STROŠKOVNO OPTIMALNO TERMINSKO PLANIRANJE GRADBENIH PROJEKTOV Z MEŠANIM CELOŠTEVILSKIM NELINEARNIM PROGRAMIRANJEM

CONSTRUCTION PROJECT OPTIMAL TIME-COST TRADE-OFF SCHEDULING BY MIXED-INTEGER NONLINEAR PROGRAMMING

Rok Cajzek, mag. gosp. inž.
GIC GRADNJE, d. o. o.
Sv. Florijan 120, 3250 Rogaška Slatina
izr. prof. dr. Uroš Klanšek, univ. dipl. gosp. inž.
Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo,
prometno inženirstvo in arhitekturo
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor

Znanstveni članek
UDK 519.853:69

Povzetek | V članku je predstavljeno stroškovno optimalno terminsko planiranje gradbenih projektov z mešanim celoštevilskim nelinearnim programiranjem (MINLP). Predlagana tehnika omogoča pridobitev optimalnega terminskega plana za gradbeni projekt pri minimalnih skupnih stroških njegove izvedbe, upoštevajoč posplošene časovne odnose med aktivnostmi, omejitve trajanja projekta in logične pogoje. Pristop MINLP omogoča obravnavanje nelinearnosti v optimizacijskem modelu. Izhodni rezultati MINLP-optimizacije so eksaktni in določajo terminski plan projekta v diskretnih časovnih enotah. Prednosti predlaganega pristopa so predstavljene na primeru uporabe.

Ključne besede: terminsko planiranje, gradbeni projekti, diskretna optimizacija, minimalni skupni stroški, mešano celoštevilsko nelinearno programiranje

Summary | This paper presents the construction project optimal time-cost trade-off scheduling by mixed-integer nonlinear programming (MINLP). The proposed technique enables the acquisition of an optimal time schedule for a construction project at a minimum total cost of its execution, taking into account the generalized precedence relationships among activities, project duration constraints and logical conditions. The MINLP approach allows consideration of nonlinearities in the optimization model. Output results of the MINLP optimization are exact and determine the project's time schedule in discrete time units. Advantages of the proposed approach are demonstrated on an application example.

Key words: time scheduling, construction projects, discrete optimization, minimum total cost, mixed-integer nonlinear programming

1 • UVOD

Začetki uporabe optimizacijskih metod na področju terminskega planiranja projektov segajo v konec petdesetih let prejšnjega stoletja in približno sovpadajo z obdobjem pionirskih prispevkov na mrežnih tehnikah. Med prvimi na tem področju sta bila raziskovalca Morgan Walker in John Sayer (Walker, 1959), ki sta predstavila metodo kritične poti. Po predstavitvi omenjene metode so problemi stroškovne optimizacije sprožili precejšnje zanimanje med raziskovalci, ki so v preteklosti objavili in še vedno prispevajo številne publikacije. Zgodnje raziskave na področju stroškovne optimizacije so bile predstavljene že leta 1959 (Kelley, 1959), njihov cilj je bil znižati skupne stroške projekta s pospeševanjem in razporejanjem aktivnosti v okviru danega strukturnega mrežnega diagrama. Zatem so se zvrstile še številne raziskave in zelo hitro se je spoznalo, da ko skupni stroški projekta izkazujejo nelinearno časovno odvisnost in ko je potek aktivnosti treba podati v diskretnih časovnih enotah (npr. v delovnih dnevih), stroškovna optimizacija terminskega plana postane nelinearni diskreten problem.

V splošnem za stroškovno optimizacijo velja, da so stroški virov običajno v obratnem odnosu s trajanjem posamezne aktivnosti (Feng, 1997). Na primer, ob uporabi naprednejše opreme in ob angažiranju večjega števila delavcev za posamezno aktivnost lahko dosežemo zmanjšanje potrebnega časa za njeno dokončanje, vendar po drugi strani povečamo stroške izvedbe. Problemi stroškovne optimizacije terminskih planov veljajo za zahtevne naloge predvsem zaradi kombinatorične narave območja možnih rešitev (Chassiakos, 2005). Literatura na tem področju je bogata, kar nakazuje na interes raziskovalcev pri iskanju rešitev in novosti s področja. Razloge za priljubljenost lahko iščemo v številnih segmentih, med drugim tudi v zahtevnosti razvijanja robustnih algoritmov za iskanje rešitev kompleksnih optimizacijskih problemov, ki se običajno pojavljajo v praksi. Po drugi strani je področje prav tako zanimivo za industrijo, saj lahko napredne tehnike optimiranja prinesejo dodatne prihranke in tako upravičijo strošek razvoja modelov.

Za iskanje optimalnih rešitev nelinearnih diskretnih problemov stroškovne optimizacije terminskih planov je bilo predlaganih več metod, npr. genetski algoritmi ((Feng, 1997), (Li, 1999), (Hegazy, 1999), (Leu, 2001), (Zheng, 2004), (Eshtehardian, 2009)), simulirano ohlajanje ((Azaron, 2007), (He, 2009)), tabu iskanje ((He, 2009), (Hazir, 2011)), nevronske mreže (Adeli, 1997), kolonija mravelj ((Ng, 2008), (Xiong, 2008), (Afshar, 2009), (Kalhor, 2011)), roji delcev (Yang, 2007), diferenčna evolucija (Nearchou, 2010), harmonijsko iskanje (Geem, 2001), mešano celoštevilsko linearno programiranje ((Achuthan, 2001), (Vanhoucke, 2002), (Sakellaropoulos, 2004), (Akkan, 2005), (Sonmez, 2012), (Zou, 2017)), in hibridne metode, kot so genetski algoritmi in dinamično programiranje (Ezeldin, 2009), rezanje ravnine in simulacija Monte Carlo (Mokhtari, 2010).

V članku je predstavljeno stroškovno optimalno terminsko planiranje gradbenih projektov z mešanim celoštevilskim nelinearnim programiranjem (MINLP). Predlagani pristop omogoča pridobitev optimalnega terminskega plana za gradbeni projekt pri minimalnih skupnih stroških njegove izvedbe, upoštevajoč posplošene časovne odnose med aktivnostmi, omejitve trajanja projekta in logične pogoje. Pristop MINLP omogoča obravnavanje nelinearnosti v optimizacijskem modelu. Izhodni rezultati MINLP-optimizacije so eksaktni in določajo terminski plan v diskretnih časovnih enotah. Prednosti predlaganega pristopa so predstavljene na primeru uporabe.

2 • ODNOSI MED TRAJANJEM IN STROŠKI PRI PROBLEMIH TERMINSKEGA PLANIRANJA

Pogosto izbrani cilj optimizacije terminskega plana je minimizacija skupnih stroškov izvedbe projekta, tj. direktnih (neposrednih) in indirektnih (posrednih) stroškov skupaj. V literaturi zasledimo odnose med trajanjem in direktnimi stroški aktivnosti, ki so formulirani z raznovrstnimi funkcijami, saj imajo avtorji različne poglede na njihov opis. V zgodnjih študijah se največkrat zasledi lineani opis omenjenih odnosov (Kapur, 1973), kar pa se v realnosti le redko odraža. Pozneje so številni avtorji odnose med trajanjem in direktnimi stroški opisovali s konveksnimi funkcijami, npr. ((Kapur, 1973), (Foldes, 1993), (Deckro, 1995), (Deckro, 2003)), s konkavnimi (Falk, 1972) ali s hibridnimi, tj. konkavno-konveksnimi funkcijami (Moder, 1995). V primerih, ko bi se pojavila prevelika razhajanja med dejanskimi podatki in aproksimirano funkcijo, se je izkazalo, da je bolj smotrno opraviti diskretizacijo omenjenih odnosov (Chassiakos, 2005).

Indirektni stroški gradbenega projekta običajno obsegajo začetne stroške, stroške režije, poslovanja, delovanja opreme ipd. Omenjene stroške lahko sicer opredelimo z različnimi izrazi, vendar pa se v večini primerov uporablja linearni odnos med trajanjem projekta in indirektnimi stroški (npr. konstantni strošek na izbrano časovno enoto). Treba je omeniti tudi, da so v gradbene pogodbe pogosto vključene še kazni za nedoseganje pravočasnosti izvedbe projekta in (redkeje) bonusi za predčasen zaključek, ki pa v večini primerov niso zgolj v linearnem odnosu glede na čas (Cajzek, 2016). Na primer, skladno z gradbeno prakso v Sloveniji in veljavnimi predpisi (Posebne gradbene uzance, 1977) pogodbene kazni običajno nastopajo v kosoma linearni obliki, kjer znaša dnevna kazen za zamudo pri projektu 0,1 % zneska pogodbe, vendar skupaj ne več kot 5 % njene skupne vrednosti. Takšne posebnosti z vidika optimizacije terminskih planov povzročijo nekonveksno obnašanje skupnih stroškov projekta glede na njegovo trajanje.

3 • SPLOŠNA FORMULACIJA MINLP-PROBLEMA

MINLP predstavlja eksaktno tehniko matematičnega programiranja za reševanje nelinearnih optimizacijskih problemov, ki hkrati vsebujejo zvezne in diskretne spremenljivke. Pri tem za zvezne odločitve uporabljamo zvezne spremenljivke, medtem ko lahko za diskretne odločitve uporabljamo celoštevilske ali pa binarne 0–1 spremenljivke. Zaradi zmožnosti procesiranja nelinearnih odnosov med spremenljivkami in diskretne narave obravnavane naloge smo se za iskanje optimalne rešitve odločili uporabiti pristop MINLP. Optimizacijski problem MINLP lahko na splošno predstavimo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ &\text{p.p.} \\ &\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{0} \qquad \text{(MINLP-S)} \\ &\boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cx} \le \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{x}^{\mathrm{SP}} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x}^{\mathrm{ZG}}\} \\ &\boldsymbol{y} \in Y = \{0, 1\}^m, \end{aligned}$$

kjer z predstavlja spremenljivko namenske funkcije; $\boldsymbol{x}$ označuje vektor zveznih spremenljivk, ki je določen z definicijskim območjem $\boldsymbol{X}$-prostora realnih števil $\boldsymbol{R}^n$; $\boldsymbol{y}$ označuje vektor binarnih 0–1 odločitvenih spremenljivk in $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ predstavlja transponiran vektor konstant namenske funkcije. Zvezne spremenljivke $\boldsymbol{x}$ so lahko definirane linearno ali nelinearno v namenski funkciji z in pri omejitvah $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ ter $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, medtem ko se binarne 0–1 spremenljivke $\boldsymbol{y}$ lahko uporabijo samo v linearnih izrazih. Funkcije $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ in $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ predstavljajo nelinearne funkcije zveznih spremenljivk $\boldsymbol{x}$, ki so zajete v namenski funkciji. Vse funkcije $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ in $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ morajo biti zvezne in zvezno odvedljive. Izraz $\boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cx} \le \boldsymbol{b}$ predstavlja skupino mešanih linearnih (ne)enačb.

4 • FORMULACIJA MINLP-MODELA

Predhodno prikazana formulacija (MINLP-S) velja na splošno za probleme MINLP, za obravnavani optimizacijski problem pa je treba določiti bolj specifično formulacijo. Formulacija MINLP-modela za stroškovno optimizacijo terminskih planov tako vsebuje namensko funkcijo skupnih stroškov projekta, ki je podvržena minimizaciji, upoštevajoč posplošene časovne povezave med aktivnostmi, omejitve trajanja projekta in logične pogoje. Lahko jo predstavimo na naslednji način:

$$\text{Min } Ct = \sum_{i \in I} C_i\,(D_i) + Ci(Dp) + Cp(Pl) - B(Pe) + \varepsilon \sum_{i \in A} S_i - \varepsilon \sum_{i \in Z} S_i \qquad (1)$$

$$S_i + D_i + L_{i,j} \le S_j \qquad i \in I,\ j \in J(i),\ (i,j) \in FS \quad (2)$$

$$S_i + L_{i,j} \le S_j \qquad i \in I,\ j \in J(i),\ (i,j) \in SS \quad (3)$$

$$S_i + D_i + L_{i,j} \le S_j + D_j \qquad i \in I,\ j \in J(i),\ (i,j) \in FF \quad (4)$$

$$S_i + L_{i,j} \le S_j + D_j \qquad i \in I,\ j \in J(i),\ (i,j) \in SF \quad (5)$$

$$S_{i\omega} + D_{i\omega} - S_{i\alpha} \le Dp \qquad i\alpha, i\omega \in I \quad (6)$$

$$Dp - Pl + Pe = Dt \quad (7)$$

$$Pl\,Pe = 0 \quad (8)$$

$$D_i = \sum_{k \in K(i)} yd_{i,k}dd_{i,k} \qquad i \in I \quad (9)$$

$$\sum_{k \in K(i)} yd_{i,k} = 1 \qquad i \in I \quad (10)$$

$$S_i^{\mathrm{E}} \le S_i \le S_i^{\mathrm{L}} \qquad S_i \in R^+ \quad (11)$$

$$D_i^{\mathrm{M}} \le D_i \le D_i^{\mathrm{N}} \qquad D_i \in R^+ \quad (12)$$

$$0 \le Pe \le Pe^{\mathrm{M}} \qquad Pe \in R^+ \quad (13)$$

$$0 \le Pl \le Pl^{\mathrm{N}} \qquad Pl \in R^+ \quad (14)$$

$$Dp^{\mathrm{M}} \le Dp \le Dp^{\mathrm{N}} \qquad Dp \in R^+ \quad (15)$$

$$yd_{i,k} \in \{0,1\} \qquad i \in I, \qquad k \in K(i) \quad (16)$$

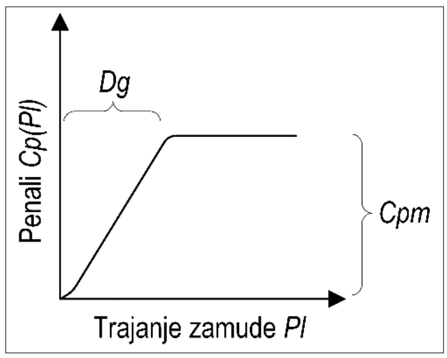
Kriterij optimizacije je opredeljen z namensko funkcijo, ki je formulirana v enačbi (1), kjer spremenljivka Ct predstavlja skupne stroške projekta, množica I zajema projektne aktivnosti i, $i \in I$, $C_i(D_i)$ določa direktne stroške projektnih aktivnosti, $C_i(Dp)$ vključuje indirektne stroške projekta, $C_p(Pl)$ definira stroške pogodbene kazni za zamudo (penale) in $B(Pe)$ predstavlja pogodbeno nagrado za predčasno dokončanje projekta (bonus).

Odnos med direktnim stroškom C_i aktivnosti in njenim trajanjem D_i se v gradbeništvu pogosto izkaže za nelinearnega. V nasprotju s tem je višina indirektnih stroškov C_i pogosto določena v linearni odvisnosti od trajanja projekta Dp. Vsekakor je na tem mestu treba poudariti, da se nelinearne funkcije $Ci(Dp)$ prav tako lahko vključijo v predstavljeni MINLP-model, če se izkaže, da je to potrebno.

Stroški pogodbene kazni Cp so odvisni od trajanja zamude Pl pri dokončanju projekta, medtem ko je vrednost pogodbene nagrade B odvisna od dolžine časovnega prihranka Pe pri predčasnem zaključku projekta. V literaturi so $Cp(Pl)$ in $B(Pe)$ najpogosteje določeni kot konstantne vrednosti (enkratna kazen/nagrada) ali pa kot neomejene linearne funkcije. Za formuliranje navzgor omejenih linearnih pogodbenih kazni $Cp(Pl)$, ki so najpogosteje določene v gradbenih pogodbah, se lahko uporabi naslednji izraz (Klanšek, 2016):

$$Cp(Pl) = Cpm\left\{\frac{Pl}{Dg}\left[\frac{\arctan\,(Cf\ Pl)}{\pi} + \frac{1}{2}\right] + \left(1 - \frac{Pl}{Dg}\right)\left[\frac{\arctan(Cf\ (Pl\ -\ Dg))}{\pi} + \frac{1}{2}\right]\right\} \quad (17)$$

kjer Cpm predstavlja najvišjo možno vrednost pogodbene kazni (penala) in Dg predstavlja obdobje zamude, kjer penali naraščajo linearno pod naklonom Pl/Dg. Po koncu omenjenega obdobja funkcija $Cp(Pl)$ doseže maksimalno vrednost Cpm. Torej, če trajanje zamude preseže obdobje Dg, potem funkcija $Cp(Pl)$ poda za Pl-konstantno vrednost Cpm, glej sliko 1.



Slika 1 • **Navzgor omejeni linearni penali.**

Faktor prileganja aproksimacijske funkcije Cf se določi kot konstanta velike vrednosti. Prikazana enačba (17) se lahko na podoben način uporabi tudi v primeru omejenih linearnih bonusov.

Strukturni mrežni diagram je sestavljen iz kritičnih aktivnosti (tistih, ki nimajo časovnih rezerv) in nekritičnih aktivnosti (tiste, ki imajo časovne rezerve). Nekritične projektne aktivnosti se lahko pričnejo nekoliko pozneje (v okviru časovnih rezerv) tako, da to ne vpliva na trajanje in stroške celotnega projekta. V namensko funkcijo so dodatno vključeni izrazi $+\varepsilon S_i$ in $-\varepsilon S_i$, ki so dodeljeni aktivnostim z najzgodnejše planiranimi začetki (to so aktivnosti $i \in A$) in aktivnostim, katerih pričetki se planirajo najpozneje, kot je mogoče (to so aktivnosti $i \in Z$). Omenjeni izrazi vključujejo konstanto majhne vrednosti ε, ki nima praktične posledice na vrednost namenske funkcije (Sakellaropoulos in Chassiakos, 2004), po drugi strani pa je tako omogočeno, da pričetki projektnih aktivnosti S_i pri minimizaciji namenske funkcije zavzamejo diskretne vrednosti.

Enačbe (2)–(5) definirajo pogoje posplošenih časovnih povezav, ki nastopajo med obravnavanimi aktivnostmi i, $i \in I$ in njihovimi neposredno sledečimi aktivnostmi j, $j \in J(i)$, to so: konec-začetek (Finish-to-Start: *FS*), začetek-začetek (Start-to-Start: *SS*), konec-konec (Finish-to-Finish: *FF*) in začetek-konec (Start-to-Finish: *SF*). Omenjene splošne omejitve se uporabljajo pri preračunu po metodi kritične poti, glej Sliko 2.

Časi začetkov aktivnosti S_i in trajanja aktivnosti D_i so definirani z zveznimi spremenljivkami, časovni zamiki $L_{i,j}$ (zakasnitve ali prehitevanja med obravnavanimi aktivnostmi in njihovimi neposredno sledečimi aktivnostmi) pa so določeni s celoštevilskimi konstantnimi parametri.

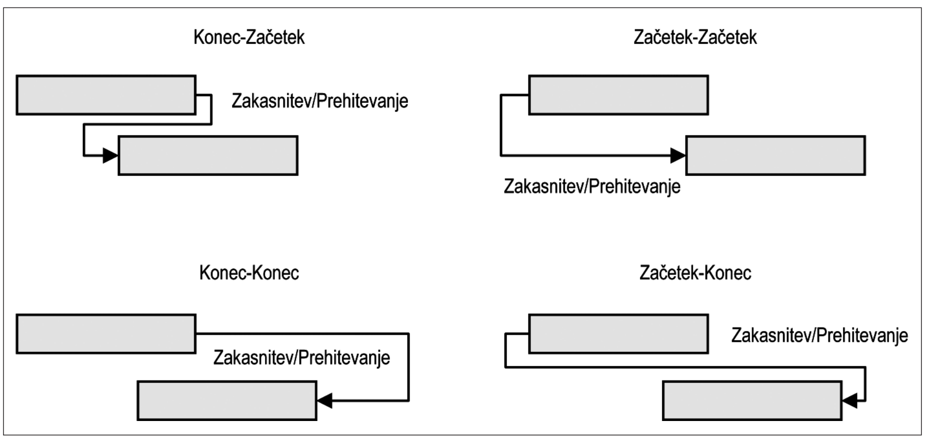
Pogojne neenačbe (6) zagotavljajo, da bodo vse aktivnosti zaključene med trajanjem celotnega projekta, torej da bodo zaključene med začetkom prve projektne aktivnosti in koncem zadnje projektne aktivnosti. Odločitveni spremenljivki $S_{i\omega}$ in $D_{i\omega}$ označujeta čase pričetkov in trajanja zaključnih aktivnosti $i\omega$, $i\omega \in I$, medtem ko $S_{i\alpha}$ predstavlja trenutke aktivacije izvajanja začetnih aktivnosti $i\alpha$, $i\alpha \in I$. Omenjeni pogoji delujejo pod predpostavko, da se neposredno sledeče aktivnosti ne smejo pričeti pred začetnimi aktivnostmi, medtem ko neposredno predhodnim aktivnostim ni dovoljeno, da se zaključijo po končnih aktivnostih.

Pogojna enačba (7) definira logični odnos med trajanjem projekta *Dp*, trajanjem zamude pri dokončanju projekta *Pl*, dolžino časovnega prihranka pri predčasnem zaključku projekta *Pe* in rokom za dokončanje projekta *Dt*. Sledi enačba (8), ki določa logično dejstvo, da projekt ne more istočasno zamujati in prehitevati, lahko pa je dokončan pravočasno. Omenjena enačba pri izračunu optimalne rešitve omogoča, da lahko največ ena od spremenljivk *Pl* in *Pe* doseže vrednost, ki je različna od nič.

Logične omejitve, prikazane v enačbah (9) in (10), morajo biti izpolnjene pri izboru optimalnih diskretnih rešitev za zvezne spremenljivke D_i, ki so definirane znotraj superstrukture alternativ. Množica $K(i)$ opredeljuje možne rešitve k, $k \in K(i)$ v predstavljenem MINLP-modelu. Pri tem nabor celoštevilskih konstant $dd_{i,k}$ določa superstrukturo alternativ za diskretna trajanja aktivnosti. Vsaka celoštevilska konstanta $dd_{i,k}$ tako predstavlja možno diskretno rešitev za pripadajočo zvezno spremenljivko D_i, pri čemer se izbor optimalne diskretne rešitve opravi s pomočjo binarnih 0–1 spremenljivk $yd_{i,k}$.

Binarne spremenljivke $yd_{i,k}$ so vključene v MINLP-model z namenom, da se vzpostavijo optimalna diskretna trajanja za projektne aktivnosti. Vsaka celoštevilska konstanta, vključena v superstrukturo diskretnih alternativ, se lahko izbere kot diskretna rešitev pripadajoče zvezne spremenljivke, ampak le v primeru, če dodeljena binarna spremenljivka zavzame vrednost 1. Če pa dodeljena binarna spremenljivka zavzame vrednost 0, to pomeni, da diskretna alternativa ni izbrana. Enačba (10) zagotavlja, da se za vsako spremenljivko Di mora izbrati natanko ena diskretna vrednost $dd_{i,k}$ izmed možnih rešitev.

Neenačbe (11)–(12) definirajo, da morajo biti optimalne vrednosti zveznih spremenljivk S_i in D_i najdene med njihovimi zgornjimi in spodnjimi mejami (tj. med zgodnjimi in poznimi časi za S_i oz. med minimalnimi in normalnimi trajanji za D_i) kakor tudi določene s pozitivnimi realnimi števili. Neenačbe (13)–(15) prav tako postavljajo meje za optimalne vrednosti zveznih spremenljivk *Pe, Pl* in *Dp* v okviru prostora pozitivnih realnih števil, medtem ko enačba (16) opredeljuje binarnost spremenljivk $yd_{i,k}$.



Slika 2 • **Posplošene časovne povezave med aktivnostmi.**

5 • PRIMER

Primer obravnava projekt nadgradnje obstoječe dvopasovne hitre ceste v štiripasovno avtocesto z nadzorovanimi prometnimi priključki iz reference (Sakellaropoulos, 2004). Stroškovna optimizacija terminskega plana z MINLP za omenjeni projekt je bila opravljena z osebnim računalnikom na 64-bitnem operacijskem sistemu s procesorjem Intel Core i7, 2,93 GHz, z 8 GB delovnega pomnilnika in trdim diskom velikosti 1 TB, rezultati pa so bili pridobljeni prej kot v sekundi. Treba je poudariti, da je kriterij optimizacije tukaj spremenjen glede na izvirno referenco v smislu obravnavanja pogodbenih kazni, zato direktna primerjava rešitev ni možna, lahko pa se rezultati direktnih primerjav najdejo v referenci (Klanšek, 2012). Modeliranje optimizacijskega problema je bilo opravljeno brez dodatnih rutin s pomočjo naprednega algebrajskega jezika General Algebraic Modelling System (GAMS, 2018), za izvedbo MINLP-optimizacije pa je bil uporabljen globalni algoritem BARON (Ryoo, 1996).

5.1 Vhodni podatki

Obravnavani projekt obsega 29 aktivnosti. Preglednica 1 prikazuje aktivnosti projekta, časovne povezave in zamike.

Aktivnost/Opis aktivnosti	Naslednja aktivnost	Časovna povezava	Časovni zamik (dan)
Servisna cesta A:			
1. Izkop skal	2.	konec–začetek	–3
	3.	konec–začetek	0
	6.	konec–začetek	0
2. Izgradnja nasipov	3.	konec–začetek	0
	7.	konec–začetek	0
3. Nevezana nosilna plast in povozni plato vozišča	4.	konec–začetek	0
	8.	konec–začetek	0
4. Asfaltna plast	5.	začetek–začetek	1
	9.	konec–začetek	0
5. Začasne označbe, prometni znaki in signalizacija	10.	konec–začetek	0
	11.	konec–začetek	0
Servisna cesta B:			
6. Izkop zemlje in skal v razpadanju	7.	konec–začetek	–1
7. Izgradnja nasipov	8.	konec–začetek	0
8. Nevezana nosilna plast in povozni plato vozišča	9.	konec–začetek	0
9. Asfaltna plast	10.	konec–konec	1
10. Začasne označbe, prometni znaki in signalizacija	11.	konec–začetek	0
Avtocesta:			
11. Preusmeritev prometa	12.	konec–začetek	0
12. Izkop skal	13.	začetek–začetek	2
	15.	konec–začetek	–4
13. Izkop zemlje in skal v razpadanju, odstranitev vozišča	14.	začetek–začetek	2
14. Stabilizacija temeljnih tal, podporni zidovi in prepusti	15.	konec–začetek	–2
15. Izgradnja nasipov	16.	konec–začetek	–6
	17.	začetek–začetek	4
	18.	konec–začetek	4
	19.	konec–začetek	0
16. Sistem drenažnih cevi	–	–	–
17. Drenažne plasti	20.	začetek–začetek	3
18. Zasaditev površin ob cesti	–	–	–
19. Električne inštalacije ob cesti	–	–	–
20. Odvodni jarki	21.	začetek–začetek	2
21. Nevezana nosilna plast vozišča	22.	začetek–začetek	2
22. Povozni plato vozišča	23.	konec–začetek	–9
23. Varovalne ograje (New Jersey)	24.	začetek–začetek	6
	25.	konec–začetek	–4
24. Električne inštalacije v varovalnih ograjah	–	–	–
25. Asfaltna plast #1	26.	začetek–začetek	4
26. Asfaltna plast #2	27.	konec–začetek	0
27. Obrabna plast vozišča	28.	konec–začetek	–3
28. Trajne označbe, prometni znaki in signalizacija	29.	konec–začetek	0
29. Preusmeritev prometa	–	–	–

Opomba: Uporaba negativnih časovnih zamikov izhaja iz primera (v gradbeni praksi sicer ni pogosta, vendar lahko ponekod nastopi).

Preglednica 1 • **Aktivnosti projekta, časovne povezave in zamiki**

Rok za dokončanje projekta je bil 75 delovnih dni, indirektni stroški in pogodbena nagrada za predčasno zaključen projekt pa so določeni s 150 denarnimi enotami na dan. Pogodbena kazen za vsak dan zamude je opredeljena v višini 200 denarnih enot, vendar lahko znaša največ 1000 denarnih enot. Možnosti izvedbe posameznih aktivnosti so podane v preglednici 2.

Zap. št. aktivnosti	Možnost izvedbe 1		Možnost izvedbe 2		Možnost izvedbe 3	
	Trajanje	Stroški	Trajanje	Stroški	Trajanje	Stroški
1.	5	2.030	4	2.300	–	–
2.	8	1.020	7	1.280	6	1.510
3.	8	1.700	7	1.850	6	2.090
4.	4	590	3	730	–	–
5.	2	90	–	–	–	–
6.	4	910	3	1.100	–	–
7.	2	250	–	–	–	–
8.	7	1.490	6	1.650	5	1.830
9.	4	520	3	750	–	–

10.	2	90	–	–	–	–
11.	1	50	–	–	–	–
12.	8	3.260	7	3.580	6	3.710
13.	5	1.140	4	1.400	3	1.720
14.	4	300	3	450	–	–
15.	8	1.020	6	1.300	5	1.430
16.	9	790	8	900	6	1.180
17.	13	3.340	12	3.750	11	4.060
18.	9	470	8	650	7	830
19.	6	460	5	600	4	810
20.	6	1.280	5	1.430	–	–
21.	14	1.090	12	1.320	10	1.560
22.	14	900	11	1.140	9	1.400
23.	14	2.220	12	2.510	11	2.690
24.	3	230	–	–	–	–
25.	6	1.590	5	1.790	4	1.990
26.	10	2.630	9	2.930	8	3.240
27.	8	2.060	7	2.450	6	2.660
28.	10	320	9	440	8	610
29.	1	50	–	–	–	–

Preglednica 2 • **Možnosti izvedbe za posamezne aktivnosti**

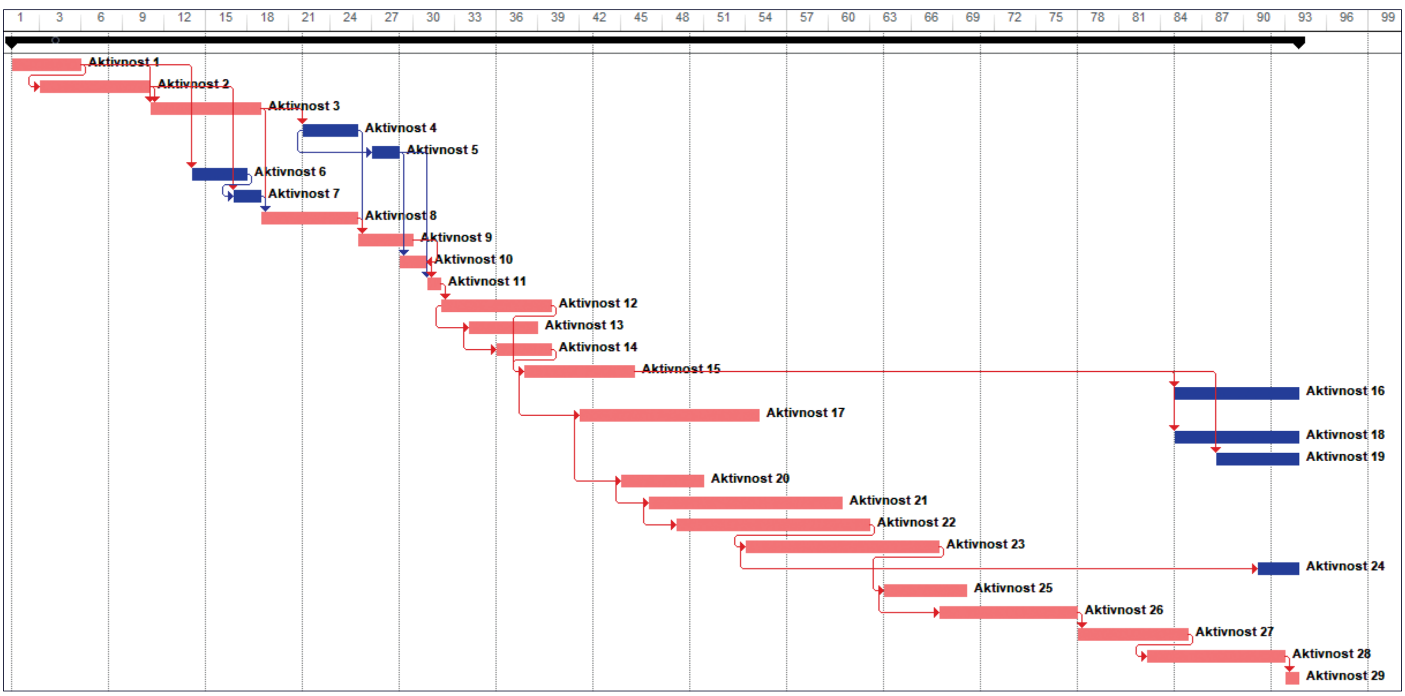
Predstavljeni vhodni podatki in formulacija MINLP-modela, torej namenska funkcija (1), množica pogojnih neenačb za časovne povezave (2)–(5), omejitve trajanja projekta (6), logične omejitve (7)–(10), meje spremenljivk (11)–(16) in funkcija pogodbene kazni (17), so bili uporabljeni pri iskanju stroškovno optimalne rešitve za terminski plan obravnavanega projekta. Optimizacijski model MINLP je tako vseboval namensko funkcijo (tj. spremenljivka *Ct*), 61 zveznih spremenljivk (tj. 29 spremenljivk S_i; 29 spremenljivk D_i; spremenljivko *Dp*; spremenljivko *Pe* in spremenljivko *Pl*), 69 diskretnih spremenljivk (tj. binarnih 0–1 spremenljivk $yd_{i,k}$) in 100 omejitev (tj. 35 pogojnih neenačb za časovne povezave, od tega 25 FS + 9 SS + 1 FF; 5 omejitev trajanja projekta; 1 omejitev za odnos med trajanjem projekta, trajanjem zamude pri dokončanju projekta, dolžine časovnega prihranka pri predčasnem zaključku projekta in rokom za dokončanje projekta; 1 omejitev za dejstvo, da projekt ne more istočasno zamujati in prehitevati, lahko pa je dokončan pravočasno; ter 58 logičnih omejitev).

Zgoraj predstavljeni model tako obsega 29 aktivnosti, od katerih je 6 aktivnosti z 1 možnostjo izvedbe, 6 aktivnosti z 2 možnostma izvedbe in 17 aktivnosti s 3 možnostmi izvedbe, glej preglednico 2. Opredeljene možnosti izvedbe aktivnosti tvorijo skupno število $1^6 x 2^6 x 3^{17}$ = 8,265x10^9 izvedljivih diskretnih rešitev za terminski plan obravnavnega projekta, med katerimi je treba najti tisto, ki izkazuje minimalne skupne stroške.

5.2 Začetna rešitev za optimizacijo

Začetna rešitev za optimizacijo je določena tako, da se projektne aktivnosti postavijo v normalno trajanje pri minimalnih direktnih stroških ob popolnem izkoristku časovnih rezerv, glej terminski plan na sliki 3.

Skupni stroški izvedbe aktivnosti po začetnem terminskem planu znašajo 46.840 denarnih enot pri trajanju projekta 93 dni. Indirektni stroški projekta znašajo 13.950 denarnih enot, dodatno pa je predvidena tudi najvišja možna kazen 1000 denarnih enot zaradi 18-dnevne zamude. Kritične aktivnosti na sliki 3 so prikazane z rdečo, medtem ko so nekritične aktivnosti modre barve, ki pa zaradi postavitve v najpoznejše položaje ne izkazujejo skupnih časovnih rezerv.



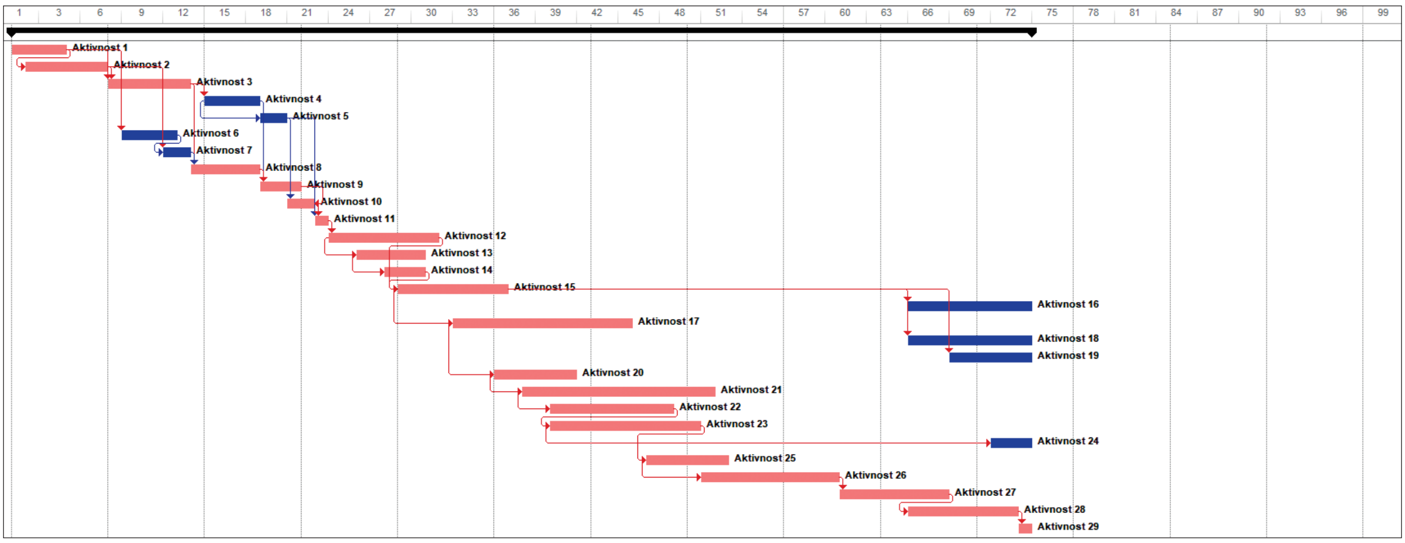
Slika 3 • **Gantogram za začetni terminski plan.**

5.3 Optimizacija terminskega plana

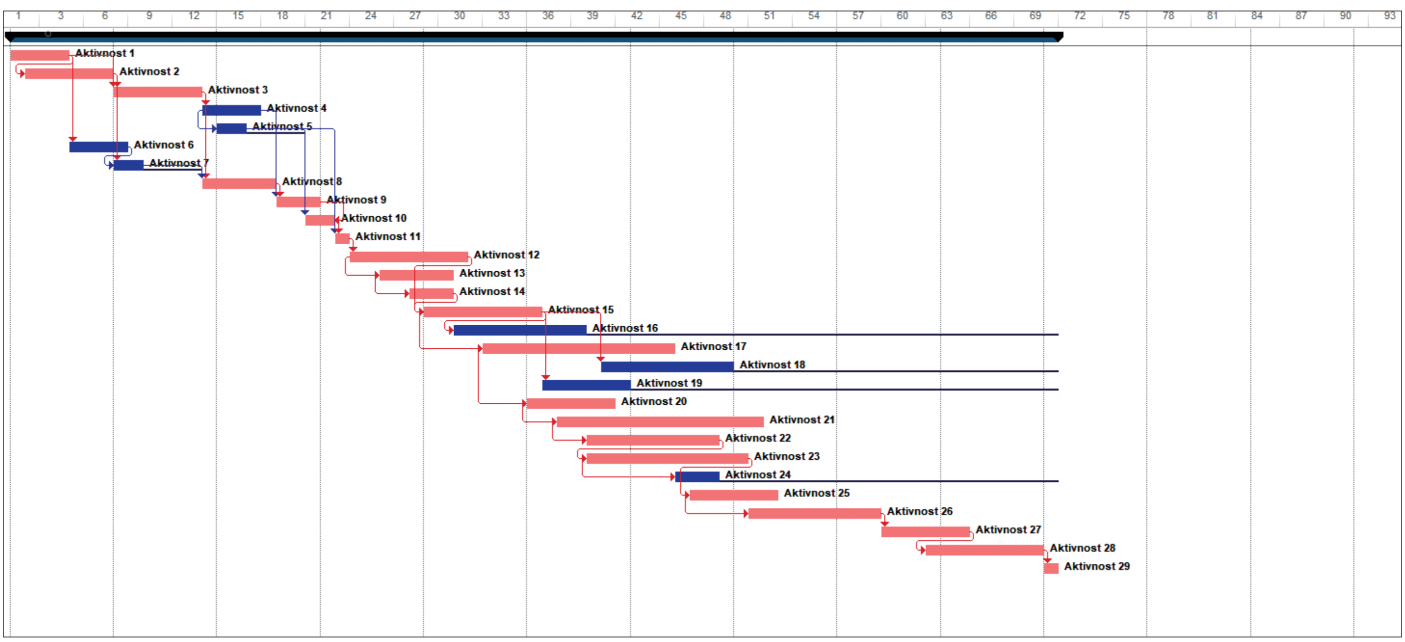
Prvi primer obravnava stroškovno optimizacijo terminskega plana z najpoznejšimi časi pričetkov aktivnosti in normalnim trajanjem projekta. S tem namenom se je v namenski funkciji odštel zmnožek konstante male vrednosti (epsilon) in vsote časov pričetkov nastopajočih aktivnosti v projektu na način, kot je bilo predstavljeno pri enačbi (1). Po opravljeni optimizaciji je bil pridobljen terminski plan, ki izkazuje trajanje projekta 74 dni ob minimalnih skupnih stroških 45.970 denarnih enot, glej sliko 4.

Indirektni stroški pri takšnem terminskem planu znašajo 11.100 denarnih enot, dodatno pa je predviden bonus v višini 150 denarnih enot za dokončanje projekta 1 dan pred postavljenim rokom. Na sliki 4 je prikazan pridobljen optimalni terminski plan v gantogramski obliki, kjer se lahko opazita drugačna razporeditev poteka aktivnosti ter sprememba kritične poti projekta. Pri optimizaciji so bile pospešene naslednje kritične aktivnosti: aktivnost 1 (–1 dan), aktivnost 2 (–2 dni), aktivnost 3 (–2 dni), aktivnost 8 (–2 dni), aktivnost 9 (–1 dan), aktivnost 14 (–1 dan), aktivnost 22 (–5 dni), aktivnost 23 (–3 dni) in aktivnost 28 (–2 dni). Za preostale aktivnosti je bila planirana optimalna izvedba pri normalnem trajanju. Z modro barvo so označene nekritične aktivnosti, ki pa zaradi postavitve v najpoznejše položaje še vedno ne izkazujejo časovnih rezerv.

V drugem primeru je obravnavana stroškovno optimalna rešitev za terminski plan projekta z upoštevanjem najzgodnejših časov pričetkov aktivnosti. Pri tem je bilo, v skladu z referenco (Sakellaropoulos, 2004), predpostavljeno, da premiki aktivnosti (v obravnavanem primeru: premiki aktivnosti v levo na položaje najzgodnejših pričetkov) v okviru časovnih rezerv ne vplivajo na obseg skupnih stroškov. To je bilo doseženo tako, da se je v namenski funkciji prištel zmnožek konstante male vrednosti (epsilon) z vsoto vseh časov pričetkov aktivnosti. Z optimizacijo sta bili pospešeni aktivnost 26 (–1 dan) in aktivnost 27 (–2 dni), prišlo pa je tudi do premika aktivnosti 27 (–1 dan), aktivnosti 28 (–3 dni) ter aktivnosti 29 (–3 dni), glej sliko 5.



Slika 4 • **Gantogram za optimalni terminski plan z najpoznejšimi pričetki izvajanj aktivnosti.**



Slika 5 • **Gantogram za optimalni terminski plan z najzgodnejšimi pričetki izvajanj aktivnosti.**

Pridobljena optimalna rešitev za terminski plan izkazuje enako minimalno vrednost skupnih stroškov v višini 45.970 denarnih enot, vendar s krajšim trajanjem izvedbe projekta, ki sedaj znaša 71 dni. Skrajšano trajanje projekta ob enakih skupnih stroških se je pojavilo zaradi plitkega območja optimuma, kjer vsota direktnih in indirektnih stroškov ter bonusov daje isti rezultat. V primerjavi s predhodnim primerom so se direktni stroški povečali pri aktivnosti 26 za 300 denarnih enot in pri aktivnosti 27 za 600 denarnih enot. Nadalje pa so se znižali indirektni stroški zaradi tridnevnega skrajšanja projekta v višini 450 denarnih enot, kar je prispevalo še k upoštevanju bonusa v višini 450 denarnih enot. Skupna bilanca stroškov je 900 denarnih enot povišanja in 900 denarnih enot znižanja, kar pa odraža enake skupne stroške projekta. Pri omenjeni rešitvi indirektni stroški znašajo 10.650 denarnih enot, dodatno pa je predviden bonus v višini 600 denarnih enot za dokončanje projekta 4 dni pred postavljenim rokom. Kar se tiče nekritičnih aktivnosti, skupna časovna rezerva znaša pri: aktivnosti 4 (1 dan), aktivnosti 5 (4 dni), aktivnosti 6 (4 dni), aktivnosti 7 (4 dni), aktivnosti 16 (32 dni), aktivnosti 18 (22 dni), aktivnosti 19 (29 dni) in aktivnosti 24 (23 dni).

6 • SKLEP

Stroškovna optimizacija terminskih planov gradbenih projektov v splošnem predstavlja področje, kjer v praksi lahko zasledimo kombinatorične, nelinearne in težko rešljive probleme. Namen prispevka je bil predstaviti MINLP-model, ki omogoča pridobitev optimalnega terminskega plana za gradbeni projekt pri minimalnih skupnih stroških njegove izvedbe, upoštevajoč medsebojne povezave med aktivnostmi na osnovi tehnoloških odvisnosti oz. pogojev, omejitve trajanja projekta in logične pogoje. MINLP-pristop omogoča obravnavanje nelinearnosti v optimizacijskem modelu kakor tudi zveznih in celoštevilskih spremenljivk. Prav svoboda pri uporabi nelinearnih izrazov daje možnost razvoja formulacije optimizacijskega modela v kompaktni obliki. Na primer, v MINLP-modelu se lahko obravnava veliko število diskretnih podatkov naenkrat zgolj z enim (nelinearnim) izrazom, kot je to recimo bilo prikazano pri formuliranju omejenih linearnih pogodbenih kazni. Tovrstna uporaba nelinearnih izrazov se tako lahko izkaže kot prednost pri reševanju problemov terminskega planiranja z velikim naborom diskretnih alternativ, saj zahteva manj ročnega dela in povzroča manj možnosti za napake pri modeliranju.

S primerom je bilo pokazano, da so izhodni rezultati MINLP-optimizacije eksaktni in določajo terminski plan v diskretnih časovnih enotah ter natanko zadostijo vsem podanim omejitvam v modelu (kar je znana prednost eksaktnih tehnik v primerjavi s hevrističnimi pristopi). Takšne rezultate optimizacije je možno dalje obravnavati s programsko opremo za planiranje, ki je običajna v gradbeni praksi (na primer s programsko opremo MS Project). Prav tako je mogoče ugotoviti kritično pot projekta kakor tudi obravnavati časovne rezerve pri nekritičnih aktivnostih.

7 • ZAHVALA

Raziskovalni program št. P2-0129 je sofinancirala Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz državnega proračuna.

8 • LITERATURA

Achuthan, N. R., Hardjawidjaja, A., Project scheduling under time dependent costs – a branch and bound algorithm, Annals of Operations Research, 108, 55–74, 2001.

Adeli, H., Karim, A., Scheduling/cost optimization and neural dynamics model for construction, Journal of Construction Engineering and Management, 123(4), 450–458, 1997.

Afshar, A., Kasaeian Ziaraty, A., Kaveh, A., Sharifi, F., Nondominated archiving multicolony ant algorithm in time-cost trade-off optimization, Journal of Construction Engineering and Management, 135(7), 668–674, 2009.

Akkan, C., Drexl, A., Kimms, A., Network decomposition-based benchmark results for the discrete time–cost trade-off problem, European Journal of Operational Research, 165(2), 339–358, 2005.

Azaron, A., Sakawa, M., Tavakkoli-Moghaddam, R., Safaei, N., A discrete-time approximation technique for the time-cost trade-off in PERT networks, RAIRO Operations Research, 41(1), 61–81, 2007.

Cajzek, R., Klanšek, U., Mixed-integer nonlinear programming based optimal time scheduling of construction projects under nonconvex costs, Tehnički Vjesnik, 23(1), 9–18, 2016.

Chassiakos, A. P., Sakellaropoulos S. P., Time-Cost Optimization of Construction Projects with Generalized Activity Constraints, Journal of Construction Engineering and Management 131(10), 1115–1124, 2005.

Deckro, R. F., Hebert, J. E., Modeling diminishing returns in project resource planning, Computers and Industrial Engineering, 44(1) 19–33, 2003.

Deckro, R. F., Hebert, J. E., Verdini, W. A., Grimsrud, P. E., Venkateshwar, S., Nonlinear time/cost trade-off models in project management, Computers and Industrial Engineering, 28(2), 219–229, 1995.

Eshtehardian, E., Afshar, A., Abbasnia, R., Fuzzy-based MOGA approach to stochastic time-cost trade-off problem, Automation in Construction, 18(5), 692–701, 2009.

Ezeldin, A. S., Soliman, A., Hybrid time-cost optimization of nonserial repetitive construction projects, Journal of Construction Engineering and Management, 135(1), 42–55, 2009.

Falk, J., Horowitz, J. L., Critical path problems with concave cost-time curves, Management Science, 19(4), 446–455, 1972.

Feng, C. W., Liu, L., Burns, S. A., Using genetic algorithms to solve construction time-cost trade-off problems, Journal of Computing in Civil Engineering, 11(3), 184–189, 1997.

Foldes, S., Soumis, F., PERT and crashing revisited: mathematical generalizations, European Journal of Operational Research, 64(2) 286–294, 1993.

GAMS, General Algebraic Modelling System, GAMS Development Corporation, https://www.gams.com/, 2018.

Geem, Z. W., Multiobjective optimization of time-cost trade-off using harmony search, Journal of Construction Engineering and Management, 136(6), 711–716, 2010.

Hazir, Ö. Erel, E., Günalay, Y., Robust optimization models for the discrete time/cost trade-off problem, International Journal of Production Economics, 130(1), 87–95, 2011.

He, Z., Wang, N., Jia, T., Xu, Y., Simulated annealing and tabu search for multi-mode project payment scheduling, European Journal of Operational Research, 198(3), 688–696, 2009.

Hegazy, T., Optimization of construction time-cost trade-off analysis using genetic algorithms, Canadian Journal of Civil Engineering, 26(6), 685–697, 1999.

Kalhor, E., Khanzadi, M., Eshtehardian, E., Afshar, A., Stochastic time-cost optimization using non-dominated archiving ant colony approach, Automation in Construction, 20(8), 1193–1203, 2011.

Kapur, K. C., An algorithm for project cost-duration analysis problems with quadratic and convex cost functions, AIIE Transactions, 5(4), 314–322, 1973.

Kelley, J. E., Walker, M. R., Critical-path planning and scheduling, Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference Boston, 160–173, 1959.

Klanšek, U., Mixed-integer nonlinear programming model for nonlinear discrete optimization of project schedules under restricted costs, Journal of Construction Engineering and Management, 142(3), 2016.

Klanšek, U., Pšunder, M., MINLP optimization model for the nonlinear discrete time-cost trade-off problem, Advances in engineering software, 48, 6–16, 2012.

Leu, S. S., Chen, A. T., Yang, C. H., A GA-based fuzzy optimal model for construction time-cost trade-off, International Journal of Project Management, 19(1), 47–58, 2001.

Li, H., Cao, J. N., Love, P. E. D., Using machine learning and GA to solve time-cost trade-off problems, Journal of Construction Engineering and Management, 125(5), 347–353, 1999.

Moder, J. J., Phillips, C. R., Davis, E. W., Project management with CPM, PERT and precedence diagramming, Middleton, Blitz Publishing Company, 1995.

Mokhtari, H., Aghaie, A., Rahimi, J., Mozdgir, A., Project time-cost trade-off scheduling: a hybrid optimization approach, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 50(5–8), 811–822, 2010.

Nearchou, A. C., Scheduling with controllable processing times and compression costs using population-based heuristics, International Journal of Production Research, 48 (23), 7043–7062, 2010.

Ng, S.T., Zhang, Y., Optimizing construction time and cost using ant colony optimization approach, Journal of Construction Engineering and Management, 134(9), 721–728, 2008.

Posebne gradbene uzance, Uradni list SFRJ, št.. 18–247, 1977.

Ryoo, H. S., & Sahinidis, N. V. (1996). Branch-and-reduce approach to global optimization, Journal of Global Optimization, 8(2), 107–138.

Sakellaropoulos, S., Chassiakos, A. P., Project time-cost analysis under generalised precedence relations, Advances in Engineering Software, 35(10–11), 715–724, 2004.

Sonmez, R., Bettemir, Ö. H., A hybrid genetic algorithm for the discrete time-cost trade-off problem, Expert Systems with Applications, 39(13), 11428–11434, 2012.

Vanhoucke, M., Demeulemeester, E., Herroelen, W., Discrete time/cost trade-offs in project scheduling with time-switch constraints, Journal of the Operational Research Society, 53(7), 741–751, 2002.

Walker, M. R., Sayer, J. S., Project Planning and Scheduling, Report 6959, E. I.du Pont de Nemours & Co., Inc., 1959.

Xiong, Y., Kuang, Y., Applying an ant colony optimization algorithm-based multiobjective approach for time-cost trade-off, Journal of Construction Engineering and Management, 134(2), 153–156, 2008.

Yang, I-T., Using elitist particle swarm optimization to facilitate bicriterion time-cost trade-off analysis, Journal of Construction Engineering and Management, 133(7), 498–505, 2007.

Zheng, D. X. M., Ng, S. T., Kumaraswamy, M. M., Applying a genetic algorithm-based multiobjective approach for time-cost optimization, Journal of Construction Engineering and Management, 130(2), 168–176, 2004.

Zou, X., Fang, S. C., Huang, Y. S., Zhang, L. H., Mixed-Integer Linear Programming Approach for Scheduling Repetitive Projects with Time-Cost Trade-Off Consideration, Journal of Computing in Civil Engineering, 31(3), 2017.