Bojan Kuzma
ZAPISKI IZ PREDAVANJ - FOURIEROVA ANALIZA

(Zbirka Izbrana poglavja iz matematike, št. 8)

Urednica zbirke: Petruša Miholič

Izdala in založila:
Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje – TeMeNa,
Univerza na Primorskem
Primorski inštitut za naravosloven in tehnične vede Koper
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
UNIVERSITÀ DEL LITORALE
UNIVERSITY OF PRIMORSKA

Titov trg 4, SI – 6000 Koper
Tel.: + 386 5 611 75 00
Fax.: + 386 5 611 75 30
E-mail: info@upr.si
http://www.upr.si

Koper, 2009

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(0.034.2)

KUZMA, Bojan
Zapiski iz predavanj. Fourierova analiza [Elektronski vir] / Bojan Kuzma. - El. knjiga. - Koper : Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa, 2009. - (Zbirka Izbrana poglavja iz matematike ; št. 8)

Način dostopa (URL): http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv_8_DS.pdf

ISBN 978-961-92689-7-1

246644480

Zapiski iz predavanj - Fourierova analiza

Bojan Kuzma

Koper, 2009

Kazalo

1 Predgovor

Pričujoči zapiski so nastali kot študijski pripomoček študentom pri predmetih Analiza III in Analiza IV. V sklopu teh dveh predmetov je zajeta široka paleta snovi, ki obsega metrične prostore, funkcije več spremenljivk, mnogoterne integrale, Fourieorovo analizo, krivulje, ploskve in polja s krivuljnimi ter ploskovnimi integrali.

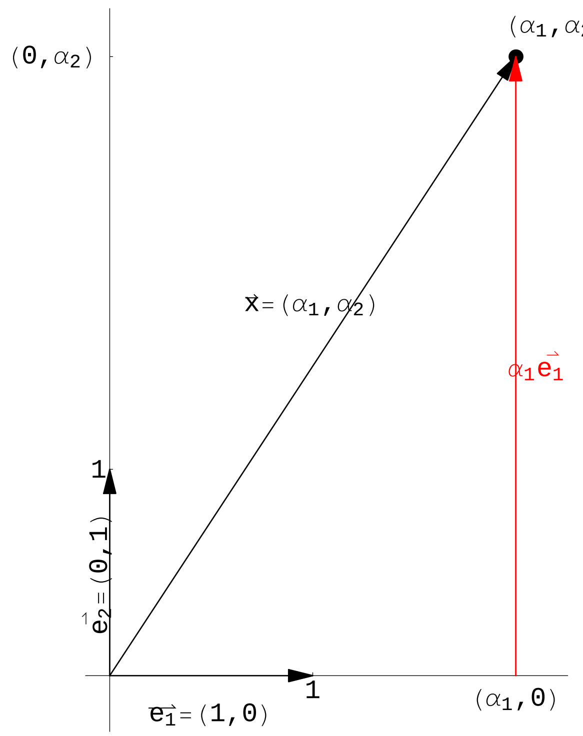
Pričujoča zbirka je posvečena Fourierovi analizi. Kolikor mi je poznano se lahko matematike naučiš le tako, da matematiko delaš. Tak koncept podajanja snovi je npr. v učbeniku [10], kot tudi v [2]. Tudi sam sem se odločil slediti tej usmeritvi, a v nekoliko manjši meri kot v zbirki o Ploskvah. V njej boste sicer še vedno našli dokazane izreke, trditve in leme, ki pa jih spremlja tudi precej nalog teoretičnega značaja, z namigi za reševanje. Vabim vas, da jih poskusite rešiti sami — s tem bo tudi zbirka dosegla svoj namen.

Bojan Kuzma

2 Fourierove vrste

2.1 Vektorski prostori s skalarnim produktom

Oglejmo si prostor $\mathbb{R}^2$. V njem najdemo bazo iz dveh vektorjev $\mathbf{e}_1 := (1,0)$, $\mathbf{e}_2 := (0,1)$, ki sta pravokotna in dolžine 1. Vsak drug vektor $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2)$ lahko napišemo kot $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$.



Slika 1: V $\mathbb{R}^2$ imamo bazo iz pravokotnih vektorjev $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Vsak drug vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ je njuna linearna kombinacija.

Še več, števila α_i lahko dobimo tudi s pomočjo skalarnega produkta: $\alpha_1 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle$ in $\alpha_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle$, torej

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2. \tag{1}$$

Podobno lahko naredimo tudi v prostoru $\mathbb{R}^n$. Nekaj podobnega pa bomo naredili tudi v neskončno-razsežnih prostorih!

Definicija 1. Naj bo X realen vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle \_, \_ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$. Vektorja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ sta *pravokotna* (ali *ortogonalna*), če je $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Množica vektorjev $S \subseteq X$ je *ortogonalen sistem*, če $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ za poljubna različna vektorja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$.

Spomnimo, da je skalarni produkt na realnem vektorskem prostoru preslikava z lastnostmi

- $\langle \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \mu \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle$.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0$, in enačaj velja natanko tedaj, ko je $\mathbf{x}$ ničelni vektor.

Kot takojšnjo posledico prve točke vidimo, da je $\langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0$, torej je vektor $\mathbf{0}$ pravokoten na poljuben drug vektor.

Za vsak vektor definirajmo še njegovo *normo* s predpisom $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$. Pravimo, da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* (ali tudi: *enotski*), če je njegova norma enaka 1. Denimo sedaj, da naš ortogonalen sistem $S \subset X$ sestoji zgolj iz normiranih vektorjev. Tedaj mu rečemo *ortonormiran sistem*.

Zgled 2. V $\mathbb{R}^2$ je npr $\hat{S} := \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ortogonalen sistem, ni pa ortonormiran. Če mu odvzamemo ničelni vektor pa postane celo ortonormiran.

Denimo sedaj, da imamo ortonormiran sistem $S := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \dots\}$, ki sestoji iz končno ali števno neskončno vektorjev. Poljubnemu vektorju $\mathbf{x} \in X$ priredimo števila

$$\alpha_k := \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k\rangle \in \mathbb{R}.$$

Kakšne lastnosti imajo koeficienti α_k?

Zgled 3. V prostoru $\mathbb{R}^2$ je množica $S := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ortonormiran sistem. Iz (1) in Pitagorovega izreka vidimo, da

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|^2 &= \|\alpha_1\mathbf{e}_1\|^2 + \|\alpha_2\mathbf{e}_2\|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 \\ &= |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1\rangle|^2 + |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2\rangle|^2 = \sum_{\mathbf{e}\in S} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}\rangle|^2\end{aligned}$$

Če pa bi vzeli drugačen ortonormiran sistem, npr $\hat{S} := \{\mathbf{e}_1\}$ pa ne be dobili enačaja za vsak vektor $\mathbf{x}$. Konec koncev npr. za $\mathbf{x} := \mathbf{e}_2$ velja $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$, toda $\sum_{\mathbf{e}\in S} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}\rangle|^2 = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1\rangle|^2 = 0 \lneq \|\mathbf{x}\|^2$.

Seveda se je to primerilo zato, ker imamo v $\hat{S}$ premalo paroma ortogonalnih vektorjev (ne sestavljajo bazo prostora $\mathbb{R}^2$). Malce kasneje bomo ortonormiran sistem S, kjer vedno velja enačaj imenovali kompleten ortonormiran sistem.

Nekaj podobnega kot v zgornjem primeru velja v vsakem vektorskem prostoru. Da bomo to lahko utemeljili, si pomagajmo z posplošitvijo Pitagorovega izreka:

Lema 4 (Pitagorov izrek)**.** *Če so vektorji* $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_k$ *paroma pravokotni, je*

$$\|\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_k\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{v}_k\|^2.$$

Dokaz. Če je $k = 2$, imamo

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle &= \sum_{i,j=1}^{2} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle + 0 + 0 + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2.\end{aligned}$$

Za več vektorjev napišemo $\mathbf{w}_1 := \mathbf{v}_1$ in $\mathbf{w}_2 := \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k$. Ta dva sta pravokotna, in lahko nadaljujemo z indukcijo na k. □

Sedaj za vsako neničelno naravno število n definirajmo vektor

$$\mathbf{y}_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \, \mathbf{e}_k.$$

Velja sledeče:

Lema 5. *Vektorja* $\mathbf{y}_n$ *in* $\mathbf{z}_n := \mathbf{x} - \mathbf{y}_n$ *sta pravokotna.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{z}_n, \mathbf{y}_n \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rangle - \langle \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_n \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle - \|\mathbf{y}_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} \|\alpha_k \mathbf{e}_k\|^2 = 0,\end{aligned}$$

kjer smo v zadnji vrstici uporabili Pitagorov izrek, saj je $\mathbf{y}_n$ vsota paroma pravokotnih vektorjev. □

Posledica 6. *Če je* $S := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots\} \subset X$ *števno neskončen ortonormiran sistem, velja* Besselova neenakost

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \qquad (\forall \, \mathbf{x} \in X).$$

Dokaz. Izberimo poljubno naravno število n. Ker sta vektorja $\mathbf{y}_n$ in $\mathbf{z}_n := \mathbf{x} - \mathbf{y}_n$ pravokotna, je

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}_n\|^2 + \|\mathbf{z}_n\|^2 \geq \|\mathbf{y}_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\alpha_k \mathbf{e}_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

V limiti, $n \to \infty$ je leva stran še vedno kvečjemu večja od desne, tj. $\|\mathbf{x}\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$. □

Posebno ugodno je, če bi dobili enačaj za vsak vektor $\mathbf{x}$. Kot nam kaže prejšnji zgled, tedaj ortonormiranemu sistemu S ne manjka noben vektor, oz. ga ne moremo več razširiti do še večjega ortonormiranega sistema. Zato je smiselna tale definicija:

Definicija 7. Množica $S = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \dots\} \subset X$ paroma pravokotnih, normiranih vektorjev je *kompleten ortonormiran sistem* (ali: K.O.N.S.), če velja *Parsevalova identiteta*

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle|^2$$

za vsak vektor $\mathbf{x} \in X$

Opomba 8. Kot vidimo iz dokaza prejšnje posledice tedaj $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_n\|^2 = \|\mathbf{z}_n\|^2$ limitira proti 0, ko $n \to \infty$. Malce drugače povedano: $\lim_{n\to\infty} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \, \mathbf{e}_k = \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{x}$. Še krajše:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \, \mathbf{e}_k = \mathbf{x}$$

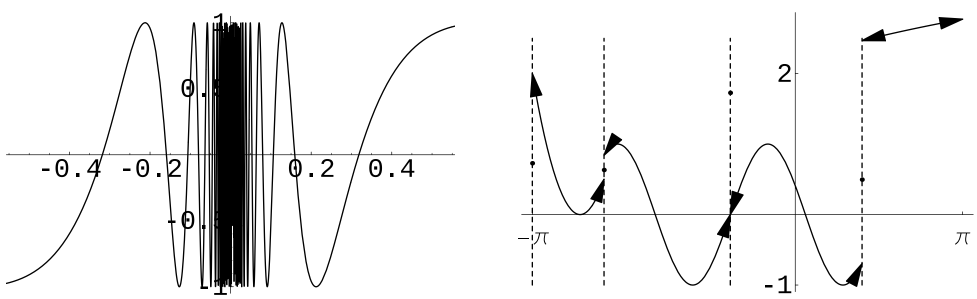
Naloga 9. *Kaj točno pomeni, da zaporedje vektorjev $\mathbf{y}_n$ limitira proti vektorju $\mathbf{x}$?*

Rešitev. Na kratko to pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo tako število N, da za vsak indeks $n > N$ velja

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$$

Oglejmo si dva malce daljša, a toliko bolj pomembna zgleda.

Zgled 10. Bodi $X := \mathcal{OC}[-\pi, \pi]$ množica vseh odsekoma zveznih realnih funkcij, definiranih na intervalu $[-\pi, \pi]$. Torej $f \in X$, če (i) je definirana na $[-\pi, \pi]$, in (ii) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ zvezna povsod, z morebitno izjemo končno mnogo točk, kjer pa naj ima levo in desno limito.

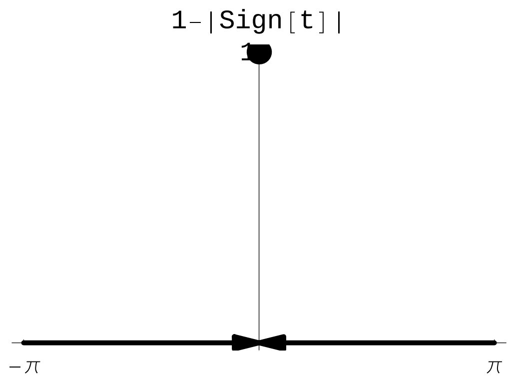


Slika 2: Leva funkcija *ni odsekoma zvezna*, saj nima leve niti desne limite pri $x = 0$. Desna pa je odsekoma zvezna.

Množica X je vektorski prostor za običajno seštevanje in skalarno množenje funkcij (torej, $(f + g) : t \mapsto f(t) + g(t)$ in $(\lambda f) : t \mapsto \lambda \cdot f(t)$). Kako bi v X uvedli kakšen zanimiv skalarni produkt? Poskusimo takole: Za odsekoma zvezni funkciji $f, g \in X$ definirajmo

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, dt.$$

Naloga 11. *Preveri, da ima tako definiran predpis vse lastnosti skalarnega produkta, z izjemo zadnje: Lahko se zgodi, da je $\langle f, f \rangle = 0$, a kljub temu f ni ničelna funkcija. Nasvet: Poizkusi s funkcijo $f(t) := 1 - |\operatorname{sign}(t)|$, ki je povsod enaka nič, z edino izjemo $f(0) = 1$.*



Slika 3: GRAF „PROBLEMATIČNE“ FUNKCIJE

Problemu, ki je nakazan v prejšnji nalogi se izognemo takole: Rekli bomo, da dve odsekoma zvezni funkciji predstavljata isti vektor, če se funkciji razlikujeta kvečjemu v končno mnogo točkah. Tako npr. $f(t) := 1 - |\operatorname{sign}(t)|$ in $g(t) := 0$ predstavljata isti, v tem primeru ničelni, vektor. Nekaj podobnega že dolgo počnemo z ulomki: Dva ulomka lahko predstavljata isto racionalno število.

Če torej ne ločimo med funkcijami, ki se razlikujejo le v končno mnogo točkah, pa je zgoraj definirana preslikava res skalarni produkt.

Naloga 12. *Pokaži, da za odsekoma zvezno funkcijo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ velja: Če je $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt = 0$, predstavlja $f(t)$ ničelni vektor (tj. $f(t) = 0$, razen morebiti v končno mnogo točkah)!*

Kako bi dobili kakšen ortonormiran sistem? Definirajmo funkcije

$$\begin{aligned} e_0(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ e_k(t) &:= \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}} \quad \overset{*}{e}_k(t) := \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}} \qquad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \tag{2}$$

Naloga 13. *Pokaži, da te funkcije sestavljajo ortonormiran sistem v prostoru X.*

Kot zgled pokažimo zgolj pravokotnost $e_n(t)$ in $e_m(t)$, kjer $n, m \geq 1$. Najprej naj bo $n \neq m$.

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(mt)}{\sqrt{\pi}}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n-m)t + \cos(n+m)t}{2}\, dt \\ &= \frac{\sin(n-m)t}{2\pi(n-m)} \Big|_{t=-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n+m)t}{2\pi(n+m)} \Big|_{t=-\pi}^{\pi} = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je $\sin 0 = 0 = \sin(\pm\pi) = \sin(\pm 2\pi) = \dots$.

Kolika pa je norma $e_n(t)$?

$$\|e_n(t)\|^2 = \langle e_n(t), e_n(t) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)^2}{\pi}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2nt) + 1}{2\pi}\, dt = 1.$$

Ortonormiranemu sistemu $\{e_0(t), e_1(t), \overset{*}{e}_1(t), e_2(t), \overset{*}{e}_2(t), \dots\}$ bomo posvetili celoten naslednji razdelek. Pokazali bomo, da je K.O.N.S. Ker ga sestavljajo trigonometrijske funkcije, mu včasih rečemo tudi *trigonometrijski kompleten ortonormiran sistem.*

Zgled 14. Oglejmo si še en zgled ortonormiranega sistema. To pot za X vzemimo prostor odsekoma zveznih funkcij na intervalu $[-1, 1]$. Za odsekoma zvezni funkciji $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definirajmo

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{3}$$

Kot prej je tudi tokrat to skalarni produkt, če ne ločimo med funkcijami, ki se razlikujejo kvečjemu v končno mnogo točkah. Ker pa smo v integralu produkt funkcij pomnožili še z $w(t) := 1/\sqrt{1-t^2}$, včasih to dodatno pojasnimo, in rečemo, da je (3) skalarni produkt *z utežjo* $w(t)$.

Naloga 15. *Pokaži, da je skalarni produkt z utežjo (3) dobro definiran, tj. pokaži, da izlimitirani integral konvergira.*

Tukaj pa funkcije $e_n(t) := \cos(n \arccos t)$; $(n = 0, 1, \dots)$ sestavljajo ortogonalen sistem. Namreč, za $n \neq m$ je

$$\langle e_m, e_n\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(m \arccos t)\cos(n \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -\int_{\pi}^{0} \cos mx \cos nx,$$

kjer smo uvedli substitucijo $\arccos t := x$ (ter s tem $dt/\sqrt{1-t^2} = dx$). Vrednost zadnjega integrala je 0, kot se lahko hitro prepriča vsak sam.

Opomba 16. Funkcije $e_m(t)$ se imenujejo tudi *polinomi Čebyševa.* Dejansko so res polinomi, saj ustrezajo tričlenski rekurzivni enačbi

$$\begin{aligned} e_0(t) &= 1 \\ e_{n+1}(t) + e_{n-1}(t) &= 2te_n(t) \end{aligned}$$

Imajo zanimivo lastnost, da se med vsemi polinomi stopnje n ravno $C_n(t) := 2^{1-n}e_n(t)$ najmanj oddalji od abscise na intervalu $[-1, 1]$. Malce bolj precizno: Za vsak polinom $p_n(t)$ stopnje n število $\max_{t\in[-1,1]} |p_n(t)|$ pove, koliko se je oddaljil od abscise. In to število je najmanjše ravno za „modificirane" Čebyševe polinome $2^{1-n} \cos(n \arccos t)$.

Zaradi te lastnosti se precej uporabljajo v aproksimacijah.

Naloga 17. *Preveri tričlensko rekurzijo. Nasvet:* $\cos(n+1)x = \cos x \cos(nx) - \sin x \sin nx$.

Naloga 18. *Pokaži, da so funkcije* $e_0(t) := 1/\sqrt{2}$, $e_k(t) := \cos(k\pi t)$ *in* $\overset{*}{e}_k(t) := \sin(k\pi t)$ *ortonormiran sistem na intervalu* $[-1, 1]$ *glede na skalarni produkt*

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt \tag{4}$$

Naloga 19. *Legendrove polinome definiramo s predpisom*

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

Pokaži, da so tudi Legendrovi polinomi paroma ortogonalni na $[-1,1]$ glede na skalarni produkt (4).

Rešitev. Za $m < n$ imamo

$$2^{n+m} n! m! \langle P_m(x), P_n(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^m\right)^{(m)} \left((x^2-1)^n\right)^{(n)} dx$$

$$\underset{\text{per partes}}{=} \left((x^2-1)^m\right)^{(m)} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)} \Big|_{x=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^m\right)^{(m+1)} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)} dx$$

Izintegrirani del je nič. Namreč funkcija $(x^2-1)^n$ ima ničlo stopnje n pri $x = \pm 1$. Če jo $n-1$ odvajamo, ima še vedno ničlo (stopnje ena) pri $x = \pm 1$. Torej $\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)} \big|_{x=\pm 1} = 0$.

Ostane nam torej

$$2^{n+m} n! m! \langle P_m(x), P_n(x) \rangle = -\int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^m\right)^{(m+1)} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)} dx.$$

Odvajajmo per partes še naprej, $u = \left((x^2-1)^m\right)^{(m+1)}$ in $dv = \left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)} dx$. Izintegrirani del je nič, zaradi istega razloga kot prej. Po m nadaljnih korakih nam ostane

$$2^{n+m} n! m! \langle P_m(x), P_n(x) \rangle = -\int_{-1}^{1} \left((x^2-1)^m\right)^{(m+m+1)} \left((x^2-1)^n\right)^{(n-(m+1))} dx.$$

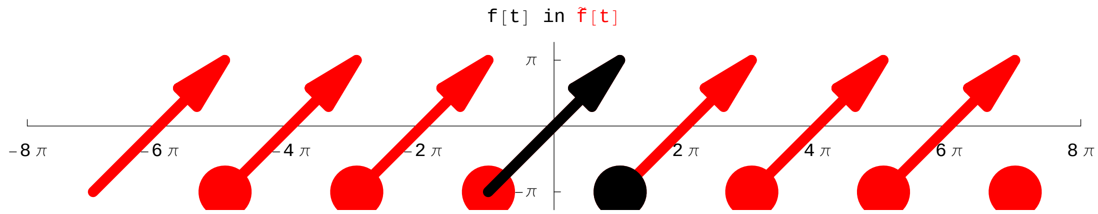
Toda $\left((x^2-1)^m\right)^{(m+m+1)} = 0$, saj polinom $(x^2-1)^m$ stopnje $2m$ odvajamo $2m+1$-krat.

Kako je možno, da smo dobili v istem skalarnem produktu dva popolnoma različna ortogonalna sistema? To ni dejansko nič novega. Na primer v prostoru $X = \mathbb{R}^2$ imamo nekaj podobnega: sistem vektorjev $\{\mathbf{e}_1 := (1,0), \mathbf{e}_2 := (0,1)\}$ je ortogonalen. Ampak isto velja tudi za sistem $\{\mathbf{x}_1 := (1,1), \mathbf{x}_2 := (-1,1)\}$.

2.2 Trigonometrijska Fourierova vrsta

V tem razdelku bomo pod drobnogled vzeli prostor iz Zgleda 10, torej prostor odsekoma zveznih, realnih funkcij na $[-\pi, \pi]$. Pokazali smo že, da je trigonometrijski sistem (2) ortonormiran. Ob koncu tega razdelka bomo pokazali, da je tudi poln; da torej velja Parsevalova identiteta.

Izkazalo se bo za koristno, če bomo poleg odsekoma zvezne funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ opazovali tudi njeno periodično nadaljevanje $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; torej je $\tilde{f}|_{[-\pi,\pi)(t)} := f(t)$ in $\tilde{f}(t + 2\pi) = \tilde{f}(t)$.



Slika 4: Funkcija $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$; $f(t) := t$, in njeno periodično nadaljevanje $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zaradi $f(-\pi) \neq f(\pi)$ moramo najprej f v točki $x = \pi$ redefinirati z $f(\pi) := f(-\pi)$ (v nasprotnem f nima periodičnega nadaljevanja!). Redefinirana funkcija še vedno predstavlja isti vektor kot prvotna.

Naj bo $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\tilde{f}(x + 2\pi) \equiv \tilde{f}(x)$ odsekoma zvezna, periodična funkcija (torej je periodično nadaljevanje odsekoma zvezne funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$). Definirajmo števila

$$\begin{aligned}
a_0 &:= \langle \tilde{f}, \tfrac{e_0}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\, dt \\
a_k &:= \langle \tilde{f}, \tfrac{e_k}{\sqrt{\pi}} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\cos(kt)\, dt \qquad (k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}) \\
b_k &:= \langle \tilde{f}, \tfrac{\overset{*}{e}_k}{\sqrt{\pi}} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\sin(kt)\, dt \qquad (k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}),
\end{aligned} \tag{5}$$

ki jih bomo imenovali *Fourierovi koeficienti funkcije* f. Iz teh števil oblikujmo zaporedje delnih vsot

$$s_n(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Kdaj zaporedje $s_n(x)$ konvergira proti $\tilde{f}(x)$? Pri katerih argumentih x?

Izrek 20. *Če je $\tilde{f}$ zvezna v točki $x = x_0$, in ima v tej točki tudi levi ter desni odvod, je*

$$\tilde{f}(x_0) = \lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0)$$

Opomba 21. Če funkcija $\tilde{f}$ ni zvezna v $x = x_0$, ima pa levi in desni posplošeni odvod, se da pokazati, da

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \frac{\tilde{f}(x-0) + \tilde{f}(x+0)}{2}.$$

Opomba 22. Vsoto $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ imenujemo *Fourierova vrsta* funkcije $\tilde{f}$.

Pred dokazom si oglejmo še kakšen zgled:

Zgled 23. Razvijmo periodično nadaljevanje funkcije $f(t) := t$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Najprej je

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(kt)\,dt.$$

Toda integrand je liha funkcija na simetričnem intervalu, torej $a_k = 0$. Iz istega razloga dobimo tudi $a_0 = 0$. Računamo moramo le še b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\,dt \underset{\text{per partes}}{=} \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin(kt)}{k^2} - \frac{t\cos(kt)}{k}\Big)\Big|_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{2\sin(k\pi) - 2k\pi\cos(k\pi)}{k^2\pi}$$

Upoštevajmo, da je $\sin\pi = 0 = \sin(2\pi), \ldots$, oziroma

$$\sin(k\pi) = 0,$$

ter da je $\cos\pi = (-1)$, $\cos(2\pi) = 1$, $\cos(3\pi) = -1\ldots$, oziroma:

$$\cos(k\pi) = (-1)^k,$$

pa se enačba za b_k polepša v $b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$. Fourierova vrsta za $f(t) = t$ je torej

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt) \tag{6}$$

Kdaj konvergira proti $\tilde{f}(t)$? Izrek pravi da za tiste argumente $t = t_0$, je funkcija $\tilde{f}(t)$ zvezna, in ima levi in desni odvod. Toda $\tilde{f}(t)$ je zvezna (celo odvedljiva!) povsod, z izjemo točk $\{\pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \ldots\}$ kjer ima skoke (prim. sliko 2.2!) Torej vrsta (6) konvergira proti $\tilde{f}(t)$ za vsak t, razen za $t = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \ldots$.

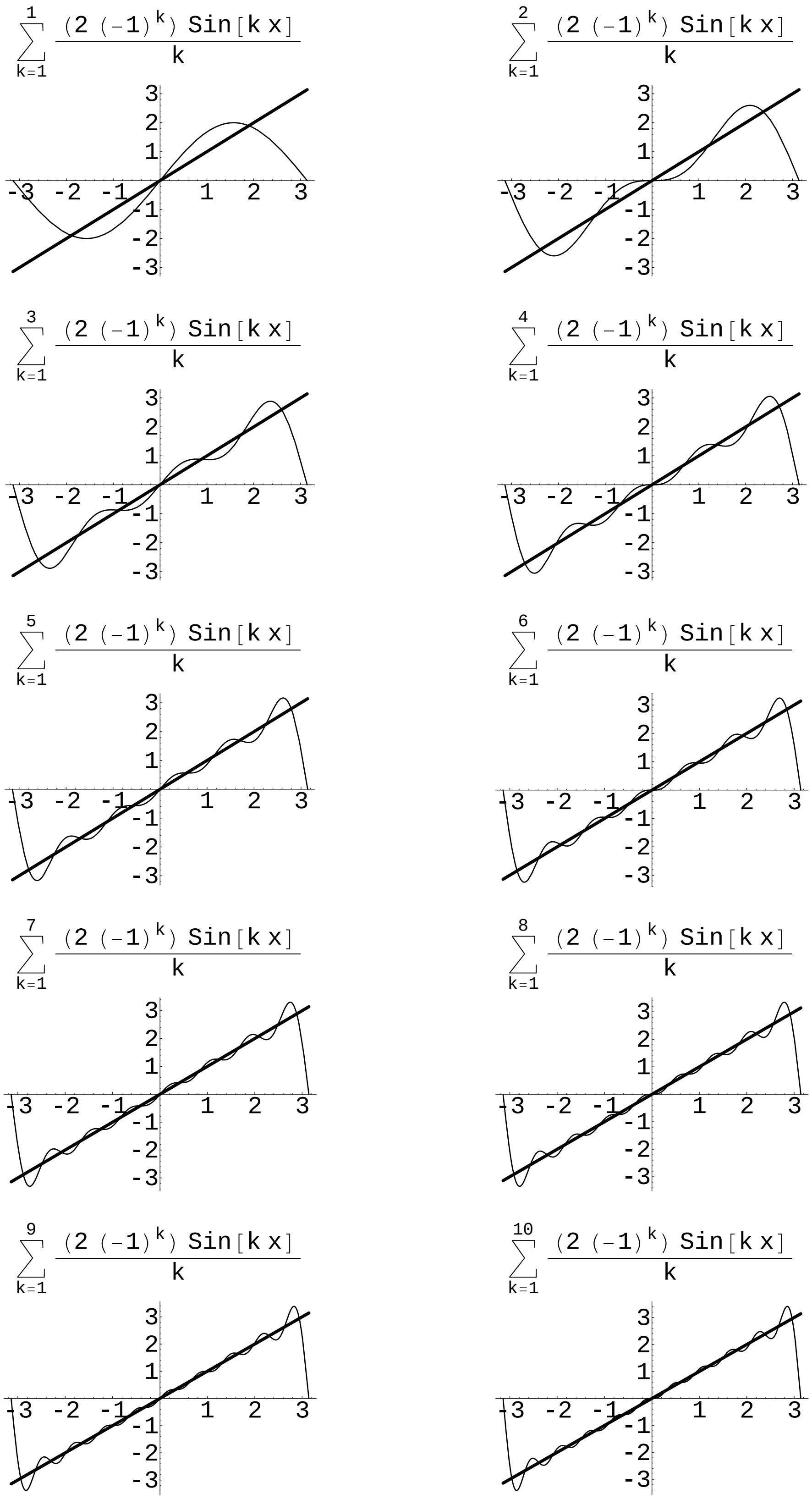
Kdaj pa (6) konvergira proti $f(t) = t$? Prav gotovo ne izven intervala $[-\pi, \pi]$, kajti tam kvečjemu konvergira proti periodičnemu nadaljevanju $\tilde{f}$ funkcije f. Na intervalu $(-\pi, \pi)$ pa se $\tilde{f}$ in $f(t) = t$ ujemata. Torej

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt),$$

in enačaj velja za vsak $t \in (-\pi, \pi)$, ter nikjer drugje!

Naloga 24. *Vstavi* $t := \pi/4$ *in izpelji* Leibnizevo vsoto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$



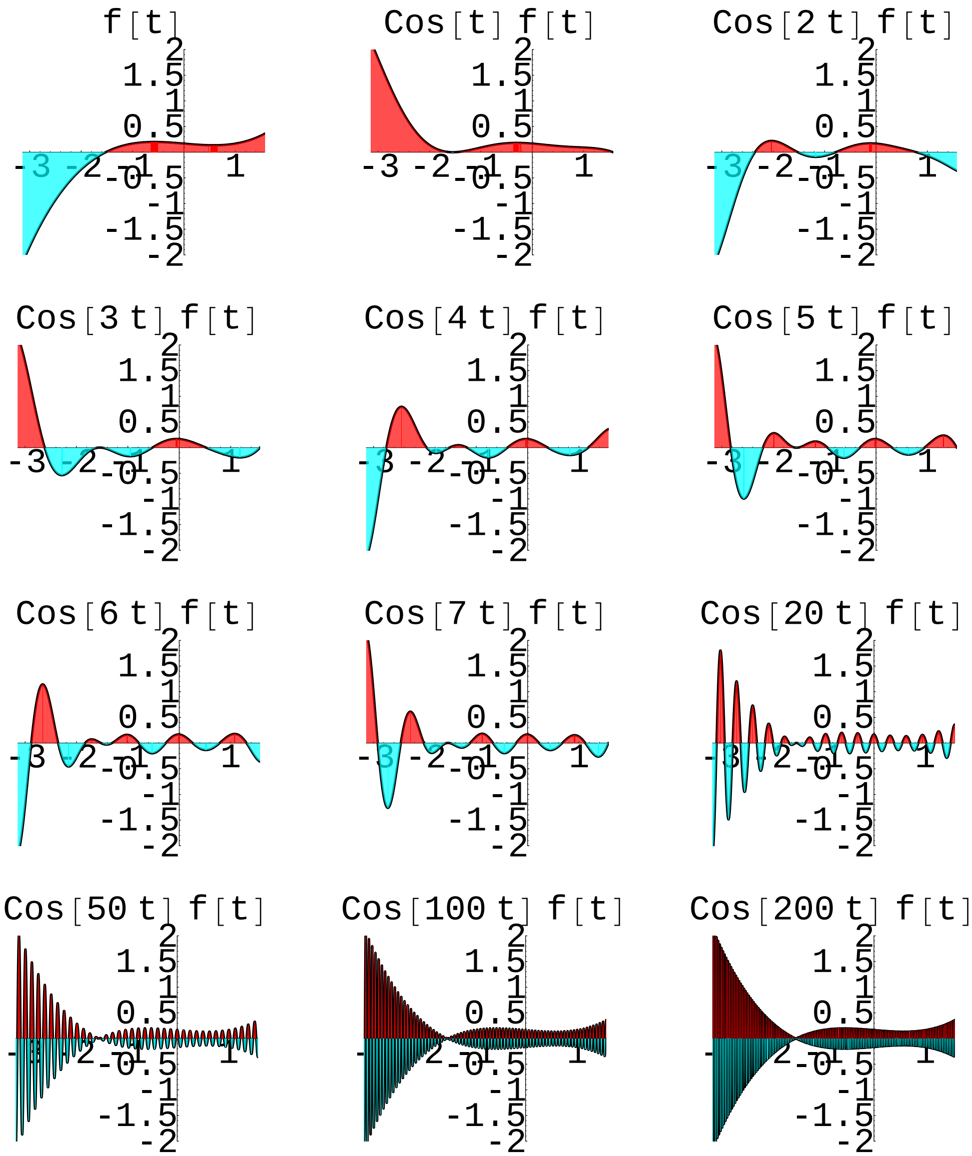
Slika 5: Prvih deset delnih vsot Fourierove vrste za funkcijo $f(t) = t$

Pri dokazu tega izreka nam bo v pomoč tale zanimiva lema:

Lema 25 (Riemann)**.** *Če je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *odsekoma zvezna, je*

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(pt)\,dt = 0 = \lim_{p\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(pt)\,dt.$$

Grafični "dokaz". Zelo preprosto je vsebino leme razumeti geometrijsko:



Slika 6: Grafični „dokaz“ Riemannove leme. Integral funkcije $f(t)\cos pt$ je predznačena ploščina. Na vsaki od slik je z rdečo prikazana pozitivno predznačena ploščina, z modro pa negativno predznačena. Obe ploščini seštejemo, pa dobimo $\int_a^b f(t)\cos(pt)\,dt$. Če se p veča, se obe ploščini seštejeta v 0, kot smo tudi trdili.

$\square$

Grafični „dokaz“ seveda še ni pravi dokaz.

Naloga 26. *Poskusi napisati korekten dokaz.*

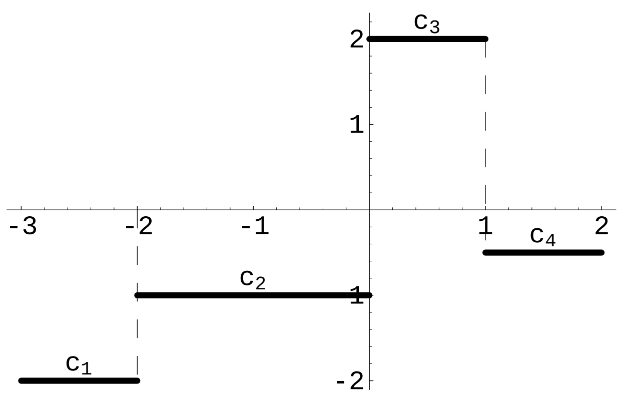
Rešitev. Dokazali bomo le prvo enakost, saj je druga zelo podobna.

Dokaz je preprost, če je $f(t) = c = const$. Namreč, tedaj je

$$\int_a^b f(t)\sin(pt)\,dt = c\int_a^b \sin(pt)\,dt = c\frac{\cos(ap) - \cos(bp)}{p}.$$

Števec na desni strani je omejen: $|\cos(ap) - \cos(bp)| \leq 2$, torej z $p \to \infty$ ulomek res limitira proti 0.

Dokaz je še vedno preprost, če je f stopničasta funkcija. S tem mislimo, da interval $[a, b]$ razpade na končno mnogo podintervalov $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$, in je na vsakem od teh podintervalov $f|_{[x_{i-1},x_i]}(t) = c_i = const$ konstanta.



Slika 7: Stopničasta funkcija na $[-3, 2]$

Namreč, $\int_a^b = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b$, torej

$$\int_a^b f(t)\sin(pt)\,dt = c_1\int_a^{x_1} \sin(pt)\,dt + c_2\int_{x_1}^{x_2} \sin(pt)\,dt + \cdots + c_n\int_{x_{n-1}}^b \sin(pt)\,dt.$$

Po zgornjem razmisleku vsak posamezni sumand konvergira proti 0 ko gre $p \to \infty$.

Denimo sedaj, da je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je na zaprtem, omejenem intervalu $[a, b]$ tudi enakomerno zvezna. Če torej poljubno izberemo $\varepsilon > 0$, lahko najdemo tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, če je le $|x - y| < \delta$, in $x, y \in [a, b]$.

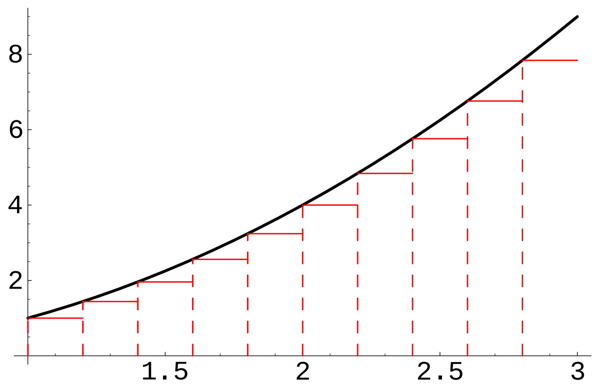
Sedaj pa interval $[a, b]$ razdelimo na končno mnogo podintervalov,

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n];$$

vsak naj ima širino največ δ. Bodi še $\mathrm{St}_\varepsilon(t)$ stopničasta funkcija, tj. konstantna na vsakem od teh podintervalov; definirajmo jo z zahtevo $\mathrm{St}_\varepsilon(t) := f(x_i) = const$, če $t \in [x_{i-1}, x_i]$. Če tudi y leži na tem podintervalčku, je $|x_i - y| < \delta$, in torej tudi

$$|\mathrm{St}_\varepsilon(y) - f(y)| = |f(x_i) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{b-a}.$$

Toda to oceno lahko naredimo za vsak $y \in [a, b]$. Se pravi, da se naša stopničasta funkcija zelo malo razlikuje od $f(t)$. Torej je



Slika 8: Aproksimacija zvezne funkcije f s stopničasto funkcijo St_ε

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(pt)\,dt\right| &\le \int_a^b |f(t) - \mathrm{St}_\varepsilon(t)| \cdot |\sin(pt)|\,dt + \left|\int_a^b \mathrm{St}_\varepsilon(t)\sin(pt)\,dt\right| \\ &\le \int_a^b \tfrac{\varepsilon}{b-a}\,dt + \left|\int_a^b \mathrm{St}_\varepsilon(t)\sin(pt)\,dt\right|.\end{aligned}$$

Prvi sumand je manjši od ε ne glede na to kakšen je p. Za drugi sumand pa že vemo od zgoraj, da gre proti nič, ko $p \to \infty$.

Nazadnje, če je f odsekoma zvezna, interval $[a, b]$ razdelimo na podintervale kjer pa f je zvezna, in na vsakem od njih ponovimo zgornje argumente.

Lema 27. *Za vsako realno število α, ki ni večkratnik 2π, velja enakost:*

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha) = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})\alpha\big)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Dokaz. Najprej upoštevajmo, da je $\sin y \cos x = 1/2(\sin(x+y) - \sin(x-y))$. Z zaporedno uporabo dobimo

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\big(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos(n\alpha)\big) &= \frac{1}{2}\Big(\big(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\big) + \big(\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\big) + \dots \\ &\qquad \dots + \big(\sin((n+\tfrac{1}{2})\alpha) - \sin((n-\tfrac{1}{2})\alpha)\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin((n+\tfrac{1}{2})\alpha) - \sin\frac{\alpha}{2}\Big)\end{aligned}$$

Delimo s $\sin\frac{\alpha}{2}$ na obeh straneh, prištejmo $\frac{1}{2}$, pa dobimo iskan rezultat. ∎

Lema 28. *Za vsak fiksen $x = x_0$ velja*

$$\frac{\tilde{f}(x_0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \tilde{f}(x_0)\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \tilde{f}(x_0)\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds. \tag{7}$$

Če oba integrala seštejemo, dobimo tudi

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{\tilde{f}(x_0)}{2} + \frac{\tilde{f}(x_0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x_0)\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\frac{s}{2}}\,ds. \tag{8}$$

Dokaz. Število $\tilde{f}(x_0)$ lahko izpostavimo (tj. „nesemo ven“) iz obeh integralov. Po prejšnji lemi sta integranda enaka $g(s) := \frac{\sin((n+\frac{1}{2})s)}{2\sin\frac{s}{2}} = 1/2 + \sum_{k=1}^{n}\cos(ks)$. Pri integriranju po $s \in [-\pi, 0]$ se vsi členi izničijo, le prvi prinese $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{ds}{2} = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\Big(1/2 + \sum_{k=1}^{n}\cos(ks)\Big)\,ds &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1/2\,ds + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(ks)\,ds\\ &= 1/2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(ks)}{k}\Big|_{s=-\pi}^{0} = 1/2 + \sum_{k=1}^{n} 0 = 1/2,\end{aligned}$$

(podobno velja za integracijo po $s \in [0, \pi]$). Sedaj še vse skupaj pomnožimo s številom $\tilde{f}(x_0)$, pa imamo lemo dokazano. □

Lema 29. *Denimo, da je $F(t+2\pi) = F(t)$ periodična, odsekoma zvezna funkcija. Tedaj je*

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt; \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dokaz. Odvajajmo funkcijo

$$\begin{aligned}G(x) := \int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\,dt &= \int_{-\pi-x}^{0} F(t)\,dt + \int_{0}^{\pi-x} F(t)\,dt\\ &= -\int_{0}^{-\pi-x} F(t)\,dt + \int_{0}^{\pi-x} F(t)\,dt;\end{aligned}$$

pa dobimo $G'(x) = -F(-\pi-x)\cdot\frac{d(-\pi-x)}{dx} + F(\pi-x)\cdot\frac{d(\pi-x)}{dx} = F(-\pi-x) - F(\pi-x) = F(-\pi-x) - F(\pi-x-2\pi) = 0$. Torej je $G(x) = const = G(0) = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt$. □

Dokaz izreka. Funkcijo $s_n(x_0)$ zapišimo „na dolgo:“

$$
\begin{aligned}
s_n(x_0) &= \overbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\tilde f(t)\,dt}^{=a_0} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx_0)\overbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde f(t)\cos(kt)\,dt}^{=a_k} + \sin(kx_0)\overbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde f(t)\sin(kt)\,dt}^{=b_k}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\tilde f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde f(t)\cos(kx_0)\cos(kt)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi}\tilde f(t)\sin(kx_0)\sin(kt)\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\overbrace{\cos(kx_0)\cos(kt)+\sin(kx_0)\sin(kt)}^{=\cos(k(t-x_0))}\Big)\tilde f(t)\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x_0))\Big)\tilde f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})(t-x_0)\big)}{2\sin\frac{t-x_0}{2}}\tilde f(t)\,dt \qquad (9)
\end{aligned}
$$

kjer smo v (9) upoštevali lemo 27. Po substituciji $t := s + x_0$ nam integral preide v

$$
s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0}\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\frac{s}{2}}\tilde f(s+x_0)\,ds
$$

Toda integrand je periodična funkcija s periodo 2π. Torej lahko zamenjamo interval $[-\pi - x_0, \pi - x_0]$ z intervalom $[-\pi, \pi]$. Dobimo:

$$
s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\frac{s}{2}}\tilde f(s+x_0)\,ds.
$$

Pridenimo še enačbo (8) iz leme 28, pa dobimo

$$
\begin{aligned}
s_n(x_0) - \tilde f(x_0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\frac{s}{2}}\tilde f(s+x_0)\,ds - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\frac{s}{2}}\tilde f(x_0)\,ds \qquad (10)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})s\big)}{2\sin\frac{s}{2}}\big(\tilde f(s+x_0) - \tilde f(x_0)\big)\,ds\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{\tilde f(s+x_0)-\tilde f(x_0)}{s}\cdot\frac{s}{2\sin\frac{s}{2}}}_{:=F(s)}\cdot\sin\big((n+\tfrac{1}{2})s\big)\,ds;
\end{aligned}
$$

Funkcija $F(s)$ je na videz problematična pri $s = 0$. Vendar pa prvi faktor pri $s \nearrow 0$ konvergira proti $\tilde f'(x_0 - 0)$ (levemu odvodu funkcije $\tilde f$ v točki x_0) in konvergira pri $s \searrow 0$ proti desnemu odvodu, $\tilde f'(x_0 + 0)$. Pri drugem faktorju sta ustrezni limiti enaki 1. Torej je $F(s)$ odsekoma zvezna funkcija na $[-\pi, \pi]$, in po Riemannovi lemi desna stran z naraščajočim n konvergira proti 0. $\square$

Naloga 30. *Denimo, da funkcija $\tilde f$ ni zvezna v $x = x_0$, ima pa tu levi in desni posplošeni odvod. Pokaži, da tedaj*

$$
a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) = \frac{\tilde f(x-0)+\tilde f(x+0)}{2}.
$$

Nasvet: v (10) integral razbij na $\int_{-\pi}^{0}\dots ds + \int_{0}^{\pi}\dots ds$, in nato namesto enačbe (8) uporabi raje (7).

Gornji izrek pove, da za odvedljive funkcije (za katere je še $\tilde{f}(x+2\pi) \equiv \tilde{f}(x)$) enačaj velja pri vsakem argumentu. Še posebej lepo bi bilo, ako bi vrsta na desni konvergirala npr. enakomerno in absolutno. To velja vsaj v primeru, ko je $\tilde{f}$ odsekoma zvezno odvedljiva. S tem imamo v mislih funkcijo, ki je zvezna povsod, odvedljiva pa tudi povsod, razen v končno mnogo točkah osnovnega intervala $[-\pi, \pi]$, kjer pa ima levi in desni odvod; poleg tega pa zahtevamo tudi, da je $\tilde{f}'(x)$ odsekoma zvezna.

Izrek 31. *Če je $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x+2\pi) \equiv \tilde{f}(x)$ odsekoma zvezno odvedljiva funkcija, Fourierova vrsta $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ konvergira proti $\tilde{f}(x)$ enakomerno in absolutno.*

Dokaz. Razvijmo $\tilde{f}'(x)$ po ortogonalnem sistemu $\frac{e_k}{\sqrt{\pi}} := \frac{\cos(kt)}{\pi}$, $\frac{\overset{*}{e}_k}{\sqrt{\pi}} := \frac{\sin(kt)}{\pi}$. Dobimo

$$A_k := \langle \tilde{f}', \tfrac{e_k}{\sqrt{\pi}} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}'(t)\cos(kt)\,dt \underset{\text{per partes}}{=} \tilde{f}(t)\frac{\cos(kt)}{\pi}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\sin(kt)\,dt$$

$$B_k := \langle \tilde{f}', \tfrac{\overset{*}{e}_k}{\sqrt{\pi}} \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}'(t)\sin(kt)\,dt \underset{\text{per partes}}{=} \tilde{f}(t)\frac{-\sin(kt)}{\pi}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\cos(kt)\,dt$$

Zaradi $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$ se prva sumanda izničita in enačbi polepšata v

$$\begin{aligned} \boxed{A_k} &= \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\sin(kt)\,dt &= \boxed{kb_k} \\ \boxed{B_k} &= \frac{-k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\cos(kt)\,dt &= \boxed{-ka_k}. \end{aligned}$$

Sklepamo, da je

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\big|a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big| &\le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{-B_k}{k}\Big| + \Big|\frac{A_k}{k}\Big| \le \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{|B_k|^2}{2} + \frac{1}{2k^2}\Big) + \Big(\frac{|A_k|^2}{2} + \frac{1}{2k^2}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|^2 + |B_k|^2; \end{aligned} \tag{11}$$

do (11) smo prišli upoštevajoč neenakost $2\alpha\beta \le \alpha^2 + \beta^2$, pri $\beta := \frac{1}{k}$. Drugi sumand v (11) lahko ocenimo z Besselovo neenačbo: $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 + |B_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\big|\langle \tilde{f}', \frac{e_k}{\sqrt{\pi}}\rangle\big|^2 + \big|\langle \tilde{f}', \frac{\overset{*}{e}_k}{\sqrt{\pi}}\rangle\big|^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\big|\langle \tilde{f}', e_k\rangle\big|^2 + \big|\langle \tilde{f}', \overset{*}{e}_k\rangle\big|^2 \le \frac{1}{\pi}\|\tilde{f}'\|^2$. Torej je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big|a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|^2 + |B_k|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2\pi}\|\tilde{f}'\|^2 < \infty.$$

Ocena na desni je neodvisna od x. Torej vrsta konvergira absolutno; po Weirstraßovem kriteriju pa tudi enakomerno. □

Opomba 32. Če je $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x + 2\pi) \equiv \tilde{f}(x)$ dvakrat zvezno odvedljiva, lahko gornjo proceduro uporabimo na $\tilde{f}'$. Torej Fourierova vrsta za $\tilde{f}'$ konvergira enakomerno. Todi njene koeficiente smo že izpeljali v dokazu prejšnjega izreka:

$$\tilde{f}'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt),$$

kjer $A_k = kb_k$, $B_k = -ka_k$, in so a_k, b_k Fourierovi koeficienti funkcije $\tilde{f}(t)$, tj

$$\tilde{f}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt). \tag{12}$$

Po drugi strani: Če formalno odvajamo (12), pa dobimo ravno (enakomerno konvergentno) vrsto za $\tilde{f}'(t)$.

To pomembno ugotovitev zapišimo kot posledico.

Posledica 33. *Če je $\tilde{f}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, velja enačaj $\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_x \sin(kx)$ povsod. Poleg tega lahko Fourierovo vrsto členoma odvajamo in dobljena vrsta enakomerno konvergira proti $\tilde{f}'(x)$.*

Zgled 34. Fourierovo vrsto za $f(t) := t$ smo že izpeljali:

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt).$$

Toda te vrste ne moremo členoma odvajati, saj dobljena vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\big(\tfrac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1} \cos(kt)$$

sploh ne konvergira. Namreč, njeni členi, $u_k(t) := 2(-1)^{k+1} \cos(kt)$ ne limitirajo proti nič.

Seveda se tukaj ne moremo sklicati na gornjo opombo, kajti periodično nadaljevanje, $\tilde{f}$ ni zvezno (prim. sliko 2.2), kaj šele, da bi bilo dvakrat zvezno odvedljivo!

Posledica 35. *Vektorji (tj. funkcije) $e_0 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_k : t \mapsto \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}$ ter $\overset{*}{e}_k : t \mapsto \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}$ so K.O.N.S. (=kompleten ortonormiran sistem) v prostoru odsekoma zveznih funkcij na intervalu $[-\pi, \pi]$. Velja naslednja „Parsevalova identiteta“*

$$2|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 = \frac{1}{\pi}\|\tilde{f}\|^2 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^2\, dt;$$

kjer so a_k, b_k števila iz (5).

Delni dokaz. Naj bo $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$ *odsekoma zvezno odvedljiva.* Lahko jo periodično nadaljujemo, da bo definirana na $\mathbb{R}$, in bo veljalo $\tilde{f}(x + 2\pi) \equiv \tilde{f}(x)$. Po prejšnjem izreku vrsta

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= \sqrt{2\pi} a_0 \, e_0(t) + \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{n} a_k \, e_k(t) + b_k \, \overset{*}{e}_k(t) \end{aligned} \tag{13}$$

konvergira enakomerno proti $\tilde{f}(x)$. Če torej predpišemo $\varepsilon > 0$, je

$$|\tilde{f}(x) - s_n(x)| < \varepsilon \; \forall \, x \in \mathbb{R} \text{ in } \forall \, n > N_\varepsilon. \tag{14}$$

Upoštevaje neenačbo Cauchy–Schwarz–Bunjakowskega, imamo

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle - \langle s_n, s_n \rangle = \langle \tilde{f} - s_n, s_n \rangle + \langle \tilde{f}, \tilde{f} - s_n \rangle &\leq \|\tilde{f} - s_n\| \cdot \|s_n\| + \|\tilde{f}\| \cdot \|\tilde{f} - s_n\| \\ &\leq \|\tilde{f} - s_n\| \cdot \big(\|s_n - \tilde{f}\| + \|\tilde{f}\|\big) + \|\tilde{f}\| \cdot \|\tilde{f} - s_n\| \end{aligned}$$

Zaradi (14) je

$$\|\tilde{f} - s_n\|^2 := \langle \tilde{f} - s_n, \tilde{f} - s_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t) - s_n(t)|^2 \, dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 \, dt = 2\pi\varepsilon^2.$$

Torej velja

$$\big|\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle - \langle s_n, s_n \rangle\big| \leq \sqrt{2\pi\varepsilon^2}\big(\sqrt{2\pi\varepsilon^2} + 2\|\tilde{f}\|\big)$$

pri vsakem dovolj velikem $n \in \mathbb{N}$. Ker pa je s_n vsota ortonormiranih vektorjev $e_0, e_k, \overset{*}{e}_k$, sledi iz (13) in po Pitagorovem izreku

$$\langle s_n, s_n \rangle = \|s_n\|^2 = 2\pi |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_k|^2,$$

odkoder končno dobimo

$$\Big|\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle - \langle s_n, s_n \rangle\Big| = \Big|\|\tilde{f}\|^2 - \big(2\pi|a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_k|^2\big)\Big| \leq \sqrt{2\pi\varepsilon^2}\big(\sqrt{2\pi\varepsilon^2} + 2\|\tilde{f}\|\big).$$

Neenakost velja tudi v limiti, $n \to \infty$; ker pa je lahko $\varepsilon > 0$ poljubno majhen, je dejansko leva stran v limiti $n \to \infty$ enaka nič. Po deljenju s π res dobimo iskano:

$$2|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 = \frac{1}{\pi}\|\tilde{f}\|^2 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(t)|^2 \, dt$$

$\square$

Zgled 36. Še enkrat se spomnimo na Fourierovo vrsto za funkcijo $f(t) := t$. Torej $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt)$. Tukaj je $a_k = 0$ in $b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$. Po „Parsevalovi identiteti“ pa dobimo

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

oziroma: $\frac{2\pi^3}{3\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$. Delimo z 4 in smo že pri *Eulerjevi vsoti*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2.3 Zaključne pripombe

2.3.1 Kompleksen zapis

Posebno lepo teče zgodba, če v Fourierovi vrsti koeficienta a_k in b_k združimo v eno samo, kompleksno število $z_k := a_k + ib_k$; kjer $i = \sqrt{-1}$. Da ta ideja ni iz trte izvita nam sugerira Eulerjeva formula $\cos(kt) + i\sin(kt) = e^{ikt}$. Po definiciji je kompleksno število z_k za indekse $k \geq 1$ enako

$$z_k = a_k + ib_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt + i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$$

Nadaljnji korak bomo utemeljili v naslednjem poglavju, ko bomo definirali integral funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ z vrednostmi v kompleksnih številih. Namreč iz definicije 47, še bolj pa iz trditve 51, lahko kompleksno število $i = \sqrt{-1}$ nesemo znotraj integrala. Zaenkrat čisto formalno, vendar z ustreznimi utemeljitvami v naslednjem poglavju je torej

$$\begin{aligned}
z_k = a_k + ib_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} if(t)\sin(kt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\big(\cos(kt) + i\sin(kt)\big)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt
\end{aligned}$$

Formula nam omogoča kompaktnejši zapis koeficientov.

Tudi Fourierovo vrsto lahko zapišemo bolj pregledno:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k - ib_k)(\cos(kx) + i\sin(kx)) + (a_k + ib_k)(\cos(kx) - i\sin(kx))}{2} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{-k}}{2}e^{ikx} + \frac{z_k}{2}e^{-ikx} = \frac{z_0}{2} + \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{z_j}{2}e^{-ijx} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{2}e^{-ikx} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z_k}{2}e^{-ikx},
\end{aligned}$$

kjer je $z_0 = 2a_0 + i0 = \frac{2}{2\pi}\int_\pi^\pi f(t)\cos(0t)\,dt + i\frac{1}{\pi}\int_\pi^\pi f(t)\sin(0t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_\pi^\pi f(t)e^{i\cdot 0t}\,dt$, in je poleg tega $z_{-k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = a_k - ib_k$.

Ne pozabimo, da enačaj ne velja nujno pri vsakem x! Vendar prav gotovo imamo enačaj vsaj tam, kjer je f zvezna in ima levi/desni odvod.

Naloga 37. *S kompleksnim zapisom zapiši Fourierovo vrsto za funkcijo $f(t) := t$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.*

Rešitev. To funkcijo smo že razvijali, prim. Zgled 23. V kompleksnem postopamo takole:

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{ikt}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}t\frac{e^{ikt}}{ik}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ikt}}{ik} = \frac{\pi e^{k\pi i} - (-\pi)e^{-k\pi i}}{k\pi i} - \frac{e^{ikt}}{\pi(ik)^2}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

po pravilu per partes ($u = t$, $dv = e^{ikt}\,dt$). Ker je $k \in \mathbb{Z}$ je funkcija $e^{kt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$ periodična s periodo 2π. Torej je $e^{ik\pi} = e^{-ik\pi}$, in stem je zadnji sumand ničeln. Ostane le še $z_k = \frac{e^{k\pi i}+e^{-k\pi i}}{ik} = \frac{2e^{k\pi i}}{ik} = \frac{2(-1)^k}{ik}$. Pri $k = 0$ moramo integrirati $z_0 = \int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0$. Torej

$$t = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{z_k}{2}e^{-ikt} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^k e^{-ikt}}{ik} + 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-ikt}}{ik}.$$

Kot že vemo, enačaj velja za $t \in (-\pi, \pi)$.

2.3.2 Razvoj na drugih intervalih

V Fourierovo vrsto lahko razvijamo tudi funkcije, katerih perioda je različna od 2π.

Naloga 38. *Denimo, da je $f : [-d, d] \to \mathbb{R}$. Uvedi novo funkcijo $f_\pi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definirano z $f_\pi : t \mapsto f(\frac{\pi}{d}y)$ in jo razvij v Fourierovo vrsto. S ponovno substitucijo $y \mapsto \frac{\pi}{d}x$ dobiš formulo*

$$f(x) = f_\pi(y) = a_0' + \sum_{k=1}^{\infty} a_k' \cos\tfrac{k\pi x}{d} + b_k' \sin\tfrac{k\pi x}{d},$$

kjer

$$\begin{aligned} a_0' &= \frac{1}{2d}\int_{-d}^{d} f(t)\,dt \\ a_k' &= \frac{1}{d}\int_{-d}^{d} f(t)\cos\tfrac{k\pi t}{d}\,dt; \qquad k \geq 1 \\ b_k' &= \frac{1}{d}\int_{-d}^{d} f(t)\sin\tfrac{k\pi t}{d}\,dt; \qquad k \geq 1. \end{aligned}$$

S to formula dobiš razvoj periodičnih funkcij s periodo $2d$. Identična formula velja tudi za funkcije, definirane na $[0, 2d]$.

2.3.3 Razvoj sodih/lihih funkcij

Funkcija f je soda, če $f(-t) = f(t)$ za vsak t. Liha pa je, Če $f(-t) = -f(t)$ za vsak t. Pri takih funkcijah je potrebno v Fourierovi vrsti opraviti le polovico dela.

Naloga 39. *Denimo, da je periodična funkcija f soda. Pokaži, da so $b_k = 0$. Torej za sode funkcije na $[-\pi, \pi]$ velja razvoj*

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$$

Naloga 40. *Denimo, da je periodična funkcija f liha. Pokaži, da so $a_k = 0$. Torej za lihe funkcije na $[-\pi, \pi]$ velja razvoj*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt$$

2.3.4 Enoličnost razvoja

Podobno kot Taylorjeva vrsta tudi pri Fourierovi velja, da so koeficienti a_k, b_k enolični.

Naloga 41. *Denimo, da za vsak t velja*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) = \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(kt) + \tilde{b}_k \sin(kt),$$

in da obe vrsti konvergirata enakomerno. Pokaži, da je $\tilde{a}_k = a_k$ in $\tilde{b}_k = b_k$.

Nasvet: odštej ju, da dobiš

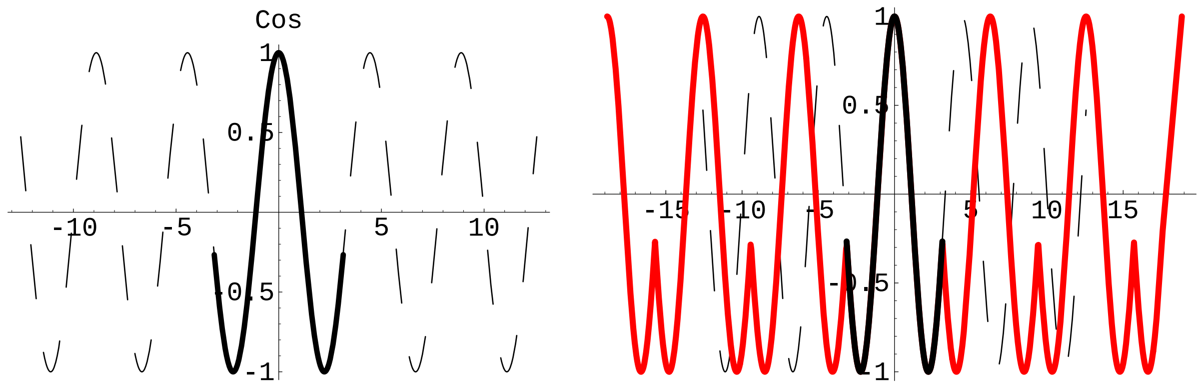
$$(a_0 - \tilde{a}_0) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \tilde{a}_k) \cos(kt) + (b_k - \tilde{b}_k) \sin(kt) = 0.$$

Nato pomnožiš z $\cos(it)$ Dobljena vrsta še vedno konvergira enakomerno, torej jo lahko členoma integriraš na $[-\pi, \pi]$. Na desni dobiš 0. Na levi pa se integrali se izničijo z izjemo $\int_{\pi}^{\pi} (a_i - \tilde{a}_i) \cos^2(it)\, dt$. Odkoder $a_i - \tilde{a}_i = 0$.

S pomočjo Lesbegueovega integrala in teorije Hilbertovih prostorov (Besselova neenakost) bi lahko pokazali, da isti sklep velja četudi vrsti ne konvergirata enakomerno. Dovolj je, da npr. $\sum |\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 < \infty$.

2.3.5 Še nekaj nalog

Naloga 42. *Bodi $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ realno število, ki ni celo. Poišču Fourierovo vrsto za funkcijo $f(x) := \cos(\alpha x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.*



Slika 9: Na levi je graf funkcije $\cos \alpha x$. Na desni pa je njeno periodično nadaljevanje, s periodo 2π označeno z rdečo. Ker je f zvezna, in $f(-\pi) = f(\pi)$, je tudi periodično nadaljevanje zvezno.

Rešitev. Funkcija je soda, torej $b_k = 0$. Dalje, za $k > 0$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x)\cos(kx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\alpha-k)x + \cos(\alpha+k)x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\sin(\alpha-k)x}{\alpha-k} + \frac{\sin(\alpha+k)x}{\alpha+k}\Big)\Big|_{x=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)\cos(k\pi)}{\pi(\alpha^2-k^2)}, \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha x)\,dx = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}. \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned} f(x) = \cos(\alpha x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{\alpha^2-k^2}\cos(kx) \\ = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\Big(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha\cos x}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha\cos(2x)}{\alpha^2-2^2} &- \frac{2\alpha\cos(3x)}{\alpha^2-3^2} \pm \dots + \frac{2\alpha(-1)^k\cos(kx)}{\alpha^2-k^2} \mp \dots\Big) \end{aligned} \tag{15}$$

Na intervalu $[-\pi,\pi]$ je funkcija f zvezna, $f(-\pi) = f(\pi)$, in v vsaki točki ima levi oz. desni odvod. Torej po izreku 20 enačaj v gornji vrsti velja za vsak $x \in [-\pi,\pi]$.

Naloga 43. *V prejšnjo nalogo vstavi $x = \pi$ in s pomočjo dobljenega rezultata preveri naslednji razcep funkcije* cotangens *na parcialne ulomke*

$$\pi\,\mathrm{ctg}(\alpha\pi) - \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \dots + \frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2} + \dots$$

Rešitev. V (15) enačaj velja za vsak $x \in [-\pi,\pi]$. Torej tudi pri $x = \pi$. Vstavimo, in dobimo, ob upoštevanju, da je $\cos(k\pi) = (-1)^k$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha\pi) &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\Big(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha(-1)}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha(-1)^2}{\alpha^2-2^2} - \frac{2\alpha(-1)^3}{\alpha^2-3^2} \pm \dots + (-1)^k\frac{2\alpha(-1)^k}{\alpha^2-k^2} \mp \dots\Big)\\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\Big(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \dots + \frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2} + \dots\Big)\end{aligned}$$

Delimo z $\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$ in odštejemo $\frac{1}{\alpha}$, pa smo nalogo rešili.

Naloga 44. *Pokaži Eulerjevo enakost*

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Rešitev. V prejšni nalogi na obeh straneh delimo z 2α. da pridemo do

$$\frac{\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi) - \frac{1}{2\alpha}}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha^2-1^2} + \frac{1}{\alpha^2-2^2} + \dots + \frac{1}{\alpha^2-k^2} + \dots$$

Po Weierßovem M-testu vrsta na desni konvergira enakomerno za $\alpha \in [-1/2, 1/2]$, saj $\sum_{k=N+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\alpha^2-k^2}\right| \le \sum_{k=N+1}^{\infty}\left|\frac{1}{1^2-k^2}\right| < \infty$. Torej je zvezna funkcija v točki $\alpha = 0$. Se pravi, da

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi) - \frac{1}{2\alpha}}{2\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha^2-1^2} + \frac{1}{\alpha^2-2^2} + \dots + \frac{1}{\alpha^2-k^2} + \dots\\ &= \frac{1}{0-1^2} + \frac{1}{0-2^2} + \dots + \frac{1}{0-k^2} + \dots\end{aligned}$$

Limito na levi strani lahko izračunamo s pomočjo L'Hospitalovega pravila, če funkcijo preoblikujemo v $\frac{\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)-\frac{1}{2\alpha}}{2\alpha} = \frac{\pi\alpha\cos(\alpha\pi)-\sin(\alpha\pi)}{2\alpha^2\cdot\sin(\alpha\pi)}$. Pride pa ravno $-\frac{\pi^2}{6}$.

Naloga 45. *Dokaži, da*

$$\sin x = x\Big(x - \frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(x - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\Big)\dots\Big(x - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\Big)\dots = x\prod_{k=1}^{\infty}\Big(x - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\Big)$$

Rešitev. Začnemo z enakostjo

$$\frac{\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi) - \frac{1}{2\alpha}}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha^2-1^2} + \frac{1}{\alpha^2-2^2} + \dots + \frac{1}{\alpha^2-k^2} + \dots,$$

ki smo jo pridelali v prejšnji nalogi. Vrsta na desni konvergira enakomerna za $|\alpha| < 1/2$, torej lahko člено integriramo na intervalu $\alpha \in [0, t]$, če je le $|t| < 1/2$. Dobimo

$$\int_0^t \frac{\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi) - \frac{1}{2\alpha}}{2\alpha}\,d\alpha = \int_0^t \frac{d\alpha}{\alpha^2-1^2} + \int_0^t \frac{d\alpha}{\alpha^2-2^2} + \dots + \int_0^t \frac{d\alpha}{\alpha^2-k^2} + \dots,$$

oziroma

$$\begin{aligned}
\ln\Big(\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\Big)\Big|_{\alpha=0}^{t} &= \ln\Big(1-\frac{t^2}{1^2}\Big)+\ln\Big(1-\frac{t^2}{2^2}\Big)+\dots+\ln\Big(1-\frac{t^2}{k^2}\Big)+\dots\\
&= \lim_{k\to\infty}\ln\Big(1-\frac{t^2}{1^2}\Big)+\ln\Big(1-\frac{t^2}{2^2}\Big)+\dots+\ln\Big(1-\frac{t^2}{k^2}\Big)\\
&= \lim_{k\to\infty}\ln\left(\Big(1-\frac{t^2}{1^2}\Big)\Big(1-\frac{t^2}{2^2}\Big)\dots\Big(1-\frac{t^2}{k^2}\Big)\right)\\
&= \ln\left(\lim_{k\to\infty}\Big(1-\frac{t^2}{1^2}\Big)\Big(1-\frac{t^2}{2^2}\Big)\dots\Big(1-\frac{t^2}{k^2}\Big)\right)=\ln\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{t^2}{k^2}\Big),
\end{aligned}$$

odkoder je

$$\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{t^2}{k^2}\Big).$$

To velja za vsak $t\in[-1/2,1/2]$, v posebnem tudi če je oblike $t=x/\pi$. Vstavimo, pomnožimo z x, pa smo pri

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x^2}{k^2}\Big)$$

Enačaj smo utemeljili le za $|t|\le 1/2$, oziroma za $|x|\le\pi/2$. S sredstvi kompleksne analize pa se da pokazati, da velja za vsako (celo kompleksno) število x. Rezultat je zanimiv, saj predstavlja fakorizacijo $\sin x$.

Naloga 46. *Izpelji Wallisov produkt*

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{6\cdot 6}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)}\cdots$$

Nasvet: V prejšnjo nalogo vstavi $x=\frac{\pi}{2}$.

3 Fourierova transformacija

3.1 Uvod

Denimo, da je $a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)$ Fourierova vrsta neke funkcije $f(t)$. Denimo še, da je f dovolj pohlevna, tako da je pri vsakem argumentu enaka svoji Fourierovi vrsti (npr. če je f odvedljiva povsod, bo to že veljalo). Taka funkcija mora biti nujno periodična s periodo 2π.

Če torej f ni periodična, je ne moremo razviti v Fourierovo vrsto. V tem primeru si lahko pomagamo s *Fourierovo transformacijo*, ki je analog Fouriereve vrste za neperiodične funkcije. Ideja, kako to storiti je naslednja:

- Pri Fourierovi vrsti smo funkciji $f(t)$ priredili koeficiente $a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt$ in $b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$ (koeficient a_0 je malenkost drugačen, zaradi enostavni pa definirajmo še $b_0 := 0$).

- Na tak način dobimo zaporedje koeficientov $\big(a_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ oz. $\big(b_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Ti dve zaporedji lahko združimo v zaporedje kompleksnih števil $z_k := a_k + ib_k$.

- Vsako zaporedje, torej tudi zaporedje $\big(z_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ je po definiciji funkcija, ki naravna števila slika v kompleksna. Torej z_k lahko predstavimo kot vrednost kompleksne funkcije $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ pri številu k: $z_k = z(k)$.

- Podobno naredimo pri Fourierovi transformaciji: Funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bomo priredili neko kompleksno funkcijo, $F(x) = A(x) + iB(x)$, imenovano *Fourierov integral funkcije* f, kjer

$$A(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)\,dt; \qquad B(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)\,dt.$$

Fourierov integral of f lahko zapišemo v bolj kompaktni obliki, če se naslonimo na Eulerjevo formulo:

$$e^{ixt} = \cos(xt) + i\sin(xt).$$

Potrebno se je le naučiti integriranja funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ z vrednostmi v kompleksnih številih.

Definicija 47. Funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ rečemo *odsekoma zvezna*, če sta $\operatorname{Re} f$ in $\operatorname{Im} f$ odsekoma zvezni (tj. $\operatorname{Re} f$ in $\operatorname{Im} f$ sta zvezni v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$, z izjemo kvečjemu števno mnogo točk, brez stekališč, kjer pa obstaja leva in desna limita).

Integral odsekoma zvezne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiramo kot

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt := \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Re} f)(t)\,dt + i\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Im} f)(t)\,dt.$$

Opomba 48. Na desni strani sta izlimitirana integrala, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Re} f)(t)\,dt \overset{\text{def}}{:=} \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_{a}^{b} (\operatorname{Re} f)(t)\,dt;$$

podobno je potrebno razumeti tudi imaginarni del. Če bodisi realna, bodisi imaginarna komponenta (bodisi obe) nista integrabilni, potem funkcija $f(t)$ *ni integrabilna.*

Opomba 49. Če nas zanima zgolj integral na intervalu $[a, b]$, ga definiramo kot

$$\int_{a}^{b} f(t)\,dt := \int_{a}^{b} (\operatorname{Re} f)(t)\,dt + i\int_{a}^{b} (\operatorname{Im} f)(t)\,dt.$$

Zgled 50. Integrirajmo funkcijo $e^{it} = \cos t + i\sin t$ na intervalu $t \in [0, x_0]$:

$$\int_0^{x_0} e^{it}\,dt = \int_0^{x_0} \cos t + i\int_0^{x_0} \sin t = \sin t \,\Big|_{t=0}^{x_0} + i(-\cos t)\,\Big|_{t=0}^{x_0}$$
$$= \sin x_0 - i\cos x_0 + i = -i(\cos x_0 + i\sin x_0 - 1) = \frac{e^{ix_0} - 1}{i}$$

Rezultat je isti, kot če bi bilo število i realno! To ni naključje, vendar pa bi nas nadaljnja obravnava te teme zanesla v odvod kompleksnih funkcij.

Integral funkcij z vrednostmi v kompleksnih številih ima zelo podobne lastnosti kot smo jih že vajeni za integral realnih funkcij:

Trditev 51. *Če sta $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ odsekoma zvezni, velja:*

(i) $\int_a^b (f + g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b (g)(t)\,dt.$

(ii) Če je $\lambda \in \mathbb{C}$ poljubno kompleksno število, ga lahko izpostavimo:

$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$$

(iii) Velja trikotniška neenakost:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Naloga 52. *Preveri lastnosti (i)–(ii) neposredno iz definicije (zapiši λ kot vsoto realnega in imaginarnega dela: $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$).*

Naloga 53. *S pomočjo točke (ii) dokaži lastnost (iii).*
(Nasvet: Integral zapiši v polarni obliki $\int_a^b f(t)\,dt = re^{i\alpha}$. Torej je leva stran neenačbe (iii) enaka

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = r = e^{-i\alpha}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b e^{-i\alpha} f(t)\,dt.$$

Zakaj pa je tedaj $\int_a^b e^{-i\alpha} f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}\big(e^{-i\alpha} f(t)\big)\,dt \ge 0$? In zakaj je končno to število manjše od $\int_a^b |f(t)|\,dt$?)

Za odsekoma zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pravimo, da je *s kvadratom integrabilna*, če

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Re} f)(t)^2 + (\operatorname{Im} f)(t)^2\,dt < \infty,$$

in pravimo, da je *absolutno integrabilna* (tudi: *sumabilna*), če

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty.$$

Sedaj pa lahko napišemo obljubljeno kompaktno obliko Fourierove transformacije. Pravzaprav je še nismo niti definirali, kot se spodobi:

Definicija 54. Bodi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutno integrabilna. Funkcijo

$$F(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ity}\,dt$$

imenujemo *Fourierov integral funkcije* f. Predpis, ki vsaki absolutno integrabilni funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ priredi njen Fourierov integral $F(y)$ pa imenujemo *Fourierova transformacija*. Oznaka: $F = \mathscr{F}(f)$, oziroma: $F(y) = \mathscr{F}(f)(y)$.

Torej je Fourierov integral, tj. funkcija F, **vrednost Fourierove transformacije, izračunane na funkciji f.**

Opomba 55. Če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realna funkcija se njena Fourierova transformiranka računa kot smo že napovedali v uvodu:

$$\mathscr{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ity}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ty)\,dt + i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ty)\,dt.$$

To sledi iz $\mathrm{Re}\big(f(t)e^{ity}\big) = f(t)\cdot \mathrm{Re}(e^{ity}) = f(t)\cos(ty)$, in podobno za imaginarni del.

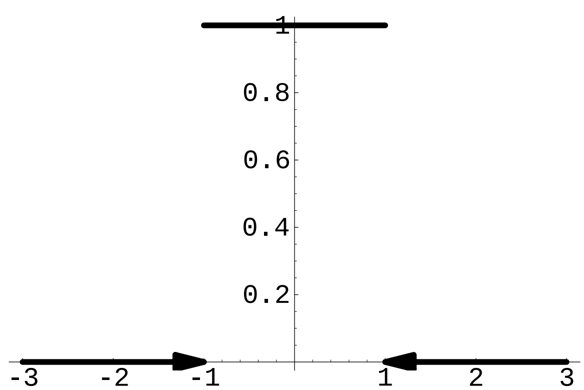
Naloga 56. *Denimo sedaj, da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funkcija, ki slika v kompleksna števila. Razcepi $f(t) = (\mathrm{Re}\, f)(t) + i(\mathrm{Im}\, f)(t)$ na realni in imaginarni del, in pokaži, da je*

$$\mathscr{F}(f) = \mathscr{F}(\mathrm{Re}\, f) + i\,\mathscr{F}(\mathrm{Im}\, f)$$

Zgled 57. Funkcija

$$f(t) := \begin{cases} 1; & |t| \le 1 \\ 0; & \textit{sicer} \end{cases}$$

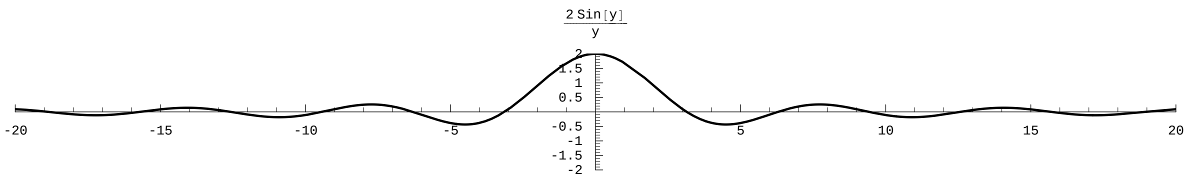
je odsekoma zvezna pa tudi absolutno integrabilna.



Slika 10: Graf funkcije $f(t)$.

Poiščimo njeno Fourierovo transformacijo:

$$\mathscr{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ity}\,dt = \int_{-1}^{1} e^{ity}\,dt = \int_{-1}^{1} \cos(ty)\,dt + i\int_{-1}^{1} \sin(ty\,dt) = \frac{2\sin y}{y},$$



Slika 11: Graf njene Fourierove transformiranke.

imaginarni del je nič, saj je $\sin(ty)$ liha funkcija, ki jo integriramo na simetričnem intervalu. V točki $y = 0$ moramo Fourierov integral izračunati posebej:

$$\mathscr{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{it\cdot 0}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2.$$

Zgornji graf precej dobro predoči graf splošnega Fourierov integral. Veljajo namreč naslednje lastnosti:

Lema 58. *Bodi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolutno integrabilna funkcija in $F := \mathscr{F}(f)$ njen Fourierov integral. Tedaj velja:*

(i) *$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkcija z vrednostmi v kompleksnih številih. Definirana je za vsak $y \in \mathbb{R}$.*

(iii) *$F(y)$ je zvezna funkcija, ki limitira proti 0, ko gre $y \to \pm\infty$.*

Naloga 59. *Dokaži Lemo!*

Rešitev. Da je definirana za vsak realen y sledi iz dejstva, da je pri vsakem y Fourierov integral $\int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{ity}\,dt$ absolutno integrabilen, in s tem tudi konvergenten.

Za dokaz zveznosti pa upoštevjamo, da $\lim_{h\to 0} |e^{ith} - 1| = 0$, oziroma, če je $\varepsilon > 0$ je za vsak dovolj majhen $|h|$ izpolnjeno $|e^{ith} - 1| < \varepsilon$. Za take h je tedaj

$$|F(y+h) - F(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)(e^{it(y+h)} - e^{ity})|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ity}| \cdot |f(t)| \cdot |e^{ith} - 1|\,dt =$$
$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |e^{ith} - 1|\,dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot \varepsilon\,dt = M\varepsilon,$$

kjer $M = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$.

Naloga 60. *Pokaži še eno zelo pomembno lastnost Fourierove transformiranke: $\mathscr{F}$* **je linearna preslikava**, *tj. $\mathscr{F}(f+g) = \mathscr{F}(f) + \mathscr{F}(g)$ in $\mathscr{F}(\lambda f) = \lambda\mathscr{F}(f)$ za $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Izrek 61. *Denimo, da je absolutno integrabilna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva povsod. Če je tudi $f'(t)$ absolutno integrabilna, velja*

$$\mathscr{F}(f')(y) = -iy\mathscr{F}(f)(y).$$

Dokaz. Oglejmo si realni del Fourierove tranformiranke:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\mathscr{F}(f')(y) &= \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} \int_a^b f'(t)\cos(ty)\,dt \underset{\text{per partes}}{=} \\ &= \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} f(t)\cos(ty)\,\Big|_{t=a}^{b} + \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} y\int_a^b f(t)\sin(ty)\,dt\end{aligned}$$

Funkcija $\cos(by)$ je omejena z 1, medtem ko je po Nalogi 62 $f(\pm\infty) = 0$. Zato izlimitirani del konvergira proti 0. Ostane nam zgolj

$$\operatorname{Re}\mathscr{F}(f')(y) = 0 + \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} y\int_a^b f(t)\sin(ty)\,dt = y\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ty)\,dt = y\operatorname{Im}\mathscr{F}(f)(y).$$

Podobno dobimo za imaginarni del (napisano malce krajše):

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\mathscr{F}(f')(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\sin(ty)\,dt \underset{\text{per partes}}{=} \\ &= f(t)\sin(ty)\,\Big|_{t=-\infty}^{\infty} - y\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ty)\,dt = -y\operatorname{Re}\mathscr{F}(f)(y).\end{aligned}$$

Združimo oboje skupaj:

$$\mathscr{F}(f')(y) = \operatorname{Re}\mathscr{F}(f')(y) + i\operatorname{Im}\mathscr{F}(f')(y) = y\big(\operatorname{Im}\mathscr{F}(f)(y) - i\operatorname{Re}\mathscr{F}(f)(y)\big) = iy\mathscr{F}(f)(y).$$

$\square$

Naloga 62. *Preveri manjkajoč del v gornjem dokazu:* $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.
(Nasvet: Ker je f' absolutno integrabilna, je tudi integrabilna. Torej obstaja integral $\int_0^\infty f'(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t f'(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)$. Ker pa je tudi $f(t)$ integrabilna, mora biti $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.)

Zgled 63. Gornji izrek **ne velja nujno**, če f ni odvedljiva v saki točki. Npr.

$$f(t) := \begin{cases} 1; & |t| \le 1 \\ 0; & \textit{sicer} \end{cases}$$

je odvedljiva skoraj povsod, z izjemo dveh točk $t_0 = \pm 1$. Njen odvod povsod drugje pa je $f'(t) = 0$. Toda $\mathscr{F}(f') = 0$, medtem ko $\mathscr{F}(f)(y) = 2\sin y/y$.

Denimo, da poznamo Fourierov integral (npr. $F(y) := \sin y/y$) od neke neznane funkcije f. Ali bi znali povedati katero funkcijo smo imeli v mislih? Odgovor podaja naslednji izrek.

Izrek 64 (Fourierova integralska formula)**.** *Bodi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolutno integrabilna in $F(y)$ njena Fourierova transformiranka. Če je f zvezna v točki x_0 in ima v x_0 levi in desni odvod, lahko vrednost $f(x_0)$ dobimo iz Fourierove transformiranke po formuli:*

$$f(x_0) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(y)e^{-ix_0y}\,dy$$

Opomba 65. Če f ni zvezna v x, ima pa levi in desni *posplošeni odvod*, se ustrezna formula glasi

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} F(y) e^{-ixy}\, dy$$

Pred dokazom si oglejmo primer, ki razkrije kaj vse se skriva v tej formuli.

Zgled 66. Izračunajmo

$$g(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y \cos(\alpha y)}{y}\, dy. \tag{16}$$

Zaman bi iskali nedoločeni integral, saj ni elementarna funkcija! Pomagamo si takole: Integrand zapišimo malce drugače:

$$g(\alpha) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y} \cos(-\alpha y)\, dy.$$

Dodajmo še $0 = \int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y} \sin(-\alpha y)\, dy$ (integrand je liha funkcija!), in dobimo:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y} \cos(-\alpha y)\, dy \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y} \cos(-\alpha y)\, dy + i \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y} \sin(-\alpha y)\, dy \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin y}{y} e^{-i\alpha y}\, dy \end{aligned}$$

Edino, kar se moramo spomniti je, da je $\sin y/y$ Fourierov integral od funkcije

$$f(t) := \frac{1}{2} \begin{cases} 1; & |t| \le 1 \\ 0; & sicer \end{cases}.$$

Le-ta je zvezna in odvedljiva v vsaki točki z izjemo $t_0 = \pm 1$, kjer ima skok. Torej izpolnjuje pogoje iz gornjega izreka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y \cos(\alpha y)}{y}\, dy = \frac{2\pi}{2} \begin{cases} 1; & |\alpha| < 1 \\ 1/2; & \alpha = \pm 1 \\ 0; & sicer \end{cases}$$

Kot stranski produkt: Pri $\alpha := 0$ dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \pi \qquad \text{oziroma} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

Naš naslednji cilj je dokaz Fourierove integralske formule. Uporabili bomo naslednjo lemo:

Lema 67. *Bodi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolutno integrabilna, odsekoma zvezna, in naj ima v točki x_0 levi in desni posplošeni odvod. Tedaj velja:*

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\infty f(x_0+t)\frac{\sin(Rt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} f(x_0+0) \tag{18}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^0 f(x_0+t)\frac{\sin(Rt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} f(x_0-0) \tag{19}$$

Dokaz. Najprej se spomnimo na že izračunani integral

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du,$$

ki nam po substituciji $u := Rt$; $du = R\,dt$ (tu je R poljubno, a fiksno pozitivno število) preide v

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin Rt}{t}\,dt.$$

Pomnožimo obe strani s konstanto $\alpha := f(x_0+0)$, in dobimo

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} f(x_0+0) = f(x_0+0)\int_0^\infty \frac{\sin Rt}{t}\,dt &= \int_0^\infty f(x_0+0)\frac{\sin Rt}{t}\,dt \\ &= \int_0^M f(x_0+0)\frac{\sin Rt}{t}\,dt + \int_M^\infty f(x_0+0)\frac{\sin Rt}{t}\,dt\end{aligned}$$

Podobno razcepimo na dva dela tudi integral v (18):

$$\int_0^\infty f(x_0+t)\frac{\sin(Rt)}{t}\,dt = \int_0^M f(x_0+t)\frac{\sin(Rt)}{t}\,dt + \int_M^\infty f(x_0+t)\frac{\sin(Rt)}{t}\,dt.$$

Odštejmo, in dobimo

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \big(f(x_0+t)-f(x_0+0)\big)\frac{\sin(Rt)}{t}\,dt = \\ &\quad= \int_0^M \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(Rt)\,dt + \int_M^\infty f(x_0+t)\frac{\sin(Rt)}{t}\,dt - \\ &\qquad\qquad - \int_M^\infty f(x_0+0)\frac{\sin(Rt)}{t}\,dt\end{aligned}$$

Levo stran smo torej razbili na tri integrale; na kratko: $I = I_1 + I_2 - I_3$. Sedaj:

$$|I_2| \le \int_M^\infty \left| f(x_0+t)\frac{\sin(Rt)}{t}\right| dt \le \frac{1}{M}\int_M^\infty |f(x_0+t)|\,dt = \frac{1}{M}\int_{M+x_0}^\infty |f(u)|\,du,$$

oziroma

$$|I_3| = |f(x_0+0)| \cdot \left|\int_M^\infty \frac{\sin(Rt)}{t}\,dt\right|.$$

Ker sta oba integrala konvergentna, je torej $|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ in tudi $|I_3| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, pri dovolj velikem M.

Pri prvem integralu pa upoštevajmo, da je funkcija $t \mapsto \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$ odsekoma zvezna povsod na $(0, M]$. Še več, ko gre $t \to 0$ po definiciji limitira proti desnemu pospešenemu odvodu, $f'_D(x_0)$. Torej jo lahko definiramo tudi pri $t = 0$, da bo odsekoma zvezna povsod na $[0, M]$. Tedaj pa je po Riemann–Lebesgueovi lemi $\lim_{R\to\infty} I_1 = 0$, oziroma: od nekega R naprej je tudi $|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Torej: Čim je R dovolj velik velja $|I| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$. Z drugimi besedami: $\lim_{R\to\infty} I = 0$.

Podobno preverimo tudi enačbo (19). □

Dokaz izreka. Integral $\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(y)e^{-ix_0y}\,dy$ zapišimo malce drugače:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(y)e^{-ix_0y}\,dy &= \frac{1}{2\pi}\int_{y=-R}^{R}\left(\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)e^{ity}\,dt\right)e^{-ix_0y}\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(t-x_0)y}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos((t-x_0)y)\,dt + \frac{i}{2\pi}\int_{-R}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin((t-x_0)y)\,dt
\end{aligned}$$

Funkcija $y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin((t-x_0)y)\,dt$ je liha, integriramo pa jo na simetričnem intervalu $[-R, R]$. Imaginarni del je torej nič. Podobno lahko realni del zapišimo kot:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(y)e^{-ix_0y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos((t-x_0)y)\,dt.$$

Integral na desni konvergira enakomerno in absolutno, saj $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\cos((t-x_0)y)|\,dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$. Torej lahko zamenjamo vrstni red integracije:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(y)e^{-ix_0y}\,dy &= \frac{1}{\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{y=0}^{R} \cos((t-x_0)y)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin((t-x_0)R)}{t-x_0}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+u)\frac{\sin(Ru)}{u}\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x_0+u)\frac{\sin(Ru)}{u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x_0+u)\frac{\sin(Ru)}{u}\,du
\end{aligned}$$

kjer je $u := x_0+t$. Pri $R \to \infty$ nam po prejšnji lemi prvi integral konvergira proti $\frac{1}{2}f(x_0-0)$ drugi pa proti $\frac{1}{2}f(x_0+0)$. Če je f zvezna v x_0, je seveda $f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$. □

Za Fourierovo tranformacijo lahko pokažemo tudi naslednje:

Izrek 68. *Če sta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s kvadratom integrabilni in absolutno integrabilni funkciji, velja naslednja identiteta*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\overline{G(y)}\,dy.$$

Opomba 69. V primeru $f = g$ dobimo „Parsevalovo enakost:“

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2\,dy$$

Zopet najprej ilustrirajmo z zgledom:

Zgled 70. Izračunajmo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy.$$

Tudi tukaj bi zaman iskali nedoločeni integral, ki ni elementarna funkcija. Pač pa je $F(y) := \sin y/y$ Fourierov integral od funkcije

$$f(t) := \frac{1}{2}\begin{cases} 1; & |t| \leq 1 \\ 0; & sicer \end{cases}$$

in po „Parsevalovi enakosti“:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2\,dy = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = 2\pi\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dt = \pi.$$

Dokaz izreka. Le za odvedljive funkcije, kjer so poleg tega f, g, f', g', f'', g'' absolutno integrabilne.

- V tem primeru sta F, G zvezni funkciji, in zaradi $F(y) := \mathscr{F}(f)(y) = \frac{1}{(-iy)^2}\mathscr{F}(f'')(y)$, obstaja konstanta A, da je $|y|^2 \cdot |F(y)| \leq A$; po potrebi malce povečajmo A, da bo istočasno tudi $|y|^2 \cdot |G(y)| \leq A$. Tedaj pa npr.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|\,dy &= \int_{-\infty}^{-1} |F(y)|\,dy + \int_{-1}^{1} |F(y)|\,dy + \int_{1}^{\infty} |F(y)|\,dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{-1} \frac{A dy}{y^2} + \int_{-1}^{1} |F(y)|\,dy + \int_{1}^{\infty} \frac{A dy}{y^2}\,dy < \infty,\end{aligned}$$

  in podobno za funkcijo G. Torej sta F, G absolutno integrabilni funkciji.

Dalje, za $0 < R < \infty$ je

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(y)\overline{G(y)}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(F(y)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)e^{ity}}\,dt\right)dy \tag{20}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\overline{g(t)e^{ity}}\,dt\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}F(y)\overline{g(t)}e^{-ity}\,dy\right)dt \tag{21}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\overline{g(t)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}F(y)e^{-ity}\,dy\right)dt;$$

V enačbi (20) smo upoštevali, da je kompleksno število $F(y)$ konstanta pri integriranju po t; v (21) pa smo zamenjali vrstni red integracije, saj prejšnji integral (tj. njegov realni in njegov imaginarni del) konvergira enakomerno:

- Namreč, za vsak y je

  $$\left|\mathrm{Re}\big(F(y)\overline{g(t)e^{ity}}\big)\right| \le \left|F(y)\overline{g(t)e^{ity}}\right| = \left|F(y)\overline{g(t)}e^{-ity}\right| \le M|g(t)|,$$

  kjer je $M := \max|F(y)|$. Zaradi $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)| < \infty$, pa je po Weierstraßovem M–testu integral $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\big(F(y)\overline{g(t)e^{ity}}\big)\,dt$ res enakomerno konvergenten. Podobno sklepamo za imaginarni del.

Ker je f odvedljiva v vsaki točki, je po Fourierovi integralski formuli

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}F(y)e^{-ity}\,dy = f(t);$$

in s tem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}F(y)e^{-ity}\,dy = f(t) - \mathrm{ost}_R(t).$$

Toda integral $t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty}F(y)e^{-ity}\,dy$ (tj. njegov realni in imaginarni del) konvergira enakomerno, saj npr. $\left|\mathrm{Re}\big(F(y)e^{-ity}\big)\right| \le \left|F(y)\right|$, iz začetka pa že vemo, da $\int_{-\infty}^{\infty}|F(y)|\,dy < \infty$.

Če je torej R dovolj velik, je $|\mathrm{ost}_R(t)|$ majhen kot želimo, neodvisno od vrednosti argumenta t. Torej

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}F(y)\overline{G(y)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)}\cdot\big(f(t)-\mathrm{ost}_R(t)\big)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}\,dt - \int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)}\mathrm{ost}_R(t)\,dt$$

in zadnji del lahko takole ocenimo:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)}\mathrm{ost}_R(t)\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}|\overline{g(t)}\mathrm{ost}_R(t)|\,dt \le \varepsilon_R\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

V limiti, $R\to\infty$ torej ostane le:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\overline{G(y)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}\,dt \quad \square$$

3.2 Konvolucija in Fourierova transformacija

Vemo že, da je Fourierova transformacija linearna; da torej $\mathscr{F}(f+g)=\mathscr{F}(f)+\mathscr{F}(g)$. Kaj pa multiplikativnost?

Naloga 71. *Pokaži, da ne velja vedno $\mathscr{F}(f\cdot g)=\mathscr{F}(f)\cdot\mathscr{F}(g)$.*
Nasvet: Pokaži, da za funkciji $f(t):=\operatorname{sign}(2-t)+sign(t)$ in $g(t):=\operatorname{sign}(t+2)-\operatorname{sign}(t)$ velja $f(t)g(t)=0$ povsod, z edino izjemo $t:=0$, kjer $f(0)g(0)=1$. Po drugi strani pa je

$$\mathscr{F}(f)\cdot\mathscr{F}(g)=-\frac{2i\left(-1+e^{2iy}\right)}{y}\cdot\frac{4e^{-iy}\sin(y)}{y}=\frac{16\sin^2(y)}{y^2}\neq 0$$

Pač pa velja $\mathscr{F}(f)\cdot\mathscr{F}(g)=\mathscr{F}(f*g)$ kjer je $f*g$ neka nova operacija med funkcijami, ki jo imenujemo *konvolucija.*

Konvolucijo dveh odsekoma zveznih, absolutno integrabilnih funkcij $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiramo s predpisom

$$(f*g)(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)\,dt$$

Zgled 72. Vzemimo našo staro znanko

$$f(t):=\begin{cases}1; & |t|\leq 1\\ 0; & sicer\end{cases}.$$

Koliko je konvolucija $f*f$?

$$(f*f)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\cdot f(t)\,dt=\int_{-1}^{1}f(x-t)\cdot 1\,dt=-\int_{x+1}^{x-1}f(u)\,du,$$

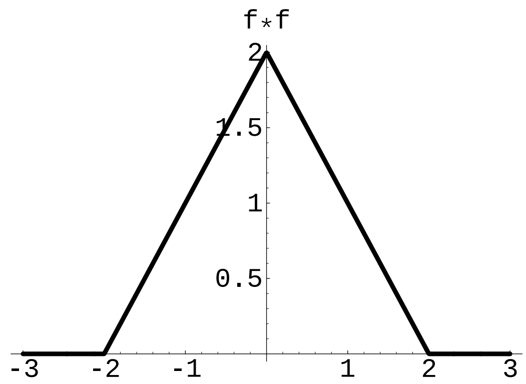
po substituciji $x-t:=u$ (ter $-dt=du$). Predznak porabimo, da spremenimo integracijski meji:

$$(f*f)(x)=\int_{x-1}^{x+1}f(u)\,du.$$

Če je zgornja meja, $x+1<-1$, je na celotnem območju integracije $f(u)=0$. Sklepamo, da je za $(f*f)(x)=0$ za $x<-2$. Podobno, če je spodnja meja prevelika, tj. če $x-1>1$. Z malce dodatnega računa dobimo

$$(f*f)(x)=\begin{cases}0; & x<-2\\ x+2; & x\in[-2,0]\\ 2-x; & x\in[0,2]\\ 0; & x>2\end{cases}.$$

Naloga 73. *Naredi ta dodatni račun.*
(Nasvet: Če $x\in[-2,0]$ je $-1\leq x+1<1$. Spodnja meja, $x-1$ leži pod -1, kar pomeni, da tedaj je $f(u)$ neničelna natanko na $u\in[-1,x+1]$, in je tukaj konstantno enaka 1. Če pa $x\in[0,2]$ pa je zgornja meja prevelika, in $f(u)$ je neničelna natanko na $u\in[x-1,x+1]$.)



Slika 12: Graf konvolucije $f * f$.

Izrek 74. *Velja $\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f) \cdot \mathscr{F}(g)$, kjer je $\mathscr{F}(h)$ Fourierova transformiranka funkcije h.*

Dokaz se naslanja na tole lemo o zamenjavi vrstnega reda integracije v posplošenih integralih:

Lema 75. *Če je $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|h(t,s)|\,dt\right)ds < \infty$, potem lahko zamenjamo vrstni red integracije, tj.*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)\,dt\right)ds = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t,s)\,ds\right)dt$$

Dokaz. Najdemo ga npr. v knjigi W. Rudin, Real and Complex analysis, 3$^{\text{rd}}$ eddition; str. 164–166; je pa precej zahteven. Ob dodatnih predpostavkah, npr. da nas zanima zgolj enakost

$$\int_{s=0}^{\infty} ds \int_{t=0}^{\infty} h(t,s)\,dt = \int_{t=0}^{\infty} dt \int_{s=0}^{\infty} h(t,s)\,ds,$$

da je funkcija $h(t,s)$ zvezna, in da integrala $F(s) := \int_0^\infty h(t,s)\,dt$ oziroma $G(t) := \int_0^\infty h(t,s)\,ds$ konvergirata enakomerno (še vedno pa zahtevamo: $\int_{s=0}^{\infty} ds \int_{t=0}^{\infty} |h(t,s)|\,dt < \infty$), je dokaz razmeroma preprost:

Naredimo pomožno funkcijo

$$H(s,y) := \int_0^y h(t,s)\,dt.$$

Seveda je $|H(s,y)| \le \int_0^y |h(s,t)|\,dt \le \int_0^\infty |h(t,s)|\,dt =: M(s)$. Toda po predpostavkah je $\int_0^\infty M(s)\,ds = \int_{s=0}^{\infty} ds \int_{t=0}^{\infty} |h(t,s)|\,dt < \infty$. Po Weierstraßovem M–testu integral

$$y \mapsto \int_{s=0}^{\infty} H(s,y)\,ds = \int_{s=0}^{\infty} ds \int_0^y h(t,s)\,dt$$

konvergira enakomerno. Če torej predpišemo natančnost $\varepsilon > 0$, bo pri nekem M

$$\int_{s=M}^{\infty} ds \int_0^y h(t,s)\,dt < \varepsilon \qquad (y \in [0,\infty)). \tag{22}$$

Ker obstaja integral $\int_{s=0}^{\infty} ds \int_0^{\infty} h(t,s)\,dt$, lahko po potrebi število M še povečamo, da bo istočasno tudi

$$\int_{s=M}^{\infty} ds \int_0^{\infty} h(t,s)\,dt < \varepsilon.$$

Sedaj v (22) zamenjajmo vrstni red integracije. To lahko, saj smo privzeli enakomerno konvergenco integrala $G(t) := \int_0^{\infty} h(t,s)\,ds$. Dobimo:

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{s=0}^{\infty} ds \int_0^{\infty} h(t,s)\,dt - \int_0^{\infty} dt \int_{s=0}^{\infty} h(t,s)\,ds \Big| \\
&\qquad \leq \Big| \left(\int_{s=0}^{M} ds \int_0^{\infty} h(t,s)\,dt + o_1 \right) - \left(\int_0^{\infty} dt \int_{s=0}^{M} h(t,s)\,ds + o_2 \right) \Big| \\
&\qquad \leq |o_1| + |o_2| \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Toda $\varepsilon > 0$ je bil poljuben: Razlika na levi mora biti nič! $\square$

Dokaz izreka. Fiksirajmo $y = y_0$ in si oglejmo število

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{s=-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)e^{ity_0}\,ds \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\cos(ty_0)\,ds \right) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\sin(ty_0)\,ds \right) dt.
\end{aligned} \tag{23}$$

Zaradi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-s)g(s)\cos(ty_0)|\,dt \right) ds &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t-s)| \cdot |g(s)|\,dt \right) ds \overset{\substack{u:=t-s\\ dt=du}}{=} \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\,du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|\,ds < \infty,
\end{aligned}$$

in podobno pri imaginarnem delu, lahko v (23) zamenjamo vrstni red integracije. Torej:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)e^{ity_0}\,dt \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(s) \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)e^{ity_0}\,dt \right) ds \overset{\substack{u:=t-s\\ dt=du}}{=} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(s) \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i(u+s)y_0}\,du \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(s) \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iuy_0}e^{isy_0}\,du \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(s)e^{isy_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iuy_0}\,du}_{=\mathscr{F}(f)(y_0)} \right) ds \\
&= \int_{-R}^{R} g(s)e^{isy_0} \cdot \mathscr{F}(f)(y_0)\,ds = \mathscr{F}(g)(y_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{isy_0}\,ds = \mathscr{F}(f)(y_0) \cdot \mathscr{F}(g)(y_0). \square
\end{aligned}$$

Literatura

[1] F. Brešar, *Matematika III*, Univerza v Mariboru, Maribor 1995.

[2] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Springer; 2nd rev. and enlarged ed. edition, 1982.

[3] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-day INC. London, 1964.

[4] A. Gray, *Modern differentioal geometry of curves and surfaces with Mathematica*, CRC Press, London, 1998.

[5] Martin M. Lipschutz, *Schaum's Outline of Differential Geometry*, McGraw-Hill; 1 edition, 1969.

[6] N. Prijatelj, *Uvod v matematično analizo 2. del*, DMFA, Ljubljana, 1999

[7] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 3 edition, 1986.

[8] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[9] G. Schwarz: *A pretender to the title "canonical Moebius strip."* Pacific J. Math. Volume 143, Number 1 (1990), 195-200.

[10] Murray R. Spiegel, *Schaum's outline of theory and problems of advanced calculus*, Schaum Publishing CO., New York, 1963.

[11] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, 1965.

[12] I. Vidav, *Višja matematika II*, DZS Ljubljana, 1974.

[13] F. Križanič, *Temelji realne matematične analize.* Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1990.