000. Ist hieran die Einsicht gewonnen, dann ist sie auch im größeren Kreise leicht zu erreichen.» Da er im Raum 1—1000 nur das Kopfrechnen pflegt und erst im unbegrenzten Zahlenraume mit dem Zifferrechnen beginnt, bemerkt er: «Wer das schriftliche Rechnen nicht so weit hinausschieben will, wie in dieser Anleitung geschehen, mag es neben dem Kopfrechnen im Kreise 1 bis 1000 einhergehen lassen und für jedes die Hälfte der wöchentlichen Stunden verwenden.»

«Die Gründe des Verfahrens beim Tafelrechnen sind den Schülern überall zum Bewusstsein zu bringen. Das Rechnen selbst muss dann durch fleißige Übungen zur Sache des unmittelbaren Könnens werden, bei welchem eine Nothwendigkeit, sich auf die Gründe zu besinnen, gar nicht weiter vorhanden ist.» (Hentschel.)

«Mit den technischen Ausdrücken, welche im Rechnen eingeführt sind, werden die Schüler bei den ersten Beispielen des Zifferrechnens* bekannt gemacht, wozu es jedoch nicht so sehr der Definitionen, als vielmehr des wiederholten Gebrauchs dieser Ausdrücke bedarf. Niemals ist mit Namen und Definitionen anzufangen; früher muss die Sache da sein, dann folgt der Name.» (Močnik.)

Es ist sehr zu empfehlen, dass die Ableitung der Regel auch nach der Einübung wiederholend vorgenommen wird, weil sie nur dadurch für die Dauer erkannt wird und weil nur volles Verständnis der Regel das Gedächtnis unterstützt.

Addition.

§ 24. Einige Übungen im Kopfrechnen werden vorangeschickt. (Vergl. Kopfrechnen pag. 28, Raum 1—100 und 1—1000.)

Raum 1—1000.

Močnik will auch folgendermaßen durch das Kopfrechnen aufs Zifferrechnen vorbereiten: «Wir zerlegen beide Zahlen (32 und 53) in Zehner und Einer und zählen dann Zehner zu Zehnern und Einer zu Einern; also: 32 = 3 Z. + 2 E., 53 = 5 Z. + 3 E., 3 Z. und 5 Z. sind 8 Z., 2 E. und 3 E. sind 5 E., 8 Z. und 5 E. sind 85.» — Andere thun dies nicht, weil es auch nicht nothwendig ist und gegen

* Kann auch schon früher geschehen.

die Regeln des Kopfrechnens verstößt. Jedenfalls ist es von Vortheil, die Beispiele, bei welchen sich keine höheren Einheiten, also kein Übergang in höhere Ordnung ergibt, den Beispielen mit Uebergang in höhere Ordnung voranzuschicken, wie dies Močnik thut. Ferner kann man zuerst Beispiele mit zwei Summanden und dann solche mit mehreren Summanden nehmen. Hentschel leitet die Additionsregel am Beispiele: 406 + 300 + 256 + 7 + 18 ab. Er schreibt: «Man setzt mit aller Genauigkeit Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w.

$$\begin{array}{r} 406 \\ 300 \\ 256 \\ 7 \\ 18 \\ \hline 987 \end{array}$$

Berechnung: 8 E. und 7 E. = 15 E., und 6 E. = 21 E., und 6 E. = 27 E. oder 2 Z. und 7 E.; 2 Z. und 1 Z. = 3 Z. u. s. w.

Nachdem so *mehrere Aufgaben* mit Angabe der einzelnen Ordnungen durchgearbeitet sind, so heißt es ganz kurz: a) 8 und 7 ist 15, und 6 ist 21, und 6 ist 27 (die 7 wird untergesetzt, die 2 im Sinne behalten). — b) 2 und 1 ist 3, und 5 ist 8 (Untersetzen der 8; — c) 2 und 3 ist 5, und 4 ist 9 (Untersetzen der 9).

Endlich werde so addiert: Man zeigt auf die einzelnen Zahlen, ohne sie jedoch zu nennen, und gibt nur die jedesmalige Summe an; es heißt also bei den Einern obiger Aufgabe so: «8, 15, 21, 27» die 7 wird untergesetzt, mit den 2 Zehnern sofort zur Zehnerreihe gegangen, und es heißt dort: «2, 3, 8 ꝛc.»

Folgende Beispiele mögen die Stufenfolge andeuten, nach welcher die Beispiele für die Ableitung der Regel zu ordnen sind:

$$\begin{array}{r} 26 \\ 43 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 423 \\ 356 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 943 \\ 35 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26 \\ 47 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 564 \\ 457 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 628 \\ 92 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 120 \\ 618 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 326 \\ 47 \\ 108 \\ 4 \\ 300 \\ \hline \end{array}$$

und andere solche.

An den späteren Beispielen sollen die Schüler möglichst selbstthätig die Regel suchen.

Die Additionsregel ist leicht in Worten auszusprechen, daher soll man dies auch von den Schülern verlangen. «Die Addition wird ausgeführt, indem man Einer zu den Einern, Zehner zu den Zehnern u. s f. addiert.»

Nun werden die technischen Ausdrücke: Addieren = Zusammenzählen, Summanden (Posten, Addenden) = Zahlen, welche zusammengezählt werden, Summe = Zahl, die durch das Zusammenzählen gefunden wird, beigebracht, wenn man dies nicht schon früher gethan hat, wie dies aus dem dritten Rechenbuche zu ersehen ist. Diese Ausdrücke sind bei den folgenden Aufgaben wiederholt zu gebrauchen. Sobald die Regel von den Schülern aufgefasst wurde, wird die Addition an mehreren Beispielen eingeübt. (Vergl. Hentschel oben.)

«Das unnöthige Verweilen beim Aufrechnen an dieser oder jener Zahl, wie man es oftmals beobachten kann, wird nur durch fortgesetzte, fleißige Übung zu beseitigen sein.» (Hentschel.)

Unbegrenzter Zahlenraum.

§ 25. Das, was für den Raum 1—1000, gilt auch für den unbegrenzten Zahlenraum. Nicht überflüssig wäre es, den Fall hervorzuheben, in welchem die Summe einer Art der Einheiten mehr als 100, wie dies bei Aufgaben mit vielen Posten (z. B. in Rechnungsbüchern der Geschäftsleute) der Fall sein kann, beträgt.

Im Rechenbuche «L' Arithmétique, par G. Beleze», wird die Addition durch angewandte Aufgaben eingeleitet, was das Ganze mehr zu beleben scheint. Man liest: «Ein Kaufmann hat Montag 37 *m*, Dienstag 42 *m* Tuch verkauft; wie viel Tuch hat er an beiden Tagen verkauft? .... Aber wenn man diese Addition nach vorangegangener Erklärung ausführen müsste, nämlich durch wiederholtes Hinzufügen aller Eins der Zahl 42 zur Zahl 37, wäre die Operation außerordentlich lang. Nun sieh her, wie man zu demselben Resultat durch eine einfachere Operation gelangen kann.

Vor allem ist es klar, dass in der gedachten Zahl die 3 Zehner und 7 Einer der ersten Zahl und die 4 Zehner und 2 Einer der zweiten Zahl vorkommen müssen; ich schreibe diese 2 Zahlen untereinander, und zwar so, dass die Einheiten derselben Ordnung in derselben verticalen

Reihe, d. h. die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner zu stehen kommen, und ich ziehe eine horizontale Linie unter diesen zwei Zahlen, so wie man im Folgenden sieht:

	37 *m*
	42
Summe:	79

Dann sage ich, bei den Einern anfangend: Die 7 Einer der ersten Zahl und die 2 Einer der zweiten Zahl machen 9 Einer, welche ich unter den horizontalen Strich unter die Einerreihe schreibe u. s. w. Der Kaufmann hat also an beiden Tagen 79 *m* Tuch verkauft.»

Ähnlich verfährt er noch an zwei anderen angewandten Beispielen, die zu folgendem Ansatz führen:

	825 Francs		448 *l*
	738		29
Summe:	1563		207
			95
			136
			149
		Summe:	1064

Daran schließt er Übungsbeispiele und angewandte Aufgaben. Das Kopfrechnen, welches mit der schriftlichen Addition in Verbindung ist, läßt sich auf die durch folgende Beispiele angedeuteten Fälle zurückführen: $5 + 3$ $(7 + 6)$, $42 + 7$ $(47 + 8)$, $112 + 4$ $(117 + 5)$. Die Resultate dieser Stufen des Kopfrechnens müssen also momentan angegeben werden können.

Subtraction.

Raum 1—1000.

§ 26. Einige Übungen im Kopfrechnen werden vorangeschickt. (Vergl. Kopfrechnen, pag. 29, Raum 1—100, 1—1000.) Ein vorbereitendes Kopfrechnen durch Zerlegung des Minuends und Subtrahends in die Einheiten verschiedenen Ranges ist überflüssig, weil die Regel für das schriftliche Subtrahieren leicht zur Auffassung zu bringen ist.

Ableitung der Subtractionsregel nach Hentschel.

1.) Ohne Borgen. a) Wie viel ist 645 — 301?

Man setzt die gleichnamigen Ordnungen genau untereinander; dann heißt es: 1 Einer von 5 Einern bleiben 4 Einer; kein Zehner von 4 Zehnern bleiben 4 Zehner; 3 Hunderter von 6 Hundertern bleiben 3 Hunderter.

a) $\begin{array}{r} 645 \\ -\ 301 \\ \hline 344 \end{array}$ Lösung mit Probe: b) $\begin{array}{r} 645 \\ -\ 301 \\ \hline 344 \\ \hline 645 \end{array}$

b) 1 von 5 bleibt 4, 0 von 4 bleibt 4, 3 von 6 bleibt 3. Probe: Man zähle den Rest mit der Abnahme zusammen; ist richtig abgezogen, so kommt wieder die Vollzahl.

2.) Mit Borgen.

Erstes Beispiel:

Wie viel ist 972 weniger 546?

Berechnung

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 12} \\ 97.2 \\ -\ 546 \\ \hline 426 \end{array}$$

Zweites Beispiel:

Wie viel ist 904 — 569?

Berechnung

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 10.\,14} \\ 9.04 \\ -\ 569 \\ \hline 335 \end{array}$$

Erklärung zum ersten Beispiel. Von 2 E. können wir 6 E. nicht abziehen, wir nehmen daher von unsern 7 Z. einen Zehner weg und machen Einer daraus. Dieses Wegnehmen nennt man Borgen. Wir bezeichnen es durch einen Punkt neben der 7. 1 Z. gibt uns 10 E., 2 E. hatten wir schon, macht zusammen 12 E., die wir mit kleinen Ziffern darüber setzen. 6 E. von 12 E. bleiben 6 E., 4 Z. von 6 Z. bleiben 2 Z., 5 H. von 9 H. bleiben 4 H.

Später kurz so: 6 von 2 geht nicht, ich borge einen Zehner (Punkt neben die 7); 10 und 2 ist 12; 6 von 12 bleibt 6; 4 von 6 bleibt 2; 5 von 9 bleibt 4.

Erklärung zum zweiten Beispiele: 9 E. von 4 E. geht nicht, ich muss borgen. Einen Zehner kann ich nicht borgen, denn es sind keine Zehner da; ich borge also 1 H.; 1 H. = 10 Z. (eine kleine 10 über die 0 in der Zehnerstelle), nun borge ich einen Zehner (Punkt neben die kleine 10), bleiben 9 Z. (kleine 9 über die kleine 10), 9 E. von 14 E. bleiben 5 E., 6 Z. von 9 Z. bleiben 3 Z. u. s. w.

Mehr solcher Beispiele. Die Kinder lernen hier, wie man *über die Null hinweg borgt*, und *daſs diese dadurch zur 9 wird.*

Man übe die Kinder so lange an dergleichen Exempeln, bis sie die ganze Ausrechnung kurz und sicher abzumachen imstande sind. Alles Eilen ist hier von Übel. — So weit Hentschel.

Genauere Abstufungen mögen folgende Beispiele, an denen die Regel, und zwar an den späteren von den Schülern möglichst selbstthätig, abgeleitet wird, andeuten:

76	748	698	93	438	721	603
— 32	— 437	— 74	— 56	— 293	— 48	— 257

Eine Zahl von einer andern wegzählen, heißt auch *subtrahieren;* die Zahl, von der subtrahiert wird, heißt der *Minuend,* und die Zahl, welche man wegzählt, der *Subtrahend.* Die Subtraction wird ausgeführt, wenn man Einer von den Einern, Zehner von den Zehnern u. s. w. subtrahiert; wenn eine Ziffer des Subtrahends größer ist, als die darüber stehende des Minuends, muſs man borgen.

Den Borgepunkt werden wir oben und nicht neben der Ziffer machen, wie Hentschel.

Unbegrenzter Zahlenraum.

§ 27. Das Verfahren beim Subtrahieren in diesem Raume unterscheidet sich von jenem im Raume 1—1000 nicht wesentlich; hier kommen nur noch Tausender, Zehntausender u. s. f. in Rechnung. Neu ist hier nur das *Borgen über mehrere Nullen hinweg.*

z. B.:

```
  9 9 9
 10101010
  80000
— 42652
  37348
```

Es ist also die erste Null zur 10 geworden, jede andere aber, über welche hinweg geborgt wurde, zur 9.

Das Verfahren bei der Erklärung ergibt sich dem Lehrer aus Obigem von selbst.

Subtrahieren mittels Zuzählens.

§ 28. Um zu berechnen, um wie viel sich z. B. die Zahl 9 von der Zahl 6 unterscheidet, braucht man entweder nur die Zahl 6 von der Zahl 9 wegzuzählen oder aber zur Zahl 6 so viel dazuzuzählen, bis man zur Zahl 9 kommt. 6 von 9 bleibt 3, oder 6 + 3 = 9.

Die zweite Art des Subtrahierens ist oft von großem Vortheil und stellt sich für das praktische Rechnen überhaupt bequemer heraus. Es sei z. B. der Unterschied zwischen 7824 und 3512 zu bestimmen.

  7824
— 3512
  4312

a) 2 E. und — 2 E. — sind 4 E.; 1 Z. und — 1 Z. — sind 2 Z.; 5 H. und — 3 H. — sind 8 H.; 3 T. und — 4 T. — sind 7 Taus.

b) 2 und — 2 (2 untergesetzt) — ist 4; 1 und — 1 (1 untergesetzt) — ist 2; 5 und — 3 (3 untergesetzt) — ist 8; 3 und — 4 (4 untergesetzt) — ist 7.

Für die Fälle, in welchen ein Übergang in eine andere Ordnung stattfindet, muss man den Schülern den Satz beibringen, dass der Unterschied zweier Zahlen sich nicht verändert, wenn jede um Dasselbe vermehrt wird.

Der Unterschied zwischen 6 und 4 ist gerade so groß, wie zwischen 7 und 5, 8 und 6, 9 und 7 u. s. w.; zwischen 31 und 17 gerade so groß, wie zwischen 41 und 27, zwischen 716 und 324 gerade so groß, wie zwischen 816 und 424 u. s. w. u. s. w.

Bestimmen wir nun den Unterschied zwischen den Zahlen

  5837
— 3262
  2575

Erklärung: 2 E. und — 5 E. — sind 7 E. — Da 6 Z. größer sind als 3 Z., so kann man durch Dazuzählen zu 6 Z. nicht 3 Z. erhalten, wohl kann man dadurch auf 13 Z. kommen. Nehmen wir daher statt 3 Z. im Minuend 13 Z., wodurch derselbe um 10 Z. oder 1 H. vermehrt erscheint. Damit aber der Unterschied beider Zahlen derselbe bleibt, müssen wir die 2 H. des Subtrahends um 1 H. vermehren. Wir sprechen also: 6 Z. und — 7 Z. — sind 13 Z.; 1 H. und 2 H. sind 3 H., 3 H. und — 5 H. — sind 8 H.; 3 T. und — 2 T. — sind 5 T.

Kurz: 2 und 5 (5 untergesetzt) ist 7; 6 und 7 (7 untergesetzt) ist 13; 1 und 2 ist 3, und 5 (5 untergesetzt) ist 8; 3 und 2 (2 untergesetzt) ist 5.

Beleze verfährt bei der Subtraction ähnlich wie bei der Addition.

Das mit der schriftlichen Subtraction in Verbindung stehende Kopfrechnen lässt sich auf folgende, durch Beispiele angedeutete Fälle zurückführen:

8 — 5,   13 — 7;   6 + · = 9,   7 + · = 12.

Multiplication.

§ 29. Man unterscheidet folgende, durch Beispiele angedeutete Stufen:

Raum 1—1000.

$$\begin{array}{r}423\\ \times\ \ 2\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}248\\ \times\ \ 3\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}43\\ \times\ 10\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}37\\ \times\ 20\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}34\\ \times 23\\ \hline\end{array}$$

Unbegrenzter Zahlenraum.

$$\begin{array}{r}5623\\ \times\ \ 3\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}423\\ \times\ 10\\ \hline\end{array}\left(\begin{array}{r}423\\ \times\ 100\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}423\\ \times\ 1000\\ \hline\end{array}\ \text{u. s. f.}\right)$$

$$\begin{array}{r}453\\ \times\ 20\\ \hline\end{array}\left(\begin{array}{r}453\\ \times\ 200\\ \hline\end{array}\ \text{u. s. w.}\right)\qquad\begin{array}{r}314\\ \times\ 26\\ \hline\end{array}\left(\begin{array}{r}4287\\ \times\ 374\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}4287\\ \times 2756\\ \hline\end{array}\ \text{u. s. w.}\right)$$

Specielle Fälle.

$$\begin{array}{r}4530\\ \times\ \ 3\\ \hline\end{array}\left(\begin{array}{r}36800\\ \times\ \ 6\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}728000\\ \times\ \ 7\\ \hline\end{array}\ \text{u. s. w.}\right)\qquad\begin{array}{r}4500\\ \times\ 300\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}9634\\ \times 2001\\ \hline\end{array}$$

§ 30. $\begin{array}{r}423\\ \times\ 2\\ \hline\end{array}$ Kopfrechenübungen nach Stufe 3, 8, 9, 10.

Schriftlich: «Um an Bekanntes anzuknüpfen, betrachten wir das Multiplicieren zunächst als ein wiederholtes Addieren und schreiben die Zahl 423 zweimal unter einander; wir erhalten: 3 E. und 3 E. sind 6 E.; 2 Z. und 2 Z. sind 4 Z.; 4 H. und 4 H. sind 8 H.» (Močnik.)

$$\begin{array}{r}423\\ 423\\ \hline 846\end{array}$$

Statt 3 E. und 3 E. können wir sagen: 2 mal 3 E., statt 2 Z. und 2 Z.: 2 mal 2 Z., und statt 4 H. und 4 H.: 2 mal 4 H. Wir schreiben daher die Zahl 423 nur einmal und die Zahl 2, welche angibt, wie oft 423 zu nehmen ist, unter diese mit dem Zeichen $\times$ voran:

$$\begin{array}{r}423\\ \times\ \ 2\\ \hline 846\end{array}$$

Nun spricht man: 2 mal 3 E. sind 6 E. (werden unter die Einer geschrieben), 2 mal 2 Z. sind 4 Z. (werden unter die Zehner geschrieben), 2 mal 4 H. sind 8 H. (werden unter die Hunderter geschrieben).

Später kurz: 2 mal 3 ist 6 (anschreiben), 2 mal 2 ist 4 (anschreiben), 2 mal 4 ist 8 (anschreiben).

Die Regel wird noch an mehreren Beispielen wie:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 231 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 222 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$$

selbstthätig abgeleitet.

Eine Zahl öfters nehmen heißt diese multiplicieren. Die Zahl 423, welche man mehrmal genommen hat, heißt der Multiplicand, und die Zahl 2, welche angibt, wie oft 423 genommen wird, der Multiplicator, und die gesuchte Zahl das Product.

$$\begin{array}{r} 248 \\ \times\ 3 \\ \hline 744 \end{array}$$

3 mal 8 E. sind 24 E. oder 2 Z. und 4 E.; die 4 E. werden unter die Einer geschrieben und die 2 Z. zu den Zehnern weitergezählt. 3 mal 4 Z. sind 12 Z., und 2 Z. sind 14 Z. oder 1 H. und 4 Z.; die 4 Z. werden unter die Zehner geschrieben und 1 H. weitergezählt. 3 mal 2 H. sind 6 H., und 1 H. sind 7 H.; die 7 H. werden unter die Hunderter geschrieben.

Später kurz: 3 mal 8 ist 24, bleibt 2 (4 werden angeschrieben und 2 weitergezählt; 3 mal 4 ist 12, und 2 ist 14, bleibt 1 (4 werden angeschrieben und 1 weitergezählt); 3 mal 2 ist 6, und 1 ist 7 (wird angeschrieben). Die Regel wird noch an mehreren Beispielen von den Schülern selbstthätig abgeleitet. Nach der Erkenntnis der Regel wird fleißig im Ausrechnen geübt.

Das Kopfrechnen, welches mit dem Zifferrechnen in Verbindung steht, läßt sich in dem und in allen anderen Fällen auf das Einmaleins zurückführen.

Multiplication mit Zehnern.

§ 31. $\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 10 \\ \hline \end{array}$ Im Kopfe. 10 mal 40 ist 400, 10 mal 3 ist 30, 10 mal 43 ist 430. Aus diesem und mehreren anderen Fällen ergibt sich die Regel fürs schriftliche Rechnen.

Eine Zahl wird mit 10 multipliciert, wenn man ihr rechts eine Nulle anhängt. — Übungsbeispiele.

Im Kopfe. $\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 20 \\ \hline \end{array}$ 37 nimmt man 20 mal, wenn man das 2fache von 37 10 mal nimmt. 2 mal 30 ist 60, 2 mal 7 ist 14, 60 und 14 ist 74, 2 mal 37 ist 74, 10 mal 74 ist 740.

Aus diesem Beispiele ergibt sich, daſs man beim schriftlichen Multiplicieren die Zahl 37 nur 2 mal zu nehmen und dazu eine Nulle zu setzen braucht. Also:

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 20 \\ \hline 740 \end{array}$$

2 mal 7 ist 14, bleibt 1; 2 mal 3 ist 6, und 1 ist 7; an 74 eine Nulle an. — Die Nulle kann man auch zuerst schreiben und dann mit 2 multiplicieren. Ähnlich wird die Regel an mehreren anderen Beispielen erkannt. — Übungsbeispiele.

Multiplication mit zweiziffrigen Zahlen.

§ 32. $\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 23 \\ \hline \end{array}$ Kopfrechenübungen nach Stufe 18.

Schriftlich. Die Zahl 34 nimmt man 23 mal, wenn man sie 3 mal und 20 mal nimmt.

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 23 \\ \hline \end{array}$$

3 mal 34 (3 mal 4 ist 12, bleibt 1; 3 mal 3 ist 9, und 1 ist 10) . . . 102
20 mal 34 (0 wird gleich unter 2 geschrieben, 2 mal 4 ist 8,
2 mal 3 ist 6 680
102 und 680 ist 782

Bei der Multiplication mit 20 braucht man die Nulle gar nicht anzusetzen, wenn man nur das Product 68 um eine Stelle weiter nach links schreibt.

Dann spricht und schreibt man:

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 23 \\ \hline 102 \\ 68 \\ \hline 782 \end{array}$$

3 mal 4 ist 12, bleibt 1; 3 mal 3 ist 9, und 1 ist 10. 2 mal 4 ist 8 (um eine Stelle nach links), 2 mal 3 ist 6. 2 wird herabgesetzt, 8 und 0 ist 8, 6 und 1 ist 7. Die Regel wird noch an mehreren ähnlichen Beispielen möglichst selbstthätig von den Schülern abgeleitet.

Übungsbeispiele.

Unbegrenzter Zahlenraum.

§ 33. Kopfrechenübungen nach Stufe 18.

Das schriftliche Verfahren wird auf die gleiche Art erkannt, wie für den Raum 1 — 1000. Bei der Multiplication mit 10, 100, 1000 u. s. w. hat man nur so viele Nullen zum Multiplicand zu setzen, als deren der Multiplicator hat. Ähnliches gilt für die Multiplication mit 20, 300, 4000 u. s. w. Das Verfahren möge nur für den Fall, dass der Multiplicator mehrstellig ist, genauer abgeleitet werden. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 4287 \\ \times\ 374 \\ \hline \end{array}$$

4287 ist 374 mal oder 4 mal und 70 mal und 300 mal zu nehmen.

		4287
		× 374
4 mal 4287	. . .	17148
70 mal 4287	. . .	300090
300 mal 4287	. . .	1286100
374 mal 4287	. . .	1603338

Bei den Multiplicationen mit 70 und mit 300 braucht man die Nullen gar nicht anzuschreiben, wenn man nur das Product 30009 um eine Stelle und 12861 um zwei Stellen nach links setzt, also wenn man nur jedes folgende Product um eine Stelle weiter nach links schreibt, als das vorangehende.

Dann spricht und schreibt man kurz:

$$\begin{array}{r} 4287 \\ \times\ 374 \\ \hline 17148 \\ 30009 \\ 12861 \\ \hline 1603338 \end{array}$$

4 mal 7 ist 28, bleibt 2; 4 mal 8 ist 32, und 2 ist 34, bleibt 3; 4 mal 2 ist 8, und 3 ist 11, bleibt 1; 4 mal 4 ist 16, und 1 ist 17. 7 mal 7 ist 49, bleibt 4 (9 um eine Stelle nach links), 7 mal 8 ist 56, und 4 ist 60, bleibt 6 u. s. w.

Die Regel wird noch an mehreren Beispielen möglichst selbstthätig von den Schülern abgeleitet.

Übungsbeispiele für alle Stufen.

In den speciellen Fällen:

$$\begin{array}{r}4530\\ \times\quad 3\\ \hline\end{array}\qquad \left(\begin{array}{r}36800\\ \times\quad 6\\ \hline\end{array}\qquad \begin{array}{r}728000\\ \times\quad 7\\ \hline\end{array}\quad \text{u. s. w.}\right)\qquad \begin{array}{r}4500\\ \times\ 300\\ \hline\end{array}\quad \text{u. s. w.}$$

werden sich die Schüler bald überzeugen, daſs man die Nullen rechts vom Multiplicand und Multiplicator während der Multiplication gar nicht zu berücksichtigen braucht und sie erst zum Producte zu setzen hat.

In den Fällen wie

$$\begin{array}{r}9634\\ \times\ 2001\\ \hline\end{array}$$

werden die Schüler ebenso leicht erkennen, daſs man mit den Nullen nicht zu multiplicieren braucht, daſs man aber z. B. in diesem Falle das Product mit 2 um drei Stellen nach links zu rücken hat.

In dem Rechenbuche von Beleze wird die Multiplication durch folgende Beispiele, die er wieder einkleidet, eingeleitet:

$$1.)\ \begin{array}{r}6\\6\\6\\6\\6\\ \hline 30\end{array}\qquad\qquad 2.)\ \begin{array}{r}3\\3\\3\\3\\3\\3\\ \hline 18\end{array}\qquad\qquad 3.)\ \begin{array}{r}3468\\3468\\3468\\3468\\3468\\3468\\3468\\ \hline 24276\end{array}$$

Bei den beiden ersten Fragen ist es leicht zu sehen, daſs man diese Zahlen, um die Addition auszuführen, nicht in einer Reihe zu schreiben gebraucht hätte, wenn man auf einmal hätte sagen können, wie viel 5 mal 6, 6 mal 3 ist; und bei der dritten Frage, wie das Resultat 7 mal die 8 Einer, 7 mal die 6 Zehner, 7 mal die 4 Hunderter, 7 mal die 3 Tausender der Zahl 3468 enthalten muſs und daher die Zahl 3468 nicht 7 mal gesetzt zu werden braucht, um die Addition auszuführen, wenn man nur auf einmal hätte sagen können, wie viel 7 mal 8, 7 mal 6, 7 mal 4, 7 mal 3 ist.

Vorausgesetzt, daſs man diese Tafel vollkommen kennt (das Einmaleins), sieh her, wie man die Operation des dritten Beispiels abkürzen könnte.

Wir schreiben die Zahl 3468 und darunter die Zahl 7, welche anzeigt, wie oft diese Zahl zu nehmen ist, genau so wie bei der Addition; darauf ziehen wir einen horizontalen Strich unter diesen Zahlen, wie man dies im Folgenden sieht:

$$\begin{array}{r} 3468 \\ 7 \\ \hline 24276 \end{array}$$

Nachdem dies geschehen ist, fange ich rechts an und sage: 7 mal 8 E. sind 56 E. u. s. w, wie in den deutschen Rechenbüchern. — Auch aus diesem Vorgange kann man Capital für die Methode schlagen.

Division.

§ 34. Böhme schreibt: Da der Grad der Schwierigkeit des Theilens wesentlich bedingt ist durch die Beschaffenheit des Divisors, so bestimmt auch dieser hauptsächlich den Stufengang in den Aufgaben. Es ordnen sich daher die Aufgaben folgendermaßen:

Der Divisor ist eine einstellige Zahl,
der Divisor ist eine Zehnerzahl,
der Divisor ist eine zweistellige, dreistellige 2c. Zahl.

Dem entsprechend werden nachstehende Divisionsstufen unterschieden:

Raum 1—1000.

96 : 3, 426 : 2, 347 : 4, 730 : 10, 655 : 10, 380 : 20, 714 : 21, 513 : 19, 688 : 16.

Unbegrenzter Zahlenraum.

Dieselben Stufen, nur über 1000 ausgedehnt.

8624 : 2, 29758 : 9, 4590 : 10 (67800 : 100 u. s. w.), 5678 : 10 (43728 : 100 u. s. w.), 742800 : 400 u. s. w. u. s. w.

Daran schließen sich dann die kürzeren Divisionsformen.

§ 35. Bei den Franzosen und Italienern findet man wohl auch den Divisor für den Stufengang der Aufgaben bestimmend, jedoch nach anderen Principien, wie sich dies aus folgenden, französischen und italienischen Rechenbüchern entnommenen Beispielen ergibt.

Nach Beleze:

I. Hauptfall. Erster Fall: 27 : 9, zweiter Fall: 329 : 7.
II. Hauptfall. Erster Fall: 5392 : 689, zweiter Fall: 18144 : 56.

Nach Villemereux:
Erster Fall: 58 : 7, zweiter Fall: 4528 : 526, dritter Fall: 452889 : 526.

Nach Cesare Pagnini (Florenz 1885):
Erster Fall: 48 : 6, zweiter Fall: 3825 : 9, dritter Fall: 4872 : 629, vierter Fall: 43745 : 321.

Darnach werden die Stufen durch den Quotienten bestimmt; zuerst kommen Fälle vor, in welchen der Quotient einziffrig, dann solche, in denen der Quotient mehrziffrig ist. Es dürfte sich der Mühe lohnen, diesen Stufengang nicht unberücksichtigt zu lassen, woraus sich dann nachstehende Stufen ergeben, wobei natürlich der Fall 27 : 9 (58 : 7) als zum Kopfrechnen gehörig ausfällt.

Raum 1—1000.

96 : 3, 426 : 2, 347 : 4, 730 : 10, 655 : 10, 380 : 20 (395 : 20), 642 : 214 (642 : 274), 327 : 73 (307 : 78), 714 : 21, 513 : 19, 688 : 16.

Unbegrenzter Zahlenraum.

8624 : 2, 29758 : 9, 4590 : 10 (67800 : 100 u. s. w.), 5678 : 10 (43728 : 100 u. s. w.), 742800 : 400, 36728 : 700, 4528 : 526, 452889 : 526.

Behandlung der Divisionsstufen.

Raum 1—1000

Division durch Einer.

(96 : 3, 426 : 2, 347 : 4.)

§ 36. Die schriftliche Division wird im allgemeinen im Sinne des Enthaltenseins (Messens) ausgeführt, daher soll auch die Regel auf die Art abgeleitet werden. Da jedoch die angewandten Aufgaben bald auf ein Messen, bald auf ein Theilen führen, so muss man wenigstens an einigen Fällen, was auch beim Kopfrechnen schon geschehen kann, den Schülern ins Bewusstsein bringen, dass man bei derselben Aufgabe sowohl durchs Messen als auch durchs Theilen auf dasselbe Resultat kommt. Kopfrechenübungen nach Stufe 1, 2, 3, 6, 7 der Division und Stufe 4, 6, 7, 11, 12 der Multiplication.

«Man kann anfänglich wegen der leichteren Anschauung die dekadische Bedeutung der einzelnen Ziffern durch darübergestellte Buchstaben anzeigen lassen.

$$\begin{array}{l} \text{Z. E.} \qquad\quad \text{Z. E.} \\ 96 : 3 = 32 \\ \underline{9\ .\ \ } \\ \ \ 6 \\ \underline{\ \ 6\ \ } \end{array}$$

1.) Im Sinne des Messens: Wie oft ist 3 in 96 enthalten? 3 ist in 9 E. 3 mal, in 9 Z. also 30 mal enthalten; wir schreiben daher hinter dem Gleichheitszeichen 3 Z. an. Wir wollen auch sehen, ob 3 in 9 Z. genau 30 mal enthalten ist; 30 mal 3 ist 90 oder 9 Z., diese schreiben wir unter die 9 Z. und subtrahieren. Bleibt etwas übrig? Also ist 3 in 9 Z. genau 30 mal enthalten. — Nun suchen wir, wie oft 3 in 6 E. enthalten ist; wir setzen daher die 6 E. herab. 3 ist in 6 E. 2 mal enthalten; diese 2 E. schreiben wir hinter die 3 Z.; 2 mal 3 ist 6; werden diese 6 unter die 6 E. geschrieben und von diesen subtrahiert, so bleibt nichts übrig. 3 ist also in 96 30 mal und 2 mal, d. i. 32 mal enthalten.» (Močnik.)

Kurz: 3 in 9 ist 3 mal (3 wird hinter das Gleichheitszeichen geschrieben; 3 mal 3 ist 9, 9 von 9 bleibt nichts; 6 herab; 3 in 6 ist 2 mal (2 hinter die 3); 2 mal 3 ist 6, 6 von 6 bleibt nichts.

2.) Im Sinne des Theilens: Wie viel ist der dritte Theil von 96? Der dritte Theil von 96 ist so viel, als der dritte Theil von 9 Z. und 6 E. Der dritte Theil von 9 Z. sind 3 Z.; diese schreiben wir rechts vom Gleichheitszeichen. Nehmen wir nun 3 Z. 3 mal, um zu sehen, ob uns von 9 Z. noch etwas zum Theilen übrig bleibt. 3 mal 3 Z. sind 9 Z.; diese setzen wir unter 9 Z. und subtrahieren. Es bleibt kein Zehner übrig. — Nun ist noch der dritte Theil von 6 E. zu nehmen, wir setzen sie hinunter. Der dritte Theil von 6 E. sind 2 E.; diese setzen wir rechts zu den 3 Z. Nehmen wir nun 2 E. 3 mal, um zu sehen, ob uns von 6 E. noch etwas zum Theilen übrig bleibt. 3 mal 2 E. sind 6 E.; diese setzen wir unter die 6 E. und subtrahieren. 6 E. von 6 E. bleibt nichts. Der dritte Theil von 96 sind 3 Z. 2 E., d. i. 32.

Kurz: Der dritte Theil von 9 ist 3 (3 rechts vom Gleichheitszeichen); 3 mal 3 ist 9; 9 von 9 bleibt nichts. 6 herab! Der dritte Theil von 6 ist 2 (2 zu 3 im Quotient); 3 mal 2 ist 6; 6 von 6 bleibt nichts.

Das gleiche Verfahren gilt auch beim Dividieren einer dreiziffrigen Zahl durch eine einziffrige.

Es sei 423 zu dividieren durch 5.

1.) Im Sinne des Messens.

H. Z. E. Z. E.
423 : 5 = 84
40
23
20
3 Rest

5 ist in 4 nicht enthalten, wohl aber 5 in 42. 5 in 42 E. ist 8 mal, in 42 Z. 80 mal enthalten. 80 oder 8 Z. werden hinter das Gleichheitszeichen geschrieben. 80 mal 5 ist 400 oder 40 Z.; 40 Z. werden genau unter 42 geschrieben und subtrahiert. 2 Z. sind 20 E. und wir haben noch 3 E., dies gibt 23 E., also 3 zu 2 herab. 5 ist in 23 4 mal enthalten; 4 E. schreiben wir zu 8 Z. dazu. 4 mal 5 ist 20; 20 subtrahiert von 23 gibt 3 als Rest.

Kurz: 4 in 34 ist 8 mal (8 rechts vom Gleichheitszeichen); 8 mal 4 ist 32; 2 von 4 bleibt 2, 3 von 3 bleibt nichts. 7 herab u. s. w.

2.) Im Sinne des Theilens:

H. Z. E.
423 : 5 = $84\frac{3}{5}$
40
23
20
3

Wir haben den fünften Theil von 423 oder von 4 H., 2 Z. und 3 E. zu nehmen. Der fünfte Theil von 4 H. gibt keine Hunderter. 4 H. sind aber 40 Z. und 2 Z. sind 42 Z. Der fünfte Theil von 42 Z. sind 8 Z., die wir rechts vom Gleichheitszeichen anschreiben. Nehmen wir nun 8 Z. 5 mal, damit wir uns überzeugen, ob von den 42 Z. nichts mehr zum Theilen übrig bleibt. 5 mal 8 Z. sind 40 Z.; diese setzen wir unter 42 Z. und subtrahieren. Es bleiben noch 2 Z. oder 20 E.; zu den 20 E. kommen noch 3 E., dies macht 23 E., also 3 zu 2 herab. Der fünfte Theil von 23 E. sind 4 E., die wir rechts zu den 8 Z. dazuschreiben. Nehmen wir nun 4 E. 5 mal, so bekommen wir 20 E., die wir unter 23 E. schreiben und subtrahieren. Es bleiben 3 E., 1 E. hat 5 Fünftel, 3 E. 5 mal 5, d. i. 15 Fünftel. Der fünfte Theil von 15 F. sind 3 F. oder $\frac{3}{5}$, die wir zu 84 schreiben.

Eine Zahl durch eine andere messen oder theilen heißt Dividieren. Die Zahl, welche gemessen oder getheilt wird, heißt der Dividend; die Zahl, durch welche gemessen oder getheilt wird, der Divisor, und die Zahl, welche beim Messen oder Theilen herauskommt, der Quotient.

Übungsbeispiele.

Das mit der schriftlichen Division in Verbindung stehende Kopfrechnen läßt sich in allen Fällen auf die Fundamentalübungen zurückführen.

Division durch 10.

(730 : 10, 655 : 10.)

§ 37. 73'0 : 1'0 = 73 10 ist in 730 so oft enthalten, als 1 Z. in 73 Z. oder 1 in 73, d. i. 73 mal. Man braucht also nur im Dividend und Divisor die Nullen zu streichen.

65'5 : 1'0 = 65
   5 Rest

655 ist gleich 650 und 5; 10 in 650 oder 1 in 65 ist 65 mal enthalten, 5 ist der Rest.

Man braucht also nur im Dividend die Einer und im Divisor die 0 abzuschneiden; die abgeschnittene Ziffer im Dividend ist der Rest. — Übungsbeispiele.

Division durch reine Zehner.

(380 : 20, 395 : 20.)

§ 38. Kopfrechenübungen nach den Stufen 4, 5, 8 im Sinne des Messens und des Theilens.

38'0 : 2'0 = 19
2
18
18

20 ist in 380 gerade so oft enthalten, als 2 Z. in 38 Z. oder 2 in 38.

Man braucht also nur im Dividend und Divisor die Nullen abzuschneiden und dann die Division auszuführen.

39'5 : 2'0 = 19
38
 15 Rest

395 ist gleich 390 und 5; 20 in 390 oder 2 in 39 ist 19 mal enthalten. 19 mal 2 ist 38, 38 von 39 bleibt 1; 5 herab. 15 ist der Rest.

Man braucht also nur im Dividend die Einer und im Divisor die Nulle abzuschneiden und dann zu dividieren; die abgeschnittene Ziffer wird herabgesetzt, und so bekommt man den Rest. — Übungsbeispiele.

Division durch mehrziffrige Zahlen.

a) Quotient einziffrig.

§ 39. Kopfrechenübungen nach der Stufe 8 als Messen und als Theilen.

642 : 214 = 3
642

214 ist in 642 beiläufig so oft als 200 in 600 oder 2 in 6 enthalten, also 3 mal u. s. w.

Kurz: 2 in 6 ist 3 mal; 3 mal 4 ist 12 u. s. w.

642 : 274 =
822
548
 94 Rest

274 ist in 642 beiläufig so oft als 200 in 600, oder 2 in 6, also 3 mal enthalten. 3 mal 4 ist 12 u. s. w. 822 ist zu groß und 274 dürfte in 642 2 mal enthalten sein, 2 mal 4 ist 8 u. s. w.

Man lasse absichtlich die Schüler die Ziffer des Quotienten zu groß nehmen; denn hier lernen sie am besten durchs Fehlen.

Die beiden anderen Fälle werden ähnlich behandelt.

Kurz: 2 in 6 ist 3 mal; 3 mal 4 ist 12, bleibt 1; 3 mal 7 ist 21, und 1 ist 22, bleibt 2; 3 mal 2 ist 6, und 2 ist 8. Geht nicht 3 mal, also 2 mal u. s. w. — Übungsbeispiele.

b) Quotient zweiziffrig.

§ 40. Kopfrechenübungen nach der Stufe 8.

714 : 21 = 34
63
84
84

Diesen Fall führen wir auf den früheren zurück; deshalb zerlegen wir 714 in 71 Z. und 4 E. und untersuchen zunächst, wie oft 21 in 71 Z. enthalten ist. 21 ist in 71 beiläufig so oft als 2 in 7, d. i. 3 mal, also 21 in 71 Z. 30 mal enthalten. Die Zahl 30 schreiben wir als 3 Zehner in den Quotient. Um uns zu überzeugen, ob 21 in 71 Z. wirklich 30 mal enthalten, nehmen wir 21 30 mal, und die erhaltene Zahl 630 oder 63 Z. subtrahieren wir von den 71 Z., es bleiben 8 Z. 8 Z. sind 80 E. und 4 E. sind 84 E.; wir setzten also 4 zu 8 herab. 21 ist in 84 beiläufig gerade so oft enthalten, als 2 in 8 u. s. w.

Kurz: 21 in 71 oder 2 in 7 ist 3 mal; 3 mal 1 ist 3, 3 mal 2 ist 6; 63 von 71 bleibt 8; 4 herab; 21 in 84 oder 2 in 8 ist 4 mal; 4 mal 1 ist 4, 4 mal 2 ist 8; 84 von 84 bleibt nichts.

Die beiden andern Fälle werden ähnlich behandelt; die Quotientziffern werden von den Schülern anfangs jedenfalls fehlerhaft bestimmt. Diesbezüglich vergleiche die frühere Stufe. — Übungsbeispiele.

Unbegrenzter Zahlenraum.

Abgekürzte Rechnungsweise.

§ 41. Für diesen Raum ist nichts Neues zu bemerken. Die im Obigen angeführten Fälle werden ähnlich behandelt als die vorangehenden. Nur die abgekürzte Rechnungsweise, die jedenfalls erst auftreten kann, nachdem den Schülern die längere Form geläufig ist, ist noch zu besprechen. Dabei hat man die zwei Fälle zu unterscheiden: 1.) der Divisor ist einziffrig, 2.) der Divisor ist mehrziffrig.

1.) 2628 : 6

a) Längere Form:

2628 : 6 = 438
24
22
18
48
48

b) Kürzere Form:

2628 : 6 = 438
22
48

c) Die kürzeste Form:

2628 : 6
438

Zu a) ist nichts zu bemerken.

b) Bei der zweiten Form werden die Theilproducte gleich im Kopfe subtrahiert und nur die Reste angeschrieben. Dabei spricht man: 6 in 26 ist 4 mal, 4 mal 6 ist 24, und 2 ist 26 (der Rest 2 wird unter 6 geschrieben und die nächste Ziffer 2 des Quotienten dazu). 6 in 22 ist 3 mal, 3 mal 6 ist 18, und 4 ist 22; zum angeschriebenen Rest 4 wird die nächste Ziffer 8 dazu gesetzt. 6 in 48 ist 8 mal, 8 mal 6 ist 48, und 0 ist 48.

Dabei wird durchs Zuzählen subtrahiert.

c) Bei der dritten Form schreibt man nicht einmal den Rest an und denkt sich zum jedesmaligen Rest die nächste Ziffer des Dividends dazu. Das übrige ergibt sich von selbst. — Übungsbeispiele.

2.) 33956 : 653

Wenn der Divisor mehrziffrig ist, kann auch die Form der Division abgekürzt werden, wenn man das Product aus dem Divisor und der jedesmaligen Ziffer des Quotienten sogleich während des Multiplicierens subtrahiert und bloß den Rest anschreibt.

a) Längere Form:

```
3395‚6 : 653 = 52
3265
————
 130 6
 130 6
————
```

b) Kürzere Form:

```
3395‚6 : 653 = 52
 130 6
```

b) Dabei spricht man: 6 in 33 ist 5 mal; 5 mal 3 ist 15, und 0 (wird angeschrieben unter 5) ist 15, bleibt 1; 5 mal 5 ist 25, und 1 ist 26, und 3 (wird unter 9 geschrieben) ist 29, bleibt 2; 5 mal 6 ist 30, und 2 ist 32, und 1 (wird unter 3 geschrieben) ist 33. Zum Rest 130 wird 6 herabgesetzt. Das weitere Verfahren ergibt sich aus dem Gesagten. — Übungsbeispiele.

Bei der kürzeren Divisionsform müssen die durch die Beispiele 34 + · = 37, 67 + · = 72 angedeuteten Übungen vollkommen geläufig sein, daher ist es angezeigt, sie vor der Einführung in die kürzere Form vorzunehmen. Neben den Fundamentalübungen sind also auch diese Kopfrechnungen mit dem schriftlichen Rechnen in Verbindung.

Vierter Abschnitt.

Reines Rechnen mit benannten Zahlen.

Eintheilung der benannten Zahlen.

§ 42. Eine Zahl, welche Einheiten einer bestimmten Art angibt, heißt eine benannte (concrete) Zahl, im Gegensatze zu einer unbenannten (abstracten), welche nur die Menge der Einheiten, nicht aber die Art derselben ausdrückt. 5 Äpfel, 7 *m*, 8 fr. u. s. w. sind benannte, 5, 7, 8 u. s. w. unbenannte Zahlen. Eine benannte Zahl, welche nur Einheiten derselben Benennung angibt, heißt einnamig; eine benannte Zahl dagegen, welche zwar Einheiten von derselben Art, aber von verschiedener Benennung ausdrückt, mehrnamig. 5 *m* ist eine einnamige, 5 *m* 4 *dm* 7 *cm* eine mehrnamige Zahl; in der letzteren ist die Benennung Meter die höhere, Decimeter eine niederere und Centimeter eine noch niederere Benennung.

Die Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten der niedrigeren Benennung eine Einheit der höheren Benennung enthält, heißt die Verwandlungszahl zwischen den beiden Benennungen. Z. B. 10 ist die Verwandlungszahl zwischen Meter und Decimeter 12 zwischen Jahren und Monaten.

Die benannten Zahlen zerfallen in zwei Hauptgruppen: 1.) in Zahlen, bei denen nur der Name des Gegenstandes steht, z. B. 2 Kerzen, 5 Finger u. s. w., 2.) in Zahlen, bei denen der Name eines Maßes als Benennung dient, z. B. 2 *kg* Kerzen oder auch wie 5 *m* ohne Benennung des Gegenstandes.

§ 43. Eintheilung der Maße.

1. Zählmaße.

1 Paar = 2 Stück, 1 Dutzend = 12 Stück, 1 Schock = 60 Stück, 1 Gros = 12 Dutzend.

Papiermaße: 1 Ballen = 10 Ries, 1 Ries = 10 Buch, 1 Buch = = 10 Lagen, 1 Lage = 10 Bogen.

2. Längenmaße.

1 Myriameter (μm) = 10000 m, 1 Kilometer (km) = 1000 m, 1 m = 10 dm, 1 dm = 10 cm, 1 cm = 10 mm.

3. Flächenmaße.

1 μm^2 = 100 km^2, 1 km^2 = 1000000 m^2, 1 m^2 = 100 dm^2, 1 dm^2 = 100 cm^2, 1 cm^2 = 100 mm^2.

Bodenmaße: Ar, Hektar und Quadratmeter. 1 a = 100 m^2, 1 ha = 100 a.

4. Körpermaße.

1 μm^3 = 1000 km^3, 1 km^3 = 1000000000 m^3, 1 m^3 = 1000 dm^3, 1 dm^3 = 1000 cm^3, 1 cm^3 = 1000 mm^3.

Hohlmaße: 1 hl = 100 l, 1 l = 10 dl, 1 dl = 10 cl.

5. Gewichtsmaße.

Der metrische Centner (q) = 100 kg, die Tonne (t) = 1000 kg, 1 kg = 100 dkg, 1 dkg = 10 g, 1 g = 10 dg, 1 dg = 10 cg, 1 cg = 10 mg.

Kilogramm, Dekagramm und Gramm sind Gewichte für Waren; Gramm, Decigramm, Centigramm werden für Gold- und Silberwaren und als Medicinalgewichte verwendet, das Milligramm kommt neben den vorangehenden als Münz- und Juwelengewicht vor. Die Tonne dient zum Wägen der Schiffslasten.

6. Zeitmaße.

1 Jahr = 12 Monate, 1 Monat = 30 Tage, 1 Woche = 7 Tage, 1 Tag = 24 Stunden, 1 Stunde = 60 Minuten, 1 Min. = 60 Sec.

1 Jahr = 52 Wochen, 1 Monat = 4 Wochen.

1 Stunde = 4 Viertelstunden, $\frac{1}{4}$ Stunde = 15 Min., $\frac{1}{2}$ Stunde = = 30 Minuten.

7. Wertmaße (Münzen).

Die Münzen werden aus Kupfer, Silber und Gold geprägt.

Kupfermünzen: Halbkreuzer-, Einkreuzer- und Vierkreuzerstücke.

Silbermünzen: Fünfkreuzer-, Zehnkreuzer-, Zwanzigkreuzer-, Viertelgulden-, Eingulden- und Zweiguldenstücke.

Goldmünzen: Ducaten, Acht- und Vierguldenstücke.

Papiergeld: Banknoten zu 10, 100 und 1000 fl. und Staatsnoten zu 1, 5 und 50 fl.

8. Bogen- und Winkelmaße.

Gehören zur Formenlehre.

Die Praxis hat neben den angeführten Grundmaßen für Längenmessungen den Meterstab (das Messband, die Messkette u. s. w.), für Messungen der Flüssigkeiten und trockenen Gegenstände die Hohlmaße $\frac{1}{2}$ *hl*, $\frac{1}{4}$ *hl*, 20 *l*, 10 *l*, 5 *l*, 2 *l*, $\frac{1}{2}$ *l*, $\frac{1}{4}$ *l*, $\frac{1}{8}$ *l*, $\frac{1}{16}$ *l*, $\frac{1}{32}$ *l*, 0·2 *l* (2 *dl*), 0·05 *l* (5 *cl*), 0·02 *l* (2 *cl*) und 0·01 *l* (1 *cl*); für Wägungen 20 *kg*, 10 *kg*, 5 *kg*, 2 *kg*, $\frac{1}{2}$ *kg* oder 50 *dkg*, $\frac{1}{4}$ *kg*, 20 *dkg*, 10 *dkg*, 5 *dkg*, 2 *dkg*, 5 *g*, 2 *g* u. s. w. eingeführt, weil man dadurch mit dem Messen rascher und bequemer ans Ziel kommt.

Wie
sind die benannten Zahlen den Kindern vorzuführen?

§ 44. Graßmann sagt bezüglich des Anschauungsunterrichtes: «Es darf nicht dem Zufall, der Willkür und Laune überlassen bleiben, worüber zu jeder Zeit mit dem Kinde gesprochen werden soll.» Dies ist auch für das Rechnen mit benannten Zahlen (fürs angewandte Rechnen) sehr zu beherzigen, was leider in der Regel nicht geschieht. (Vergl. Angew. Rechnen § 130.)

Hentschel schreibt: «Schon auf dieser Stufe (1—20) mögen einzelne Aufgaben geboten werden, die einfache Maße, Gewichte, Zählungsarten 2c. berühren. Z. B. Mandel, Dutzend und Stück, Heft und Bogen, Wochen und Tage. Wenn auch der Verkehr des Lebens noch weniger an die kleinen Rechner herantritt, so soll doch die Schule auch nach dieser Seite hin das Ihre thun. Doch hüte man sich vor dem Zuviel! Aufgaben dieser Art dürfen aber nur erst dann gegeben werden, wenn eine klare Anschauung von den betreffenden Maßen, Gewichten 2c. bei den Kindern vorhanden ist. Nur dann erst darf mit Heft und Bogen gerechnet werden, wenn beide den Kindern wirklich gezeigt und die Bogen eines Heftes vorgezählt worden sind; nur dann erst ist von Kilogrammen und Grammen mit den Kindern zu reden, wenn letztere diese beiden Gewichte wirklich gesehen, gehoben und auf der Wage wirksam gesehen haben. Es ist nicht schwer, die Überzeugung zu gewinnen, dass in den meisten Fällen die Kinder derartige Anschauungen zur Schule noch nicht mitbringen. Das wolle man beherzigen.»

Aus den Worten Graßmanns und Hentschels ergibt sich, dass die benannten Zahlen beider Gruppen in einer bestimmten Ordnung vorzuführen sind. Und man kann mit Bestimmtheit sagen, dass die Benennungen der ersten Hauptgruppe schon im Erfahrungskreise des Kindes liegen, wenn es zur Schule kommt, was man von den Maßen nicht behaupten kann. Übungen mit benannten Zahlen der ersten Hauptgruppe haben also in das Rechnen mit benannten Zahlen, in das angewandte Rechnen einzuleiten. (Vergl. § 115.) Dieser Erfahrungskreis soll im Verlaufe des Unterrichtes noch erweitert werden.

Aneinanderreihung der Maße.

§ 45. Einen Grundsatz müssen wir zuoberst stellen: «Mehrere Arten dürfen nicht auf einmal vorgeführt werden», wenn wir den Anforderungen Hentschels genügen wollen. Eine neue Maßart trete erst auf, wann die vorangehende schon geistiges Eigenthum des Kindes geworden ist.

In der Regel entscheidet bei den meisten Methodikern die Verwandlungszahl, wann ein Maß aufzutreten hat. So kommt bei der Zahl 4 das Vierkreuzerstück, bei der Zahl 7 die Woche, bei der Zahl 12 das Dutzend u. s. w. an die Reihe. Nun, das Dutzend, Schock u s. w. werden wirklich erst aufgefasst werden können, wenn der Schüler mit den Zahlen 12, 60 u. s. w. vertraut ist. In solchen Fällen ist also die Verwandlungszahl entschieden zu berücksichtigen. Bezüglich der Verwandlungszahl sind noch folgende zwei Fälle auseinander zu halten:

1.) Die Maße sind nach dem Decimalsystem eingetheilt,
2.) sie sind nicht nach dem Decimalsystem eingetheilt.

Zu letzteren gehören die Zeit- (Bogen-, Winkel-) und ein Theil der Zählmaße, zu den ersteren alle übrigen.

Die Maße kann man und soll man jedoch noch von einer anderen Seite anschauen. Sie können 1.) in solche, die man durch das Auge, 2.) in solche, die man durch die Empfindung und 3.) in solche, die man erst durch die Erfahrung auffassen lernt, gruppiert werden. Zur ersten Gattung gehören die Zählmaße, Längenmaße, Flächenmaße, Körpermaße und auch die Münzen, wenn man sie nur als Zählobjecte auffasst; zur zweiten Gattung die Gewichte und zur dritten die Zeitmaße und die Münzen als Wertmaße.

Auffassung der Zählmaße.

§ 46. Da diese nur durch die Verwandlungszahl deutlich erkannt werden und sich sonst keine besonderen Schwierigkeiten darbieten, bespricht man den Begriff «Paar» bei der Zahl 2, «Dutzend» bei der Zahl 12 und «Schock» bei der Zahl 60; das gleiche gilt für die Papiermaße, nur dass dabei fünf Begriffe: «Ballen, Ries, Buch, Lage, Bogen», auftreten. Und es entsteht die Frage, ob es nicht vortheilhafter wäre, diese Begriffe nur nach und nach vorzuführen. Bei der Zahl 10 z. B. den Begriff «Lage» neben «Bogen», im Raume 1—100 den Begriff «Buch», im Raume 1—1000 «Ries» und im unbegrenzten Zahlenraume den Begriff «Ballen». Dadurch wird das dekadische Zahlensystem wohl bedeutend erläutert.

Auffassung der Längenmaße.*

§ 47. Diese können nur durch wirkliches Messen richtig aufgefasst werden, und zwar misst zuerst der Lehrer selbst, später läßt er die Schüler messen. Obwohl letztere anfangs dabei sehr ungeschickt sind — auf richtiges Anlegen kommt es ihnen nicht an —, so bietet das Messen keine besonderen Schwierigkeiten, und es kann bald vorgenommen werden, sobald die Schüler nur einen gewissen Zahlenraum, z. B. den Raum 1—10, kennen gelernt haben. Sie üben sich dadurch im Zählen, sie werden aber zugleich auf den Begriff «messen (enthaltensein)» vorbereitet, welchen die Schüler so schwer auffassen. Die verschiedenen Längenmaße werden der Reihe nach vorgeführt; sobald die Kinder das eine aufgefasst haben, kommt das andere an die Reihe. Kilometer und Millimeter dürften wohl erst im Raume 1—1000 und die Myriameter im unbegrenzten Zahlenraume durch die Verwandlungszahlen aufgefasst werden können. Am bequemsten sind gezeichnete Strecken auf der Tafel durch das Decimeter (ein Stäbchen von dieser Länge) zu messen. An die

* Jede Schule soll die Maße in Wirklichkeit besitzen, um sie den Schülern zeigen zu können. Auch eine Wandtafel mit diesen Maßen soll nicht fehlen, damit die Schüler dieselben zu jeder Zeit, also auch in der Unterrichtspause, benützen können.

Messungen mit dem Decimeter schließen sich Messungen mit dem Meter und an diese Messungen mit dem Centimeter (ein Stäbchen von dieser Länge) an.

Auffassung der Flächenmaße.

§ 48. Nachdem die Kinder beim Zeichnen das Quadrat kennen gelernt haben, können sie diese Maße auffassen. Bei Močnik findet man sie im Raume 1 — 1000 behandelt.

Auffassung der Körpermaße.

§ 49. Die Auffassung derselben beruht auf der Auffassung des Würfels. Man verlegt sie daher mit vollem Recht auf die Oberstufe. Anders verhält es sich mit den Hohlmaßen; für diese gelten ähnliche Bemerkungen wie für die Längenmaße.

Auffassung der Gewichte.

§ 50. Vergleiche die Worte Hentschels Seite 65. Der Begriff «Gewicht» ist den Kindern im Verlaufe einer längeren Zeit nur durch Versuche beizubringen, indem sie verschieden schwere Gegenstände wiederholt heben, den Zug zum Boden in den verschiedenen Fällen miteinander vergleichen, diesen Zug nach abwärts an der Wage beobachten u. s. f. Insoferne die Gewichte Kilogramm und Dekagramm in der Anwendung am öftesten gesehen werden, sind diese zuerst zu besprechen. Der Centner wird jedenfalls im Raume 1 — 100 und die Tonne im Raume 1 — 1000 zur Auffassung gebracht. Die kleineren Gewichte Gramm, Decigramm, Centigramm, Milligramm gehören dem Raume 1 — 1000 und dem unbegrenzten Zahlenraume an.

Auffassung der Zeitmaße.

§ 51. Die Zeitbegriffe werden vom Kinde nur schwer aufgefasst. Am ehesten wird der Begriff «Tag» und durch den sich wiederholenden Ausnahmetag, den Sonntag, die «Woche» aufgefasst. Die «Stunde» lernt das Kind durch den Schulbesuch, den «Monat», das «Jahr», die «Minute», die «Secunde» erst nach Verlauf einer längeren Zeit kennen. Daraus ergibt sich die Reihenfolge der Zeitbegriffe. Sie sind entschieden in den Raum 1 — 100 zu verweisen.

«Die Dauer einer Minute, resp. Secunde, ist den Schülern im Unterrichte zur Anschauung zu bringen; die Schüler bemessen die Minute in der Regel zu kurz.» (Hentschel.)

Die Veranschaulichung der Secunde geschieht durch zwei Schläge auf den Tisch, die der Minute durch Zählen bis 60.

Auffassung der Münzen.

§ 52. Die Münzen als Objecte sind leicht zu erkennen, besonders diejenigen, die die Kinder öfters zu sehen Gelegenheit haben. Das Wesen der Münzen ist den Kindern jedoch schwer zur Anschauung zu bringen. Dies geschieht am besten durch eine Reihe von Preisaufgaben, in denen den Schülern bekannte Sachen vorkommen, welche sie selbst dem Werte nach auf eine gewisse Art vergleichen können. Das Wesen der Münzen wird sozusagen den Aufgaben «abgefühlt».

Wie die Münzen aneinander zu reihen sind, entscheidet das Metall, aus dem sie bestehen. Zuerst bespreche man die Kupfermünzen (1—10), dann die Silbermünzen (1—20) und schließlich die Goldmünzen (z. B. 1—1000 oder auch später).

Meterstab, praktische Gewichte etc.

§ 53. Der Meterstab kann den Schülern nach und nach zur Auffassung gebracht werden. Auf einen 1 *m* langen Stab werden vor den Augen der Kinder die Decimeter aufgetragen, auf das Decimeter-Stäbchen die Centimeter und im Raume 1—100 die Centimeter auf den ganzen Meterstab. Die Verwendung des Meterstabes wird durch Messungen erläutert. Dabei misst man 1.) Längen, die nur durch Meter ausgedrückt werden, z. B. 5 *m*, 2.) Längen, die durch Meter und Decimeter, resp. durch Decimeter und Centimeter ausgedrückt werden, z. B. 4 *m* 3 *dm*, 2 *dm* 7 *cm*, 3.) Längen, die durch Meter, Decimeter und Centimeter ausgedrückt werden, z. B. 3 *m* 4 *dm* 8 *cm*.

Bei den Wägungen, die am besten im Raume 1—100 vorgenommen werden, muss man sich wohl der praktischen Gewichte bedienen, man kann ihnen also in diesem Raume schwer ausweichen. — Anders ist es mit den praktischen Hohlmaßen. Mit dem Liter, Deciliter, Centiliter kann man ganz gut alle möglichen Messungen vornehmen. Diese praktischen Maße können also dem Raume 1—1000 ganz gut überlassen werden.

Stufenfolge der Maße.

§ 54. Aus dem Vorangehenden ergibt sich eine genaue Stufenfolge der Maße, die im Folgenden angeführt ist:

1.) Zählmaße. Diesen ist sonst durch die Verwandlungszahl die Stelle angewiesen;

2.) Münzen, aber nur als Gegenstände aufgefaßt. Die Verwandlungszahlen sind durch die Zahlräume bedingt, was auch für die späteren Maße gilt;

3.) Längenmaße;

4.) Hohlmaße;

5.) Gewichte;

6.) Zeitmaße (vergl. Zeitrechnung);

7.) Münzen als Wertmaße (vergl. Preisrechnung);

8.) Flächenmaße;

9.) kubische Maße.

Die Maße 1—6 (incl.) gehören in die Räume 1—20, 1—100, bezüglich der Verwandlungszahlen auch in den Raum bis 1000 und in den unbegrenzten Zahlenraum. Die Preisaufgaben beginnen am besten im Raume 1—100 (vergl. Angewandtes Rechnen § 131), die Maße 8 und 9 aber am besten an der Oberstufe. Vergleiche die «Anleitung zum Rechnen» und die Rechenbücher von demselben Verfasser. Sobald die Schüler ein Maß kennen gelernt haben, soll es sich in den Aufgaben, beim reinen und angewandten Rechnen, öfters wiederholen, damit es sich einprägt und nicht in Vergessenheit geräth. Bei der Besprechung einer Meßart stelle man auch Fragen wie: Was wird gezählt? Was wird mit Meter gemessen? Was wird gewogen? u. s. w.

Das Rechnen mit benannten Zahlen.

§ 55. Nach dem Grundsatze: «Vom Concreten zum Abstracten» beginnt das Rechnen mit benannten Zahlen der ersten Hauptgruppe von allem Anfang an. Aber auch das Rechnen mit benannten Zahlen der zweiten Hauptgruppe soll systematisch nach periodisch auftretenden Gruppen gepflegt werden, damit die Maße von allem Anfang an gehörig gewürdigt und eingeprägt werden. Dadurch wird zugleich das Rechnen mit unbenannten Zahlen besser begründet, dasselbe und das dekadische Zahlensystem zur möglichst großen Klarheit erhoben. Es wird überhaupt ins Rechnen von Anfang an ein System nach dem Anschauungsprincip gebracht.

Das Rechnen mit benannten Zahlen soll im Raume 1—20 nur mündlich, im Raume 1—100 aber auch schon schriftlich, im innigen Anschlusse an das Kopfrechnen, gepflegt werden. Die abgekürzten Bezeichnungen, wie *m, dm* u. s. f., prägen sich durch den wiederholten Gebrauch ein.*

Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen wird nach den österreichischen Lehrplänen in den unbegrenzten Zahlenraum gewiesen. Damit ist jedoch nicht gesagt, dass früher keine mehrnamigen Zahlen auftreten; man findet solche insbesondere in den angewandten Aufgaben der meisten Rechenbücher vor. Jedoch beobachtet man kein System, nach dem sie vorgeführt werden; im unbegrenzten Zahlenraume wird dann das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen systematisch zum Abschluss gebracht.

Die Bemerkung Sallbergs: «Das Rechnen mit mehrfach benannten gleichartigen und gemischten Zahlen beginnt nach Behandlung der Zahl 11 und tritt so naturgemäß ein, dass die Kinder den Übergang kaum merken,» drückt den Gedanken aus, dass das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen bald anfangen kann, wenn man es nur stufenmäßig steigert. Im Nachstehenden werden diese Stufen nur durch specielle Beispiele, neben denen auch jene Fälle des Rechnens mit unbenannten Zahlen notiert sind, die durch das Rechnen mit benannten Zahlen begründet werden, angedeutet. Genaueres darüber findet sich in der «Anleitung zum Rechnen» und auch in der Schrift «Der metrische Scheibchen-Rechenapparat 2c.» vom selben Verfasser.

Das, was durch Meter, Decimeter, Centimeter angedeutet ist, schließt die übrigen Maße nicht aus, es werden damit auch alle analogen Beispiele mit den übrigen Maßen bezeichnet.

A. Kopfrechnen.

Addition.

§ 56. $3\,cm + 4\,cm$, $7\,cm + 8\,cm\,(7 + 8)$; $1\,dm + 4\,cm = \cdot\,cm$; $4\,dm\ \ 5\,cm + 2\,cm$, $4\,dm\ \ 5\,cm + 5\,cm$, $4\,dm\ \ 5\,cm + 7\,cm$ $(45 + 2, 45 + 5, 45 + 7)$; $4\,dm + 7\,cm = \cdot\,cm$; $4\,dm + 3\,dm\ \ 7\,cm$

* Von den Schülern können diese Zeichen natürlich erst geschrieben werden, wenn sie lateinisch schreiben gelernt haben.

(40 + 37); 4 *dm* 7 *cm* + 2 *dm* (47 + 20); 4 *dm* 3 *cm* + 2 *dm* 5 *cm*, 4 *dm* 3 *cm* + 2 *dm* 7 *cm*, 4 *dm* 3 *cm* + 2 *dm* 9 *cm* (43 + 25, 43 + 27, 43 + 29).

Dreinamige Zahlen sind schon weniger fürs Kopfrechnen geeignet. Hat man z. B. 5 *m* 3 *dm* 2 *cm* + 3 *m* 5 *dm* 6 *cm* im Kopfe ohne Stütze auszurechnen, so kostet dies eine große Anstrengung. In der Form 5 *m* 32 *cm* + 3 *m* 56 *cm* ist das Rechnen schon vereinfacht; aber selbst die Addition zweier zweinamiger Zahlen möchte man lieber dem schriftlichen Rechnen überlassen. (Vergl. Kopfrechnen — Grundsatz.) Jedenfalls sollen solche Beispiele zur Stütze des Gedächtnisses fürs Ausrechnen niedergeschrieben werden Die Stufen mit dreinamigen Zahlen lassen sich nach dem obigen Princip leicht zusammenstellen. Ähnliche Bemerkungen bezüglich der dreinamigen Zahlen gelten auch für die übrigen Operationen.

Subtraction.

§ 57. 1 *dm* — 4 *cm;* 5 *dm* — 4 *cm;* 1 *dm* 5 *cm* — 2 *cm*, 1 *dm* 5 *cm* — 5 *cm*, 1 *dm* 5 *cm* — 7 *cm* (15 — 2, 15 — 5, 15 — 7); 8 *dm* 5 *cm* — 3 *cm*, 8 *dm* 5 *cm* — 5 *cm*, 8 *dm* 5 *cm* — 7 *cm* (85 — 3, 85 — 5, 85 — 7); 5 *dm* 6 *cm* — 3 *dm* (56 — 30); 8 *dm* — 3 *dm* 5 *cm* (80 — 35); 8 *dm* 5 *cm* — 3 *dm* 2 *cm;* 8 *dm* 5 *cm* — 3 *dm* 5 *cm*, 8 *dm* 5 *cm* — 3 *dm* 7 *cm* (85 — 32, 85 — 35, 85 — 37).

Bezüglich der dreinamigen Zahlen vergl. die Addition.

Multiplication.

§ 58. 5 mal 7 *cm;* 3 mal 3 *dm* 2 *cm* (3 mal 32); 10 mal 3 *cm* (10 mal 3 E. = 3 Z.); 20 mal 3 *cm;* 23 mal 3 *cm.*

Dreinamige Zahlen vergl. Addition.

Das Messen.

§ 59. 8 *cm* : 2 *cm;* 9 *cm* : 2 *cm;* 4 *dm* : 4 *cm* (4 Z. : 4 E.); 8 *dm* : 4 *cm* (8 Z. : 4 E.); 6 *dm* : 4 *cm* (6 Z. : 4 E.); 4 *dm* 5 *cm* : 5 *cm;* 9 *dm* 6 *cm* : 3 *cm* (96 : 3), 8 *dm* 5 *cm* : 5 *cm* (85 : 5), 8 *dm* 7 *cm* : 5 *cm* (87 : 5); 5 *dm* 6 *cm* : 2 *dm* (56 : 20).

Das Theilen.

§ 60. $\frac{1}{4}$ v. 12 *cm* (14 *cm*); $\frac{1}{4}$ v. 2 *dm* ($\frac{1}{4}$ v. 2 Z.); $\frac{1}{4}$ v. 3 *dm* ($\frac{1}{4}$ v. 3 Z.); $\frac{1}{4}$ v. 7 *dm* ($\frac{1}{4}$ v. 7 Z.); $\frac{1}{3}$ v. 2 *dm* 5 *cm;* $\frac{1}{3}$ v. 9 *dm* 6 *cm* ($\frac{1}{3}$ v. 96); $\frac{1}{3}$ v. 8 *dm* 5 *cm* ($\frac{1}{3}$ v. 85); $\frac{1}{20}$ v. 4 *dm* ($\frac{1}{20}$ v. 4 Z.); $\frac{1}{20}$ v. 5 *dm* ($\frac{1}{20}$ v. 5 Z.).

Dreinamige Zahlen vergl. Addition.

§ 61. Schriftliche Übungen wie:

4 *dm* 2 *cm*	4 *dm* 8 *cm*	6 *m* 8 *dm* 2 *cm*	
+ 3 *dm* 3 *cm*	+ 3 *dm* 5 *cm*	+ 3 *m* 1 *dm* 5 *cm*	u. s. f.
4 *dm* 6 *cm*	5 *dm* 2 *cm*		
— 2 *dm* 3 *cm*	— 3 *dm* 8 *cm*	u. s. f.	
2 *dm* 3 *cm*	2 *dm* 4 *cm*		
× 2	× 3	u. s. f.	

4 *dm* 6 *cm* : 2 *cm* oder 4 *dm* 6 *cm* : 2
5 *dm* 6 *cm* : 2 *cm* » 5 *dm* 6 *cm* : 2 u. s. f.

sind sehr geeignet, in das Verständnis des schriftlichen Rechnens mit mehrziffrigen Zahlen einzuführen.

§ 62. Alle diese Kopfrechenübungen sollen schon im Raume 1—100 vorgenommen, jedoch auch in den folgenden Zahlenräumen fleißig wiederholt werden, bis sie vollstes Eigenthum des Schülers geworden sind. Anfangs machen die Übungen, worin eine Zahl, z. B. der erste Summand, zweinamig ist, wohl einige Schwierigkeit. Daher soll man das Gedächtnis durch Aufschreiben der Übungen auf der Tafel oder durch Herauslesen aus dem Rechenbuche unterstützen. Auch soll man von der Anschauung ausgehen, und zwar kann man sich dafür des metrischen Rechenapparates sehr gut bedienen, der vom Verfasser eigens auch zu dem Zwecke construiert worden ist. Vergl. die Schrift «Der metrische Scheibchenrechenapparat» und den praktischen Theil der «Methodik des Rechenunterrichtes» vom selben Verfasser.

Die benannten Zahlen werden für die Übungen aus allen Maßarten genommen. Vergl. «Zweites Rechenbuch» vom selben Verfasser. Jede Gruppe soll jedoch anfangs als Decimeter-Centimeter-Gruppe behandelt werden, d. h. z. B.: statt 3 Lg. 7 Bg. + 2 Bg. nimmt man 3 *dm* 7 *cm* + 2 *cm*, später jedoch so, wie sie im Rechenbuche angeführt ist.

B. Schriftliches Rechnen.

Reducieren.

§ 63. Anmerkung. Von hier an ist das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen größtentheils nach Hentschel behandelt. Niedere Sorten in höhere verwandeln heißt reducieren. Dies ist eigentlich nur möglich, wenn eine größere Anzahl niederer Einheiten vorhanden ist, als zu einer Einheit einer höheren Sorte nöthig sind. Derartige Reductionen werden schon auf der Stufe des Kopfrechnens gepflegt. Im unbegrenzten Zahlenraume, in dem das schriftliche Reducieren zu besprechen ist, werden jedoch auch Verwandlungen in höhere Benennungen vorgenommen, wenn auch die Zahl der niederen Einheiten kleiner ist als die Verwandlungszahl. Vergleiche das Reducieren mit dem Zusammenfassen dekadischer Einheiten zu höheren beim dekadischen Zahlensystem.

Die Regel fürs Reducieren wird auf Grundlage des Kopfrechnens* abgeleitet, wie dies aus nachstehendem Beispiele ersichtlich ist.

Wie viel Hektoliter sind 300 *l*? — So oft als 100 *l* in 300 *l* enthalten sind, so viele Hektoliter betragen die 300 *l*. «Niedere Einheiten verwandelt man also in höhere, wenn man ihre Zahl durch die Verwandlungszahl dividiert.» Welchen Stufengang hat man dabei einzuschlagen?

Vor allem ist eine übersichtliche systematische Wiederholung der Maße, wenn sie auch als bekannt vorauszusetzen sind, mit besonderer Berücksichtigung der Verwandlungszahlen vorzunehmen und das System der abgekürzten Schreibweise der Benennungen, die auch schon an den früheren Stufen geübt wird, zusammengefasst den Schülern vorzuführen. Dabei bemerkt man, dass die lateinischen Namen deci, centi, milli die Unterabtheilungen und die griechischen deka, hekto, kilo, myria die Oberabtheilungen des Grundmaßes bezeichnen.

Dann sind die beiden Hauptfälle: 1.) die Verwandlungszahl ist decimal, z. B. 10, 100 u. s. w., 2.) sie ist nicht decimal, z. B. 12, 60 u. s. w., auseinanderzuhalten.

In jedem dieser Fälle hat man ferner zu berücksichtigen, ob a) das Resultat einnamig, z. B. 30 *dm* = 3 *m*, 36 Stück = 3 Dutzend, oder b) mehrnamig ist, z. B. 35 *cm* = 3 *dm* 5 *cm*, 40 Stunden = 1 Tag 16 Stunden, 356 *cm* = 3 *m* 5 *dm* 6 *cm*, 6243 Min. = 4 Tg. 7 Std. 3 Min. Schließlich ist die Verwandlung in die nächst höhere Benennung einfacher, als die Verwandlung in eine entfernter höhere. Z. B. die Aufgabe «6243 Minuten = ? Stunden» ist einfacher, als die Aufgabe «6243 Minuten = ? Tage».

---

* Das Reducieren im Kopfe wird an mehreren Beispielen geübt, bevor man zum schriftlichen Reducieren übergeht.

§ 64. **Decimale Schreibung mehrnamiger Zahlen, die 10 oder ein Vielfaches von 10 zur Verwandlungszahl haben.**

Dies soll an einem Beispiele erläutert werden.

Wie viel Gulden und Kreuzer sind 2456 kr.?

24,56 kr. : 100 = 24 fl. 56 kr.

Die Benennung «kr.» kann man auch auslassen und schreiben

24 fl. 56,

wobei man unzweideutig weiß, dass neben 24 fl. auch 56 kr. sind.

Man könnte sogar den Namen «fl.» stellen wie in

24 56 fl.,

was jedoch zur Leseweise 2456 fl. führen könnte.

Dem kann man wieder vorbeugen, wenn man zwischen 24 und 56 einen Punkt macht, also schreibt

24·56 fl.

Ähnlich kann man die decimale Schreibweise bei den übrigen Maßen erläutern, deren Verwandlungszahl decimal ist. Dabei kann mündliches und schriftliches Rechnen in gegenseitigen Dienst treten. Der Lehrer gibt z. B. zur mündlichen Lösung die Aufgabe: Wie viel Meter und Centimeter sind 3628 *cm*? Antwort: 36 *m* und 28 *cm*. Lehrer: Wie schreibt man das kurz mit einem Punkt?

Diese Behandlungsweise, welche nach Hentschel gegeben ist, führt unbemerkt zu den Decimalbrüchen. Sie erleichtert aber auch das Resolvieren, wofür man nur den Punkt wegzulassen braucht. Z. B.

24·56 fl. = 2456 kr.

Später treten als specielle Fälle folgende durch Beispiele angedeutete Übungen auf:

64 kr. = 0·64 fl., 508 kr. = 5·08 fl.

Beispiele:

1.) Die Verwandlungszahl ist dekadisch:

67845 *dkg* = · *q* · *kg* · *dkg*

678,45 : 1,00   6,78 : 1,00

45 *dkg*   78 *kg*

6 *q* 78 *kg* 45 *dkg*

2.) Nicht dekadische Verwandlungszahl.

Wie viel Monate, Tage und Stunden sind 8224 Stunden?

8224 Std. : 24 = 342	34,2 : 3,0 = 11 Mon.
102	12 Tg.
64	
16 Std.	

Macht aus: 11 Mon. 12 Tg. 16 Std.

§ 65. **Resolvieren**

heißt höhere Sorten in niederere auflösen. Vergl. die Auflösungen im Gebiete des Zehnersystems.

Dem schriftlichen Resolvieren werden mündliche Übungen, die schon an früheren Stufen gepflegt wurden, vorangeschickt; an die mündlichen Übungen schließt sich die Ableitung der Regel fürs Schriftliche an, wie dies aus folgendem Beispiele ersichtlich ist:

Wie viel Centimeter sind 16 *m*? — Mündlich: 1 *m* = 100 *cm*, 16 *m* = 16 mal 100, also 1600 *cm*. — Der Schluss, der auf die Regel fürs Schriftliche führt, soll jedoch so gemacht werden: Um 1 *m* zu erhalten, muss man 1 *cm* 100 mal, und um 16 *m* zu erhalten, 16 *cm* 100 mal nehmen. Also ist:

$$\begin{array}{r} 16\ m \\ \times\ 100 \\ \hline 1600\ cm. \end{array}$$

Regel: Um höhere Einheiten in niederere zu verwandeln, muss man ihre Zahl mit der Verwandlungszahl multiplicieren.

Dabei sind dieselben zwei Hauptfälle zu unterscheiden wie beim Reducieren, in denen man 1.) eine einnamige und 2.) eine mehrnamige Zahl in die a) nächst niedere Sorte, b) in eine entferntere niedrige Sorte zu verwandeln hat. Z. B.:

	I.	II.
1. a)	4 *m* = 40 *dm*,	6 Tg. = 144 Std.,
b)	4 *m* = 400 *cm*,	6 Tg. = 8640 Min.
2. a)	5 *m* 4 *dm* = 54 *dm*,	b) 5 Tg. 20 Std. = 8400 Min.

Um das beim Reducieren übers decimale Schreiben Gesagte besser einzuprägen, kann man anfangs auch folgendermaßen verfahren:

$$
\begin{aligned}
34\cdot36\ m &= 24\ m\ 36\ cm \\
24\ m &= 2400\ cm \\
&+\quad 36\ cm \\
&\overline{\ 2436\ cm}
\end{aligned}
$$

Dieses Resolvieren kann an mehreren Aufgaben mündlich geübt werden.

Die einzelnen Aufgaben werden in der Regel entweder nur aus dem Bereiche der größeren oder nur aus dem Gebiete der kleineren Maße genommen, nicht aus beiden zugleich. Man lasse also z. B. nicht Kilometer auf Millimeter, Milligramm auf Kilogramm bringen, was dem Leben völlig fremd sein würde.*

Die Grenze zwischen größeren und kleineren Maßen bilden Meter, Gramm, Quadratmeter, Kubikmeter.

Ein Beispiel für Sorten mit nicht dekadischer Verwandlungszahl:

4 J. 8 Mon. 22 Tg. = · Tg.

$$
\begin{array}{r}
4\ \text{J.} \times 12 \\
\hline
48\ \text{Mon.} \\
+\quad 8 \\
\hline
56\ \text{Mon.} \\
\times\quad 30 \\
\hline
1680\ \text{Tg.} \\
+\quad 22\ \text{»} \\
\hline
1702\ \text{Tg.}
\end{array}
$$

Die vier Grundrechnungsarten mit mehrnamigen Zahlen.

Das Verfahren wird an Beispielen in Kürze angedeutet werden. Jeder Operation gehen einschlägige Übungen im Kopfe voraus.

---

* Der Feldmesser wird hauptsächlich mit Metern arbeiten, und es wird ihm auf einige Millimeter schwerlich ankommen. Arzneien, die der Arzt in Theilen der Gramm verschreibt, wird man wohl niemals durch Bruchtheile des Kilogramms ausdrücken wollen.

Addition.

§ 66. 1.) Sorten mit dekadischen Verwandlungszahlen.

a)	36·45 fl.	3645 kr.	b)	36·45 fl.
	8·02 »	802 »		8·02 »
	235·60 »	23560 »		235·60 »
	9·00 »	900 »		9·00 »
	289·07 fl.	28907 kr.		289·07 fl.

Nach a) werden zuerst die Gulden in Kreuzer verwandelt, die Kreuzer werden addiert und ihre Summe, wieder in Gulden verwandelt, unter die decimal geschriebenen Summanden gesetzt. — Später verwandelt man in die niedere Benennung nicht mehr, addiert wie in b) und setzt den Punkt in die Summe, wenn man bis zu ihm gelangt.

Wie dieses Verfahren die Addition der Decimalbrüche vorbereitet oder sie einleitet, ist von selbst ersichtlich. Für den Fall, dass die Schüler die Decimalbrüche schon kennen, kann man die mehrnamigen Zahlen in Decimalbrüche verwandeln. Das Verfahren ergibt sich aus dem Obigen von selbst. Eine gleiche Bemerkung gilt für die anderen Operationen.

2.) Sorten mit nicht dekadischen Verwandlungszahlen.

Wie viel betragen zusammen?

4 Jahre	8 Mon.	27 Tg.			
17 »	— »	18 »	a)	101 Tg.	3 Mon. 11 Tg.
— »	6 »	29 »			
5 »	10 »	3 »			
1 »	11 »	24 »			
6 »	9 »	— »	b)	47 Mon.	3 J. 11 Mon.
36 Jahre	11 Mon.	11 Tg.			

Die Entwicklung der Regel ist aus dem Beispiele leicht zu ersehen.

Subtraction.

§ 67. 1.) Sorten mit dekadischen Verwandlungszahlen:

	Zunächst:			Später:
a)	324·85 fl.	32485 kr.	b)	324·85 fl.
	— 46·23 fl.	— 4623 kr.		46·23 fl.
	278·62 fl.	27862 kr.		278·62 fl.

Die Entwicklung der Regel fürs schriftliche Verfahren nimmt im allgemeinen denselben Gang wie bei der Addition.

2.) Sorten mit nicht dekadischen Verwandlungszahlen.

a) Ohne Borgen.

$$\begin{array}{rlrlrl} 48 & \text{Jahre} & 8 & \text{Mon.} & 26 & \text{Tg.} \\ 36 & \text{Jahre} & 2 & \text{Mon.} & 12 & \text{Tg.} \\ \hline 12 & \text{Jahre} & 6 & \text{Mon.} & 14 & \text{Tg.} \end{array}$$

Anfangen bei der niedrigsten Sorte. Das übrige liegt auf der Hand.

b) Mit Borgen.

$$\begin{array}{rlrlrl} 4\dot{8} & \text{Jahre} & \overset{13}{\dot{2}} & \text{Mon.} & \overset{35}{5} & \text{Tg.} \\ 36 & \text{Jahre} & 7 & \text{Mon.} & 18 & \text{Tg.} \\ \hline 11 & \text{Jahre} & 6 & \text{Mon.} & 17 & \text{Tg.} \end{array}$$

Aus den Borgepunkten und den ober dem Minuend geschriebenen Zahlen ergibt sich das Verfahren deutlich.

Multiplication.

§ 68. 1.) Beispiel für dekadische Verwandlungszahlen:

$$4{\cdot}32\ kg \times 13$$

a)
$$\begin{array}{rl} 432 & dkg \\ \times\ \ 13 & \\ \hline 1296 & \\ 432\ \ & \\ \hline 5616 & dkg \end{array}$$
oder $56{\cdot}16\ kg$

b)
$$\begin{array}{rl} 4{\cdot}32 & kg \\ \times\ \ 13 & \\ \hline 1296 & \\ 432\ \ & \\ \hline 56{\cdot}16 & kg \end{array}$$

Der Gang ist aus dem Vorangehenden und dem durchgeführten Beispiele ersichtlich.

2.) Sorten mit nicht dekadischen Verwandlungszahlen:

Wie viel ist 34 mal 5 Jahre 8 Mon. 26 Tg.?

Erstes Verfahren. Es ist aus dem Gang der Rechnung ersichtlich.

Ausrechnung.

a)
$$\begin{array}{rl} 26 & \text{Tg.} \\ \times\ 34 & \\ \hline 104 & \\ 78\ & \\ \hline 88{,}4 & \text{Tg.} : 3{,}0 = 29\ \text{Mon.} \\ 14 & \text{Tg.} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl} 8 \times 34 & \\ \hline 272 & \text{Mon.} \\ +\ \ 29 & \text{Mon.} \\ \hline 301 & \text{Mon.} : 12 = 25\ \text{Jahre} \\ 61 & \\ 1 & \text{Mon.} \end{array}$$

c) 5 × 34

	170 Jahre
+	25 Jahre
	195 Jahre

Man bekommt: 195 Jahre 1 Mon. 14 Tg.

Zweites Verfahren.

a) 5 Jahre = 60 Mon.
+ 8 Mon.
68 Mon.
× 30
2040 Tg.
+ 26 Tg.
2066 Tg.

b) 2066 Tg.
× 34
8264
6198
70244 Tg.

c) 7024,4 Tg. : 3,0 = 2341 Mon.
14 Tg.
2341 Mon. : 12 = 195 Jahre
114
61
1 Mon.

Man bekommt 195 Jahre 1 Mon. 14 Tg.

Das erste Verfahren ist im allgemeinen kürzer als das zweite.

Division.

§ 69. Vor allen Dingen ist hier der Unterschied zwischen Enthaltensein und Theilen recht zur Klarheit zu bringen. Das übrige ergibt sich aus den Beispielen.

1. Messen.

Wie oft sind 2 Schock 29 Stück in 39 Schock 44 Stück enthalten?

39 Schock 44 Stück = 2384 Stück. 2 Schock 29 Stück = 149 Stück.

2384 Stück : 149 Stück = 16 mal
894

2. Theilen.

1.) Sorten mit dekadischer Verwandlungszahl: Suche den achten Theil von 15 *q* 26 *kg* 48 *dkg*.

a) 152648 *dkg* : 8 = 1 9081 *dkg*
72 oder 1·9081 *q*
64
8

b) 15·2648 : 8 = 1·9081 *q*
7 2
64
8

2.) Sorten mit nicht dekadischen Verwandlungszahlen: Suche den 16. Theil von 39 Schock 44 Stück.

a) 39 Schck. 44 Stck. : 16 = 2 Schck. 29 Stck.
32
7 Schck.
× 60
420 Stck.
+ 44 Stck.
464
144

b) 39 Schck. 44 Stck. = 2384 Stck. : 16 = 149 Stck.
78
144 14‚9 : 6‚0 = 2 Schck.
29 Stck.

Es ergibt sich nach b) auch 2 Schock 29 Stück. Dieses Verfahren ist jedoch nicht praktisch.

Fünfter Abschnitt.

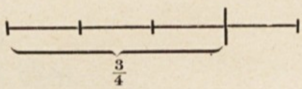
Brüche.

Auffassung der Brüche.

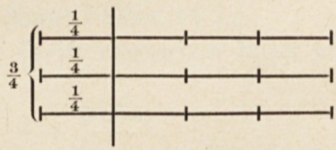
§ 70. Wiederholung der Zahlenlehre und Bruchlehre.

Ein Bruch kann auf zweierlei Art entstanden gedacht werden. Für den Bruch $\frac{3}{4}$ z. B. denkt man sich entweder die Einheit in vier gleiche Theile (in Viertel) getheilt und drei solche genommen, oder den vierten Theil von drei Ganzen, d. i. den Quotienten 3 : 4. Die beiliegende Figur erläutert das Gesagte.

1. Auffassung:



2. Auffassung:



Aus der Entstehungsweise eines Bruches folgt dessen Schreibweise mit zwei Zahlen; die eine gibt an, in wie viele Theile ein Ganzes zu theilen ist, sie benennt also jeden Theil und heißt deshalb der Nenner; die andere drückt die Zahl der Theile aus oder zählt dieselben und heißt der Zähler. *Darnach ist jeder Bruch als eine benannte Zahl aufzufassen, dessen Nenner der Name dieser Zahl ist.* Daher sagt Knilling vom Bruchrechnen: «. . . es unterscheidet sich darum in nichts vom Rechnen mit ganzen Zahlen . . . . Was das Rechnen mit Brüchen von jenem mit ganzen Zahlen unterscheiden könnte, ist allein das Resolvieren, z. B. $\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{75}{90}$ ꝛc., und das Reducieren, z. B. $\frac{18}{24}$, $\frac{9}{12}$ ꝛc. Doch sind auch diese beiden Rechenvorgänge dem Bruchrechnen nicht ausschließlich eigen . . .»

Es handelt sich also hauptsächlich darum, dass die Schüler den Bruch gehörig auffassen.

Eintheilung der Brüche.

§ 71. Man unterscheidet gemeine und Decimalbrüche. Letztere sind nur eine besondere Gattung der ersteren; so sind z. B. die Decimalbrüche $\frac{3}{10}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{4526}{1000}$ u. s. f. gemeine Brüche, deren Nenner 10, 100, 1000 u. s. f. ist. Nach der zweiten Auffassungsweise der Decimalbrüche, durch die das dekadische Zahlensystem erweitert erscheint, bestehen dieselben eigentlich auch aus gemeinen Brüchen mit den Nennern 10, 100, 1000 u. s. w. Z. B. 0·625 besteht aus den gemeinen Brüchen $\frac{6}{10}$, $\frac{2}{100}$ und $\frac{5}{1000}$.

Dies spricht deutlich genug dafür, dass gemeine Brüche, wenn auch in einem beschränkteren Umfange, jedenfalls den Decimalbrüchen voranzugehen haben.

Die gemeinen Brüche theilt man nach dem Größenverhältnis zwischen Zähler und Nenner, wie bekannt, in echte und unechte Brüche. Befindet sich neben einer ganzen Zahl noch ein Bruch, so nennt man dies eine gemischte Zahl.

Wir wollen noch Stammbrüche, d. h. solche, deren Zähler gleich 1 ist (z. B. $\frac{1}{3}$), und abgeleitete Brüche, deren Zähler größer ist als 1 (z. B. $\frac{2}{3}$), unterscheiden.

A. Gemeine Brüche.

I. Die vorbereitende Stufe (Stufe des Kopfrechnens).

Veranschaulichung der gemeinen Brüche.

§ 72. Die Bruchlehre wird zuerst nur an einfachen Brüchen, dann auch an größeren, also allgemein vorgenommen. Daher unterscheiden wir zwei Hauptstufen: 1.) die vorbereitende Stufe, die von den Elementen der Bruchrechnung spricht, 2.) die Bruchlehre überhaupt.

Auf der vorbereitenden Stufe, welche hauptsächlich der Mittelstufe angehört, waltet das Kopfrechnen vor, woran sich das schriftliche innig anschließt. Auf der Oberstufe leitet das Kopfrechnen als etwas Bekanntes die Bruchrechnung ein, das Hauptaugenmerk ist aufs schriftliche Rechnen zu legen.

Da der Schwerpunkt alles Bruchrechnens auf einer klaren Auffassung der Brüche beruht, so ist es nothwendig, dass man dieselben möglichst gut veranschaulicht. Über die Art und Weise der Veranschaulichung jedoch herrscht unter den Pädagogen nicht volle Einigkeit. So schreibt z. B. Knilling: «... Wir wollen uns jedoch ausschließlich der Linie bedienen, weil sich an derselben die Theilungen am leichtesten und raschesten vornehmen lassen und weil an ihr alle wichtigeren Divisionsbegriffe entwickelt werden können, dieselbe als Veranschaulichungsmittel somit vollkommen ausreicht.» In diesem Sinne ist sein «Theillineal», welches, 2 *dm* lang, an der oberen Seite einerseits in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, andererseits in $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, an der unteren Seite in $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{18}$ und andererseits in $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ eingetheilt ist, als Veranschaulichungsmittel zu verwenden.

Tanck schreibt: «... In der That liegt aber die Sache so, dass es gar keine halben Stäbchen, Streifen, noch Striche gibt ... Es gibt wohl lange und kurze Striche 2c., aber halbe, viertel 2c. nicht ... Dagegen gestattet der Sprachgebrauch bei central geformten Körpern, als Äpfeln, Kreisen, Scheiben u. dgl., von Halben, Vierteln u. s. w. zu sprechen ... Anders liegt die Sache aber schon wieder mit dem halben Meter, Pfund, Liter 2c. Hier kann man mit Recht von diesen Theilen sprechen; aber höchstens beim Meter — der bloßen Längenausdehnung — sind sie genügend anschaulich; bei den Körpermaßen und Gewichten ist das auch nicht mehr der Fall ...»

Hentschel schreibt: «Wir theilen ein Meter, einen Apfel oder einen Bogen Papier, einen Stab, einen Strich (für den Classenunterricht wird sich das erstere und letztere wohl am meisten empfehlen) in zwei gleiche Stücke oder gleiche Theile, bieten dasselbe zur Anschauung ...»

Krug, Oberlehrer am königl. Seminar zu Annaberg, schlägt als Veranschaulichungsmittel ein Quadrat von 20 *cm* Seitenlänge (in der Schule $1\frac{1}{2}$ *m* Seitenlänge) vor, welches in 100 gleiche Quadrate eingetheilt erscheint, und die kleinen Quadrate wieder in der ersten Reihe in 2, 3 Theile u. s. f., in der zweiten Reihe in 2, 4, 6 Theile u. s. f. u. s. f.

So viel ist gewiss, dass es anschaulicher ist, wenn die Theile vom Ganzen sich unterscheiden, und dass Veranschaulichungsmittel von dieser Art, also z. B. kreisförmige Scheiben, die in 2, 3 .... gleiche Theile eingetheilt sind, für die Einführung in die Brüche sich am besten eignen. Später kann man sich jedoch der Stäbe, Striche u. s. w. ganz gut bedienen. In diesem Sinne ist denn auch der metrische Scheibchenrechenapparat sehr gut verwendbar. Überhaupt soll man beim Rechenunterricht genau sein, lückenlos vorgehen, sonst aber nicht zu ängstlich, ja nicht zu kleinlich sein.

Stufen bei der Betrachtung der Brüche.

§ 73. Aus dem über die Auffassung der Brüche Gesagten ergeben sich folgende zwei Hauptstufen für die Betrachtung der Brüche: 1.) das Theilen der Einheit, 2.) das Theilen ganzer Zahlen.

Erste Stufe: Theilen der Einheit.

Nach Knilling werden diesbezüglich folgende Unterstufen unterschieden:

1.) Entstehen der Theile; Benennung derselben; Übung im Anschreiben der Nenner, und zwar folgendermaßen: $\frac{\ }{2}$, $\frac{\ }{3}$, $\frac{\ }{4}$ u. s. w. — Wohl wäre es im Anfange rathsam, die Nenner auch als wirkliche Benennungen mit Buchstaben zu schreiben, also: Halbe oder $\frac{\ }{2}$, Drittel oder $\frac{\ }{3}$ u. s. w. Dieselbe Bemerkung gilt für die späteren Fälle.

2.) Das Zählen der Theile; Unterscheidung zwischen Zähler und Nenner. Z. B. $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ u. s. w.

3.) Das Zusammenfassen der Theile zum Ganzen. Z. B. $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{3}{3} = 1$ u. s. f.

4.) Das Theilen der Einheit mit Reduction auf einen Theil. Z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. f. — Auffassung der Stammbrüche.

a) Das Benennen der einfachen Theile. — «Das ist $\frac{1}{2}$; das ist $\frac{1}{3}$» u. s. f.

b) Das Erklären der Theile. — Schüler: «$\frac{1}{2}$ bekomme ich, wenn ich ein Ganzes in zwei gleiche Theile theile und einen Theil davon nehme; $\frac{1}{3}$ bekomme ich u. s. w.»

5.) Das Theilen der Einheit mit Reduction auf beliebig viele Theile. Z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ u. s. f.

a) Das Benennen und Zusammenfassen der Bruchstücke. Schüler: «Das sind Halbe!» — «Das sind Drittel!» u. s. f. — «Das ist ein Halbes!» — «Das sind zwei Halbe oder ein Ganzes!» — «Das ist ein Drittel!» — «Das sind zwei Drittel!» — «Das sind drei Drittel oder ein Ganzes!» u. s. w *b)* Das Entstehen derselben (der Bruchstücke). Z. B. «$\frac{2}{3}$ bekomme ich, wenn ich ein Ganzes in drei gleiche Theile theile und davon zwei behalte,» u. s. w.

c) Das Erklären der Ziffern.

α) Zunächst wird gelesen: «$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$ oder ein Ganzes; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$ oder ein Ganzes» &c.

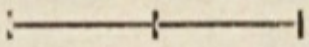
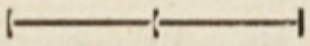
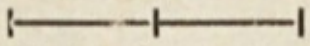
β) Dann wird eine Bruchzahl nach der anderen aufgelöst in Bruchstrich, Nenner und Zähler, z. B. «$\frac{1}{2}$!» Der Strich deutet an, daſs ein Ganzes getheilt wurde; der Nenner 2 sagt, daſs ein Ganzes in zwei gleiche Theile getheilt wurde; der Zähler gibt zu erkennen, daſs wir einen Theil davon behalten.

Zweite Stufe: Theilen ganzer Zahlen.

1.) Das Theilen ganzer Zahlen durch Zerstücken der einzelnen Einheiten. Z. B. 1 Ganzes = $\frac{2}{2}$, 2 Ganze = 2 mal $\frac{2}{2}$ = $\frac{4}{2}$ u. s. w.; 1 Ganzes = $\frac{3}{3}$, 2 Ganze = 2 mal $\frac{3}{3}$ = $\frac{6}{3}$ u. s. w. — Und umgekehrt: $\frac{4}{2}$ sind so viele Ganze, als $\frac{2}{2}$ in $\frac{4}{2}$ oder als 2 in 4 enthalten sind; $\frac{6}{2}$ sind so viele Ganze, als $\frac{2}{2}$ in $\frac{6}{2}$ enthalten sind, u. s. w.

2.) Das Theilen ganzer Zahlen mit nachfolgender Reduction auf einen Theil, z. B. «$\frac{1}{2}$ v. 7». — Jedes Ganze wird in zwei gleiche Theile getheilt und ein Theil davon behalten; im ganzen behält man $\frac{7}{2}$.

Bezüglich der Übungen 1. schreibt Hentschel (1—100): «Zur weiteren Übung des Einmaleins und gleichzeitig auch zur *Vorbereitung* für das spätere Rechnen mit Brüchen folgt nun das Verwandeln der Ganzen in *Halbe, Drittel, Viertel* bis *Zehntel*. Es wird dies für die Rechner dieser Stufe durchaus nicht zu schwer und auch nicht zu viel werden, wovon man sich leicht durch die Praxis selbst überzeugen kann.»

Basis.	Anschauung:	Nachher:
	1 *m* = 2 halbe *m*	1 Ganzes = $\frac{2}{2}$
	2 *m* = 4 halbe *m*	2 Ganze = $\frac{4}{2}$
	3 *m* = 6 halbe *m*	3 Ganze = $\frac{6}{2}$
	u. s. w.	u. s. w.

«Statt der Benennung Meter setzen wir auch andere, z. B. Hektoliter, Mark, Liter &c., um Abwechslung zu haben.»

«Das Vorstehende schließt sich unmittelbar dem Einmaleins mit der 2 an. In ganz ähnlicher Weise geschieht die Verwandlung der Ganzen in Drittel, Viertel ꝛc. im Anschluss an die 3, 4 ꝛc. Eine Erklärung für Bruch, Eintheilung in echte und unechte Brüche ꝛc. wird nicht gegeben. Das Verwandeln gemischter Zahlen in (unechte) Brüche bleibt vorläufig unberührt.»

Močnik hinwiederum bemerkt im Raum (1—100): «Der Lehrer kann schon hier die Schüler mit den Ausdrücken ‚Bruch, Zähler, Nenner‘ bekannt machen; er kann dies aber auch bei einem späteren Cursus über die Brüche thun.»

Das Verwandeln der unechten Brüche in Ganze nimmt Hentschel im Raum 1—100 beim Messen vor.

Zuerst:	Nachher:
$\frac{2}{2}\,m = 1\,m$	$\frac{2}{2} = 1$ Ganzes
$\frac{4}{2}\,m = 2\,m$	$\frac{4}{2} = 2$ Ganze
$\frac{6}{2}\,m = 3\,m$	$\frac{6}{2} = 3$ Ganze
u. s. w.	u. s. w.

Diese Übungen sind Umkehrungen der vorangehenden, und es ist leicht zu ersehen, wie sie analog den obigen fortzusetzen sind.

Hentschel bemerkt dazu: «Nur solche unechte Brüche, die volle Ganze (nicht gemischte Zahlen) geben, werden gewählt.» Im Raume 1—1000 beim Addieren bemerkt er: «Wir nehmen die Verwandlungen (aus § 56, 4 und § 67) hier wieder vor und bereiten auf dieser Stufe die spätere Bruchrechnung dadurch vor, dass wir die Schüler durch fortgesetzte Übung größere Sicherheit und Festigkeit in obigen Stücken erreichen lassen.» Und beim Subtrahieren (1—1000) schreibt er: «Wir gehen in der Vorbereitung zur Bruchrechnung hier einen Schritt weiter und verwandeln zunächst gemischte Zahlen (ohne diesen Namen zu lehren) in Brüche, immer noch hiebei im Zahlenraum 1—100, ja meistens noch im Bereiche des kleinen Einmaleins verbleibend.» Z. B. $6\frac{2}{3} = \cdot$ Drittel? — 1 Ganzes $= \frac{3}{3}$, 6 Ganze $= 6$ mal $\frac{3}{3} = \frac{18}{3}$, dazu noch 2 Drittel, gibt $\frac{20}{3}$.

Beim Multiplicieren nimmt er das Gleiche, aber nur an größeren Zahlen vor. Z. B. Wie viel Fünftel sind $72\frac{2}{5}$? — Richte ein: $66\frac{2}{3}$ u. s. w.

Beim Messen (aber auch schon beim Subtrahieren) werden unechte Brüche in Ganze und Halbe verwandelt. Z. B.: $\frac{257}{8} = 32\frac{1}{8}$.

Wann soll man mit der Bruchrechnung anfangen?

§ 74. Diese Frage hat ihre Lösung wohl noch nicht gefunden. Die diesbezüglichen Anschauungen der Pädagogen weichen bedeutend voneinander ab. Močnik behandelt gemäß der österreichischen Lehrpläne die Elemente des Bruchrechnens im Raume 1—100. Dasselbe thun Lüdemann, Saatzer &c. Saatzer bemerkt unter anderem: «Das Vervielfältigen und Messen in Brüchen könnte man höchstens in nicht überfüllten Classen versuchen.» Bei Močnik kommen z. B. Übungen vor wie: $\frac{5}{2}$ in $12\frac{1}{2}$ und beim angewandten Rechnen: $2\frac{1}{2}$ kr. in $37\frac{1}{2}$ kr., wogegen sich Saatzer äußert. Hentschel führt wohl schon im Raume 1—100 die Brüche ein, er verweilt aber bei der Auffassung der Brüche (die Verwandlungen ganzer Zahlen in unechte Brüche und umgekehrt dazu gerechnet) an der ganzen Mittelstufe, um an der Oberstufe mit dem eigentlichen Bruchrechnen anzufangen.

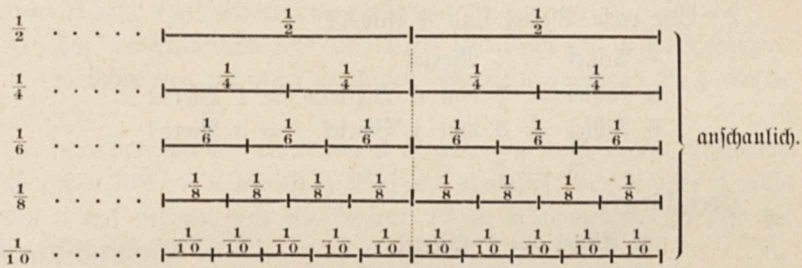
Salberg, der die allseitige Behandlung der Zahl auf die äußerste Spitze treibt, verlegt die Bruchrechnung sogar in den untersten Zahlenraum. Er schreibt: «Ist aber die möglichst baldige Kenntnis der Decimalbruchrechnung durch Einführung der metrischen Maße und Gewichte geboten und setzt sie die Kenntnis der gemeinen Brüche voraus, so gewinnen wir dadurch einen neuen Grund, die Bruchrechnung in die Elementarclasse zu verlegen.» Erkundigt man sich bei den Lehrern verschiedener Orte und verschiedener Länder, wie die gemeine Bruchrechnung im Raume 1—100 bewältigt wird, so bekommt man in der Regel die Antwort, dass es wohl schwer sei, den Forderungen der Lehrpläne zu genügen. Und muss man denn wirklich die Kinder mit der Bruchrechnung und auch mit den Decimalbrüchen so früh vertraut machen? Wenn an der Mittelstufe die Elemente des Bruchrechnens und das Rechnen mit Decimalbrüchen den Kindern beigebracht wurde, haben wir gewiss auch der Praxis Genüge gethan. Hentschels Vorsicht, die Kinder zuerst mit dem Wesen der Brüche vertraut zu machen, den Begriff Bruch verdauen zu lassen, ist gewiss sehr zu empfehlen. Dann ist das Rechnen mit gemeinen Brüchen als ein Rechnen mit benannten Zahlen für die Kinder eine Spielerei. Einer der größten Fehler, die man im Rechnen begehen kann, ist die Überladung.

Resolvieren und Reducieren.

(Auf Grundlage der Anschauung und des Schlusses.)

Resolvieren.

§ 75. Resolvieren der Halben.



Schluss: 1 Halbes = der Hälfte von 4 Vierteln = 2 Viertel
2 Halbe = 4 Viertel

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Ähnlich verfährt man bei der Verwandlung der Halben in Sechstel, Achtel, Zehntel.

An das Resolvieren der Halben schließt sich das Resolvieren der Drittel, Viertel, Fünftel 2c. Das Verfahren ist aus dem Vorangegangenen ersichtlich. Ein Beispiel möge noch bezüglich des Schlusses angeführt werden. $\frac{3}{4}$ = · Achtel?

4 Viertel = 8 Achtel
1 Viertel = $\frac{1}{4}$ von 8 Achteln = 2 Achtel
3 Viertel = 3 mal 2 Achtel = 6 Achtel

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

Durch die Veranschaulichung prägt man sich bei den einfachen Brüchen in der Regel ein, wie viel ein Bruchtheil in kleineren Bruchtheilen gilt. Weiß man z. B., dass $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ ist, dann macht man obigen Schluss noch einfacher:

1 Viertel = 2 Achtel
3 Viertel = 3 mal 2 Achtel = 6 Achtel

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

Reducieren.

§ 76. Wird auf Grund der Anschauung und durch Schlüsse behandelt. Vergl. das Resolvieren. Z. B.:

1.) Wie viele Halbe sind $\frac{2}{4}$?

4 Viertel = 2 Halbe

2 Viertel = $\frac{1}{2}$ v. 2 Halben = 1 Halbe

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2.) Wie viele Viertel sind 6 Achtel?

8 Achtel = 4 Viertel

2 Achtel = $\frac{1}{4}$ von 4 Vierteln = 1 Viertel

6 Achtel = 3 mal 1 Viertel = 3 Viertel

$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Oder kürzer:

2 Achtel = 1 Viertel

6 Achtel = 3 mal 1 Viertel = 3 Viertel

$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Močnik behandelt das Resolvieren und Reducieren einfacher Brüche im Raum 1—100, was nach den früheren Bemerkungen verfrüht wäre. Hentschel verlegt dies auf die fünfte Stufe.

Durch das Resolvieren und Reducieren machen die Schüler einen bedeutend intensiveren Einblick in das Wesen der Brüche. Die Begriffe Zähler und Nenner kann man dabei schwerlich umgehen.

Vergleichung des Wertes der Brüche.

§ 77. Dabei werden zwei Fälle unterschieden: 1.) Die Form des Bruches wird verändert, der Wert desselben bleibt unverändert; 2.) der Wert des Bruches wird verändert.

I. Die Form des Bruches wird verändert, der Wert nicht.

1. Erweitern der Brüche.

§ 78. Aus dem Resolvieren, welches man an mehreren Beispielen anschaulich und durch Schluſs vornimmt, z. B.:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2 \text{ mal } 1}{2 \text{ mal } 2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{3 \text{ mal } 2}{3 \text{ mal } 3}$$

u. s. f. noch mehrere Beispiele,

erkennt man den Satz:

Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert.

Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multiplicieren heißt den Bruch erweitern, und die Zahl, mit der man multipliciert, heißt die Erweiterungszahl.

Für das Erweitern sind zwei Arten von Übungen zu unterscheiden:

a) Erweitern mit einer gegebenen Erweiterungszahl, z. B. $\frac{3}{4}$ mit 5; $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$;

b) Erweitern auf einen neuen Nenner, in welchem der ursprüngliche ohne Rest enthalten ist, z. B. $\frac{3}{4}$ auf Zwölftel; den Nenner 4 muſs man 3 mal nehmen, um den Nenner 12 zu bekommen; 3 ist also die Erweiterungszahl.

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ (vergl. Resolvieren).

2. Abkürzen der Brüche.

§ 79. Wird wie das Erweitern behandelt, z. B.:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{2 \text{ durch } 2}{4 \text{ durch } 2} \text{ u. s. w.}$$

und man gelangt zum Satze:

Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

Dies ist nur möglich, wenn die Zahl im Zähler und Nenner ohne Rest enthalten ist.

Ein Bruch, der sich nicht mehr abkürzen läſst, ist auf die einfachste Form gebracht.

3. Gleichnamigmachen der Brüche.

§ 80 Dieses besteht im Erweitern gegebener Brüche auf Brüche mit einem Nenner, in dem jeder Nenner ohne Rest enthalten ist. Die Hauptaufgabe dabei ist das Auffinden des neuen Nenners. Dabei unterscheidet man: a) Es sind zwei Brüche gleichnamig zu machen, b) es sind mehrere Brüche gleichnamig zu machen.

Auf der vorbereitenden Stufe sind die Nenner jedenfalls kleinere Zahlen.

Als Vorstufe zu dieser dienen wieder Aufgaben, wie:

α) Bringe die Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$ auf den Nenner 12 — und andere solche, wobei auch mehrere Brüche gegeben werden.

β) Welches ist die kleinste Zahl, in der 3 und 6, 3 und 4, 4 und 6 ohne Rest enthalten sind? Die drei Beispiele geben zugleich wieder drei Abstufungen an, nach denen man noch mehrere Beispiele vornimmt. Ähnliche Übungen werden auch für mehr als zwei Zahlen vorgenommen.

Nachdem die beiden Vorübungen den Schülern geläufig sind, übergeht man zu den drei Fällen für das Gleichnamigmachen der Brüche, welche hier durch Beispiele angedeutet sind.

1.) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$; 2.) $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$; 3.) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$.

Wie die Brüche auf den aufgefundenen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu erweitern sind, ergibt sich aus dem Vorangehenden.

Nach der gehörigen Einübung dieser drei Fälle an zwei Beispielen übergeht man zu Aufgaben mit mehreren Brüchen, wobei jedoch dieselbe Stufenfolge zu berücksichtigen ist.

So weit geht man auf der vorbereitenden Stufe. Auf der Oberstufe, auf welcher die Bruchlehre vollständig behandelt wird, geht man weiter. Um größere Brüche gleichnamig machen zu können, muſs man früher die Schüler mit der Lehre vom Maß, Vielfachen, größten gemeinschaftlichen Maß, kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen, überhaupt mit der sogenannten Zahlenlehre bekannt machen. (Vergl. § 85, 86.)

Das Gleichnamigmachen der Brüche in den Raum 1—100 verlegen, wie man dies bei Močnik findet, z. B.: $89\frac{2}{3} - 8\frac{5}{6}$, $19\frac{4}{5} + 8\frac{1}{2}$, $40\frac{1}{2} - 18\frac{3}{5}$, wäre entschieden verfrüht.

II. Der Wert des Bruches wird durch Veränderung der Form verändert.

1. Vergleichung der Brüche mit gleichem Nenner.

§ 81. Es sollen folgende Reihen in horizontaler Richtung zur Anschauung gebracht werden:

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$ u. s. f.

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{3}$ u. s. f.

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{12}{4}$ u. s. f.

u. s. f.

Daraus gewinnt man den Satz:

Der Wert eines Bruches wird größer, wenn der Zähler bei unverändertem Nenner wächst.

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ u. s. f. ist gleich 1. Alle Brüche, deren Zähler kleiner ist als der Nenner, sind kleiner als 1, und deren Zähler größer ist als der Nenner, größer als 1. Erstere nennt man **echte**, letztere **unechte** Brüche.

Unechte Brüche können in ganze oder gemischte Zahlen verwandelt werden. Durchs Verwandeln ganzer oder gemischter Zahlen (durchs Einrichten) bekommt man unechte Brüche Aus obigen horizontalen Reihen erkennt man an den durch den Druck hervorgehobenen Brüchen den Satz:

Ein Bruch wird 2, 3, 4 mal u. s. f. größer, wenn der Zähler 2, 3, 4 mal u. s. f. größer wird, oder:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Zähler damit multipliciert und den Nenner unverändert läßt.

Auf ähnliche Art erkennt man den Satz: Ein Bruch wird 2, 3, 4 mal u. s. f. kleiner, wenn der Zähler 2, 3, 4 mal u. s. f. kleiner wird, oder:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Zähler dadurch dividiert und den Nenner unverändert läßt.

Die obigen Veranschaulichungen kann man auch durch Schlüsse unterstützen. Z. B. 2 mal $\frac{3}{4} = ?$ 2 mal 3 Viertel = 6 Viertel, $2 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$. $\frac{8}{9} : 4 = ?$ Der vierte Theil von 8 Neunteln ist gleich 2 Neuntel. $\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}$.

Dabei faßt man die Brüche als benannte Zahlen auf.

2. Vergleichung der Brüche mit ungleichem Nenner,

α) aber gleichem Zähler.

§ 82. Anschaulich an Reihen, wie:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. f.
$\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$ u. s. f.
$\frac{3}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ u. s. f.
u. s. f.

Daraus gewinnt man den Satz:

Der Wert eines Bruches wird kleiner, wenn bei unverändertem Zähler der Nenner größer wird.

Daran schließt man Reihen, wie:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ u. s. f.	$\frac{2}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{8}$ u. s. f.	$\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ u. s. f.
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$ u. s. f.	$\frac{2}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{9}$ u. s. f.	$\frac{3}{3}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{9}$ u. s. f.
$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ u. s. f.	$\frac{2}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{12}$ u. s. f.	$\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{12}$ u. s. f.
u. s. f.	u. s. f.	u. s. f.

Alles auf Grundlage der Anschauung. Daraus gewinnt man den Satz:

Der Wert eines Bruches wird 2, 3, 4 mal u. s. w. kleiner, wenn bei unverändertem Zähler der Nenner 2, 3, 4 mal u. s. f. größer wird, oder:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Nenner damit multipliciert und den Zähler unverändert läßt.

Und auf umgekehrtem, jedoch ähnlichem Wege bekommt man den Satz:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Nenner dadurch dividiert und den Zähler unverändert läßt.

β) Mit ungleichem Zähler.

Solche Brüche kann man dem Werte nach nur vergleichen, wenn man sie gleichnamig macht. Für einfache Fälle vergl. § 80. Für Brüche mit größeren Zahlen muss die Zahlenlehre vorangeschickt werden, damit man sie in gleichnamige Brüche verwandeln kann. Dies wird weiter unten besprochen.

Übersicht über den Stoff der vorbereitenden Stufe.

§ 83. Aus allem im Vorangehenden über die Brüche Gesagten folgt, dass man auf die allgemeine Behandlung derselben die Schüler früher durch verschiedenartige Übungen vorbereiten soll. Diese Übungen sollen hier noch übersichtlich angeführt werden.

1.) Auffassung der Brüche, wobei die Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in Brüche und umgekehrt mit inbegriffen ist.

2.) Resolvieren und Reducieren einfacher Brüche.

3.) Vergleichung des Wertes einfacher Brüche: Erweitern, Abkürzen, Gleichnamigmachen, Multiplicieren und Dividieren der Brüche mit ganzen Zahlen.

Wie dieser Stoff auf die einzelnen Zahlenräume zu vertheilen ist, darüber sind die Pädagogen noch heute nicht einig. Es möge hier nur betont werden, dass auch bei den Brüchen das Neue erst anzuschließen ist, nachdem das Frühere von den Schülern verdaut wurde.

Will man nach der Behandlung des unbegrenzten Zahlenraumes auf der Mittelstufe noch die Decimalbrüche behandeln, so sind obige Partien auf die Räume 1—1000, unbegrenzter Zahlenraum, oder wie einige es thun, auf die Räume 1—100, 1—1000, unbegrenzter Zahlenraum zu vertheilen.

Die vier Operationen mit einfachen Brüchen.

§ 84. Auf der vorbereitenden Stufe sind aber auch die vier Operationen mit einfachen Brüchen vorzunehmen. Diesbezüglich lassen sich folgende Abstufungen unterscheiden:

Erste Stufe. Diese führt die Bruchrechnung auf das Rechnen mit gleichnamigen Zahlen zurück. Dazu gehört die Addition, Subtraction, das Messen gleichnamiger Brüche, die Multiplication und das Theilen der Brüche, wobei der Nenner unverändert bleibt. Beispiele:

1.) $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = 1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$.
2.) $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} = 7\frac{3}{3} = 8$.
3.) $\frac{11}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
4.) $6\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = 5\frac{2}{4} = 5\frac{1}{2}$.
5.) $8\frac{3}{5} - 2\frac{4}{5} = 5\frac{4}{5}$; 8 weniger 2 = 6, davon 1 Ganzes in $\frac{5}{5}$, $\frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$, $\frac{8}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$.
6.) $\frac{4}{5} : \frac{2}{5} = 2$.
7.) $\frac{3}{10} \times 2 = \frac{6}{10}$.
8.) $\frac{4}{9} : 2 = \frac{2}{9}$.

Das Verfahren ergibt sich von selbst.

Zweite Stufe. Diese führt die Bruchrechnung auf das Rechnen mit ungleichnamigen Zahlen zurück. Es kommt also zu dem Früheren noch die Addition, Subtraction und das Messen ungleichnamiger Brüche. Beispiele:

1.) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = $
$= \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$.
2.) $8\frac{5}{6} - 2\frac{3}{4} = 8\frac{10}{12} - 2\frac{9}{12} = $
$= 6\frac{1}{12}$.
3.) $\frac{18}{5} : \frac{9}{10} = \frac{36}{10} : \frac{9}{10} = 4$.

Auch dieses Verfahren ergibt sich leicht aus dem Früheren.

Dritte Stufe. Multiplication und Division der Brüche bei unverändertem Zähler. — Wird von den Pädagogen in der Regel auf die Oberstufe gewiesen.

Für die Oberstufe bleibt dann noch neben der Zahlenlehre: 1.) die Erweiterung obiger Fälle auf alle gemeinen Brüche; 2.) Multiplication und Division durch einen Bruch.

II. Die Bruchlehre überhaupt.

Die Zahlenlehre.

Maß und Vielfaches.

§ 85. 1 ist in jeder ganzen Zahl ohne Rest enthalten, es ist ein Maß jeder ganzen Zahl.

2 ist in 2, 4, 6, 8, 10, 12 u. s. f. ohne Rest enthalten, es ist ein Maß jeder geraden Zahl.

3 ist ein Maß von 3, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $4 \times 3 = 12$ u. s. f.
4 ist ein Maß von 4, $2 \times 4 = 8$, $3 \times 4 = 12$ u. s. f.
5 ist ein Maß von 5, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 5 = 15$ u. s. f.
u. s. f.

Jede Zahl ist ein Maß von sich selbst und von jedem Vielfachen derselben. — Daran schließen sich Übungen:

1.) Nenne Vielfache der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 u. s. f.

2.) Nenne Zahlen, von denen 2, 3, 4, 5, 6 u. s. f. ein Maß ist.

3.) Untersuche, ob 324 ein Maß ist von 2592, 7824, 38880, 32758 u. s. f. — Noch mehrere solche Beispiele.

4.) Untersuche, ob 9002 ein Vielfaches von 643, 725 ist. — Noch mehrere solche Beispiele.

Absolute Primzahlen; zusammengesetzte Zahlen.

Wenn eine Zahl ein Maß ist von einer anderen, so sagen wir: die andere ist durch die erste theilbar. 12 ist durch 6 theilbar; durch welche Zahlen noch? Durch welche Zahlen ist 16, 18, 21 u. s. f. theilbar.

4 ist durch 2 theilbar, aber auch die Vielfachen 8, 12, 16 u. s. f. — Noch mehrere ähnliche Beispiele. — Daraus gewinnt man den Satz:

Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so ist auch jedes Vielfache derselben durch diese Zahl theilbar.

Größtes gemeinschaftliches Maß, kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

§ 86. 2 ist ein Maß von 2, 8, 12; es ist ein gemeinschaftliches Maß dieser Zahlen.

3 ist ein Maß von 9, 18, 36, 42; es ist ein gemeinschaftliches Maß dieser Zahlen u. s. f.

Die größte Zahl, die ein gemeinschaftliches Maß mehrerer gegebener Zahlen ist, heißt das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen.

Übungen: 1.) Gib ein gemeinschaftliches Maß der Zahlen a) 8, 12; b) 16, 24, 32 u. s. f. an. — Welches ist das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen?

Zahlen, welche kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen relative Primzahlen. Z. B. 3 und 4; 6, 7 und 35 u. s. f.

Übungen: 1.) Gib Paare relativer Primzahlen an. 2.) Welche von den Zahlen a) 8, 5, b) 6, 9, 12, c) 8, 14, 21 u. s. f. sind relativ prim?

12 ist ein Vielfaches von 2, 4, 6; es ist ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen. Ein gemeinschaftliches Vielfaches dieser Zahlen ist auch 24, 36 u. s. f. — Noch mehrere solche Beispiele.

Die kleinste Zahl, welche noch ein Vielfaches jeder gegebenen Zahl ist, heißt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen.

Übungen: 1.) Gib an gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen a) 3 und 4; 7 und 5; 6, 5 und 7 u. s. f.; b) 3 und 6; 5, 10 und 20 u. s. f.; c) 6 und 8; 6, 8 und 10. — Welches ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen in der ersten Übung?

Das größte gemeinschaftliche Maß und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache kann man jedoch nicht immer einfach im Kopfe bestimmen. Schriftlich erreicht man dies durch Zerlegung in Primfactoren, d. h. in Factoren, die Primzahlen sind, und nach anderen Methoden. Um die Primfactoren bequem bestimmen zu können, muss man auch rasch erkennen, wann eine einziffrige Zahl in einer mehrziffrigen Zahl ohne Rest enthalten ist, oder mit anderen Worten, wann die zweite durch die erste theilbar ist.

Kennzeichen der Theilbarkeit.

§ 87. Theilbarkeit durch 2. Die Zahl 426 lässt sich in 420 und 6 zerlegen. Die Zahl 10 ist durch 2 theilbar, daher auch ihr Vielfaches 420; da nun auch die Zahl 6 durch 2 theilbar ist, so ist auch die ganze Zahl 426 durch 2 theilbar. — Aus mehreren ähnlichen Beispielen erkennt man, dass eine Zahl durch 2 theilbar ist, wenn an der Stelle der Einer 0, 2, 4, 6, 8 steht.

Theilbarkeit durch 5, 10. Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn an der Stelle der Einer 0 oder 5, durch 10, wenn an der Stelle der Einer 0 steht. — Erkennt man wie oben die Theilbarkeit durch 2.

Theilbarkeit durch 4. 7528 läſst sich zerlegen in 7500 = = 75 × 100 und 28. Die Zahl 100 ist durch 4 theilbar, daher auch ihr Vielfaches 7500; wenn also nur die Zahl aus den Einern und Zehnern durch 4 theilbar ist, so ist auch die ganze Zahl durch 4 theilbar. — Aus diesem und mehreren ähnlichen Beispielen erkennt man:

Eine Zahl ist durch 4 theilbar, wenn die Zahl aus den zwei niedrigsten Stellen durch 4 theilbar ist.

Theilbarkeit durch 8. Eine Zahl ist durch 8 theilbar, wenn die Zahl aus den drei niedrigsten Stellen durch 8 theilbar ist. — Jede Zahl läſst sich nämlich in ein Vielfaches von 1000, das durch 8 theilbar ist, und in eine Zahl aus Hundertern, Zehnern und Einern zerlegen.

Theilbarkeit durch 3 und durch 9. Durch 3 (durch 9) ist eine Zahl theilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 (durch 9) theilbar ist. Jede Zahl ist nämlich ein Vielfaches von 9, also auch von 3, vermehrt um die Ziffernsumme dieser Zahl. Die Zahl 6723 z. B. ist gleich:

$$(6 \times 1000) + (7 \times 100) + (2 \times 10) + 3 \text{ oder } (6 \times 999) + 6 + \\ + (7 \times 99) + 7 + (2 \times 9) + 2 + 3 \text{ oder } (6 \times 999) + (7 \times 99) + \\ + (2 \times 9) + (6 + 7 + 2 + 3).$$

Den ersten Theil erkennt man leicht als ein Vielfaches von 9, er ist also jedenfalls durch 3, respect. durch 9, theilbar; wenn also nur der zweite Theil, d. i. die Summe der einzelnen Zahlen, durch 3, respect. durch 9, theilbar ist, so ist die ganze Zahl durch 3, respect. 9, theilbar.

Durch 6 sind alle Zahlen theilbar, die durch 2 und 3 theilbar sind.

Denn die kleinste durch 2 und durch 3 theilbare Zahl ist $2 \times 3 = 6$; jede größere, ebenso theilbare Zahl muſs also auch ein Vielfaches von 6, mithin durch 6 theilbar sein.

Zerlegung der Zahlen in Primfactoren.

§ 88. Die Zahl 6 ist gleich 2×3; 2 und 3 sind Primfactoren der Zahl 6. Wie man gleich sieht, findet man den zweiten Primfactor, wenn man die Zahl 6 durch den ersten dividirt. Die Zahl $12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$. — Den Factor 6, der ein zusammengesetzter Factor ist, bekommt man, wenn man 12 durch den Primfactor 2 dividirt. Wie man wieder 6 in Primfactoren zerlegt, folgt aus dem Gesagten. — An mehreren solchen einfachen Beispielen, die auch als Übungsbeispiele mit den Schülern vorgenommen werden, erkennt man die Regel für die Zerlegung der Zahlen in Primfactoren.

Eine Zahl wird in Primfactoren zerlegt, wenn man sie durch die kleinste Primzahl, die in ihr ohne Rest enthalten ist, dividiert, den erhaltenen Quotienten auf die gleiche Art behandelt u. s. f. Z. B.:

Zerlege die Zahl 420 in Primfactoren:

$$\begin{array}{rcr} 420 : 2 &=& 210 \\ 210 : 2 &=& 105 \\ 105 : 3 &=& 35 \\ 35 : 5 &=& 7 \end{array} \qquad \text{oder:} \qquad \begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \qquad 420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Übungen.

Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen durch Zerlegung in Primfactoren.

§ 89. Aus obigem Beispiele und anderen erkennt man:

Jeder Factor der in Primfactoren zerlegten Zahl ist ein Maß derselben; ebenso ist ein Maß der Zahl das Product zweier oder mehrerer oder aller Primfactoren. Ein Factor aber, der in der Zahl nicht vorkommt, ist kein Maß derselben. Im obigen Beispiele sind 2, 3, 5, 7, 4, 6, 12 .... Maße der Zahl 420, 11 jedoch nicht.

Hat man also das größte gemeinschaftliche Maß mehrerer Zahlen zu bestimmen, so braucht man nur die gemeinschaftlichen Primfactoren dieser Zahlen miteinander zu multiplicieren. Z. B.:

a) $21 = 3 \times 7$, $35 = 5 \times 7$; 7 ist das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 21 und 35.

Oder: b) $30 = 2 \times 3 \times 5$

$$\begin{array}{r} 140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \\ 330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \\ \hline \end{array}$$

das größte gemeinschaftliche Maß $= 2 \times 5 = 10$.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache muss durch jede Zahl, also durch jeden Factor jeder Zahl theilbar sein, oder mit anderen Worten, es muss alle Factoren aller Zahlen enthalten. Kommt ein Factor in einer Zahl schon vor, so braucht er aus der nächsten Zahl für das kleinste gemeinschaftliche Vielfache nicht mehr genommen zu werden.

Nach obigem Beispiele a) muss man die Factoren der ersten Zahl in das kleinste gemeinschaftliche Vielfache jedenfalls aufnehmen, von den Factoren der zweiten Zahl aber nur den Factor 5, weil 7 schon in der ersten Zahl vorkommt. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 21 und 35 ist also: $3 \times 7 \times 5 = 105$.

Aus diesem und ähnlichen Beispielen erkennt man:

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen findet man auch, wenn man eine Zahl durch das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen dividiert und mit dem erhaltenen Quotienten die andere Zahl multipliciert.

Also für die Zahlen 21 und 35: $21 : 7 = 3$, $3 \times 35 = 105$.

Leicht erkennt man, dass für das Beispiel b) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 11 = 4620$ ist.

Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes nach der Divisionsmethode.

§ 90. Vorübungen: 1.) Bestimme das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen:

a) 3 und 6, b) 9 und 18, c) 12 und 36 u. s. w.

Wenn also eine Zahl in der andern ohne Rest enthalten ist, so ist sie das größte gemeinschaftliche Maß beider.

2.) Bestimme im Kopfe das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen:

a) 6, 9; b) 9, 15; c) 25, 15 u. s. f.

Das größte gemeinschaftliche Maß der Zahl 6 und 9 ist 3, der Zahlen 9 und 15 auch 3, und der Zahlen 25 und 15 die Zahl 5.

Dividieren wir nun die größere Zahl durch die kleinere:

$9 : 6 = 1$,	$15 : 9 = 1$,	$25 : 15 = 1$
3 Rest	6 Rest	10 Rest

Wir sehen, daſs das größte gemeinschaftliche Maß der gegebenen Zahlen auch noch im Rest sich befindet. Dividieren wir nun den Divisor durch den Rest, um zu sehen, ob nicht der Rest dieses das größte gemeinschaftliche Maß ist:

$$6 : 3 = 2, \quad 9 : 6 = 1, \quad 15 : 10 = 1$$

3 Rest   5 Rest.

Im ersten Beispiele ist dies wirklich der Fall. Dividieren wir bei den beiden anderen wieder die letzten Divisoren durch die letzten Reste, um zu sehen, ob nicht diese Reste das größte gemeinschaftliche Maß sind:

$$6 : 3 = 2, \quad 10 : 5 = 2;$$

und sie sind es wirklich.

Aus diesen und ähnlichen Beispielen erkennt man, wie man das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen überhaupt findet.

Man dividiert die größere Zahl durch die kleinere. Ist letztere in der ersten ohne Rest enthalten, so ist sie das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen. Bleibt ein Rest, so dividiert man den Divisor durch denselben, und bleibt noch ein Rest, den letzten Divisor durch diesen u. s. f. Der letzte Rest, respective der letzte Divisor, ist das größte gemeinschaftliche Maß beider Zahlen. Z. B.: Suche das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 1296 und 360.

1296 : 360 = 3
216
360 : 216 = 1
144
216 : 144 = 1
72
144 : 72 = 2

oder:

1296	360	3
216	144	1
72	0	1
		2

72 ist das größte gemeinschaftliche Maß.

Ist der letzte Divisor gleich 1, so haben die Zahlen kein gemeinschaftliches Maß. — Übungen.

Hat man das größte gemeinschaftliche Maß zwischen drei Zahlen zu suchen, so sucht man zuerst das größte gemeinschaftliche Maß zwischen den beiden ersten Zahlen. Ist nun dieses in der dritten Zahl ohne Rest enthalten, so ist es das größte gemeinschaftliche Maß aller drei Zahlen. Ist es nicht ohne Rest enthalten, so sucht man zwischen ihm und der dritten Zahl auf obige Weise das größte gemeinschaftliche Maß, welches dann das größte gemeinschaftliche Maß aller drei Zahlen ist. — Wie man zwischen mehr als drei Zahlen das größte Maß sucht, ergibt sich aus dem Gesagten. — Übungen.

Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

§ 91. Suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von:

1. a) 3 und 6; 7 und 21; 4 und 32 u. s. f.
   b) 3, 6, 12; 7, 14, 28, 56 u. s. f.

Ist eine der gegebenen Zahlen durch jede der übrigen theilbar, so ist sie das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller dieser Zahlen. — Eignet sich insbesondere fürs Kopfrechnen.

2. a) 3 und 4; 5 und 8; 9 und 10 u. s. f.
   b) 3, 4, 5; 7, 9, 10 u. s. f.

Hat keine der gegebenen Zahlen mit einer der übrigen ein gemeinschaftliches Maß, so ist das Product aller dieser Zahlen ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache. — Eignet sich fürs Kopfrechnen.

3. 3, 5, 6; 3, 5, 9, 10; 2, 3, 11, 22; 3, 4, 5, 8 u. s. f.

Eine Zahl, die in einer der übrigen Zahlen ohne Rest enthalten ist, kann bei der Bestimmung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen außeracht gelassen werden. — Eignet sich fürs Kopfrechnen.

4. a) 4 und 6; 8 und 12; 9 und 15 u. s. f. — In diesem Falle haben die gegebenen Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, und das Verfahren ergibt sich aus § 80. Dieses Verfahren ist zunächst fürs Kopfrechen sehr geeignet. Aber auch fürs schriftliche ist es nicht bloß zu empfehlen, sondern manchesmal auch nothwendig. Z. B.: Suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 713, 1457.

1457	713	2
31	93	23

713 : 31 = 23

$$\begin{array}{r} 1457 \times 23 \\ \hline 2914 \\ 4371 \\ \hline \end{array}$$

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache = 33511

Man findet aber auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier solcher Zahlen, wenn man jede durch das größte gemeinschaftliche Maß dividiert und die erhaltenen Quotienten miteinander und mit dem gemeinschaftlichen Maß multipliciert. Also für die Zahlen 4 und 6:

$$4 : 2 = 2, \qquad 6 : 2 = 3 \qquad 2 \times 3 \times 2 = 12.$$

Dieses Verfahren eignet sich insbesondere fürs schriftliche.

b) 4, 6, 8; 6, 8, 10; 4, 6, 10, 14 u. s. f. — Schriftliches Verfahren:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 10 & 14 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & \\ \hline \end{array}$$

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $= 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 = 420.$

5.) 2, 3, 5, 6, 8, 20, 21. — Das Verfahren ergibt sich aus den früheren Fällen. Jede Zahl, die in einer andern ohne Rest enthalten ist, wird außeracht gelassen (gestrichen). Die gemeinschaftlichen Maße zweier oder mehrerer Zahlen, welche in der Regel Primzahlen sein sollen, werden herausgehoben und die betreffenden Zahlen dadurch dividiert u. s. f., wie aus dem durchgeführten Beispiele leicht zu erkennen ist. — In diesem Falle eignet sich besser das schriftliche Rechnen.

$$\begin{array}{ccccccc|c} \cancel{2}, & \cancel{3}, & \cancel{5}, & 6, & 8, & 20, & 21 & 2 \\ & & & \cancel{3}, & 4, & 10, & 21 & 2 \\ & & & & 2, & 5, & 21 & \\ \hline \end{array}$$

das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $= 2 \times 5 \times 21 \times 2 \times 2 = 840.$

Übungen.

§ 92. Die Bruchrechnung auf der vorbereitenden Stufe ist größtentheils Kopfrechnung. Das meiste jedoch, was man dort über das Bruchrechnen gesagt hat, läßst sich auch auf dieser Stufe verwerten, und es sind fürs schriftliche Rechnen nur noch wenige Bemerkungen zu dem Früheren hinzuzufügen.

Verwandlung unechter Brüche in ganze oder gemischte Zahlen und umgekehrt.

§ 93. Verwandle $\frac{43}{9}$ in eine gemischte Zahl.

Mündlich: 1 Ganzes hat $\frac{9}{9}$, so oft $\frac{9}{9}$ in $\frac{43}{9}$ oder 9 in 43 enthalten ist, so viele Ganze bekommt man. 9 ist in 43 4 mal enthalten; $\frac{7}{9}$ bleiben übrig. $\frac{43}{9} = 4\frac{7}{9}$.

Aus diesem und mehreren anderen Beispielen ergibt sich das schriftliche Verfahren, wobei nur der Zähler durch den Nenner zu dividieren ist.

$$\tfrac{43}{9} = 43 : 9 = 4\tfrac{7}{9}.$$

Verwandle $6\frac{3}{4}$ in einen unechten Bruch.

Mündlich: 1 Ganzes hat 4 Viertel, 6 Ganze sind also 6 mal 4 Viertel = 24 Viertel, und $\frac{3}{4}$ dazu sind 27 Viertel; folglich $6\frac{3}{4} = \frac{27}{4}$.

Schriftlich: Aus dem vorangehenden Beispiele und mehreren andern ergibt sich, dass man eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner multipliciert, dazu den Zähler addiert und das Erhaltene als den neuen Zähler nimmt; der Nenner bleibt unverändert.

Verwandle $46\frac{11}{12}$ in einen unechten Bruch.

$$\begin{array}{r} 46 \times 12 \\ 92 \\ \hline 552 \\ +\ 11 \\ \hline 563 \end{array} \qquad 46\tfrac{11}{12} = \tfrac{563}{12}$$

Übungen.

Erweitern der Brüche.

§ 94. Ergibt sich aus dem Vorangehenden. — Übungen.

Abkürzen der Brüche.

§ 95. Ergibt sich auch aus dem Vorangehenden. Höchstens wäre noch zu bemerken, dass ein Bruch gleich auf die einfachste Form gebracht wird, wenn man Zähler und Nenner durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß dividiert. Zeitweise ist dieses Verfahren sogar nothwendig. Z. B.: Kürze den Bruch $\frac{713}{1457}$ ab.

$$\begin{array}{r|r|l} 1457 & 713 & 2 \\ \mathbf{31} & 93 & 23 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 713 : 31 = 23 \\ 93 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1457 : 31 = 47 \\ 217 \end{array} \qquad \tfrac{713}{1457} = \tfrac{23}{47}$$

Übungen.

Gleichnamigmachen der Brüche.

§ 96. Zuerst wiederhole man das, was man an der vorbereitenden Stufe durchgenommen hat. Auf der Oberstufe bleibt das Verfahren ähnlich, man hat ja die Brüche nur auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, d. i. auf den Nenner, der das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Nenner ist, zu erweitern. Z. B.: Mache die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{16}$ gleichnamig.

2,	4,	6,	9,	12,	16	2
			9,	6,	8	2
			9,	3,	4	

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner $= 9 \times 4 \times 2 \times 2 = 144$.

Nun untersucht man, wie oft jeder Nenner im neuen Nenner enthalten ist, damit man die Erweiterungszahl findet, mit der man die Zähler multiplicirt. Obige Brüche gehen dann über in:

$$\frac{72}{144}, \quad \frac{108}{144}, \quad \frac{120}{144}, \quad \frac{128}{144}, \quad \frac{60}{144}, \quad \frac{99}{144}.$$

Übungen.

Die vier Grundrechnungsarten mit gemeinen Brüchen überhaupt.

§ 97. Da das Rechnen mit Brüchen eigentlich ein Rechnen mit benannten ganzen Zahlen ist, so ist an dieser Stufe zu dem bei der Vorbereitungsstufe Gesagten nur wenig hinzuzufügen. Es wird das meiste auch nur durch Beispiele angedeutet, und hauptsächlich darum, um die Form ins rechte Licht zu stellen.

Addition und Subtraction der Brüche.

§ 98. Diese Operationen kann man nur mit gleichnamigen Brüchen vornehmen. Übungen im Kopfe; daran schließe man das schriftliche Rechnen innig an.

Schriftlich.

Addiere:

2,	5,	6,	10	2
		3,	5	

$3 \times 5 \times 2 = 30$

	30	
$3\frac{1}{2}$	15	15
$14\frac{2}{5}$	6	12
$17\frac{5}{6}$	5	25
$38\frac{7}{10}$	3	21
$74\frac{13}{30}$		$\frac{73}{30} = 2\frac{13}{30}$

Der Nenner 30 wird ober den Strich gesetzt, damit man ihn nicht wiederholt zu schreiben braucht.

Wie viel ist: a) $12\frac{7}{8} - 3\frac{3}{4}$; b) $9 - 6\frac{4}{5}$; c) $426\frac{5}{12} - 213\frac{7}{8}$?

		8	
a)	$12\frac{7}{8}$	1	7
	$-\ 3\frac{3}{4}$	2	6
	$9\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$

b)	$9\frac{5}{5}$
	$-\ 6\frac{4}{5}$
	$2\frac{1}{5}$

			24	
c)	$426\frac{5}{12}$	2	$10 + 24 = 34$	
	$-213\frac{7}{8}$	3	21	21
	$212\frac{13}{24}$			13

Übungen.

Multiplication der Brüche.

§ 99. Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl. Vergleiche § 81, 82. Übungen im Kopfe; daran wird das schriftliche Rechnen angeschlossen.

Schriftlich.

a) $\frac{19}{21} \times 12 = \frac{228}{21} = 10\frac{18}{21} = 10\frac{6}{7}$.

b) $24\frac{7}{8} \times 33$ oder: $24\frac{7}{8} = \frac{199}{8}$

$$\begin{array}{ll}
\frac{7}{8} \times 33 = \frac{231}{8} = 28\frac{7}{8} & \frac{199}{8} \times 33 = 597 \\
24 \times 33 & \quad 597 \\
\hline
72 & \frac{6567}{8} = 820\frac{7}{8} \\
\;\;72 & \\
\hline
792 & \\
\;\;28\frac{7}{8} & \\
\hline
820\frac{7}{8} &
\end{array}$$

2.) Multiplication einer Zahl mit einem Bruch. Die Bedeutung einer solchen Multiplication bringt man am besten an angewandten Beispielen bei. 1 *kg* einer Ware kostet 96 kr. Um zu ersehen, wie viel 2, 3, 4 *kg* u. s. w. kosten, muss man 96 mit 2, 3, 4 u. s. f. multiplicieren, was man durch den Schluss erkennt. Um also zu berechnen, wie viel $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . .) *kg* kostet, muss man 96 mit $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . .) multiplicieren. Was nun 96 mit $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . .) multiplicieren heißt, erkennt man durch die wirkliche Lösung der Aufgabe. $\frac{1}{2}$ *kg* kostet die Hälfte von 96 kr. Es ist also:

$$96 \times \tfrac{1}{2} = 96 : 2 = 48 \text{ kr.}$$

Eine Zahl mit $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . .) multiplicieren, heißt so viel, als diese Zahl durch 2 (3, 4 . . .) dividieren.

Um zu berechnen, wie viel $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ *kg* u. s. w. kosten, muss man 96 mit $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ u. s. f. multiplicieren. Was dies heißt, erfahren wir durch die wirkliche Lösung der Aufgabe. $\frac{1}{3}$ *kg* kostet den dritten Theil von 96 kr., d. i. 32 kr., und $\frac{2}{3}$ *kg* 2 mal 32 kr., d. i. 64 kr. Eine Zahl mit $\frac{2}{3}$ multiplicieren heißt den dritten Theil der Zahl 2 mal nehmen.

Nach einigen derartigen Beispielen sehen die Schüler ein, dass eine Zahl mit einem Bruche multipliciert wird, indem man sie durch seinen Nenner dividiert und mit seinem Zähler multipliciert.

3.) Multiplication eines Bruches mit einem Bruche. Dies wird an mehreren Beispielen folgendermaßen erkannt. Es ist z. B. $\frac{5}{6} \times \frac{7}{9}$ zu multiplicieren. $\frac{5}{6}$ multipliciert man mit $\frac{7}{9}$, wenn man den neunten Theil von $\frac{5}{6}$ 7 mal nimmt. $\frac{5}{6} : 9 = \frac{5}{54}$, $\frac{5}{54} \times 7 = \frac{35}{54}$; also ist $\frac{5}{6} \times \frac{7}{9} = \frac{35}{54}$. Vergleicht man dieses Product mit den beiden gegebenen Brüchen, so sieht man, dass der Zähler des ersten mit dem Zähler des zweiten, der Nenner des ersten mit dem Nenner des zweiten Bruches multipliciert wurde und das erste Product als Zähler, das zweite Product als Nenner des Resultates erscheint.

Ein Bruch wird daher mit einem Bruche multipliciert, indem man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multipliciert.

Als specieller Fall werde durch nachstehendes Beispiel angedeutet, woraus man ein kürzeres Verfahren erkennt.

$$\frac{48}{175} \times \frac{35}{36} = \frac{\overset{4}{48} \times \overset{1}{35}}{\underset{5}{175} \times \underset{3}{36}} = \frac{4}{15}.$$

Solche Abkürzungen stellen sich besonders vortheilhaft heraus, wenn mehr als zwei Brüche miteinander zu multiplicieren sind. Z. B.:

$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{15} \times \frac{12}{35} = \frac{5 \times 7 \times 12 \times 2}{6 \times 15 \times 35 \times 3 \times 5} = \frac{2}{15}$$

oder

$$\frac{5}{6} \times \frac{7}{\underset{3}{15}} \times \frac{\overset{2}{12}}{\underset{5}{35}} = \frac{2}{15}.$$

4.) Multiplication einer gemischten Zahl mit einem Bruch oder einer gemischten Zahl und umgekehrt. — Die gemischten Zahlen werden in unechte Brüche verwandelt und die Multiplication wie bekannt ausgeführt. — Übungen.

Division der Brüche.

§ 100. 1.) Division eines Bruches durch eine ganze Zahl. Vergl. § 81, 82. — Übungen im Kopfe; daran wird das schriftliche Rechnen innig angeschlossen.

Schriftlich: Wie viel ist $53\frac{3}{8} : 16$?

$$53\frac{3}{8} : 16$$
$$\frac{427}{8} : 16 = \frac{427}{128} = 427 : 128 = 3\frac{43}{128}$$
$$43$$

oder: $$53\frac{3}{8} : 16 = 3\frac{43}{128}$$
$$5\frac{3}{8}$$
$$\frac{43}{8} : 16 = \frac{43}{128}.$$

2.) Division einer Zahl (eines Bruches) durch einen Bruch.

Im Sinne des Messens ist die Division leicht verständlich. Dividend und Divisor müssen, wenn sie nicht schon gleichnamige Brüche sind, gleichnamig gemacht werden. Z. B.: a) Wie oft ist $\frac{3}{4}$ in 9 enthalten:

Mündliche Lösung: 1 Ganzes = 4 Viertel, 9 Ganze = 9×4 V. = = 36 V.; 3 V. in 36 V. ist so oft als 3 in 36, d. i. 12 mal enthalten; $9 : \frac{3}{4} = 12$.

Schriftlich: $9 : \frac{3}{4} = \frac{36}{4} : \frac{3}{4} = 36 : 3 = 12.$

b) Wie oft ist $3\frac{4}{5}$ in $12\frac{9}{10}$ enthalten?

Mündlich: $3\frac{4}{5}$ sind $\frac{19}{5}$ oder $\frac{38}{10}$ und $12\frac{9}{10} = \frac{129}{10}$.

$3\frac{4}{5}$ ist in $12\frac{9}{10}$ so oft enthalten, als $\frac{38}{10}$ in $\frac{129}{10}$ oder 38 in 129, also $3\frac{15}{38}$ mal; $12\frac{9}{10} : 3\frac{4}{5} = 3\frac{15}{38}$.

Schriftlich: $12\frac{9}{10} : 3\frac{4}{5} = \frac{129}{10} : \frac{19}{5} = \frac{129}{10} : \frac{38}{10} = 129 : 38 = 3\frac{15}{38}.$

Schwieriger ist die Auffassung der Division durch einen Bruch im Sinne des Theilens. Es sei z. B. 24 durch $\frac{3}{4}$ zu theilen.

Die Zahl $\frac{3}{4}$ ist 4 mal kleiner als 3, daher der $\frac{3}{4}$ Theil von 24 4 mal größer als der dritte Theil. Der dritte Theil von 24 ist 8, 4 mal 8 ist 32; der $\frac{3}{4}$ Theil von 28 ist 32.

Schriftlich dargestellt:

$$24 : \frac{3}{4} = \frac{24 : 3}{8 \times 4} = 32. \qquad \text{Oder auch:} \qquad 24 : \frac{3}{4} = \frac{24 \times 4}{96 : 3} = 32.$$

Aus mehreren solchen Aufgaben erkennt man, dass eine Zahl oder auch ein Bruch durch einen Bruch getheilt wird, wenn man den Dividend durch den Zähler des Divisors theilt und das Erhaltene mit dem Nenner des Divisors multipliciert oder umgekehrt.

Es sei noch $\frac{4}{5} : \frac{3}{11}$ auszuführen.

$\frac{4}{5} : \frac{3}{11} = \frac{44}{5} : 3 = \frac{44}{15}$. Dies erhält man auch aus $\frac{4}{5} \times \frac{11}{3} = \frac{44}{15}$, woraus aus mehreren anderen ähnlichen Beispielen die mechanische Regel erkannt wird:

Eine Zahl (ein Bruch) wird durch einen Bruch dividiert, wenn man den Dividend mit dem umgekehrten Divisor multipliciert.

Kommt im Dividend oder im Divisor oder in beiden eine gemischte Zahl, so verwandelt man sie in unechte Brüche und führt dann, wie bekannt, die Division aus. — Übungen.

B. Decimalbrüche.

Auffassung der Decimalbrüche.

§ 101. Močnik schreibt: «Für die Decimalbrüche und ihre Behandlung gibt es eine zweifache Auffassungsweise. Man kann die Decimalbrüche als eine Erweiterung des Zehnersystems darstellen und dann mit ihnen nach den gleichen Gesetzen wie mit ganzen Zahlen rechnen; man kann aber die Decimalbrüche auch als eine besondere Art der gemeinen Brüche betrachten und die für diese entwickelten Gesetze auf das Rechnen mit Decimalbrüchen anwenden. Wir gehen hier von der ersten Darstellungsweise aus; wir müssen dieselbe schon aus dem Grunde wählen, weil das Rechnen mit gemeinen Brüchen erst später vorgenommen werden soll; wir wählen sie aber auch darum, weil sie natürlicher ist und den innigen Zusammenhang zwischen den ganzen und Decimalzahlen schärfer hervortreten läſst, als dies bei der Zugrundelegung der gemeinen Brüche möglich wäre. Indem die Schüler die Decimalrechnung aus dem Rechnen mit ganzen Zahlen ableiten, lernen sie nicht nur einen neuen wichtigen Gegenstand kennen, sondern erhalten zugleich eine treffliche Gelegenheit, die Rechenübungen mit ganzen Zahlen nutzbringend zu wiederholen.»

Hentschel beginnt die Einführung in die Decimalbrüche nicht mit einer Betrachtung des Baues unseres Zehnersystems, indem man etwa erkennen ließe: «Der Zehner ist das 10fache vom Einer, der Hunderter das 10fache vom Zehner ꝛc.; ferner: Jede Stelle nach links hat einen 10 mal so großen, jede Stelle nach rechts nur den zehnten Theil des Wertes von der vorhergehenden, und endlich: Wie aus dem Hunderter der Zehner hervorgeht, aus diesem der Einer, immer durch Theilung mit 10, so aus dem Einer das Zehntel, aus dem Zehntel das Hundertel ꝛc. ꝛc. Das ist wissenschaftlich und abstract, aber nicht elementar, concret und anschaulich, wie es der Elementar-schüler verlangt! Unser Verfahren ist das: Wie wir früher die Begriffe Einer, Zehner, Hunderter und Tausender nebst den ersten Rechenfertigkeiten auf Grund der Veranschaulichung (russische Rechenmaschine, Hundertertafel ꝛc.) gewonnen haben, so werden auch hier die Zehntel, Hundertstel und Tausendstel (auf welche Stücke wir uns auf dieser Stufe [5.] beschränken), sowie das erste Rechnen mit denselben veranschaulicht, und zwar wählen wir dazu das Meter und seine Theile. Späterhin, vorzugsweise im zweiten Cursus der Decimalbruchrechnung auf Stufe 7, werden wir auch versuchen, die Decimalbrüche dem großen Zahlengebäude einzufügen, nur nicht jetzt am Anfange schon.»

Wann hat man das Rechnen mit Decimalbrüchen anzufangen?

§ 102. Diesbezüglich sind die Pädagogen nicht einig. Močnik behandelt die Decimalbrüche bis zu den Tausendsteln schon im Raume 1—1000, dasselbe thut Nagel, Lüdemann u. s. w. — Knilling verlegt sie ins vierte Schuljahr (nach dem unbegrenzten Zahlenraume). Hentschel, der auch wie Močnik zwei Curse unterscheidet, beginnt das Rechnen mit denselben (erster Curs) auf der fünften Stufe (fünftes Schuljahr).

Behandlung, Lesen und Schreiben der Decimalbrüche.

Zehntel, Hundertel, Tausendtel,

§ 103. Die im Folgenden durch Beispiele angedeuteten Stufen sind nach Hentschel und Knilling zusammengestellt. Veranschaulichungsmittel ist das Meter mit seiner Eintheilung und noch besser der metrische Scheibchenrechenapparat. Es sollen aber auch die übrigen decimalen Maße damit in Verbindung gebracht werden, um die decimale Schreibweise zugleich zu erläutern. (Vergl. § 64.)

Erste Übung: Das Meter und das Decimeter. (Werden auf der Wandtafel oder auf einer Papptafel aufgezeichnet).

1.

1 *dm* = $\frac{1}{10}$ *m*	$\frac{1}{10}$ *m* = 1 *dm*
2 *dm* = $\frac{2}{10}$ *m*	$\frac{2}{10}$ *m* = 2 *dm*
bis	bis
10 *dm* = $\frac{10}{10}$ oder 1 *m*	$\frac{10}{10}$ *m* = 10 *dm*

2.

2 *m* 1 *dm* = $2\frac{1}{10}$ *m*	3 fl. 1 Zehner = $3\frac{1}{10}$ fl.
2 *m* 2 *dm* = $2\frac{2}{10}$ *m*	3 fl. 2 Zehner = $3\frac{2}{10}$ fl.
2 *m* 3 *dm* = $2\frac{3}{10}$ *m*	3 fl. 3 Zehner = $3\frac{3}{10}$ fl.
bis	bis
2 *m* 9 *dm* = $2\frac{9}{10}$ *m*	3 fl. 9 Zehner = $3\frac{9}{10}$ fl.

Ähnliche Übungen kann man zunächst auf dem Decimeter und den Centimetern, die man eigens auf die Tafel zeichnet, und dann auf den übrigen decimalen Maßen vornehmen.

3.

a) Schreibet die obigen Resultate in 2. in Decimalbruchform! $2\frac{1}{10}$ *m* = 2·1 *m* u. s. w.

b) Schreibet die Resultate der Reihen 1. in Decimalbruchform! 1 *dm* = 0·1 *m* u. s. w., und 0·1 *m* = 1 *dm* u. s. w.

c) Schreibet in Decimalbruchform:

α) 14 *m* 5 *dm*, 8 *dm* 7 *cm*, 4 *cm* 5 *mm* u. s. w. mit den übrigen decimalen Maßen.

β) 8 *dm* = · *m*, 4 *cm* = · *dm*, 9 *mm* = · *cm*, 6 *dl* = · *l* u. s. f.

Zweite Übung. Das Meter, Decimeter und Centimeter. (Wird auch durch eine Zeichnung erläutert.)

1.

1 *cm* = $\frac{1}{100}$ *m*	$\frac{1}{100}$ *m* = 1 *cm*
2 *cm* = $\frac{2}{100}$ *m*	$\frac{2}{100}$ *m* = 2 *cm*
3 *cm* = $\frac{3}{100}$ *m*	$\frac{3}{100}$ *m* = 3 *cm*
u. s. w.	u. s. w.

2.

5 *m* 1 *cm* = $5\frac{1}{100}$ *m*	8 fl. 1 kr. = $8\frac{1}{100}$ fl.
5 *m* 2 *cm* = $5\frac{2}{100}$ *m*	8 fl. 2 kr. = $8\frac{2}{100}$ fl.
u. s. w.	u. s. w.

Ähnliche Übungen mit den übrigen decimalen Maßen.

3.

Schreibe in Decimalbruchform:

a) Die Reihen in 1. und in 2. — $\frac{1}{100}$ *m* sind keine ganzen Meter, kein Zehntelmeter und 1 Hundertelmeter, also 0·01 u. s. w. —

$\frac{11}{100}$ *m* sind keine ganzen Meter und 11 Hundertelmeter oder keine ganzen Meter, 1 Zehntelmeter und 1 Hundertelmeter — wird an der Zeichnung (Apparat) gezeigt — also 0·11 *m*.

b) 4 *m* 3 *dm* = · *m*, 7 *m* 3 *dm* 5 *cm* = · *m*, 6 *dm* 3 *cm* = = · *m*, 56 *cm* = · *m*, 27 *m* 41 *cm* = · *m*.

Und ähnliche Beispiele mit den übrigen decimalen Maßen.

Lies: 0·07 *m*, 0·35 *m*, 46·28 *m*, 12·05 *m*.

α) Als Decimalbrüche. Z. B.: 46·28 *m* = 46 ganze, 28 Hundertelmeter oder, was neben der ersten Lesart zu empfehlen ist, 46 ganze, 2 Zehntel-, 8 Hundertelmeter.

β) Als mehrnamige Zahlen. Z. B.: 46·28 *m* = 46 *m* 28 *cm* oder 46 *m* 2 *dm* 8 *cm*.

Ähnliche Übungen mit den übrigen decimalen Maßen.

4.

Verwandeln der Decimeter in Centimeter, der Zehntel in Hundertel durch Anhängung einer Null (Erweitern der Decimalbrüche).

a) 0·7 *m*, 2·3 *m*, 12·5 *m* u. s. f. sind wie viele ganze und hundertel Meter? — Lösung: 0·7 *m* = 0·70 *m* u. s. f.

b) 18·3, 97, 45·1 u. s. w. sind wie viele Ganze und Hundertel?

c) Mache gleichnamig: 7·3 *m*, 12·15 *m*, 24·06 *m* u. s. w.

Ähnliche Übungen mit den übrigen decimalen Maßen.

Verwandeln der Centimeter in Decimeter, der Hundertel in Zehntel durch Streichung der letzten Ziffer.

a) 7·40 *m*, 0·91 *m* u. s. w. sind wie viel ganze und zehntel Meter? — Lösung: 0·91 *m* = 0·9 *m*.

b) 6·50, 0·42 u. s. w. sind wie viel Ganze und wie viel Zehntel?

c) Mache gleichnamig, indem du die Hundertelmeter in Zehntelmeter verwandelst: 45·3 *m*, 28·60 *m*, 31·81 *m*!

d) Mache ebenfalls gleichnamig: 54·50, 0·2, 33·70, 12·32!

Ähnliche Übungen mit den übrigen decimalen Maßen.

Dritte Übung. Das Meter, Decimeter, Centimeter und Millimeter. — Die Tausendtel. Die weitere Abstufung dieser Übung ergibt sich aus dem Vorangehenden.

Erklärungen. Die behandelten Brüche heißen Decimalbrüche. Jeder Decimalbruch besteht aus zwei Theilen, die durch einen Punkt, den Decimalpunkt, voneinander getrennt sind; der Theil links vom Decimalpunkte enthält die Ganzen, der Theil rechts die Bruchtheile. Die Ziffern rechts vom Decimalpunkte heißen Decimalen; die erste Decimale rechts vom Punkte gibt die Zehntel, die zweite die Hundertel und die dritte die Tausendtel an. Leere Decimalstellen werden durch Nullen bezeichnet. Nach Obigem liest man die Decimalbrüche auf zweierlei Art:

a) Man spricht jede Decimale einzeln aus; z. B.: $36 \cdot 27 = 36$ Ganze 2 Zehntel 7 Hundertel.

b) Man fasst die Decimalen alle zusammen (aufgelöst zu den kleinsten vorhandenen Theilen); z. B.: $36 \cdot 27 = 36$ Ganze 27 Hundertel.

Wie man aus dem Beispiele

$$3 \cdot 24\ m = 3\ m\ 24\ cm = 324\ cm = \tfrac{324}{100}\ m$$

und aus ähnlichen erkennt, gibt es noch eine dritte Lesart der Decimalbrüche. Man fasst dabei den Decimalbruch (sammt den Ganzen) als eine ganze Zahl auf, die man als Zähler eines Bruches nimmt, dessen Nenner durch die niederste Decimalstelle bestimmt ist. Z. B. $26 \cdot 3 = 263$ Zehntel, $0 \cdot 27 = 27$ Hundertel, $4 \cdot 502 = 4502$ Tausendtel.

Vollständige Einführung in die Decimalbrüche.

§ 104. «Im ersten Cursus* der Decimalbruchrechnung führten wir durch das Meter und dessen Theile ein, und das Gebiet, welches wir betraten, war ein eng begrenztes; jetzt soll der Schüler, dessen geistige Fassungskraft mittlerweile noch erstarkte, weiter und näher mit den Decimalbrüchen bekannt gemacht werden; wir knüpfen darum an bei unserem dekadischen Zahlensystem; denn nur durch dieses ist das Wesen der Decimalbrüche recht zu erkennen.» (Hentschel.)

Die Behandlung entnehmen wir wörtlich aus Močnik.

«Der Lehrer schreibe eine Zahl an, welche gleiche Ziffern enthält, z. B. 33333, und entwickle daran mit den Schülern folgende Gesetze:

Die Ziffer 3 in der ersten Stelle rechts bedeutet 3 Einer. Die 3 in der zweiten Stelle bedeutet 3 Zehner, also 10 mal 3 Einer. Die 3 in der dritten Stelle bedeutet 3 Hunderte, also 10 mal 3 Zehner, u. s. w. Eine Ziffer bedeutet also an jeder folgenden Stelle gegen die Linke zehnmal so viel als an der nächstvorhergehenden rechts.

Anders verhält es sich, wenn wir von der Linken zur Rechten fortschreiten. Die Ziffer 3 in der fünften Stelle links bedeutet 3 Zehn-

* Hentschel unterscheidet für die Decimalbruchrechnung einen ersten und einen zweiten Cursus. Im ersten Cursus kommen nur Decimalbrüche mit 1—3, höchstens 4 Decimalstellen.

tausende. Die 3 in der vierten Stelle bedeutet 3 Tausende, also nur den zehnten Theil von 3 Zehntausenden. Die 3 in der dritten Stelle gilt 3 Hunderte, also nur den zehnten Theil von 3 Tausenden. Ebenso bedeutet die 3 in der zweiten Stelle den zehnten Theil von der 3 in der dritten Stelle, d. i. 3 Zehner, und die 3 in der ersten Stelle den zehnten Theil von 3 Zehnern, nämlich 3 Einer. Eine Ziffer bedeutet daher an jeder folgenden Stelle gegen die Rechte nur den zehnten Theil von dem, was sie an der nächstvorhergehenden Stelle links gilt.

Schreiten wir von den Einern aufwärts zu den Zehnern, Hunderten u. s. w., so können wir die Ziffernreihe ohne Ende fortsetzen. Gehen wir aber z. B. von den Zehntausenden abwärts zu den Tausenden, Hunderten .... zurück, so glaubten wir bisher bei den Einern, welche den ersten Platz rechts einnahmen, auf der niedrigsten Stelle angelangt zu sein. Und doch können wir noch tiefer unter die Einer hinabsteigen. Wenn wir der Zahl 33333 rechts noch eine dritte hinzufügen, was müsste diese Ziffer nach dem Gesetze unseres Zehnersystems bedeuten? Wie viel ist der zehnte Theil von einem Einer, d. i. von einem Ganzen? Der zehnte Theil von 3 Einern sind also 3 Zehntel. Da wir aber bis jetzt gewohnt waren, die erste Ziffer rechts immer als Einer anzusehen, so müssen wir, wenn die Ziffernreihe unter die Einer hinab noch weiter rechts fortgesetzt wird, durch ein bestimmtes Zeichen andeuten, wo sich die Stelle der Einer befindet. Man hat dazu einen Punkt gewählt, welchen man nach den Einern rechts oben setzt. Leset nun die Zahl 33333·3. Würde man dieser Zahl rechts noch mehrere Ziffern anhängen, z. B. 33333·33333, so würde die zweite 3 nach dem Punkte den zehnten Theil von 3 Zehnteln bedeuten. Wie viel ist der zehnte Theil von einem Zehntel? Die 3 an der zweiten Stelle nach dem Punkte bedeutet also 3 Hundertel. Wie viel ist der zehnte Theil von einem Hundertel? An der dritten Stelle nach dem Punkte bedeutet also eine Ziffer so viele Tausendtel, als sie für sich Einer anzeigt. Ebenso kommen an der vierten Stelle nach dem Punkte Zehntausendtel, an der fünften Hunderttausendtel u. s. w. vor.

Sowie man also die Zahlenreihe von den Einern an aufwärts (gegen die Linke) bis ins Unendliche fortführen kann, so läſst sich dieselbe von den Einern an auch abwärts (gegen die Rechte) bis ins Unendliche fortbilden.

Da Zehntel, Hundertel, Tausendtel .... nicht ganze Einheiten vorstellen, sondern nur Theile, die man erhält, wenn man das Ganze und seine aufeinander folgenden niedrigeren Theile immer wieder in zehn gleiche Theile theilt, so nennt man dieselben Zehntheilchen oder Decimalen, und eine Zahl, worin Decimalen vorkommen, eine Decimalzahl oder einen Decimalbruch.

Der Punkt, welcher zwischen der Stelle der Einer und jener der Zehntel steht, heißt der Decimalpunkt; er bildet die Scheidegrenze zwischen den Ganzen und den Decimalen; links vor demselben befinden sich die Ganzen, rechts nach demselben die Decimalen; und zwar bedeutet die erste Decimale nach dem Punkte Zehntel, die zweite Hundertel u. s. w. Die Bedeutung der obigen Zahl 33333·33333 läßt sich daher durch folgende Darstellung veranschaulichen:

3	3	3	3	3	•	3	3	3	3	3
Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einer		Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel

Die Decimalzahlen sind demnach eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems ...»

Daran würde sich die decimale Schreibweise der Maße (im weitesten Sinne genommen) sehr gut anschließen. Zuerst sind dabei jene Übungen zu nehmen, bei welchen das Frühere wiederholt wird, also höchstens Tausendtel auftreten; darauf werden diese Übungen über die Tausendtel erweitert.

Die Aufeinanderfolge der Übungen ergibt sich aus den Paragraphen, in denen die decimale Schreibweise, das Lesen, Schreiben der Decimalbrüche, das Erweitern, Abkürzen, Gleichnamigmachen derselben geübt wird.

Veränderung der Form eines Decimalbruches ohne Veränderung seines Wertes.

§ 105. 1.) Erweitern eines Decimalbruches. Von selbst ist ersichtlich, dass der Wert eines Decimalbruches sich nicht verändert, wenn man ihm rechts eine oder zwei oder mehrere Nullen anhängt, ihn also erweitert. Es ist z. B.:

$$0·34 = 0·340 = 0·3400 = 0·34000 \text{ u. s. f.}$$

Ebenso kann man einem Decimalbruche links so viele Nullen zusetzen, als man will, z. B. 4·37 = 04·37 = 004·37 u. s. w.

2.) Abkürzen der Decimalbrüche. Ferner ist von selbst klar, dass man die Nullen rechts vom Decimalbruche ohne Veränderung des Wertes desselben ganz einfach weglassen kann. Z. B.:

0·50 = 0·5, 46·6700 = 46·67 u. s. w.

Dieses Abkürzen dehnt man sogar dahin aus, dass man bedeutende Decimalen, wenn sie für das praktische Rechnen keine Bedeutung haben, weglässt. Z. B.: Statt 4·6237 kann man nehmen 4·62 oder 4·624. Folgt nämlich auf die letzte beizubehaltende Decimale eine Decimale, die gleich 5 oder größer ist als 5, so wird sie um 1 größer genommen, oder wie man sagt: man nimmt 1 zur Correctur, weil dadurch der gemachte Fehler kleiner wird, wie man sich aus folgender Skizze überzeugt:

$$\begin{array}{r} 4{\cdot}624 \\ 4{\cdot}6237 \\ \hline 0{\cdot}0003 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{\cdot}6237 \\ 4{\cdot}623 \\ \hline 0{\cdot}0007 \end{array}$$

Der Fehler $0{\cdot}0003 < 0{\cdot}0007$.

Übungen im Abkürzen der Decimalbrüche. — Hieran schließen sehr gut die Fragen an, wie: Auf wie viele Decimalen hat man zu rechnen, wenn das Resultat a) Gulden, b) Kilogramm beim Wägen des Fleisches, c) Ar beim Feldmessen u. s. w. bedeutet?

Veränderung des Wertes eines Decimalbruches durch Rücken des Decimalpunktes.

§ 106. Durch Vergleichung der Decimalzahlen

327·4628, 3274·628, 32746·28 u. s. w.

und umgekehrt

327462·8, 32746·28, 3274·628 u. s. w.

erkennt man, dass durch Rücken des Decimalpunktes um eine Stelle nach rechts, die Einer zu Zehnern, die Zehner zu Hundertern u. s. w., die Zehntel zu Einern, die Hundertel zu Zehnteln u. s. w. werden, d. h.: jede Ziffer bedeutet jetzt 10 mal so viel als vorher, oder die Decimalzahl ist 10 mal so groß geworden. Ähnliches erkennt man, wenn man den Decimalpunkt um 2, 3 Stellen u. s. f. nach rechts rückt. Daraus folgt:

Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, 1000 ... multipliciert, wenn man den Decimalpunkt um 1, 2, 3 ... Stellen nach rechts rückt.

Ähnlich erkennt man umgekehrt:

Ein Decimalbruch wird durch 10, 100, 1000 .... dividiert, wenn man den Decimalpunkt um 1, 2, 3 ... Stellen nach links rückt. — Übungsbeispiele.

Specielle Fälle sollen durch nachstehende Beispiele angedeutet werden:

$$32 \cdot 5 \times 1000 = 32500; \quad 4 \cdot 7 : 100 = 0 \cdot 047.$$

Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

§ 107. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1.) Der Nenner des Decimalbruches ist gegeben. Mache z. B. $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ u. s. w. zu Zehnteln, $\frac{3}{4}$ zu Hunderteln, $\frac{7}{8}$ zu Tausendteln u. s. w. Das Verfahren ist sehr einfach.

Ein Ganzes hat 10 Zehntel, $\frac{1}{2}$ also 5 Zehntel.

$$\tfrac{1}{2} = 0 \cdot 5.$$

$\frac{1}{5}$ hat 2 Zehntel, $\frac{2}{5}$ 2 mal 2 Zehntel, d. i. 4 Zehntel, $\frac{3}{5}$ 3 mal 2 Zehntel, d. i. 6 Zehntel u. s. w.

$$\tfrac{1}{5} = 0 \cdot 2, \ \tfrac{2}{5} = 0 \cdot 4, \ \tfrac{3}{5} = 0 \cdot 6 \text{ u. s. w.}$$

$\frac{1}{4}$ hat den vierten Theil von 100 Hunderteln, d. i. 25 Hundertel.

$$\tfrac{1}{4} = 0 \cdot 25.$$

$\frac{3}{4}$ hat 3 mal 25 Hundertel, d. i. 75 Hundertel.

$$\tfrac{3}{4} = 0 \cdot 75.$$

$\frac{1}{8}$ hat den achten Theil von 1000 Tausendteln, d. i. 125 Tausendtel.

$$\tfrac{1}{8} = 0 \cdot 125.$$

$\frac{3}{8}$ z. B. hat 3 mal 125 Tausendtel, d. i. 375 Tausendtel.

$$\tfrac{3}{8} = 0 \cdot 375.$$

Dieses Verwandeln ist offenbar ein Erweitern.

2.) Der Nenner des Decimalbruches ist nicht gegeben. — Jeden Bruch kann man als eine angezeigte Division auffassen. Dies ist schon von früher bekannt, worauf man jedoch nochmals zurückgehen kann. Man sagt z. B.: Hat man 3 durch 8 zu theilen, so braucht man nur jede Einheit in 8 gleiche Theile, d. i. in Achtel zu theilen. 3 Ganze geben dann 3 mal 8 Achtel, d. i. 24 Achtel. Der achte Theil von 24 Achteln ist gleich 3 Achteln oder $3 : 8 = \frac{3}{8}$.

Um also einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, dividiere man den Zähler durch den Nenner, wobei man die Ganzen in Zehntel, die Zehntel in Hundertel u. s. w. verwandelt, wenn ihre Zahl kleiner ist als der Divisor. Den Vorgang erschaut man deutlicher aus dem folgenden Beispiele.

$$\frac{3}{8} = 3_0 : 8 = 0 \cdot 375$$
$$\begin{array}{l} 60 \\ \;\;40 \end{array}$$

Der achte Theil von 3 Ganzen sind 0 Ganze; man schreibt in den Quotienten die 0 und setzt den Decimalpunkt dazu. 3 Ganze sind gleich 30 Zehntel; der achte Theil von 30 Zehnteln sind 3 Zehntel, 8 mal 3 Zehntel sind 24 Zehntel, bleiben 6 Zehntel oder 60 Hundertel. Der achte Theil von 60 Hunderteln sind 7 Hundertel, 8 mal 7 Hundertel sind 56 Hundertel, bleiben 4 Hundertel oder 40 Tausendtel. Der achte Theil von 40 Tausendteln sind 5 Tausendtel, 8 mal 5 Tausendtel sind 40 Tausendtel, es bleibt kein Rest.

«Man wende stets in der Auflösung die Frage des Theilens an; sie ist leichter verständlich als die des Enthaltenseins.» (Hentschel.)

Nach Močnik soll man noch einen unechten Bruch in einen Decimalbruch verwandeln. Z. B. $\frac{357}{25}$.

$$\frac{357}{25} = 357 : 25 = 14 \cdot 28$$
$$\begin{array}{l} 107 \\ \;\;\;70 \\ \;\;\;200 \end{array}$$

Das Verfahren ist das gleiche wie im früheren Beispiele, nur dass man auch Ganze bekommt, nach welchen man den Decimalpunkt setzt.

Es werde nun an mehreren Beispielen diese Verwandlung eingeübt, und zwar in kürzester Form. Verwandle z. B. den gemeinen Bruch $\frac{11}{16}$ in einen Decimalbruch!

$$\frac{11}{16} = 11_0 : 16 = 0 \cdot 6875$$
$$\begin{array}{l} 140 \\ \;\;120 \\ \;\;\;\;80 \end{array}$$

Man spricht: 16 in 11 ist 0 mal (die 0 wird angeschrieben und dazu der Decimalpunkt gemacht); 16 in 110 ist 6 mal, 6 mal 6 ist 36 und 4 ist 40, 6 mal 1 ist 6 und 4 ist 10 und 1 ist 11; 16 in 140 ist 8 mal enthalten u. s. w.

Die Übungsbeispiele zerfallen in zwei Gruppen, und zwar in solche, bei denen die Division ohne Rest aufgeht, und in solche, bei denen die Division nicht ohne Rest aufgeht. Ersteres ist der Fall, wenn der Nenner nur aus den Primfactoren 2 und 5 besteht, letzteres, wenn in demselben andere Factoren vorkommen. Im zweiten Falle kommen im Nenner entweder die Factoren 2 und 5 nicht vor oder sie kommen neben anderen auch vor. Und auch darnach sind die Beispiele zu gruppieren. Man verwandle z. B. $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{14}$ in Decimalbrüche.

$\frac{5}{7} = 5_0 : 7 = 0 \cdot 714285 \ldots$
10
30
20
60
40
5 Von hier an wiederholt sich die Reihe der Decimalen 714285 ins Unendliche.

$\frac{5}{14} = 5_0 : 14 = 0 \cdot 35714285 \ldots$
80
100
20
60
40
120
80
10 Von hier wiederholt sich die Reihe der Decimalen 714285 ins Unendliche.

Die Reihe der Decimalen, die sich ins Unendliche wiederholt, heißt die **Periode**, und Decimalbrüche mit Perioden heißen **periodische Decimalbrüche**. Die Periode pflegt man durch Punkte über der ersten und letzten Decimale der Periode anzudeuten. Obige Beispiele würde man also schreiben:

$$\frac{5}{7} = 0 \cdot \dot{7}1428\dot{5}, \quad \frac{5}{14} = 0 \cdot 35\dot{7}1428\dot{5}.$$

Im Decimalbruche $15 \cdot 23\dot{7}$ ist 7 die Periode.

Periodische Decimalbrüche, in denen der Periode keine anderen Decimalen vorangehen, heißen **rein periodische**, und solche, in denen der Periode noch andere Decimalen vorangehen, heißen **gemischt periodische**.

Periodische Decimalbrüche haben für praktische Berechnungen keine besondere Bedeutung. Man drückt sie nur durch einige wenige Decimalstellen aus, weil die weiter folgenden auf das Ergebnis der Rechnung keinen Einfluss haben. Hat z. B. der periodische Decimalbruch $3\cdot\dot{3}\dot{7}$ die Benennung Gulden, so braucht man nur die zwei ersten Decimalen, welche noch Kreuzer ausdrücken. $3\cdot\dot{3}\dot{7}$ fl. annähernd $= 3\cdot37$ fl. oder 3 fl. 37 kr. $3\cdot\dot{7}\dot{3}$ fl. sind wieder näher $= 3\cdot74$ fl. oder 3 fl. 74 kr, weil in diesem Falle der Fehler kleiner ist.

Verwandlung der Decimalbrüche in gemeine Brüche.

§ 108. Ist der Decimalbruch ein geschlossener, also kein periodischer, so braucht man nur den nicht geschriebenen Nenner des Decimalbruches aufzuschreiben; der erhaltene Bruch wird, wenn möglich, abgekürzt.

Z. B.: $0\cdot375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$; $14\cdot28 = 14\frac{28}{100} = 14\frac{7}{25}$.

Übungsbeispiele.

Ist der Decimalbruch periodisch, so hat man zu berücksichtigen, ob er rein oder gemischt periodisch ist.

Die Verwandlung soll an Beispielen gezeigt werden.

Man verwandle den Decimalbruch $0\cdot\dot{3}\dot{6}$ in einen gemeinen Bruch.

Das 100fache von $0\cdot\dot{3}\dot{6} = 36\cdot\dot{3}\dot{6}$
davon das 1fache von $0\cdot\dot{3}\dot{6} = 0\cdot\dot{3}\dot{6}$

bleibt das 99fache von $0\cdot\dot{3}\dot{6} = 36$
also ist das 1fache von $0\cdot\dot{3}\dot{6}$ gleich dem 99. Theil von $36 =$
$= \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$.

Noch mehrere Beispiele, in denen die Zahl der Decimalen in der Periode wechselt.

Ein rein periodischer Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man die Periode als Zähler nimmt und als Nenner eine Zahl, welche aus so viel Neunern besteht, als die Periode Decimalen hat.

Man verwandle den Decimalbruch $0\cdot5\dot{7}\dot{2}$ in einen gemeinen Bruch:

Das 1000fache des Bruches $= 572\cdot\dot{7}\dot{2}$
davon das 10fache des Bruches $= 5\cdot\dot{7}\dot{2}$

bleibt das 990fache des Bruches $= 572 - 5 = 567$
also ist das 1fache des Bruches gleich dem 990. Theil von $567 =$
$= \frac{567}{990} = \frac{63}{110}$.

Noch mehrere Beispiele, in denen die Zahl der Decimalen vor der Periode und in der Periode wechselt.

Ein gemischt periodischer Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man die Zahl aus den Decimalen vor der Periode von der Zahl aus den Decimalen vor und in der Periode subtrahiert und diesen Rest als Zähler nimmt; als Nenner aber eine Zahl, die aus so viel Neunern besteht, als die Periode Decimalen hat, und aus so vielen Nullen, als der Periode Decimalen vorangehen.

Einige, z. B. Knilling, berücksichtigen in diesem Falle die periodischen Decimalbrüche gar nicht. — Übungsbeispiele.

Die Rechnungsoperationen mit Decimalbrüchen.

Addition der Decimalbrüche.

Nach Hentschel.

§ 109. 1.) Addiere: $6 \cdot 453 + 7 \cdot 206 + 1 \cdot 086 + 0 \cdot 235$.
2.) Addiere: $4 \cdot 352 + 0 \cdot 87 + 2 \cdot 043 + 5 \cdot 4$.

Die Regel für die Addition wird gerade so wie für ganze Zahlen abgeleitet. Wir schreiben die Zahlen genau unter einander, so daſs Einer unter Einer, Zehntel unter Zehntel u. s. w. zu stehen kommen.

1.)		2. a)		2. b)	
	6·453		4·352		4·352
	7·206		0·870		0·87
	1·086		2·043		2·043
	0·235		5·400		5·4
	14·980		12·665		12·665

Lösung zu 1.: 5 Tausendtel und 6 Tausendtel sind 11 Tausendtel, und 6 Tausendtel sind 17 Tausendtel, und 3 Tausendtel sind 20 Tausendtel oder 2 Hundertel und 0 Tausendtel (0 Tausendtel werden unter die Tausende geschrieben und 2 Hundertel weiter gezählt). 2 Hundertel und 3 Hundertel sind 5 Hundertel u. s. w., wie bei der Addition ganzer Zahlen, nur daſs man hier den Decimalpunkt zwischen die Zehntel und Einer zu setzen hat.

Kürzeres Verfahren vergl. Addition ganzer Zahlen.

Zur Aufgabe 2. Sollen Brüche addiert werden, so müssen sie gleichnamig sein oder gleichnamig gemacht werden, also gleichviel

Decimalstellen erhalten. Dies ist bei 2. a) geschehen. Doch wird der Schüler bald sehen, dass das Hinschreiben der Nullen zur Ergänzung fehlender Decimalstellen entbehrlich ist. Es wird dann gerechnet wie bei 2. b). Doch ist hierbei ein Verrechnen leichter möglich, als wenn das Gleichnamigmachen geschehen ist. — Als Regel wird ausgesprochen:

Um Decimalbrüche zu addieren, stellt man sie so untereinander, dass genau Decimalpunkt unter Decimalpunkt kommt, und rechnet alsdann wie mit ganzen Zahlen. In der Summe setze man den Decimalpunkt unter den Decimalpunkt der Summanden. — Übungen.

Subtraction der Decimalbrüche.

§ 110. Ergibt sich aus der Subtraction ganzer Zahlen und aus dem im Vorhergehenden über die Addition der Decimalbrüche Gesagten. Es sollen hier nur die verschiedenen Fälle durch specielle Beispiele angedeutet werden.

$$\begin{array}{r} 6\cdot287 \\ -4\cdot043 \\ \hline 2\cdot244 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\cdot526 \\ -0\cdot35 \\ \hline 0\cdot176 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45\cdot7 \\ -\ \ 8\cdot439 \\ \hline 37\cdot261 \end{array}$$

Die Subtraction soll mittels des Wegzählens und auch mittels des Zuzählens ausgeführt werden. — Übungen.

Multiplication der Decimalbrüche.

§ 111. 1.) Ein Decimalbruch ist mit 10, 100, 1000 . . . zu multiplicieren.

Dieser Fall ist schon im § 106 besprochen und erledigt. — Übungen.

2.) Ein Decimalbruch ist mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren.

Berechne: $4\cdot325 \times 36$.

Die Regel kann abgeleitet werden wie für ganze Zahlen oder auch wie folgt, wofür nachstehende, aus Hentschel entnommene Vorübungen beherzigenswert sind.

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\ 2 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ \times\ 2 \\ \hline 60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ \times\ \ 20 \\ \hline 600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 300 \\ \times\ \ 20 \\ \hline 6000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 300 \\ \times\ \ 200 \\ \hline 60000 \end{array} \quad \text{u. s. w.}$$

An obigen Beispielen sollen die Schüler erkennen: Wenn man bei einer Multiplicationsaufgabe den einen Factor verzehnfacht und den andern unverändert läſst, ſo wird das Product auch 10 mal ſo groß; nimmt man den einen Factor 10 mal ſo groß und den andern auch 10 mal ſo groß, ſo wird das Product $10 \times 10 = 100$ mal ſo groß u. ſ. w.» (Hentſchel.)

Nehmen wir im obigen Beiſpiele den Multiplicand 1000 mal, ſo wird das Product auch 1000 mal ſo groß ſein als das richtige; wir müſſen demnach, um das richtige Product zu bekommen, das erhaltene noch durch 1000 dividieren. Darnach führen wir aus:

$$\begin{array}{r} 4\,325 \\ \times\ 1000 \\ \hline 4325 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4325 \\ \times\ \quad 36 \\ \hline 25950 \\ 12975 \\ \hline 155700 \end{array} : 1000 = 155 \cdot 700$$

Aus dieſem und anderen ähnlichen Beiſpielen erkennt man die Regel:

Ein Decimalbruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man ihn wie eine ganze Zahl damit multipliciert und im Producte ſo viele Decimalſtellen abſchneidet, als ihrer der Multiplicand enthält. — Übungen.

Als ſpeciellen Fall nehme man jenen, in welchem der Multiplicator eine reine Zehner-, Hunderterzahl u. ſ. f. iſt. Führe z. B. aus: $2 \cdot 0436 \times 300$.

$$\text{a)} \quad \begin{array}{r} 2 \cdot 0436 \\ \times \quad\quad 300 \\ \hline 613 \cdot 0800 \end{array} \qquad\qquad \text{b)} \quad \begin{array}{r} 2 \cdot 0436 \\ \times \quad\quad 300 \\ \hline 613 \cdot 08 \end{array}$$

Man nimmt im Producte um ſo viel Decimalen weniger, als im Multiplicator Nullen vorkommen. — Übungen.

3.) Eine ganze Zahl iſt mit einem Decimalbruch zu multiplicieren.

Multipliciere z. B. $428 \times 0 \cdot 32$.

Man multipliciere $0 \cdot 32$ mit 100 u. ſ. w. wie in 2. — Übungen.

4.) Ein Decimalbruch iſt mit einem Decimalbruch zu multiplicieren.

Multipliciere $4 \cdot 32 \times 13 \cdot 082$.

Man nehme den Multiplicand 4·32 100 mal und den Multiplicator 1000 mal und führe dann mit den erhaltenen ganzen Zahlen die Multiplication aus; das erhaltene Product ist 100000 mal so groß als das richtige; um das richtige Product zu bekommen, muſs man das erhaltene noch durch 100000 dividieren. Darnach führen wir aus:

$$\begin{array}{r} 4{\cdot}32 \\ \times\quad 100 \\ \hline 432 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13{\cdot}082 \\ \times\quad 1000 \\ \hline 13082 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 432 \times 13082 \\ \hline 5651424 : 100000 \\ \hline 56{\cdot}51424 \end{array}$$

Aus diesen und ähnlichen Beispielen erkennt man die Regel:

Ein Decimalbruch wird mit einem Decimalbruch multipliciert wie eine ganze Zahl mit einer ganzen Zahl, nur muſs man im Producte so viele Decimalen abschneiden, als ihrer beide Factoren zusammen haben.

Die erhaltenen Regeln kann man auch ableiten, wenn man die Decimalbrüche als gemeine Brüche betrachtet. «... Dagegen ist alles so einfach, wenn den Kindern die Bruchrechnung bekannt ist, man schreibt die Factoren als eingerichtete Brüche auf, führt die Multication aus und schreibt das Product wieder als Decimalbruch, z. B.: $72{\cdot}842 \times 56{\cdot}48 = \frac{72842}{1000} \times \frac{5648}{100} = \frac{72842 \times 5648}{100000} = \frac{411411616}{100000} =$ $= 4114{\cdot}11616.$» (Quitzow.)

Nach Quitzow soll nämlich die Rechnung mit gemeinen Brüchen der Rechnung mit Decimalbrüchen vorangehen. — Übungen.

Division der Decimalbrüche.

§ 112. Als Einleitung dividiere man eine ganze Zahl durch eine ganze Zahl, die in der ersten nicht ohne Rest enthalten ist und stelle den Quotienten durch einen Decimalbruch dar. Z. B.:

$$\begin{array}{l} 613 : 25 = 24{\cdot}52 \\ 113 \\ 130 \\ 50 \end{array}$$

Übungen.

1.) Division eines Decimalbruches durch 10, 100, 1000... Ist schon aus § 106 bekannt.

2.) Division eines Decimalbruches durch eine ganze Zahl.

Es sei 802·01 durch 23 zu dividieren.

802·01 : 23 = 34·87
112
200
161

80 Zehner dividiert durch 23 gibt 3 Zehner, und es bleiben noch 11 Zehner oder 110 Einer, dazu 2 Einer sind 112 Einer. 112 Einer dividiert durch 23 gibt 4 Einer, und es bleiben noch 20 Einer oder 200 Zehntel, dazu 0 Zehntel sind 200 Zehntel. 200 Zehntel dividiert durch 23 gibt 8 Zehntel; bevor man jedoch die 8 Zehntel in den Quotienten schreibt, setzt man nach den 4 Einern den Decimalpunkt. Das weitere Verfahren ist aus dem Gesagten ersichtlich.

Aus diesem und ähnlichen Beispielen erkennt man:

Ein Decimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividiert wie eine ganze Zahl, nur hat man im Quotienten den Decimalpunkt zu setzen, wenn man im Dividend bis zum selben kommt. — Übungen.

3.) Division durch einen Decimalbruch.

Vorübungen: $\frac{12 : 6}{2}$ $\frac{120 : 60}{2}$ $\frac{1200 : 600}{2}$ u. s. f.

Der Wert des Quotienten bleibt unverändert, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliciert.

Es sei z. B. 119·4078 durch 28·03 zu dividieren.

119·40 78 : 28·03

11940·78 : 2803 = 4·26
7287
1681 8

Um diese Division auszuführen, multipliciere man Dividend und Divisor mit 100, wodurch der Wert des Quotienten nicht verändert wird. Nun ist die Division in eine Division eines Decimalbruches durch eine ganze Zahl verwandelt; das weitere Verfahren ist aus 2.) bekannt.

Aus diesem und ähnlichen Beispielen erkennt man, dass man den Divisor, der 1, 2, 3 ... Decimalstellen hat, nur mit 10, 100, 1000 ... zu multiplicieren braucht, um die Division durch einen Decimalbruch in eine Division durch eine ganze Zahl zu verwandeln. Damit aber der Wert des Quotienten unverändert bleibt, muss man den Dividend mit derselben Zahl multiplicieren als den Divisor. Kurz: Man lasse im Divisor den Decimalpunkt ganz einfach aus und rücke ihn im Dividende um so viele Stellen gegen die Rechte, als der Divisor Decimalen hat.

Sechster Abschnitt.

Angewandtes Rechnen.

Angewandtes Rechnen auf der Unter- und Mittelstufe.

Ziel und Umfang des Rechnens.

§ 113. Nach den vorgeschriebenen Lehrplänen für Österreich wird als Ziel «Sicherheit und Fertigkeit in der mündlichen und schriftlichen Lösung der im Verkehre des gewöhnlichen Lebens vorkommenden Berechnungen» gefordert. Es werden also jedenfalls nicht wissenschaftliche, z. B. physikalische, geographische, naturgeschichtliche, astronomische Aufgaben u. s. w. verlangt, wenigstens solche nicht, die im Verkehre des gewöhnlichen Lebens nicht vorkommen. Welchen Wert für die Volksschule hat auch z. B. eine Aufgabe vom freien Falle, von der Geschwindigkeit des Lichtes, von der Umlaufszeit verschiedener Planeten, von exotischen Thieren und Pflanzen u. s. w., wenn dadurch ein Hindernis für die Erreichung des im Obigen angeführten Zieles entsteht? Solche Aufgaben gehören mehr dem entsprechenden Fache an, wo ihr Inhalt zur vollen Klarheit gebracht werden kann.

Das Gebiet, auf welches das Rechnen anzuwenden ist, ist überhaupt sehr groß, so groß, dass unmöglich alles zu Berechnende berührt werden kann, was aber auch nicht nothwendig ist. Die Volksschule hat nur die Aufgabe, den Schüler zu befähigen, jede im Verkehre des Lebens vorkommende Aufgabe sicher und fertig lösen zu können. Zu dem Zwecke muss ihm 1.) der Inhalt der Aufgabe durch und durch klar sein (Kenntnis der sachlichen Verhältnisse), 2.) er muss aus den in der Aufgabe gegebenen Verhältnissen auf die Operation schließen (Operationsschluss) und 3.) die Operation selbst fertig ausführen können.

Dem Punkte 1 gehörig zu entsprechen erscheint insoferne schwierig, als das zu Berechnende zu umfangreich ist. Diese Schwierigkeit ist jedoch nur eine scheinbare und wird thatsächlich behoben, wenn man das ganze

Rechengebiet in solche Kreise theilt, dass jeder Rechenkreis einen gleichartigen Inhalt umfasst. Dies soll, wie sich aus den Beispielen verschiedener Rechenbücher für die Unter- und Mittelstufen ergeben hat, am Folgenden ersichtlich gemacht werden.

A. Inhalt der Aufgaben.

Eintheilung des Rechengebietes in Rechenkreise.

Erster Rechenkreis.

§ 114. Der Stoff wird aus dem Erfahrungsgebiete des Kindes, welches sich ihm von Natur aus bietet, genommen. Die benannten Zahlen gehören nur der ersten Hauptgruppe an.

Beispiele.

1.) Dieses Zimmer hat 3 Fenster auf die Gasse und 1 Fenster auf den Hof; wie viel Fenster sind es zusammen?

2.) Im Garten stehen 5 Obstbäume, 2 davon wirft ein Sturm um; wie viel Bäume bleiben noch stehen?

3.) Wie viel Räder haben 2 vierrädrige Wagen?

4.) Jemand hat 8 Pferde; wie viel Wagen kann er damit bespannen, wenn er an jeden 2 Pferde spannt?

5.) Wilhelm hat 8 Nüsse, er will daraus 2 gleiche Häufchen machen; wie viel Nüsse wird er auf 1 Häufchen legen?

Zweiter Rechenkreis.

§ 115. Die benannten Zahlen der Aufgaben gehören der zweiten Hauptgruppe an.

Beispiele.

1.) In einen Topf, der 1 *kg* wiegt, gibt man 3 *kg* Butter; wie viel Kilogramm wiegt dann der Topf sammt der Butter?

2.) Von 8 *m* Leinwand schneidet eine Frau 2 *m* ab; wie viel Meter bleiben noch übrig?

3.) Eine Kuh gibt 8 *l* Milch täglich; wie viel Liter Milch geben 3 solcher Kühe?

4.) Wie groß ist eine Baustelle, welche 924 fl. kostet, wenn das Quadratmeter mit 7 fl. bezahlt wird?

5.) Eine 20 *cm* lange Kerze verbrennt in 5 Stunden; wie viel Centimeter der Kerze verbrennen in 1 Stunde?

Bemerkungen zum ersten Rechenkreise.

§ 116. Auf den ersten Blick erkennt man, dass die Aufgaben des ersten Rechenkreises sehr anschaulich sind, weil sie aus dem Erfahrungskreise des Kindes genommen sind. Solche Aufgaben sind also besonders geeignet, dem Kinde den Operationsschluss zur klaren Auffassung zu bringen, sie demselben sozusagen abfühlen zu lassen, weil der Inhalt der Aufgabe keine Schwierigkeit in den Weg legt, das Kind also seine ganze Aufmerksamkeit auf den Schluss concentrieren kann. Daraus folgt: Die Aufgaben des ersten Rechenkreises haben in das angewandte Rechnen einzuleiten, gehören also der Unterstufe an. Auf der Mittel- und Oberstufe haben sie nur dann eine Berechtigung, wenn der Operationsschluss (bei großen Zahlen oder bei zusammengesetzten Schlüssen) Schwierigkeiten machen sollte.

Wenn einmal das Kind z. B. folgende Aufgaben: «a) Karl bekommt von der Mutter 3 Äpfel und vom Onkel 2; wie viel Äpfel bekommt er im ganzen? b) Minna hat in ihrer Sparcasse 4 kr. und bekommt vom Vater noch 3 kr. dazu; wie viel hat sie dann in der Sparcasse?» und andere solche geläufig lösen kann, so macht ihm auch die Aufgabe: «Ein Dorf hatte früher 120 Häuser, dazu kamen in den letzten Jahren 20 neue; wie viel Häuser hat es jetzt?» und andere solche gar keine Schwierigkeit mehr.

Die gleichen Bemerkungen gelten für die übrigen Operationen. In dem angedeuteten Momente erscheint der erste Rechenkreis bis auf die im Obigen erwähnten Ausnahmen abgeschlossen und für das Kind gesichert.

Bemerkungen zum zweiten Rechenkreise.

§ 117. Vergleiche die Worte Hentschels Seite 65. Das Kind soll also in der Schule klar ersehen, dass man und was man zählt, misst, wägt, zahlt u. s. w. Bei genauer Durchsicht verschiedener Rechenbücher und Gruppierung der Rechenaufgaben auf der Unter- und Mittelstufe ergeben sich für diesen Kreis zunächst drei besondere Gattungen von Aufgaben: Zeitrechnungen, Warenrechnungen* und Zinsrechnungen.**

---

* Mit dem Namen Warenrechnung wird jede Rechnung, in welcher ein Object als Ware vorkommt, bezeichnet.

** Von vielen wird die Zinsrechnung, und zwar mit Recht, auf die Oberstufe verlegt.

Zeitrechnung.

(Größtentheils nach Hentschel.)

§ 118. Jeder größere oder kleinere Theil der Zeit ist ein Zeitraum oder Zeitabschnitt. Die Zeit wird gemessen mit den Zeitmaßen. Die wichtigsten Zeitmaße sind: Jahr, Monat, Woche, Tag, Stunde, Minute und Secunde.* Die Rechnung mit diesen Zeitmaßen ist die Zeitrechnung im weiteren Sinne. Diese umfaſst alle vier Rechnungsarten nebst Resolution und Reduction und bringt feste Verwandlungszahlen in Anwendung. (1 Jahr = 12 Monate oder 52 Wochen; 1 Monat = 30 Tage.)

Diese Zeitrechnung kann als eine Vorbereitung auf die Zeitrechnung im engeren Sinne des Wortes aufgefaſst werden; letztere verdient genauer betrachtet zu werden.

Zeitrechnung im engeren Sinne des Wortes.

§ 119. Bei jedem größeren oder kleineren Zeitraume kommen drei Stücke in Betrachtung, nämlich der Ausgangspunkt, die Dauer und der Endpunkt. Aus zweien dieser Stücke läſst sich das dritte bestimmen, und mit diesen Bestimmungen hat die Zeitrechnung im engeren Sinne zu thun. Sie hat zwei Grundrechnungsarten nöthig, die Addition und die Subtraction.

Beispiele.

1.) Karl geht um 8 Uhr in die Schule und bleibt darin zwei Stunden; wann verläſst er dieselbe?

2.) Albert kommt um 8 Uhr in die Schule und verläſst dieselbe um 10 Uhr; wie lange war er in der Schule?

3.) Bertha geht um 11 Uhr aus der Schule, wo sie drei Stunden verweilte; wann kam sie in die Schule?

I. Der Tag und seine Eintheilung.

1. Es werden nur die Stunden berücksichtigt.

§ 120. Die Zeit, in welcher sich die Erde einmal um ihre Achse dreht, heißt ein Tag.** Der Tag zerfällt in 24 Stunden, welche von

* Andere Zeitmaße sind: Lustrum (5 Jahre), Decennium (10 Jahre), Menschenalter (30 Jahre), Säculum (100 Jahre), Milliade (1000).

** Die Erläuterung des Tages auf diese Art gehört wohl erst auf die Oberstufe. Vergleiche diesbezüglich den praktischen Theil vom selben Verfasser.

Mitternacht an als 2 mal 12 Stunden gezählt werden. Eine Stunde nach Mitternacht zählt man 1 Uhr, 2 Stunden nach Mitternacht 2 Uhr u. s. f. bis 12 Uhr. 12 Uhr ist Mittag; dann steht die Sonne am höchsten. 1 Stunde nach Mittag fängt man bei uns wieder mit 1 Uhr an und zählt abermals bis 12 Uhr fort; dann ist Mitternacht, das Ende des Tages und der Anfang des folgenden.

Da man den bürgerlichen Tag in 2 mal 12 Stunden zählt, so muss der Stundenzahl eine Bestimmung beigefügt werden, um anzuzeigen, in welche Hälfte des Tages sie fällt. Bestimmungen dieser Art sind: morgens, vormittags, mittags, nachmittags, abends, nachts.

a) Zeitbestimmungen innerhalb eines Kalendertages.

1.) Bestimmung der Zahl der verflossenen Stunden des Tages, und zwar *α)* ohne Übergang, *β)* mit Übergang in die andere Hälfte des Tages. Z. B. Wie viel Stunden sind vom Tage verflossen: *α)* vormittags 10 Uhr, *β)* nachmittags 5 Uhr?

2.) Bestimmung der Tageszeit aus der Zahl der verflossenen Stunden des Tages *α)* ohne, *β)* mit Übergang. Z B. Wie viel Uhr ist es, wenn vom Tage verflossen sind: *α)* 8 Stunden, *β)* 17 Stunden?

3.) Bestimmung der Zahl der Stunden zwischen zwei Zeitterminen des Tages *α)* ohne, *β)* mit Übergang. Z. B. Wie viel Stunden liegen *α)* zwischen 2 Uhr morgens und 10 Uhr vormittags, *β)* zwischen 9 Uhr vormittags und 7 Uhr abends?

4.) Bestimmung des Endtermines aus dem Anfangstermine, der nicht mit 12 Uhr nachts zusammenfällt, und der Dauer *α)* ohne, *β)* mit Übergang. (Vergl. 2.) Z. B. Ein Kinderfest begann um 3 Uhr nachmittags und dauerte 4 Stunden; wann endigte es?

5.) Bestimmung des Anfangstermines aus dem Endtermine und der Dauer *α)* ohne, *β)* mit Übergang. Z. B. Der Vater machte eine Reise von Marburg nach Wien in 10 Stunden. Er kommt nachmittags um 4 Uhr dort an; wann ist er abgereist?

b) Zeitbestimmung innerhalb zweier Kalendertage.

Der Gang ist dem früheren ähnlich und soll nur durch Beispiele ersichtlich gemacht werden.

1.) Wie viel Stunden verfließen von 9 Uhr abends bis 5 Uhr früh am folgenden Tage?

2.) Der menschenfreundliche Arzt K. verweilte von 10 Uhr abends an 4 Stunden am Bette eines armen Kranken; bis zu welcher Zeit also?

3.) Ein Zug braucht von Wien bis Marburg 10 Stunden; wenn er von Wien um 10 Uhr abends abgeht, wann kommt er in Marburg an?

2. Es werden Stunden, Minuten und Secunden berücksichtigt.

Die Hauptfälle sollen an Beispielen erläutert werden.

1.) Wie viel Zeit vergeht *a)* von 3 Uhr morgens bis 5 Uhr 20 Min. morgens; *b)* von 7 Uhr 15 Min. morgens bis 9 Uhr 45 Min. morgens; *c)* 10 Uhr 20 Min. abends bis 6 Uhr 45 Min. früh?

Eine Steigerung findet durch Aufnahme der Secunden in die Beispiele statt, wozu keine weitere Erläuterung nothwendig ist.

2.) Bestimmung des Endtermines, 3.) Bestimmung des Anfangtermines a) innerhalb eines Kalendertages, b) innerhalb zweier Kalendertage. Beispiele ergeben sich nach 1.) von selbst.

II. Die Woche.

§ 121. 7 Tage machen 1 Woche. Die Wochentage heißen: Sonntag, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag. Im engeren Sinne versteht man unter «Woche» den Zeitraum vom Anfang des Sonntags bis zum Ende des Samstags; im weiteren Sinne jede Frage von 7 mal 24 Stunden, z. B. von Dienstag vormittags 11 Uhr bis nächsten Dienstag vormittags 11 Uhr.

Beispiele.

1.) Wie viel Zeit liegt zwischen Montag vormittags 10 Uhr 50 Min. und Freitag abends 7 Uhr 16 Min.?

Auflösung: Von Montag vormittags 10 Uhr 50 Min. bis ebendahin am Freitage sind 4 Tage u. s. w.

2.) Bestimme die Zeit von Mittwoch abends 10 Uhr 12 Min. um 1 Tag 10 Std. 45 Min. weiter.

3.) Wann waren 3 Tage 10 Std. 25 Min. vor Montag nachmittags 3 Uhr 45 Min.?

Genauere Abstufungen ergeben sich aus den zuerst angeführten fünf Fällen für den Tag von selbst.

III. Das Jahr und die Monate.

§ 122. Die Zeit, in welcher sich die Erde einmal um die Sonne bewegt, heißt ein **Jahr**. Das Jahr zählt 365 Tage 5 Std. 48 Min. 48 Sec. Da nun das gemeine Jahr in runder Zahl zu 365 Tagen gerechnet wird, so macht man damit einen Fehler von 5 Std. 48 Min. 48 Sec. Um diesen zu decken, läſst man auf je drei gemeine Jahre ein Schaltjahr von 366 Tagen folgen, in welchem dann auf den Monat Februar 29 Tage gezählt werden, während er im gemeinen Jahre nur 28 Tage hat. Ein Schaltjahr erkennt man daran, daſs seine Jahreszahl durch 4 ohne Rest theilbar ist.

Man begeht aber freilich wiederum einen Fehler, wenn man alle vier Jahre ein Schaltjahr setzt; denn 4 mal 5 Std. 48 Min. 48 Sec. = = 23 Std. 15 Min. 12 Sec. betragen keinen vollen Tag. Man nimmt in vier Jahren 44 Min. 48 Sec. und in 400 Jahren 3 Tage 2 Std. 40 Min. zu viel. Damit auch diese Unrichtigkeit ausgeglichen werde, so fallen alle 400 Jahre drei Schaltjahre aus, und zwar diejenigen, deren Jahreszahlen runde Hunderter sind, ohne daſs die Summe der Hunderter durch 4 theilbar ist. 1600, 2000, 2400 sind Schaltjahre; 1700, 1800, 1900 sind gemeine Jahre.*

Das Jahr hat 12 Monate. Der erste Monat ist der **Jänner** und hat 31 Tage, der zweite Monat heißt **Februar** und hat 28 Tage im gemeinen und 29 Tage im Schaltjahre u. s. w., wie allgemein bekannt.

Beim Bestimmen des jedesmaligen Monatstages gibt man an, der **wievielte** Tag der **laufende** sei. Schreiben wir also z. B. den 12. October, so sind vom October eilf ganze Tage vorüber, der zwölfte ist jedoch noch nicht ganz verflossen.

Beispiele.

1.) Wie viel Monate und Tage sind am 13. August seit dem Anfange des Jahres verflossen?

2.) Welches Datum schreibt man, wenn 9 Monate 17 Tage vom Jahre vorüber sind?

3.) Wie viel Zeit ist am 24. Juni nachmittags 3 Uhr 42 Min. seit dem Anfange des Jahres verflossen? — 6 Mon. 23 Tage 15 Stunden 42 Min.

---

* Die Erläuterung des Jahres auf diese Art gehört wohl erst auf die Oberstufe. Vergleiche diesbezüglich den praktischen Theil vom selben Verfasser.

4.) Wie viel Zeit verfließt vom 6. December bis zum 21. December?

5.) Wie viel Zeit verfließt vom 12. Juli bis 12. November. — Auflösung: November ist der 11. Monat, Juli der 7. Monat des Jahres; 11 weniger 7 u. s. w.

6.) Wie viel Zeit verfließt vom 17. Mai bis zum 30. September? — 4 Mon. 13 Tage.

7.) Wie lange dauert noch das laufende Jahr vom 15. August an?

8.) Der Onkel brachte auf einer Reise, die er am 5. December antrat, 9 Mon. 28 Tage zu; wann kehrte er zurück? — Am 3. October folgenden Jahres.

IV. Die christliche Zeitrechnung.

§ 123. Das große Ereignis, nach welchem wir Christen die Jahre zählen, ist die Geburt Jesu Christi. Wir leben jetzt im Jahre 1888, d. h. das gegenwärtige Jahr ist das 1888. nach Christi Geburt; es sind also 1887 Jahre seitdem verflossen. Am 31. Dezember 1888 nachts Punkt 12 Uhr werden 1888 volle Jahre vorüber sein; in demselben Augenblicke wird das Jahr 1889 seinen Anfang nehmen.

Beispiele.

1.) Welche Zeit ist seit Christi Geburt bis zur Geburt unseres Kaisers Franz Josef I. am 18. August 1830 verflossen?

2.) Welches Datum schreibt man, wenn 1857 Jahre 7 Mon. 14 Tage seit Christi Geburt verflossen sind?

3.) Kaiser Franz I. ward am 12. Februar 1768 geboren und starb in einem Alter von 67 Jahren 18 Tagen; wann starb er?

Auflösung: Erstes Verfahren geeignet fürs Kopfrechnen.

67 Jahre nach dem 12. Februar 1768 war der 12. Februar 1835,
18 Tage nach dem 12. Februar 1835 war der 2. März 1835.

Somit starb Kaiser Franz I. am 2. März 1835.

Zweites Verfahren, welches meistens beim Zifferrechnen angewendet wird.

Seit Chr. Geb. bis zur Geburt des Kaisers Franz I. sind
1767 Jahre 1 Monat 11 Tage verflossen, und bis
zu seinem Tode noch 67 Jahre — Monat 18 Tage, d. i.
1834 Jahre 1 Monat 29 Tage oder, da der Monat Februar des Jahres 1835 nur 28 Tage hat, 1834 Jahre 2 Monate 1 Tag.

Somit starb er am 2. März 1835.

4.) Jemand ist heute 18 Jahre 7 Monate 24 Tage alt; wann wurde er geboren?

5.) Jemand wurde am 18. Oktober 1856 geboren und starb am 5. Mai 1886; wie alt ist er geworden?

Für 4.) und 5.) sind wie für 3.) zwei Verfahren möglich.

Wird die Zeitrechnung in dem vorgeführten Sinne stufenmäßig behandelt, so wird dieselbe lückenlos und zur vollsten Fertigkeit an der Unter- und Mittelstufe erledigt. — Für die Oberstufe verbleibt nur eine genaue Besprechung darüber, wodurch die Länge des Tages und des Jahres bestimmt wird. Die Länge des Tages durch die Achsendrehung der Erde, die Länge des Jahres durch den Umlauf der Erde um die Sonne. (Vergl. oben.)

Warenrechnung.

§ 124. Die Waren werden gezählt, gemessen, gewogen, d. h. es wird die Quantität der Ware bestimmt, und die Waren werden bezahlt. Daraus folgt, dass man dem Schüler zweierlei Aufgaben vorzuführen hat: 1.) Quantitätsaufgaben, 2.) Preisaufgaben.

Beispiele.

1.) Ein Zuckerhut wiegt 9 *kg*, ein zweiter 8 *kg*; wie viel wiegen beide zusammen? (Quantitätsaufgabe.)

2.) Jemand verkauft 2 *hl* Getreide, das eine um 3 fl., das andere um 4 fl.; wie viel nimmt er ein? (Preisaufgabe.)

3.) 1 *l* Wein kostet 4 Zehner; wie viel kosten 3 *l* Wein? (Preisaufgabe.)

Aufgaben wie 2.) werden in der Regel nicht Preisaufgaben genannt. In einer sogenannten Preisrechnung wird nach dem Preise der Mehrheit oder nach dem Preise der Einheit gefragt. Diese Gattungen Preisrechnungen, die der Multiplication und Division angehören, mögen eigentliche Preisrechnungen heißen.

Um also die Warenrechnung den Schülern zur vollen Einsicht zu bringen, müssen sie 1.) klar erkennen, wie die Waren gezählt, gemessen, gewogen und welche gezählt, welche gemessen, welche gewogen werden; 2.) sich zunächst über die Preisbestimmung der Waren orientieren.

Ersteres wird theilweise schon bei der Besprechung der Maße erreicht, indem man daselbst nicht bloß das Zählen, Messen, Wägen vorführt, sondern auch fragt: «Welche Waren werden gezählt, welche gewogen u. s. w.?» (Vergl. «Praktischer Theil» desselben Verfassers.) Theilweise, und zwar in größerem Maße noch an Aufgaben, wie z. B.:

1.) Eine Kuh gibt täglich 5 *l* Milch, eine andere nur 4 *l*; wie viel beide zusammen?

2.) Ein Stück Tuch misst 8 *m*, ein anderes 10 *m*; wie viel beide zusammen?

Zweites, nämlich die Orientirung in der Preisbestimmung wird erreicht durch Aufgaben, wie:

1.) Karl kauft einen Federstiel um 4 kr. und ein Heft um 5 kr.; wie viel muss er im ganzen zahlen?

2.) Emma hat 4 kr. und kauft ein Schreibheft um 2 kr.; wie viel Geld behält sie noch?

Solche Aufgaben, die der Addition und Subtraction insbesondere angehören, dienen als vorbereitende Aufgaben auf eigentliche Preisrechnungen.

Für die Warenberechnungen ergeben sich demnach zwei Rechenkreise: der Quantitätskreis und der Preiskreis.

Der Quantitätskreis.

§ 125. Der Quantitätskreis im angeführten Sinne gehört hauptsächlich der Unterstufe an. An der Mittel- und Oberstufe hat er nur eine Berechtigung, wenn der Operationsschluss (bei großen oder auch mehrnamigen Zahlen und bei zusammengesetzten Schlüssen) Schwierigkeiten machen sollte.

Wenn einmal das Kind z. B. folgende Aufgaben: «a) Albert trägt 4 *kg* Zucker und 2 *kg* Mehl; wie viel hat er im ganzen zu tragen? b) Die Mutter kauft für einen Rock 2 *m* Tuch und für eine Hose 1 *m*; wie viel im ganzen? u. s. w.» geläufig lösen kann, so macht ihm auch die Aufgabe: «Ein Fuhrmann ladet auf seinen Wagen 124 *kg* Eisen, 84 *kg* Reis, 76 *kg* Mehl; wie schwer ist die ganze Ladung?» und andere ähnliche gar keine Schwierigkeit mehr.

Die gleichen Bemerkungen gelten auch für die übrigen Operationen. In dem angedeuteten Momente erscheint der Quantitätskreis bis auf die erwähnten Ausnahmen abgeschlossen und den Schülern gesichert. Um sich nicht zu viel zu wiederholen, gelte diese Bemerkung auch für alle übrigen noch zu besprechenden Kreise.

Zergliederung des Quantitätskreises.

§ 126. Da die verschiedenen Maßarten nach und nach den Kindern vorzuführen sind, so zerfällt der Quantitätskreis von selbst in die verschiedenen Maßkreise: Zählkreis,* Längenmaßkreis, Hohlmaßkreis, Gewichtskreis, Flächenmaßkreis, Körpermaßkreis.

Beispiele.

1.) Karl verbraucht für ein Heft 4 Bogen, für ein anderes 3 Bogen; wie viel für beide zusammen? (Zählkreis.)

2.) Die Mutter kauft für einen Rock 2 *m* Tuch und für eine Hose 1 *m;* wie viel im ganzen? (Längenmaßkreis.)

Wie die Beispiele für die übrigen Kreise und die anderen Operationen zusammenzustellen sind, ergibt sich deutlich aus den beiden angeführten.

Der Preiskreis.

Zergliederung des Preiskreises.

§ 127. Der Preiskreis zerfällt in den Münzenkreis und in den Preiskreis im engeren Sinne des Wortes. Der Münzenkreis fällt, die Münze als Zählobject aufgefaßt, mit dem Zählkreise zum Theile zusammen, zum Theile jedoch bildet er einen sehr wichtigen eigenen Kreis, der als Geldkreis bezeichnet werden soll.

Beispiele.

1.) Robert bekommt vom Vater 4 kr. und von der Mutter 2 kr.; wie viel von beiden? (Zählkreis.)

2.) Ein Kaufmann kauft eine Partie Kaffee um 428 fl. und verkauft sie um 508 fl.; wie viel gewinnt er dabei? (Geldkreis.)

3.) Jemand bekommt von seinem Gehalte monatlich 120 fl. und zahlt für die Wohnung 23 fl. Miethe; wie viel bleibt ihm für die übrigen Bedürfnisse übrig. (Geldkreis.)

4.) Eine Köchin holt 1 *l* Bier um 20 kr. und 1 *l* Wein um 32 kr.; wie viel kostet beides? (Vorb. Preiskreis.)

5.) 1 *l* Milch kostet 10 kr.; wie viel kosten 5 *l?* (Eigentlicher Preiskreis.)

6.) 8 *m* Tuch kosten 24 fl.; a) wie viel kostet 1 *m* Tuch; b) wie viel 5 *m?* (Eigentlicher Preiskreis.)

---

* Gehört zugleich, wenigstens theilweise, in den Erfahrungskreis des Kindes.

Der Geldkreis.

§ 128. In den Geldkreis gehören Berechnungen über Einnahmen und Ausgaben, über Ersparnisse, über Lohn, über Miete, Steuer, Gewinn und Verlust, Schuldscheine, Hypotheken u. s. w. Diese Aufgaben sollen nach dem Grundsatze «vom Näherliegenden zum Entfernteren» geordnet und der Gesichtskreis des Kindes diesbezüglich seinem Fassungsvermögen entsprechend erweitert werden.

Zum Geldkreise gehört auch die Zinsrechnung, die sonst als ein eigener Kreis behandelt wird.

Zinsrechnungen.

§ 129. Die Zinsrechnung wird mit vollem Rechte auf die Oberstufe verwiesen; Močnik behandelt sie schon im Raume 1—1000. Zur Erläuterung sollen die Worte Salbergs, der das Rechnen in ein niederes und in ein höheres scheidet, dienen: «Während dort (beim niederen Rechnen) die Sache zur Erkenntnis der Zahl zu dienen hat, sind hier mit Hilfe der Zahl neue Sachkenntnisse zu erwerben.» Nur würde besser das niedere Rechnen auch den unbegrenzten Zahlenraum umfassen und nicht bloß den Raum 1—1000, wie Salberg es meint. Andererseits kann der Gesichtskreis des Kindes wenigstens durch näher liegende Sachkenntnisse schon im Raume 1—1000, z. B. durch Rechnungen über Einnahmen und Ausgaben, über Mietzins u. s. f., erweitert werden. Der Begriff «Zins» für ausgeliehenes Geld muss jedoch erst im Kinde zur Reife gebracht werden, bevor man mit Zinsrechnungen beginnt.

Auf Zinsrechnungen bereitet man vor durch Aufgaben wie:

1.) Jemand leiht seinem Nachbar 100 fl. auf ein Jahr, dafür muss er ihm am Ende des Jahres 5 fl. mehr zurückzahlen; wie viel also?

2.) Jemand hat drei Capitalien ausgeliehen, das eine beträgt 324 fl., das andere 158 fl. und das dritte 412 fl.; wie viel betragen alle drei Capitalien zusammen?

3.) Jemand hat zwei Capitalien ausgeliehen, das eine trägt jährlich 128 fl. Zins, das andere 82 fl. Zins; wie groß ist der Jahreszins beider Capitalien?

Nachdem an solchen vorbereitenden Aufgaben, die sich periodisch wiederholen, die Begriffe «Capital» und «Zins» von den Schülern klar aufgefasst wurden, nachdem man ihnen zum Bewusstsein gebracht hat, dass man für ein ausgeliehenes Geld immer Zinsen bekommen muss, dann sind sie für die Zinsrechnung reif.

Bei den Zinsrechnungen kann der Begriff «Procente» vorkommen oder nicht. Z. B.:

1.) Jemand leiht 300 fl. auf ein Jahr mit der Bedingung aus, dass man ihm Ende des Jahres von je 100 fl. 5 fl. Zins zahlt; wie viel muss man ihm am Ende des Jahres zurückzahlen?

2.) Jemand leiht 300 fl. auf 1 Jahr zu 5 % aus; wie viel muss man ihm am Ende des Jahres zurückzahlen?

Aufgaben wie 1.) müssen den Aufgaben wie 2.) vorausgehen; nachdem die erste Gattung der Aufgaben von den Schülern geläufig gelöst werden kann, sind sie für die zweite Gattung reif.

Auf 2.) bereiten auch Aufgaben vor wie: «Wie viel Gulden Zinsen bekommt man von 1 fl. zu 5 %; wie viel von 24 fl.?» und diese Lösungsweise eignet sich insbesondere fürs Kopfrechnen.

Verhältniskreis.

§ 130. Durch Aufgaben wie: «Eine Mühle hat sechs Gänge, auf jedem Gang werden täglich 5 *hl* Korn gemahlen; wie viel auf allen?» wird man auf Aufgaben geführt, in denen zwei oder mehrere verschiedenartige Größen zu einander in ein Abhängigkeitsverhältnis treten, und zwar so, dass wenn die eine 2, 3, 4 mal so groß wird, die andere a) auch 2, 3, 4 mal so groß, oder b) 2, 3, 4 mal so klein wird. Das erstere Abhängigkeitsverhältnis nennt man ein gerades, das zweite ein verkehrtes.

«Es ist wichtig, dass man den Schüler von allem Anfang an auf diesen Sachverhalt aufmerksam macht. Frühzeitig werde es ihm klar, dass die Vielheit aus der Einheit nicht immer durch Multiplication und die Einheit aus der Vielheit nicht immer durch Division berechnet werden kann, sowie dass die Aufgaben, in welchen die Zeit in Betracht kommt, besondere Vorsicht verlangen.» (Knilling.)

Gelöst werden diese Aufgaben nach der Schlussrechnung. (Vergl. § 139, 140.)

Beispiele.

1.) Eine Mühle u. s. w. Sieh oben. (Gerades Verhältnis.)

2.) Eine Mauer vollenden vier Maurer in zwei Tagen; in welcher Zeit wird ein Maurer damit fertig? (Verkehrtes Verhältnis.)

Diesen Rechnungskreis wollen wir Verhältniskreis nennen. In den Verhältniskreis gehören auch die eigentlichen Preisrechnungen, sie können also als ein specieller Fall dieses Kreises betrachtet werden.

Zusammenfassung des Gewonnenen.

§ 131. Aus dem Vorangehenden ergibt sich, wie das Rechengebiet, welches in den bekannten Rechenbüchern auf der Unter- und Mittelstufe in Rechnung gezogen wird, in Rechenkreise zerfällt. Im folgenden Schema sei diesbezüglich eine Übersicht gegeben. Die wissenschaftlichen Aufgaben wurden nicht berücksichtigt.

Erster Rechenkreis. Rechnen mit benannten Zahlen der ersten Hauptgruppe.

Zweiter Rechenkreis. Rechnen mit benannten Zahlen der zweiten Hauptgruppe.

Zergliederung des zweiten Rechenkreises in: 1.) Zeitrechnung, 2.) Warenrechnung.

Die Zeitrechnung ist im weiteren und engeren Sinne zu nehmen.

Die Warenrechnung zerfällt wieder: 1.) in Quantitäts- und 2.) in Preisrechnungen.

Die Quantitätsrechnung umfasst: den Zählkreis, Längenmaßkreis, Hohlmaßkreis, Gewichtskreis, Flächenmaßkreis, Körpermaßkreis. — (Münzenkreis.)

An den Münzkreis gesellt sich der Geldkreis, zu dem auch der Zinsenkreis gehört.

Der Zinsenkreis besteht aus vorbereitenden Aufgaben und eigentlichen Zinsrechnungen.

Der Preiskreis besteht aus dem vorbereitenden und eigentlichen Preiskreis.

Schließlich ergab sich der Verhältniskreis, dessen Größen im geraden oder im verkehrten Verhältnisse stehen.

Vertheilung der Rechenkreise auf die Zahlenräume.

§ 132. Aus dem Vorgeführten ergibt sich zunächst, dass sich der Stoff, welcher gewöhnlich an der Unter- und Mittelstufe behandelt wird, im Rechenkreise ordnen lässt, ja bei genauer Erwägung ergibt sich auch die Reihenfolge der Rechenkreise in den einzelnen Zahlenräumen. In den Zahlenraum

1 — 20

gehört jedenfalls der erste Rechenkreis, der Quantitätskreis mit dem Zählkreise, Längenmaßkreise, Hohlmaßkreise, Münzenkreise als Zählkreise, vorbereitende Preisrechnungen; der Gewichtskreis und der Zeitrechnungskreis sind in den Raum 1 — 100 zu verlegen.*

1 — 100.

In diesem Zahlenraume wiederholen sich die früheren Kreise und werden durch den Gewichtskreis und Zeitrechnungskreis erweitert. Eigentliche Preisrechnungen.**

1 — 1000.

Wiederholung der früheren Kreise. Die Zeitrechnung wird fortgesetzt. Einführung des Geldkreises. Vorbereitende Aufgaben auf die Zinsrechnung.

Unbegrenzter Zahlenraum.

Die Zeitrechnung kommt zum Abschluss. Rechnungen aus dem Geldkreise; vorbereitende Aufgaben auf die Zinsrechnung.*** Verhältniskreis.

Wenn einmal mehrere Rechenkreise behandelt sind, dann soll man natürlich dem Grundsatze genügen, dass der Stoff bezüglich der behandelten Rechenkreise möglichst abwechselt.

Aus dem Gesagten ergibt sich, wie der Rechenstoff dem Schüler vorzuführen ist, damit er sich möglichst frei und selbständig bewegen kann; das Gebiet, auf dem er sich zu tummeln hat, wird ihm bekannt. Dies gilt zunächst für die Unter- und Mittelstufe. Für die Oberstufe erscheint der Rechenstoff in den Rechenbüchern schon gruppiert. (Vergl. § 147.)

---

* Wenn die Anschauung des Verfassers, dass die Gewichte als Zeitmaße erst im Raum 1 — 100 zu behandeln sind, nicht getheilt wird, so werden sie nach den vorangegangenen Maßen im Raum 1 — 20 besprochen, wodurch der angeführte Gang nicht gestört wird.

** Auch die Preisrechnungen pflegt man gern schon im Raume 1 — 20 zu behandeln. Wer die Anschauungen des Verfassers nicht theilt, kann, ohne dem allgemeinen Gange Gewalt anzuthun, dieselben an die vorangehenden Rechnungen anreihen.

*** Wenn man die Zinsrechnungen nicht auf die Oberstufe verlegen will, könnten sie hier behandelt werden.

Stilisierung der Aufgaben.

§ 133. Die Aufgaben in den Rechenbüchern der früheren Jahrhunderte zeichneten sich durch eine bedeutende Länge aus, weil sie oft in Form einer Erzählung, einer Fabel u. s. w. gegeben wurden, um das Rechnen interessanter zu machen. Davon ist man jedoch in neuester Zeit abgekommen, und man nimmt in die Aufgaben nur das Wesentliche auf, damit sie leicht übersehen, die Sach- und Zahlenverhältnisse leicht erkannt werden. Fürs Kopfrechnen eignen sich so nur kurze Aufgaben, weil nur solche leicht gemerkt werden.

Die Aufgabe soll nicht zwei- oder gar mehrdeutig sein, wie z. B.: «Wie viel Kegel muſs man jedesmal treffen, damit man in vier Würfen 16 Kegel treffe, wenn nach jedem Wurfe die Kegel wieder aufgesetzt werden?»

In den Aufgaben kommen oft kurze Ausdrucksweisen vor, wie z. B.: zu (à, das Hektoliter à 20 fl.), wann (statt z. B. um wie viel Uhr), $^0/_0$ = das, was auf die Zahl 100 kommt u. s. w.

Damit also der Lehrer den Schülern in solchen Fällen möglichst verständlich ist, bediene er sich zunächst der längeren Ausdrucksweise und leite die Schüler auf die kürzere hin.

Ebenso gibt es Aufgaben, in welchen für die Berechnung nothwendige Zahlen gar nicht gegeben sind, weil man sie als bekannt voraussetzt. Z. B.: «Wie viel Räder haben zwei Wägen? Wie viel Ecken hat ein Würfel mehr als Seiten (Flächen)?»

Anfänglich sollten die ausgelassenen Zahlen in der Aufgabe angegeben werden. «Ein Wagen hat vier Räder, wie viel u. s. w.»

Oft wird in den Aufgaben eine stillschweigende Voraussetzung gemacht, damit sie kürzer ausfällt. Z. B.: 1 Arbeiter vollendet eine Arbeit in 30 Tagen, in wie viel Tagen vollenden dieselbe Arbeit 6 Arbeiter? Hier wird stillschweigend vorausgesetzt, daſs alle gleich gute Arbeiter sind.

B. Vom Schlusse.

§ 134. Nachdem der Inhalt der Aufgabe dem Schüler vollkommen geläufig ist, dann hat er dieselbe zu entkleiden und auf die Operation zu schließen. Der Schüler muſs erst durch Ueberlegung zu der Einsicht gelangen, daſs er zu addieren, zu subtrahieren, zu multiplicieren, zu messen oder theilen (zu dividieren) hat. Dieses

Geschäft nennen wir mit Diesterweg die Auflösung. Auf die Auflösung folgt die Ausrechnung und auf diese die Antwort. Die Antwort soll der Frage gut angepaßt werden.

Z. B. 1 *hl* Gerste kostet 4 fl., wie viel kosten 8 *hl?*

Auflösung: Wenn 1 *hl* 4 fl. kostet, so kosten 8 *hl* 8 mal so viel oder 8 mal 4 fl.

Ausrechnung: 8 mal 4 fl. sind 32 fl.

Antwort: 8 *hl* kosten also 32 fl.

Anfangs bereitet das Aussprechen der Auflösung und der Antwort den Kindern Schwierigkeiten. Man lasse sie die Aufgaben trotzdem selbständig lösen, gebe ihnen dann die richtige Redeweise an und lasse dieselbe wiederholen.

Man unterscheidet einfache und zusammengesetzte Schlüsse.

Einfache Schlüsse.

Beispiele, aus denen die Operationsschlüsse erkannt werden.

Additionsschluss.

§ 135. a) Mündlich: 1 Zuckerhut wiegt 9 *kg*, ein zweiter 8 *kg*; wie viel wiegen beide zusammen?

Auflösung: Beide zusammen wiegen 9 *kg* und 8 *kg*.

Ausrechnung: 9 *kg* und 8 *kg* = 17 *kg*.

Antwort: So wiegen beide zusammen 17 *kg*.

b) Schriftlich: 4 Kaufleute übernehmen ein gemeinschaftliches Geschäft; A gab dazu 12800 fl., B 9450 fl., C 10700 fl., D 6850 fl. her; wie viel Geld hatten sie zusammen im Geschäfte?

Auflösung: So hatten sie zusammen 12800 fl. und 9450 fl. und 10700 fl. und 6850 fl. Wir müssen also 12800 fl., 9450 fl., 10700 fl. und 6850 fl. addieren.

$$\begin{array}{rl} \text{Ausrechnung:}\quad 12800 & \text{fl.} \\ 9450 & » \\ 10700 & » \\ 6850 & » \\ \hline 39800 & \text{fl.} \end{array}$$

Antwort: So hatten sie 39800 fl. zusammen im Geschäfte.

Subtractionsschluss.

§ 136. 1.) Mündlich: a) Auf der Violine sind 4 Saiten; wie viele sind es noch, wenn eine reißt?

Auflösung: Auf der Violine sind dann noch 4 Saiten weniger 1 Saite.

Ausrechnung: 4 — 1 = 3.

Antwort: Auf der Violine sind noch 3 Saiten.

b) In dieser Bank waren gestern 5 Knaben, heute sind nur 3 da; wie viele fehlen?

Auflösung: Es fehlen so viele, als zu 3 Knaben noch dazu kommen müssten, um die Zahl 5 zu erreichen.

Ausrechnung: 3 + 2 = 5.

Antwort: Es fehlen 2 Knaben.

Später leitet man diesen Schluss auf den Restschluss.

Auflösung: Es fehlen nicht alle 5 Knaben, sondern 3 weniger.

Ausrechnung: 5 weniger 3 = 2.

Antwort wie früher.

2.) Schriftlich: Ein Kirchenbau kostet 28340 fl., und dafür besitzt man 21629 fl.; wie viel fehlt noch?

Auflösung: So fehlen noch so viele Gulden, als zu 21629 fl. dazu kommen müssen, um die Zahl 28340 fl. voll zu machen. Um dies zu finden, müssen wir 21629 fl. von 28340 fl. subtrahieren.

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 28340 \text{ fl.} \\ 21629 \text{ »} \\ \hline 6711 \text{ fl.} \end{array}$$

Antwort: Es fehlen noch 6711 fl.

Wie es aus den obigen Aufgaben ersichtlich ist, gibt es bei der Subtraction zwei Schlussarten. Die zweite Art kann man jedoch auf die erste zurückführen, was aber nicht genau der Natur der Aufgabe entspricht. Man braucht z. B. nur zu fragen: Fehlen alle 5 Knaben? Wie viele weniger? — Es fehlen also 5 Knaben weniger 3 Knaben u. s. w.

Die zweite Schlussart ist als die schwierigere wohl später vorzunehmen als die erste.

Multiplicationsschluss.

§ 137. 1.) Mündlich: Sieh oben Seite 142, Z. 5.

2.) Schriftlich: Von 43 Personen erhält jede 561 fl.; wie viel erhalten alle zusammen?

Auflösung: So erhalten alle zusammen 43 mal 561 fl.; wir müssen also 561 mit 43 multipicieren.

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 561 \\ \times \quad 43 \\ \hline 1683 \\ 2244 \\ \hline 24123 \end{array}$$

Antwort: Alle erhalten zusammen 24123 fl.

Schluss aufs Messen.

§ 138. 1.) Mündlich: Wie viel vierrädrige Wagen haben 12 Räder?

Auflösung: a) Der Natur des Kindes entsprechender: So oft man 4 Räder nehmen muss, um 12 Räder zu bekommen.

Ausrechnung: 3 mal 4 Räder sind 12 Räder.

Antwort: 3 Wagen haben 12 Räder.

b) Wenn die erste Schlussweise geläufig ist: So oft als 4 Räder in 12 Rädern enthalten sind, so viele Wagen haben 12 Räder.

Ausrechnung: 4 Räder sind in 12 Rädern 3 mal enthalten.

Antwort wie oben.

2.) Schriftlich: Ein Fabriksherr zahlt am Ende des Monates 1125 fl. Arbeitslohn aus, wovon jeder Arbeiter 25 fl. erhält; wie viel Arbeiter sind es?

Auflösung: So sind so viel Arbeiter, als 25 fl. in 1125 fl. enthalten sind; wir müssen also 1125 durch 25 dividieren.

Ausrechnung:

$$\begin{array}{l} 1125 : 25 = 45 \\ \underline{100} \\ 125 \\ \underline{125} \end{array}$$

Antwort: Es sind 45 Arbeiter.

Schluss aufs Theilen.

§ 139. 1.) Mündlich: Auf drei Bänken sitzen 18 Schüler gleich vertheilt; wie viele sitzen auf einer Bank?

Auflösung: a) So viel Schüler man 3 mal zu nehmen hat, um 18 Schüler zu bekommen, so viel sitzen auf einer Bank.

Ausrechnung: 3×6 Schüler $= 18$ Schüler.

Antwort: Auf einer Bank sitzen 6 Schüler.

2.) 1 Bank ist der dritte Theil von 3 Bänken, auf einer Bank sitzt der dritte Theil von 18 Schülern.

Ausrechnung: Der dritte Theil von 18 Schülern sind 6 Schüler. Antwort wie früher.

Anmerkung. Die Einleitung «1 Bank ist der dritte Theil von 3 Bänken», wird später wegen Vereinfachung weggelassen. Man schließt also nur: «Auf 1 Bank sitzt der dritte Theil von 18 Schülern, d. i. 6 Schüler», wobei die Ausrechnung kurz an die Auflösung angeschlossen ist.

b) Schriftlich: Zur Zeit einer Hungersnoth werden 1944 *hl* Getreide unter 324 Familien gleichmäßig vertheilt; wie viel kommt auf 1 Familie?

Auflösung: So kommt auf 1 Familie der 324. Theil von 1944 *hl*; man muss also 1944 durch 324 dividieren.

Ausrechnung: 1944 : 324 = 6
1944

Antwort: Auf 1 Familie kommen 6 *hl*.

Nachdem man sich überzeugt hat, dass den Schülern die Operationsschlüsse geläufig sind, verlangt man beim schriftlichen Rechnen nicht mehr den Schluss in Worten; sie haben nur anzugeben, ob sie zu addieren, zu subtrahieren haben u. s. w. Diese Bemerkung gilt auch für zusammengesetzte Aufgaben, für Schlussrechnungen u. s. w.

Zusammengesetzte Schlüsse.

Vollständiger, abgekürzter Schluss.

Schluss von der Einheit auf eine Mehrheit, von einer Mehrheit auf die Einheit, von einem Maß auf ein Vielfaches.

§ 140. Schon der Multiplications- und Divisionsschluss sind eigentlich keine einfachen Schlüsse mehr, da ja 2 Schlüsse («8 *hl* sind 8 mal 1 *hl*», «8 *hl* kosten daher 8 mal 4 fl.», «so vielmal 1 Wagen, als 4 Räder in 12 Rädern enthalten sind») bei jeder dieser Operationen gemacht werden. Bedenkt man neben dieser Bemerkung noch, dass bei diesen Operationen im angewandten Rechnen zwei Arten von Größen mit einander in einem Abhängigkeitsverhältnisse sind, und zwar so, dass, wenn die eine Art 2, 3, 4 mal u. s. f. größer wird, die andere entweder 1.) 2, 3, 4 mal u. s. f. größer oder 2.) 2, 3, 4 mal u. s. f.

kleiner wird, so ist ein weiterer sehr maßgebender Grund vorhanden, diese Operationen ins zweite Schuljahr (Raum 1—100) zu verlegen.

Man pflegt der Vereinfachung wegen diese Schlüsse kürzer zu machen: «8 *hl* kosten 8 mal 4 fl.», «so viel Wägen als 4 Räder in 12 Rädern enthalten sind», «auf einer Bank sitzt der dritte Theil von 18 Schülern.»

Diese Vereinfachung ist jedoch nicht in allen Fällen möglich. (Vergl. das Folgende.)

Die im Obigen angeführten Schlüsse sind Schlüsse von der Einheit auf eine Mehrheit, von einer Mehrheit auf die Einheit, und im Beispiele fürs Messen ein Schluss von einem Maß auf ein Vielfaches, welcher sich nur für den Fall vereinfachen läſst, dass die vom Maß abhängige Zahl der zweiten Art gleich 1 ist. Sonst muss der Schluss lauten, wie im folgenden Beispiele: «4 *l* kosten 1 fl. 60 kr.; wie viel kosten 12 *l*?»

Auflösung a): 12 *l* sind 3 mal 4 *l*, so kosten 12 *l* 3 mal 1 fl. 60 kr. u. s. w.

Auflösung b): So oft als 4 *l* in 12 *l* enthalten sind, so viel mal 1 fl. 60 kosten 12 *l* u. s. w.

Erst nachdem man schon viel geübt, kann man den ersten Schluss «12 *l* = 3 mal 4 *l*» oder «so oft 4 *l* in 12 *l* enthalten sind» auch stillschweigend übergehen und kurz sagen «4 *l* kosten 1 fl. 60 kr., 12 *l* jedoch 3 mal 1 fl. 60 kr. u. s. f.» So einen Schluss wollen wir einen abgekürzten Schluss nennen. Außer den bis jetzt angeführten Schlüssen haben wir bei der Multiplication und Division noch folgende:

Schluss von einer Mehrheit auf ein Maß.

Z. B.: 12 *l* kosten 4 fl. 80 kr.; wie viel kosten 4 *l*?

Auflösung: 4 *l* sind der dritte Theil von 12 *l*, 4 *l* kosten also den dritten Theil von 4 fl 80 kr. u. s. w.

Abgekürzt: 12 *l* kosten 4 fl. 80 kr., 4 *l* also den dritten Theil von 4 fl. 80 kr. u. s. w.

Schluss von einer Mehrheit durch die Einheit auf eine andere Mehrheit.

Z. B.: 3 *hl* kosten 81 fl.; wie hoch kommen 8 *hl*?

Auflösung: 3 *hl* kosten 81 fl. (1 *hl* = der dritte Theil von 3 *hl*), 1 *hl* kostet den dritten Theil von 81 fl. = 27 fl. (8 *hl* = = 8 mal 1 *hl*), 8 *hl* kosten 8 mal 27 fl. = 216 fl. u. s. w.

In diesem Falle würde der vollständige Schluss nur hemmend wirken, woraus folgt, dass die im früheren angeführten abgekürzten Schlüsse bis zur Fertigkeit eingeübt werden müssen, bevor man zu diesem Falle der Schlussrechnung übergehen kann. Die in der Klammer befindlichen Zwischenschlüsse fallen also bei der Auflösung weg. Das gleiche gilt vom

Schlüsse von einer Mehrheit durch ein Maß auf eine andere Mehrheit.

Z. B.: 25 *kg* kosten 15 fl.; wie viel kosten 10 *kg?*

Auflösung: 25 *kg* kosten 15 fl. (5 *kg* = der fünfte Theil von 25 *kg*), 5 *kg* kosten den fünften Theil von 15 fl. = 3 fl. (10 *kg* = = 2 mal 5 *kg*), 10 *kg* kosten 2 mal 3 fl. = 6 fl. u. s. w.

Anmerkung: a) Für die Schlüsse von einem Maß auf ein Vielfaches und umgekehrt sind diesbezüglich vorbereitende Übungen nothwendig. Z. B. Sage: ein Vielfaches von 2, 3, 4 ꝛc; ein Maß von 12, 15, 20 u. s. f. (Vergl. Seite 96 die Übungen 1 und 2 § 85 über Maß und Vielfaches.)

b) Für die Schlüsse von einer Mehrheit durch die Einheit (durch ein gemeinschaftliches Maß) auf eine andere Mehrheit gibt es auch eine Art vorbereitender Aufgaben, wie dies aus folgenden Beispielen ersichtlich ist.

1.) 3 *hl* kosten 81 fl.; a) wie viel kostet 1 *hl;* b) wie viel 2, 3, 4 *hl* u. s. f.

2.) 25 *kg* kosten 15 fl.; a) wie viel kosten 5 *kg;* b) wie viel 10, 15, 20 *kg* u. s. w.?

Zusammengesetzte Aufgaben.

§ 141. Diese unter dem Namen der Schlussrechnung (im engeren Sinne des Wortes) bekannten zusammengesetzten Schlussarten sind aber von jenen zu unterscheiden, die bei den sogenannten zusammengesetzten angewandten Aufgaben vorkommen. Zusammengesetzte angewandte Aufgaben nennt man solche, in welchen Nebenrechnungen zu machen sind, um die Hauptrechnung ausführen zu können. Beispiele:

1.) Ein Landmann hat 4 Kühe, sein Nachbar 3 Kühe mehr; wie viel Kühe haben beide zusammen?

Nebenrechnung: Der Nachbar hat 4 Kühe und 3 Kühe, das sind 7 Kühe.

Hauptrechnung: Beide zusammen haben 4 Kühe und 7 Kühe, das sind 11 Kühe.

Im Folgenden werden die Nebenrechnungen und Hauptrechnungen nicht mehr angeführt, da sie sich ja von selbst ergeben.

2.) Anna hat 5 *m* Band, dazu kauft sie noch 3 *m* und verbraucht dann 4 *m;* wie viel Meter Band hat sie noch?

3.) Ein Knabe war in 2 Wochen 5 Tage krank; wie viel Tage war er während dieser Zeit gesund?

4.) Ein Kaufmann kauft 37 *hl* à 25 fl., er verkauft das Hektoliter mit 28 fl.; wie viel gewinnt er?

5.) Du hast 1 Zehner und 1 Fünfer; wie viel Meter Band kannst du dafür kaufen, wenn 1 *m* 3 kr. kostet?

6.) In einem Walde sollen 18 Bäume gefällt werden; in wie viel Tagen werden 3 Holzhauer damit fertig sein, wenn jeder täglich zwei Bäume fällt?

7.) Ein Vater vertheilt unter seine 4 Kinder 5 Birnen, der älteste bekommt 2 Birnen; wie viel bekommt jedes der übrigen Kinder?

Die Steigerung solcher zusammengesetzter Aufgaben beruht auf der Zahl der zu nehmenden Nebenrechnungen.

Auch für zusammengesetzte Aufgaben gibt es vorbereitende.

Beispiele.

1.) Ein Landmann hat 4 Kühe, sein Nachbar 3 mehr; a) wie viel Kühe hat der Nachbar, b) wie viel beide zusammen?

Zu obigen Beispielen sollen hier nur die einzuschaltenden Zwischenfragen angeführt werden; das übrige versteht sich so von selbst.

2.) Wie viel Meter hat sie, nachdem sie 3 *m* dazu gekauft hat?

3.) Wie viel Tage sind 2 Wochen?

4.) Wie viel Gulden gibt er für den Wein aus, wie viel nimmt er ein?

5.) Wie viel Kreuzer hast du im ganzen?

6.) Wie viel Bäume fällen alle Holzhauer in 1 Tage?

7.) Wie viel Birnen bleiben für die übrigen 3 Kinder?

Aufgaben mit Zwischenfragen werden zu zusammengesetzten, sobald man diese Zwischenfragen auslässt. Die Zwischenfragen hat sich der Schüler selbst zu stellen, oder mit anderen Worten, die Nebenrechnungen hat der Schüler selbst aufzufinden.

Aufgaben wie: «Dein Onkel hat 2 Reisen gemacht, die eine dauerte 4 Tage, die andere 2 Tage: a) wie viel Tage dauerte die erste länger als die zweite, b) wie viel Tage dauerten beide zusammen?» sind eine Vereinigung mehrerer Aufgaben, welche nur durch dieselbe Bedingung miteinander verbunden sind, also keine zusammengesetzten und auch keine vorbereitenden Aufgaben auf solche.

Nachdem man sich überzeugt hat, dass den Schülern der Schluss auf die Nebenrechnungen und auf die Hauptrechnung sicher ist, wird man sie nur mechanisch arbeiten lassen, wie dies aus folgendem Beispiele ersichtlich gemacht wird.

5 Brüder verkauften das Besitzthum ihres Vaters, um das Erbe zu gleichen Theilen zu theilen. Für Haus, Feld und Wiesen lösten sie 8380 fl., für Ackergeräthe und Wagen 159 fl., für das Vieh 366 fl. Welche Summe erhielt jeder Erbe? — Zuerst werden wir den ganzen Erlös berechnen, indem wir 8380 fl., 159 fl. und 366 fl. addieren; dann dividieren wir die erhaltenen Summen durch 5, um den Antheil eines jeden Bruders zu finden.

Unter den zusammengesetzten Aufgaben sind noch jene hervorzuheben, welche man als zusammengesetzte Schlussrechnungen bezeichnet.

Z. B.: Eine Mühle hat 6 Gänge, auf jedem Gange werden täg- 5 *hl* 36 *l* Korn gemahlen; wie viel wird auf allen Gängen in 42 Tagen gemahlen?

Auflösung:

Auf 1 Gange werden in 1 Tg. 5 *hl* 36 *l* Korn gemahlen,
auf 6 Gängen werden in 1 Tg. 6 mal 5 *hl* 36 *l*, das sind 32 *hl* 36 *l* Korn gemahlen,
auf 6 Gängen werden in 42 Tg. 42 mal 32 *hl* 36 *l*, das sind 1359 *hl* 12 *l* Korn gemahlen
u. s. w. wie sonst.

Nachdem die Schüler die Auflösung der zusammengesetzten Schlussrechnungen in der angeführten Form fertig heraus haben, soll man sie an die kürzere Form, an die sogenannte Strichrechnung angewöhnen. Man lasse sie zuerst den Bedingungssatz, darunter den Fragesatz aufschreiben und dann durch Schlüsse die Unbekannte bestimmen, wie dies im Folgenden ersichtlich ist.

Beispiel: 5 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 20 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten, in wie viel Tagen vollenden 6 Arbeiter diese Arbeit, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten.

5 Arbeiter 12 Std. 20 Tage (Bedingungssatz.)
6 Arbeiter 10 Std. x Tage (Fragesatz.)

$$x = \frac{20 \,.\, 5 \,.\, 12 \;\; 2}{6 \,.\, 10} = 20 \text{ Tage.}$$

5 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 20 Tagen (20 wird ober den Strich angeschrieben), 1 Arbeiter in 5 mal so viel Zeit (5 wird als Factor zu 20 geschrieben), 6 Arbeiter im sechsten Theil dieser Zeit (6 wird unter den Strich gesetzt), wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; würden sie nur 1 Stunde arbeiten, brauchten sie 12 mal so viel Zeit (12 als Factor zu 5), bei 10stündiger Arbeitszeit im Tage brauchen sie nur den zehnten Theil der Zeit (10 als Factor zu 6).

Schließlich wird, wenn möglich, abgekürzt und die Rechnung ausgeführt.

Antwort: So vollenden sie die Arbeit in 20 Tagen.

Als eine besondere Gattung zusammengesetzter Rechnungen, die man schon an der Mittelstufe zu behandeln pflegt, sind die Durchschnittsrechnung und die Theilregel.

Durchschnittsrechnung.

§ 142. Die Stufenfolge soll an Beispielen ersichtlich gemacht werden.

1.) Ein Landmann verkauft 8 q Heu um 17 fl. 76 kr., den Metercentner zu verschiedenen Preisen; wie theuer verkauft er den Metercentner im Durchschnitt? (Erklärung von «im Durchschnitt».)

2.) Ein Landmann verkauft in zwei aufeinander folgenden Jahren 31 q, 43 q Heu; wie viel durchschnittlich in einem Jahre?

3.) Ein Landmann verkauft 5 q Heu um 11 fl. 40 kr. und 3 q um 6 fl. 36 kr.; wie theuer verkauft er den Metercentner im Durchschnitt?

4.) Ein Landmann verkauft 5 q Heu à 2 fl. 28 kr. und 3 q à 2 fl. 12 kr.; wie viel erhält er im Durchschnitt für einen Metercentner?

Nach Hentschel könnte man den angewandten Aufgaben noch folgende durch Beispiele angedeutete Übungen voranschicken:

1.) Welche Zahl liegt in der Mitte zwischen 11 und 19.

Auflösung; a) ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, 15, ~~16~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~19~~. Streichen wir die Zahlen 11 und 19, dann 12 und 18 u. s. f., ungestrichen bleibt 15. 15 liegt also in der Mitte von 11 und 19.

b) $11 + 19 = 30$, $30 : 2 = 15$. 15 liegt also u. s. f.

2.) Suche die Durchschnittszahl von 20 und 60, von 7, 17 und 42 u. s. w.

Die Durchschnittsrechnung umfasst auch jene Art der Mischungsrechnungen, bei welchen nach dem Werte der Einheit der Mischung gefragt wird, z. B.:

Ein Wirt mischt 15 *l* Wein à 32 kr., 24 *l* à 40 kr. und 11 *l* à 60 kr.; wie viel ist 1 *l* der Mischung wert?

Knilling veranschaulicht die Durchschnittsrechnung durch Zeichnung. Es wäre dem gegenüber jedoch zu bemerken, dass die äußere Veranschaulichung an dieser Stufe (nach Knilling 4 Schuljahr, 2. Semester) eher hinderlich als fördernd wirkt; sobald man Aufgaben innerlich erfassen kann, ist die äußere Veranschaulichung zu verlassen. Die gleiche Bemerkung gilt für die folgende Rechnung.

Theilregel.

§ 143. Die Bedeutung dieser Rechnung wird aus den folgenden Beispielen ersichtlich.

1.) A und B theilen 875 fl., A bekommt $\frac{3}{5}$ dieser Summe, B den Rest; wie viel erhält jeder?

2.) A und B erhalten für ihre Arbeit 22 fl. 36 kr.; A hat 5 Tage, B 8 Tage gearbeitet; wie viel erhält jeder?

Die Lösung der Durchschnittsrechnungen sowie der Theilregel ergibt sich von selbst; übrigens werden sie im praktischen Theil und in den Rechenbüchern bearbeitet.

Zerlegungsmethode.

§ 144. Schließlich wäre noch die sogenannte Zerlegungsmethode (welsche Praktik), die in den Rechenbüchern auch schon an der Mittelstufe vorkommt, zu erwähnen. Sie ist zeitweise sehr langwierig, jedoch formell sehr bildend und entspricht dem volksmäßigen Rechnen, daher ist sie jedenfalls in der Volksschule, jedoch besser auf der Oberstufe, zu pflegen.

Beispiele.

1.) Wie viel Gulden Zins geben 345 fl. à 6%?

Auflösung:	300 fl. geben	3 mal 6 fl. =	18 fl. — kr. Zins
	45 fl. geben	45 mal 6 kr. =	2 fl. 70 kr. Zins
	345 fl. geben		20 fl. 70 kr. Zins.

2.) Wie viel kosten 210 *kg*, wenn 100 *kg* auf 60 fl. kommen?

Auflösung:	200 *kg* kosten	2 mal 60 fl. =	120 fl.
	10 *kg* kosten	den 10. Theil von 60 fl. =	6 fl.
	210 *kg* kosten		126 fl.

Übersichtliche Darstellung des Gewonnenen bezüglich des Operationsschlusses.

§ 145. Der Schluſs ist einfach oder zusammengesetzt. Im wahren Sinne des Wortes einfach ist eigentlich nur der Additions- und der Subtractionsschluſs. Der Subtractionsschluſs ist zweierlei Art. Die zweite Art, der Schluſs auf den Unterschied, ist schwieriger als die erste Art des Schlusses, der Schluſs auf den Rest.

Der Multiplications- und der Divisionsschluſs sind zusammengesetzt. Bei der sogenannten Schluſsrechnung im engeren Sinne des Wortes sind folgende Fälle zu unterscheiden: 1.) Schluſs von der Einheit auf eine Mehrheit und umgekehrt, 2.) Schluſs vom Maß auf ein Vielfaches und umgekehrt, 3.) Schluſs von einer Mehrheit durch die Einheit auf eine andere Mehrheit und 4.) Schluſs von einer Mehrheit durch ein Maß auf eine andere Mehrheit. — Hiebei sind wieder der vollständige und der abgekürzte Schluſs zu berücksichtigen.

Bei zusammengesetzten Aufgaben ist der Schluſs mehrfach, und zwar schließt man auf Nebenoperationen und auf die Hauptoperation.

Die Durchschnittsrechnung und die Theilregel sind besondere Fälle von zusammengesetzten Aufgaben. Die welsche Praktik ist eigentlich eine Rechnung mit Vortheilen, sonst aber auch nichts anderes, als eine Schluſsrechnung.

Vertheilung der Schluſsarten auf die verschiedenen Zahlenräume.

§ 146. Allgemein kann man behaupten, daſs nicht mehrere Schlüsse auf einmal, sondern daſs sie einzeln der Reihe nach vorzuführen sind, wie die Grundoperationen (vergl. § 12). Berücksichtigt man das Fassungsvermögen des Kindes und das über den Zusammenhang der Operationen Gesagte, so gehören in den Raum

1 — 20

der Additions- und der Subtractionsschluſs, höchstens noch der Multiplicationsschluſs.*

Der Subtractionsschluſs zweiter Art (Schluſs auf den Unterschied) dürfte sich besser für den Raum 1 — 100 eignen. Im Raume 1 — 20 sind auch zusammengesetzte Aufgaben aus der Addition und Subtraction

* In die Rechenfibel sind Divisionsaufgaben nur deshalb aufgenommen worden, um den bestehenden Lehrplänen zu genügen.

nicht bloß möglich, sondern auch angezeigt, um diese beiden Operationen einander gehörig gegenüber zu stellen und sie dadurch zur vollen Auffassung zu bringen. In den Raum

1 — 100

gehören (der Subtractionsschluſs zweiter Art), der Multiplications- und der Divisionsschluſs. Insoferne diese Operationen in diesem Raume erst festen Boden fassen, empfiehlt sich bloß der Schluſs von der Einheit auf eine Mehrheit und umgekehrt, und zwar mit gerade proportionierten Größen. Zusammengesetzte Aufgaben mit zwei oder mehreren Operationsschlüssen empfehlen sich auch hier, weil dadurch die Operationen den Schülern zur klarsten Auffassung gebracht werden. In den Raum

1 — 1000

gehören die übrigen Fälle der Schluſsrechnung.

Aufgaben mit verkehrt proportionierten Größen kommen in den Rechenbüchern im Raume 1 — 1000 schon vor. (Vergl. § 130.)

Die Durchschnittsrechnung, Theilregel und einfache Aufgaben, gelöst nach der welschen Praktik, gehören in den unbegrenzten Zahlenraum.

Die zusammengesetzte Schluſsrechnung wäre, wenigstens in der Form der Strichrechnung, auf die Oberstufe zu verweisen, wie dies die meisten Methodiker thun.

Henner verlegt den Anfang der Schluſsrechnung in den ersten Zehner, dies thun eigentlich alle Monographen. «Auch ist die Schluſsrechnung durch die Vorführung der Bruchrechnung bereits bedingt, denn die Lösung der Aufgabe: Wie viel sind $\frac{3}{4}$ von 12? ist eine Schluſsrechnung.» (Salberg.)

Welche Stellung die im vorliegenden Buche vertretene Theorie dem gegenüber einnimmt, ist nach Vorangehendem gar nicht nothwendig zu bemerken.

Aus allem über das angewandte Rechnen Gesagten erkennt man, dass die in den verschiedenen Rechenbüchern vorkommenden Aufgaben nach fest bestimmten Principien sowohl dem Inhalte als auch dem Operationsschlusse nach sich derartig ordnen lassen, dass der Schüler selbstständig und mit Lust auch im angewandten Rechnen vorwärts schreiten kann. Freilich soll das bereits Durchgenommene in vermischten Übungen sich wiederholen und der Schüler gewöhnt werden, Aufgaben verschiedenartigen Inhaltes und mit verschiedenartigen Operationsschlüssen selbstständig und fertig zu lösen.

Angewandtes Rechnen auf der Oberstufe.

§ 147. Hat man an der Unter- und Mittelstufe das Rechnen derartig behandelt, wie in dem vorangehenden Paragraphen auseinandergesetzt wurde, und hat man keine Lücken gelassen, dann hat man an der Oberstufe keine besonderen Schwierigkeiten zu überwinden, wenn man nur die Sachverhältnisse gehörig erläutert. Hauptaufgabe der Oberstufe ist, den Schüler in das praktische Leben einzuführen. Močnik schreibt für die Oberstufe: «In dem weiteren Rechenunterrichte kann es sich nur darum handeln, das Gelernte durch Wiederholungsübungen zu befestigen und nach Bedürfnis zu erweitern, insbesondere aber die Überleitung von dem eigentlichen Schulrechnen zum Rechnen, wie es im Leben geübt wird, zu bewerkstelligen, indem die verschiedenen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens, welche sich der Rechnung unterziehen lassen, nach und nach vorgeführt, und die bekannten Operationen auf diese Verhältnisse recht vielseitig zur Anwendung gebracht werden . . . . Von den Verhältnisrechnungen sind die Procent-, Zins- und Theilungsrechnung, bei denen möglichst der Charakter der Schlussrechnungen festgehalten wird, unter allen Umständen, in besseren Schulen auch die Discont- und Termin-, die Mischungs- und Kettenrechnung zu üben. Einige Kenntnis über die Rechnung mit Münzen, Wechseln, Staatspapieren und Actien erscheint bei dem gegenwärtigen Aufschwunge des Verkehrs für keine Classe von Menschen mehr ganz entbehrlich; darum sollen auch die diesbezüglichen Rechnungsübungen, wenn auch in beschränkterem Umfange, in keiner gehobenen Volksschule unberücksichtigt bleiben. Den Übungsstoff des letzten Schuljahres, als Abschluss des Schulunterrichtes im Rechnen, bilden Aufgaben, welche aus den verschiedenen Berufszweigen hergenommen und nach ihrem sachlichen Inhalte zusammengestellt sind; für Mädchen sind insbesondere hauswirtschaftliche Rechenaufgaben am Platze, in Dorfschulen werden landwirtschaftliche, in Stadt- und Marktschulen vorwiegend gewerbliche und einfache kaufmännische Rechnungen ihre angemessene Berücksichtigung finden. . . . . Die Aufgaben über die Raumgrößen sind mit der geometrischen Formenlehre an den geeigneten Orten und in den dafür bestimmten Schuljahren in Verbindung zu setzen.»

Hentschel schreibt: «Auch hier müssen wir uns im Interesse der einclassigen Schule, wie das auch am Anfang der Bruchrechnung geschah, die Frage vorlegen: Was ist das Wichtigste und Nothwendigste aus den bürgerlichen Rechnungsarten? Denn nur dieses kann und soll die einclassige Volksschule durcharbeiten, während die mehrclassige recht wohl auch die übrigen und meist schwierigeren Arten, sowie die Wurzelextraction aufnehmen kann. Die wichtigsten Stücke sind entschieden: die Procent- und Zinsrechnung, der Vielsatz und die Berechnung der wichtigsten Flächen und Körper. Das mag sich die einclassige Schule als Hauptaufgabe stellen. Ist hierin volle Sicherheit erlangt, dann kann wohl auch noch zur Rabatt- und Gesellschaftsrechnung vorgeschritten werden.»

Knilling verlangt: «Das Wichtigste aus dem bürgerlichen und kleingewerblichen Rechnen (6. Schuljahr), das Wichtigste vom Verkehr, vom Handel, von der Großindustrie und vom Staatshaushalt (7. Schuljahr). Die Behandlung der einzelnen Partien, die Lehre vom Quadrieren und Kubieren, Quadratwurzel- und Kubikwurzelziehung, sowie die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen gehört in den praktischen Theil.»

Bezüglich der Proportionen schreibt Močnik: «Die Dreisatz- oder Regeldetrie-Aufgaben wurden in früherer Zeit allgemein nur mit Hilfe der Proportionen aufgelöst, welche daher auch im Rechenunterrichte der Volksschulen eine sehr wichtige Rolle spielten. Nachdem jedoch die fortschreitende Entwicklung eines rationellen elementaren Unterrichtes dahin geführt hat, dass man die Regeldetrie-Aufgaben durch kunstlose Schlüsse, und zwar vorzugsweise durch das sogenannte Zurückführen auf die Einheit, weit einfacher, mit mehr Einsicht und unmittelbarem Verständnis auflöst, als dies durch Bildung eines Proportionsansatzes möglich ist, haben sich bedeutende Schulmänner für die gänzliche Ausscheidung der Proportionslehre aus dem Unterrichtsstoffe der Volksschule ausgesprochen.

Die Vorzüge der Schlussrechnung sind auch in der That nicht zu verkennen. Indem der Schüler dabei die Lösung jeder Aufgabe durch einfache Schlüsse unmittelbar aus der genauen Beachtung aller Umstände ableitet und sich der Richtigkeit seines Verfahrens bei jedem Schritte bewusst bleibt, gewinnt er eine weit größere Sicherheit in seinen Operationen, als wenn die Lösung mittelbar auf dem Umwege der Proportion bewerkstelligt wird. Die Schlussrechnung verdient daher in der Volksschule unbedingt die vorzüglichste Berücksichtigung, ja sie soll in den Landschulen die allein vorherrschende Auflösungsmethode für

Regeldetrie-Aufgaben bilden. Daraus folgt aber keineswegs, dafs auch in gehobenen Volksschulen, die weitergreifende Zwecke zu verfolgen haben, die Proportionsrechnung völlig übergangen werden soll. Abgesehen davon, dafs die geistige Gewandtheit des Schülers mächtig gefördert wird, wenn man ihn anleitet, die Lösung einer und derselben Aufgabe auf verschiedene Arten in Angriff zu nehmen, wird durch die Lehre von den Verhältnissen auch die gründliche Auffassung der späteren Gesellschafts- und Mischungsrechnungen, in denen es sich um Zahlenverhältnisse handelt, besser vorbereitet, ohne dafs jedoch die Lösung dieser Rechnungen selbst von der Proportionslehre abhängig gemacht würde.»

Algebraische Aufgaben.

(Nach Hentschel.)

§ 148. a) Wesen der algebraischen Aufgaben.

Das Wesen einer solchen besteht darin, dafs man eine oder mehrere Zahlen, welche zu einer oder mehreren anderen Zahlen in irgend eine Beziehung gesetzt sind, aus dem Ergebnisse dieser Beziehung bestimmen soll.

Hat man die Zahl zu suchen, welche gleich ist 4×3, so ist diese Zahl geradezu durch 4×3 bezeichnet, es liegt also keine algebraische (sondern eine einfache Multiplications-) Aufgabe vor. Wird dagegen gesagt, das dreifache der verlangten Zahl sei gleich $19 + 5$, so ist dieselbe nicht geradezu bezeichnet, sondern man erfährt nur das Ergebnis ihrer Beziehung, in welche sie zu 3 gesetzt ist; die Aufgabe gehört also zu den algebraischen. Wir überlegen erst und finden die Rechnungsart, welche anzuwenden ist. Das Gleiche gilt von den folgenden:

Zieht man $\frac{5}{6}$ einer gewissen Zahl von 32 ab, so bleibt 12 übrig; wie groß ist die Zahl?

Das siebenfache einer unbekannten Zahl liegt eben so weit über 60, als das dreifache unter 60; wie heißt die Zahl?

Als ein Reisender $\frac{3}{5}$ seines Weges weniger 10 *km* zurückgelegt hatte, so blieben ihm bis zum Ziele noch 20 *km* übrig; wie viel betrug der ganze Weg?

Die wenigsten der algebraischen Aufgaben stellen sich freilich dem ungeübten Auge als solche so unmittelbar wie die vorstehenden dar, oder es treten doch die Beziehungen, in welchen die unbekannte Zahl zu anderen steht, nicht sofort in aller Deutlichkeit heraus. So z. B. hier:

Der Vater zählt 40 Jahre, der Sohn 10 Jahre; wann wird der Sohn $\frac{2}{3}$ mal so alt sein als der Vater? Es bedarf schon einer etwas genauern Betrachtung dieser Aufgabe, um sie so fassen zu können: Wie heißt die Zahl, welche zu 10 gelegt, $\frac{2}{3}$ mal so viel gibt, als wenn sie zu 40 gethan wird?

Noch mehr ist dies im folgenden Beispiele der Fall:

Eine Gesellschaft von Männern und Frauen hat 84 Mark aufzubringen, und es kommen davon auf jeden Mann 5 Mark, auf jede Frau 3 Mark; wie viel Männer und wie viel Frauen enthält die Gesellschaft, wenn sie im ganzen 20 Personen zählt? Für die Zahl der Männer, aus welcher sich dann die der Frauen sogleich ergibt, stellen sich die Bedingungen so: Das fünffache einer gewissen Zahl, vermehrt um das dreifache dessen, was ich erhalte, wenn ich diese Zahl von 20 abziehe, gibt 84.

Es ist jedoch durchaus nicht die Sache der Volksschule, praktische algebraische Aufgaben so abstract zu fassen. Im vorliegenden Falle heiße es ganz einfach: Angenommen, es wären bloß Männer in der Gesellschaft, so kämen 20×5 Mark $=$ 100 Mark zusammen. Da jedoch nur 84 Mark, also 16 Mark weniger aufgebracht, 1 Frau aber nur 2 Mark weniger zahlt als ein Mann, so müssen 8 Frauen vorhanden sein; es bleiben also 12 Männer.

b) Wert der algebraischen Aufgaben.

Der Wert der algebraischen Aufgaben auch für die Schule liegt darin, dass sie 1.) ganz vorzüglich geeignet sind, durch Übung des Nachdenkens den formalen Zweck des Rechenunterrichtes zu fördern und dass sie 2.) durch das Räthselhafte, was ihnen mehr oder weniger eigen ist, in hohem Grade die Kinder anziehen und so zur besonderen Würze werden, die aber den Magen nicht schwächt, sondern stärkt. Alle Pädagogen sind hierin einverstanden. Wir legen also recht oft gegen das Ende der Rechenstunden den Kindern einige solche Aufgaben vor.

c) Behandlungsweise.

Auf die Künste, welche die wissenschaftliche Algebra bei den Auflösungen anwendet, leisten wir jedoch Verzicht; wir geben keine Regeln und Formeln, wir nehmen, wie durch die oben gegebene Auflösung schon angedeutet ist, nur den gesunden Menschenverstand in Anspruch. Freilich müssen die Aufgaben leicht sein, viel leichter als sie in den meisten Lehrbüchern der Algebra zu finden sind. Ferner wird es gut sein, sie nicht völlig regellos durcheinander zu würfeln. Ich habe in meinen Heften der Aufgaben zum Kopfrechnen eine Reihe solcher Aufgaben zusammengestellt und darin die Rücksicht auf die Kräfte der Kinder mit der Rücksicht auf objective Ordnung möglichst zu vereinigen gesucht. Die Behandlung der Sache ist im Grunde sehr einfach. Zuerst wird den Kindern die Aufgabe vorgelegt. Sollten sie die Aufgabe an sich, den Sinn derselben, nicht so ohne weiteres verstehen, so muss nachgeholfen werden, was durch bloßes Abfragen der Theile der Aufgabe, durch Erklärung und Umschreibung, durch Veranschaulichung, oder durch mehrere dieser Stücke zugleich geschehen kann. Nun geht es an die Auflösung, der sich die Ausrechnung anschließt. Finden die Kinder selbst das Resultat, so ist das natürlich am besten; finden sie es nicht, so unterstützen wir sie, indem wir bald einzelne Winke geben, bald Veranschaulichungen eintreten lassen, bald katechetisch die Auflösung vollständig entwickeln, bald auch diese Hilfen in Verbindung anwenden. Bloßes Vorrechnen seitens des Lehrers macht die Kinder denkfaul. Proben eines zweckmäßigen Verfahrens werde ich an verschiedenen Stellen mittheilen, so wie es eben die Sache mit sich bringt. Am gegenwärtigen Orte möge nur noch die Berechnung zweier Aufgaben Platz finden.

d) Beispiele.

1.) Zu einer gewissen Zahl hat man 2×12 gezählt und es ist 100 herausgekommen; wie groß ist die Zahl?

Auflösung und Ausrechnung.

Wenn eine Zahl um 2×12 vermehrt 100 gibt, so muss sie selbst um 2×12 kleiner sein als 100; ich finde sie also, wenn ich 2×12 von 100 abziehe. $2 \times 12 = 24$, $100 - 24 = 76$; also ist die gesuchte Zahl 76. Probe: $76 + (2 \times 12) = 76 + 24 = 100$.

2.) Nachdem Theodor zu dem Gelde, welches ihm die Frau Pate in die Sparbüchse schenkte, 6 Wochen lang in jeder Woche 20 Pf. von seinem Verdienste gelegt hatte, so konnte er von dem ganzen Inhalte der Sparbüchse eine Bibel, welche 2 Mark kostete, bezahlen und auch noch 45 Pf. für die armen Überschwemmten in S. beisteuern; wie viel betrug das Geschenk der Frau Pate?

Auflösung und Ausrechnung.

2 Mark oder 200 Pf. kostete die Bibel, 45 Pf. gab Theodor für die Überschwemmten, also enthielt die Sparbüchse zuletzt 200 Pf. + + 45 Pf. = 245 Pf. Davon hatte er 6×20 Pf. = 120 Pf. selbst

verdient, folglich hat ihm die Frau Pate 245 Pf. — 120 Pf. geschenkt. 245 Pf. — 120 Pf. = 125 Pf. oder 1 Mark 25 Pf.; dies ist das Geschenk der Frau Pate. Probe: 125 + (6 × 20) = 245; 245 = = 200 + 45.

So weit Hentschel.

Es möge dazu nur bemerkt werden, daſs nach der Überzeugung des Verfassers derartige, das praktische Leben nicht berücksichtigende Aufgaben nur vorzunehmen wären, wenn der im Vorangehenden citierte Stoff bis zur Fertigkeit verarbeitet wurde, und dann nur solche, welche höchstens einzelne Winke, nicht aber auch Veranschaulichungen und katechetische Entwicklungen erfordern. «Daſs man schwierige Aufgaben stellt, dann in den Erläuterungen die Hauptsachen in die Fragen hineinlegt, von den Kindern eine Nebensache ergänzen läſst und sie so hindurch drückt, das nützt gar nichts und ist doppelter Betrug: Selbstbetrug und Betrug der Kinder.» (Tanck.)

Einiges über Rechenvortheile.

§ 149. Die Rechenvortheile haben in früheren Zeiten eine große Rolle gespielt, nun sind sie zum Glück auf ein Minimum reduciert, aber sie werden doch noch häufig viel zu zeitig angewandt. Die Rechenvortheile haben erst ihre Berechtigung, wenn den Kindern das Normalverfahren geläufig ist; darnach ergeben sich aber auch die Vortheile oft von selbst. Eine besondere Besprechung an dieser Stelle ist nicht nothwendig; sie sind leicht verständlich und gehören in den praktischen Theil. Ob die abgekürzte Multiplication und Division der Decimalbrüche für die Volksschule geeignet ist, ließe sich mit Recht fragen. Sie figuriert oft als Paradepferd, als Quälgeist der Kinder, bei den praktischen Berechnungen wird in der Regel auf sie vergessen. Das Rechnen der Volksschule sei praktisch; dadurch verliert es bezüglich der formalen Bildung gar nicht an Wert, ja es gewinnt, weil dadurch der Geist von den Fesseln phantastischer Künsteleien befreit wird.

§ 150. Für eine genauere Orientierung in der Methodik des Rechenunterrichtes mögen folgende Werke angeführt werden:

Adam, Anweisung zum Unterricht im Rechnen ꝛc. Potsdam 1870.

Büttner, Anleitung zum Rechenunterrichte in der Volksschule. Fünfte Auflage. 1878.

Battig, Wegweiser für den gesammten Rechenunterricht in den Volksschulen. Fünfte Auflage. Berlin 1872.

Böhme, Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Achte Auflage. Berlin 1877.

Göpfert, Der Rechenunterricht in den drei ersten Schuljahren. Dargestellt im Auftrage des pädagogischen Seminars an der Universität Jena. Eisenach 1877.

Grohmann, Das Rechnen in neuer Form. Wien 1875.

Grube, Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule. Fünfte Auflage. Berlin 1873.

Hentschel, Lehrbuch des Rechenunterrichtes in Volksschulen. Zwölfte Auflage. Leipzig 1882.

Henner, Lehrgang des Rechenunterrichtes rc. Vierzehnte Auflage. Ansbach 1878.

Kaselitz, Wegweiser für den Rechenunterricht. Methodisches Handbuch für Lehrer und Seminaristen rc. Berlin 1878.

Knilling, Reform des Rechenunterrichtes. München 1886.

Lüdemanns Handbuch für den ersten Rechenunterricht. Hannover 1882.

Salberg, Die Sachrechen-Methode rc. nach den Grundsätzen der Realmethode. München 1874.

Strehl, Methodik der Rechenkunst. Bearbeitet von A. Schubert. Vierte Auflage. Wien 1868.

Stubba, Anweisung für den Rechenunterricht. Leipzig 1875.

Tanck, Das Rechnen auf der Unterstufe. Meldorf 1884.