FR. HOČEVAR

GEOMETRIE

FÜR

OBERREALSCHULEN

10c

K3-

434

Lehrbuch

der

Geometrie

für

die oberen Classen

der

Realschulen und verwandten Lehranstalten.

Von

Dr. Franz Hočevar,

k. k. Gymnasialprofessor und Privatdocent für Mathematik an der Universität zu Innsbruck.

Mit 234 Figuren.

Mit hohem k. k. Ministerial-Erlass vom 12. Mai 1889, Zahl 8471, allgemein zulässig erklärt.

Preis: geheftet 1 fl. 30 kr., gebunden 1 fl. 50 kr.

Prag: F. Tempsky. — **Wien: F. Tempsky.** — Leipzig: G. Freytag.

Buchhändler der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien.

1889.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

Vorwort.

Die Lehrziele des mathematischen Unterrichtes, welche für die oberen Classen der Gymnasien und Realschulen durch die betreffenden Lehrpläne vorgeschrieben sind, zeigen eine so bedeutende Uebereinstimmung, dass sich das Bedürfnis nach verschieden eingerichteten Lehrbüchern der Mathematik für die genannten zwei Arten von Lehranstalten bisher nicht fühlbar gemacht hat. Wenn trotzdem der Verfasser neben seinem „Lehrbuche der Geometrie für Obergymnasien, 1888, Verlag von F. Tempsky" nun auch ein „Lehrbuch der Geometrie für die oberen Classen der Realschulen und verwandten Lehranstalten" veröffentlicht, so trägt er dabei dem Umstande Rechnung, dass bei der geringeren Anzahl von Lehrstunden, welche dem mathematischen Unterrichte an Gymnasien zugemessen sind, an diesen nur ganz ausnahmsweise ein ebenso ausgedehnter Lehrstoff wirklich und nicht blos scheinbar bewältigt wird, wie an den in dieser Hinsicht günstiger gestellten Realschulen. Dementsprechend ist das vorliegende Lehrbuch nur eine Erweiterung des zuerst genannten, und zwar wird in demselben die Lehre von den körperlichen Ecken und sphärischen Figuren eingehender behandelt, so dass sich eine vollkommen ausreichende Grundlage für die sphärische Trigonometrie ergibt; außerdem ist das Wichtigste über das Prismatoid, ferner die sphärische Trigonometrie und ein Anhang über Kartenprojectionen neu aufgenommen worden. Der Verfasser gibt sich daher der Hoffnung hin, dass das vorliegende Lehrbuch auch an solchen Gymnasien verwendbar sein wird, an denen der geometrische Lehrstoff über das gesetzliche Minimum ausgedehnt wird.

Die Anordnung des Lehrstoffes entspricht dem Lehrplane und den Instructionen für Realschulen. Nur wurde ein Theil der Kreislehre sogleich nach der Lehre vom Dreiecke eingefügt, damit der Schüler möglichst bald in die Lage versetzt wird, die geometrischen Fundamentalconstructionen zu begründen und von da an die planimetrischen Lehrsätze auch in Constructionsaufgaben einzuüben. Die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke folgt in diesem Lehrbuche auf die Goniometrie. Sie kann jedoch ohne Schwierigkeiten sofort nach der Einführung der Winkelfunktionen vorgenommen und als Übungsstoff behandelt werden. Die Transformation der Coordinaten ist unter die Fundamentalaufgaben eingereiht und daher an die

Spitze gestellt. Man überzeugt sich nämlich bei genauerer Überlegung, dass die Parallelverschiebung der Coordinatensysteme für eine allgemein giltige Behandlung der meisten Aufgaben der analytischen Geometrie geradezu unentbehrlich ist. Hingegen kann man die Drehung der Coordinatensysteme im Mittelschulunterrichte ganz übergehen oder auch später nachholen, wenn günstige Unterrichtsverhältnisse es ermöglichen, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades discutiert oder wenigstens ein oder das andere speciellere Problem dieser Art vorgenommen wird.

In Bezug auf die angewandten Methoden sei Folgendes bemerkt:

In der Planimetrie wird neben der Congruenz und Ähnlichkeit auch die Symmetrie der Figuren gebürend berücksichtigt. Dadurch gewinnt der Schüler eine allgemeine und den neueren Anschauungsweisen entsprechende Methode, nach welcher viele geometrische Wahrheiten eine recht anschauliche Form erhalten und die Beweise in der Regel bedeutend vereinfacht werden. Auch einige Ergebnisse der neueren Geometrie hat der Verfasser dem übrigen Lehrstoffe eingeflochten, hingegen andere mit Rücksicht auf die immerhin eng gesteckten Grenzen übergangen.

In der Goniometrie ist die Ableitung der Formeln in einer solchen Art vorgenommen, dass ihre Giltigkeit für wie immer beschaffene Winkel außer Zweifel bleibt. Aus möglichst wenigen und einfachen Sätzen, welche mit Hilfe von Constructionen bewiesen werden, ergeben sich alle übrigen durch bloße Rechnung. Das Gleiche gilt von den Fundamentalsätzen der ebenen Trigonometrie. Hier wird an einigen Beispielen gezeigt, wie sich trigonometrische Rechnungen in bequemer und übersichtlicher Weise anordnen lassen.

Im allgemeinen Theile der Stereometrie wird die parallele Lage von Geraden und Ebenen vor der normalen Lage derselben Gebilde besprochen. Man überzeugt sich leicht, dass sich bei diesem Vorgange die Lehrsätze übersichtlicher gruppieren und auch die Beweise nicht unerheblich vereinfachen lassen. Die Volumsbestimmung erfolgt nach dem Cavalierischen Satze, für welchen ein leicht verständlicher und doch strengen Anforderungen genügender Beweis erbracht wird. Wenn man jedoch den erwähnten Satz als Axiom oder durch eine Definition einführen will, so kann man die entsprechenden Paragraphe dieses Lehrbuches übergehen.

In der analytischen Geometrie (der Ebene) hat der Verfasser diejenige Genauigkeit angestrebt, welche in der Planimetrie und Stereometrie nachdem Beispiele der Alten eingehalten, in dieser neueren Disciplin jedoch nur zu häufig vernachlässigt wird.

In der sphärischen Trigonometrie werden die Formeln für das rechtwinklige Dreieck mit Benützung eines räumlichen Coordinatensystems in allgemein giltiger Weise abgeleitet und hierauf zur Aufstellung der Formeln für das schiefwinklige Dreieck benützt. Dieser Vorgang ist nur scheinbar weitläufiger als die hie und da benützte Methode von Lagrange, alle trigonometrischen Lehrsätze aus dem allgemeinen Cosinussatze abzuleiten. Auch entspricht jener Vorgang dem pädagogischen Grundsatze, das Einfache und Leichte dem Zusammengesetzten und Schwierigeren vorauszuschicken, und wird daher mit Recht durch die Instructionen empfohlen.

Der Anhang enthält das Wichtigste über Kartenprojectionen in leicht verständlicher Form und bietet die Gelegenheit zu mannigfachen Anwendungen der geometrischen Lehrsätze. Er ist zugleich dazu bestimmt, das Interesse für diesen sehr wichtigen und leider nur wenig gepflegten Wissenszweig zu beleben.

Einen ausreichenden Übungsstoff gedenkt der Verfasser in einem besonderen Büchlein oder in zwei getrennten Heften demnächst zu veröffentlichen.

Schließlich dankt der Verfasser dem Herrn Verleger für die gediegene Ausstattung dieses Lehrbuches, ferner dem Herrn Josef Klaar für die bei der Revision des Manuscriptes und der Correctur des Druckes geleisteten trefflichen Dienste.

Innsbruck, im März 1889.

Der Verfasser.

Einleitung.

§ 1. **Die geometrischen Gebilde.** *a)* Den Gegenstand der Geometrie (wörtlich übersetzt: Erdmessung) bilden die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen zwischen den Raum- oder geometrischen Gebilden. Man versteht unter diesen die geometrischen Körper, Flächen, Linien und Punkte.

Ein geometrischer Körper ist ein allseitig begrenzter Theil des Raumes. Man gelangt auch zum Begriffe eines geometrischen Körpers, wenn man sich von einem in der Natur gegebenen oder physischen Körper alle Merkmale wegdenkt, ausgenommen jene der Gestalt und der Größe. Den Übergang vom unbegrenzten Raume zum Körper bildet ein nur theilweise begrenzter Raum.

Die Grenzen eines Körpers heißen Flächen, die Grenzen der Flächen Linien und die Grenzen der Linien Punkte. Unter den Grenzen eines nur theilweise begrenzten Raumes kommen auch Flächen vor, welche unbegrenzt oder nur theilweise begrenzt sind. Unter den Grenzen einer solchen Fläche gibt es unbegrenzte oder nur einseitig begrenzte Linien.

b) Man kann den Begriff der Raumgebilde auch gewinnen, wenn man vom Punkte ausgeht, welchen man sich ohne Ausdehnung oder Dimension zu denken hat. Wird ein Punkt fortbewegt, so ist der von ihm beschriebene Weg eine Linie. Dabei wird vorausgesetzt, dass jede Stelle, welche der bewegte Punkt verläſst, von einem daselbst verbleibenden Punkte eingenommen wird. Die Linie hat eine Ausdehnung, und zwar die Länge. Wenn eine Linie fortbewegt wird, so beschreibt sie im allgemeinen eine Fläche. Diese hat zwei Ausdehnungen, nämlich längs einer in ihr liegenden Linie und zu beiden Seiten derselben (Länge und Breite). Wenn eine Fläche fortbewegt wird, so beschreibt sie im allgemeinen einen Körper. Dieser hat drei Dimensionen (Länge, Breite und Höhe); denn es kommt zu den beiden Dimensionen einer im Körper liegenden Fläche noch die Ausdehnung nach beiden Seiten der Fläche hinzu.

c) Jedes Raumgebilde, ausgenommen den Punkt, hat man sich unbegrenzt theilbar zu denken. Jeder Theil ist wieder ein Raumgebilde derselben Art, d. h. jeder noch so kleine Theil einer Linie ist wieder eine Linie und nicht etwa ein Punkt, jeder Theil einer Fläche oder eines Körpers ist wieder eine Fläche, beziehungsweise ein Körper.

d) Man kann sich ein Raumgebilde auch unabhängig von einem anderen, zu dessen Begrenzung es gehört oder durch dessen Bewegung es erzeugt wird, als einen Ort im Raume denken. So z. B. wird eine Fläche auch an und für sich betrachtet, d. h. ohne Rücksicht auf einen Körper, zu dessen Begrenzung sie gehört, oder auf eine Linie, durch deren Bewegung sie erzeugt wird. Das Analoge gilt von der Linie.

e) Wenn zwei Raumgebilde so ineinander- oder aufeinander gelegt werden können, dass sie sich decken, d. h., dass jeder Punkt des einen mit einem Punkte des anderen zusammenfällt, so heißen sie congruent. Congruente Raumgebilde haben also gleiche Form und gleiche Größe und unterscheiden sich nur durch ihren Ort im Raume. Zwei Raumgebilde heißen gleich, wenn sie gleiche Größe, und ähnlich, wenn sie gleiche Form haben. Die genauere Erklärung der Gleichheit und Ähnlichkeit folgt später. Die Gleichheit zweier Raumgebilde A und B wird durch $A = B$, die Ähnlichkeit durch $A \sim B$ und die Congruenz durch $A \cong B$ bezeichnet.

f) Die Raumgebilde sind Begriffe, also nicht etwa durch die Sinne wahrnehmbar. Dieselben können jedoch durch physische Körper (Modelle) oder durch Zeichnungen (Figuren) veranschaulicht werden. Unter einer Figur versteht man häufig auch ein Raumgebilde selbst oder mehrere Raumgebilde, welche als zusammengehörig betrachtet werden.

§ 2. **Allgemeine Erklärungen.** Die Begriffe, welche den Gegenstand der Geometrie bilden, sind theils Grundbegriffe, d. h. solche, welche ohne Erklärung als bekannt vorausgesetzt werden (z. B. der Begriff des Raumes), theils abgeleitete Begriffe, welche durch eine Erklärung oder Definition eingeführt werden. Die Definition gibt an, zu welcher allgemeineren Gattung von Begriffen der betrachtete gehört und durch welche Merkmale er sich von anderen Begriffen derselben Gattung unterscheidet (Realdefinition); oder sie gibt an, in welcher Weise ein Begriff aus anderen entstehen kann (genetische Definition).

Die Aussagen oder Urtheile der Geometrie sind in den Grundsätzen (Axiomen) und den Lehrsätzen (Theoremen) enthalten. Die geometrischen Grundsätze sind solche der Anschauung und Erfahrung entnommene Urtheile, welche sich nicht beweisen, d. h. durch Vernunftschlüsse aus vorausgegangenen Definitionen oder als wahr erkannten Sätzen folgern lassen.

Die Lehrsätze sind solche Urtheile, deren Richtigkeit durch einen Beweis dargethan wird. Ein Lehrsatz besteht aus der Voraussetzung (Hypothesis), welche die Bedingungen angibt, unter welchen eine Aussage gelten soll, und aus der Behauptung (Thesis), welche die zu beweisende Aussage enthält. Der Beweis kann direct oder indirect sein. Beim directen Beweise wird die Behauptung aus der Voraussetzung und aus vorausgegangenen, bereits als richtig erkannten Sätzen gefolgert. Der Beweis ist indirect, wenn dargethan wird, dass das Gegentheil der Behauptung nicht stattfinden kann, da eine solche Annahme zu Widersprüchen mit der Voraussetzung oder bereits bewiesenen Lehrsätzen führen würde.

Die Lehrsätze heißen Folgesätze, wenn sie im Anschlusse an andere Lehrsätze ohne ausführlichen Beweis als richtig erkannt werden.

Ein Lehrsatz heißt ein Umkehrungssatz eines anderen, wenn er die Behauptung desselben als Voraussetzung und die Voraussetzung als Behauptung enthält. Wenn die Voraussetzung und die Behauptung eines Lehrsatzes aus mehreren Theilen bestehen, so sind auch mehrere Umkehrungen möglich. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Umkehrung eines Lehrsatzes nicht immer richtig ist und daher erst auf Grund eines Beweises als zulässig erkannt wird.

In das Lehrgebäude der Geometrie gehören auch die Constructions- und die Rechnungsaufgaben. Die ersteren enthalten die Forderung, eine geometrische Figur nach bestimmten Angaben oder gegebenen Bedingungen gemäß zu zeichnen (construieren). Jene Aufgaben, deren Ausführung unmittelbar einleuchtet, und welche nicht auf einfachere Aufgaben zurückgeführt werden können, werden Forderungssätze (Postulate) genannt.

Die geometrischen Rechnungsaufgaben beruhen darauf, dass man Raumgebilde als mathematische Größen auffassen kann, und enthalten die Forderung, aus der durch Zahlen angegebenen Größe gewisser Theile einer Figur die den übrigen Theilen entsprechenden Größenzahlen durch Rechnung abzuleiten.

§ 3. **Die Gerade.** *a)* Der Begriff der geraden Linie oder der Geraden wird als bekannt vorausgesetzt, er ist also ein Grundbegriff. Eine gegebene Gerade kann man sich nach beiden Seiten ohne Ende verlängert denken und nennt sie dann eine unbegrenzte Gerade oder einen Strahl. Dieser wird durch jeden seiner Punkte in zwei halbbegrenzte Gerade oder Halbstrahlen zerlegt, von denen jeder die Ergänzung des anderen heißt. Ein von zwei Punkten, also vollständig begrenzter Theil einer Geraden wird Strecke genannt.

b) Wenn sich ein Punkt in einer Geraden von einem Ausgangspunkte immer weiter bewegt, so sagt man, er behalte während der Bewegung seine Richtung bei. Sobald er sich jedoch gegen den Ausgangspunkt wieder zurückbewegt, nennt man die Richtung seiner Bewegung entgegengesetzt zu der ursprünglichen. Jede Gerade gibt also zwei entgegengesetzte Richtungen an.

c) Wenn zwei Gerade zwei Punkte gemeinschaftlich haben, so decken sie sich. Dieser aus der Erfahrung entnommene Satz heißt der Grundsatz von der Geraden und läſst sich auch in folgender Weise aussprechen: durch zwei Punkte ist die Lage einer Geraden bestimmt. Diese Gerade heißt die Verbindungsgerade oder Verbindungslinie der beiden Punkte und, wenn dieselben zugleich ihre Grenzpunkte sind, der Abstand oder die Entfernung derselben. Eine Gerade wird bezeichnet, indem man zwei ihrer Punkte durch darangesetzte Buchstaben bezeichnet. Bei der unbegrenzten Geraden wählt man dazu zwei beliebige Punkte derselben, bei der halbbegrenzten Geraden den Grenzpunkt und einen beliebigen anderen Punkt derselben und bei der Strecke die beiden Endpunkte. Häufig genügt es jedoch, eine Gerade oder einen Theil derselben mit einem einzigen Buchstaben zu bezeichnen; z. B. Gerade a, Strecke h.

d) Wenn zwei Gerade nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, so liegen die beiden Halbstrahlen, in welche die eine Gerade durch jenen Punkt zerlegt wird, auf entgegengesetzten Seiten der anderen Geraden. Man sagt daher, dass die beiden Geraden sich schneiden, und nennt ihren gemeinsamen Punkt den Durchschnittspunkt (Schnittpunkt) oder den Fußpunkt der einen Geraden in der anderen.

e) Durch jeden Punkt des Raumes können unendlich viele Gerade gelegt werden. Die Gesammtheit der durch einen Punkt gehenden Strahlen wird ein Strahlenbüschel und jener Punkt sein Scheitel genannt. Wenn alle Strahlen eines Büschels in einer Ebene liegen, so heißt er ein ebener Strahlenbüschel. Man kann sich denselben dadurch entstanden denken, dass ein Strahl in einer Ebene um einen seiner Punkte gedreht wird.

f) Jede Linie, welche aus zwei oder mehreren nicht in einer Geraden liegenden Strecken besteht, heißt eine gebrochene Linie. Eine Linie, von welcher kein Theil gerade ist, wird eine krumme Linie oder Curve genannt.

§ 4. **Die Ebene.** *a)* Der Begriff der Ebene ist gleichfalls einer strengen Erklärung nicht fähig und wird daher zu den Grundbegriffen gezählt. Auch die Ebene hat man sich stets unbegrenzt zu denken, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich angenommen wird. Der Raum wird durch jede Ebene in zwei vollständig getrennte Theile zerlegt, welche Halbräume genannt werden.

b) Wenn eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich hat, so fällt sie ganz in dieselbe (Grundsatz von der Ebene). Eine Ebene wird durch jede in ihr liegende Gerade in zwei Theile zerlegt, welche Halbebenen heißen.

c) Wenn eine Gerade mit einer Ebene nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, so liegen die Halbstrahlen, in welche die Gerade durch jenen Punkt zerlegt wird, auf entgegengesetzten Seiten der Ebene. Man sagt in diesem Falle, die Ebene schneide die Gerade oder die Gerade treffe die Ebene. Der gemeinschaftliche Punkt wird der Durchschnittspunkt der Geraden mit der Ebene oder ihr Fußpunkt in der Ebene genannt.

d) Bezüglich zweier Ebenen gelten die folgenden zwei Lehrsätze, welche mit Hilfe der vorausgehenden Grundsätze bewiesen werden können (Des Zusammenhanges wegen sind die Beweise im § 146 angegeben):

1. Wenn zwei Ebenen drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gemeinschaftlich haben, so fallen sie ganz zusammen.

Hieraus folgt, dass eine Ebene durch drei Punkte, welche nicht einer Geraden angehören, bestimmt ist und dass eine Ebene in sich selbst verschoben werden kann.

2. Wenn zwei nicht zusammenfallende Ebenen einen Punkt gemeinschaftlich haben, so haben sie eine durch diesen Punkt gehende Gerade und nur diese gemeinschaftlich.

In diesem Falle liegen die beiden Halbebenen, in welche jede der zwei Ebenen durch die gemeinschaftliche Gerade zerlegt wird, auf entgegengesetzten Seiten der anderen Ebene. Man sagt daher, dass die Ebenen sich in einer Geraden schneiden, und nennt diese die Durchschnittslinie der zwei Ebenen.

Durch jede Gerade können unendlich viele Ebenen gelegt werden, deren Gesammtheit ein Ebenenbüschel genannt wird. Man kann sich denselben durch Drehung einer Ebene um eine in ihr liegende Gerade entstanden denken.

e) Eine Fläche heißt krumm, wenn kein Theil derselben eben ist.

§ 5. Eintheilung der Geometrie. Je nachdem die zu betrachtenden geometrischen Gebilde in einer Ebene liegen oder nicht, heißen sie ebene oder räumliche Gebilde (ebene Figuren oder Raumfiguren).

Die Lehre von den ebenen Gebilden heißt Geometrie der Ebene und zerfällt in drei Theile, für welche die Namen Planimetrie, ebene Trigonometrie und analytische Geometrie der Ebene gebräuchlich sind. Die Lehre von den Raumgebilden heißt Geometrie des Raumes und zerfällt in die Stereometrie, die sphärische Trigonometrie und die analytische Geometrie des Raumes. Die letztere wird in dem vorliegenden Lehrbuche nicht behandelt.

Planimetrie.

I. Abschnitt: Eigenschaften der Figuren; Congruenz.

Strecken.

§ 6. Operationen mit Strecken. Strecken können als (mathematische) Größen aufgefasst werden, d. h. man kann zwei Strecken vergleichen, addieren und subtrahieren; ferner lässt sich jede Strecke vervielfachen, theilen oder durch eine andere Strecke messen.

Zwei Strecken heißen gleich (und zugleich congruent), wenn sie so aufeinandergelegt werden können, dass ihre Endpunkte und daher auch alle dazwischenliegenden Punkte zusammenfallen.

Zwei Strecken werden addiert, indem man sie auf einer Geraden so nebeneinander aufträgt, dass ein Endpunkt der einen mit einem Endpunkte der anderen zusammenfällt. Der Abstand der beiden anderen Punkte heißt dann die Summe. Daraus ergibt sich von selbst, wie eine Strecke vervielfacht wird.

Eine Strecke wird von einer anderen subtrahiert, indem man die beiden Strecken in derselben Geraden so aufeinander aufträgt, dass der eine Endpunkt der einen mit einem Endpunkte der anderen zusammenfällt. Der Abstand der beiden anderen Endpunkte heißt die Differenz der gegebenen Strecken.

Von zwei Strecken heißt diejenige die kleinere, welche beim Aufeinanderlegen einen Theil der anderen deckt, während diese die größere genannt wird. Man schreibt: $AB < CD$ (spr. AB kleiner als CD) und zugleich $CD > AB$ (spr. CD größer als AB).

Ist der Subtrahend größer als der Minuend, so läſst sich die Subtraction nur ausführen, wenn die Strecken als relative Größen aufgefaſst werden. Zu diesem Zwecke wird die eine Richtung der Geraden, in welcher die gegebenen Strecken liegen, als positiv und die entgegengesetzte als negativ erklärt. Eine Strecke AB dieser Geraden ist dann positiv oder negativ, je nachdem ein Punkt, welcher vom Anfangspunkte A ausgehend die Strecke beschreibt, sich in positiver oder negativer Richtung bewegt. In der Planimetrie und Stereometrie werden wir jedoch die Strecken stets als absolute Größen betrachten, außer in wenigen Fällen, wo das Gegentheil ausdrücklich vorausgesetzt wird.

Die Theilung einer Strecke in mehrere gleiche Theile und die Messung derselben wird später besprochen werden. Eine Strecke halbieren heißt dieselbe in zwei gleiche Theile zerlegen. Der Theilungspunkt wird die Mitte, der Mittelpunkt oder Halbierungspunkt der Strecke genannt.

Winkel.

§ 7. Erklärung, Operationen mit Winkeln. Ein Winkel ist jener Theil der Ebene, welcher zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Halbstrahlen liegt. Diese heißen die Schenkel und ihr Ausgangspunkt der Scheitel des Winkels. Man bezeichnet einen Winkel durch das Winkelzeichen $\sphericalangle$ und 1. durch einen Buchstaben, welcher in der Nähe des Scheitels angebracht wird, z. B. $\sphericalangle O$ oder $\sphericalangle \alpha$; 2. durch zwei Buchstaben, von denen jeder je einen Schenkel bedeutet, z. B. $\sphericalangle ab$ oder auch (ab); 3. durch drei Buchstaben, von denen der mittlere am Scheitel und die beiden anderen an den Schenkeln angebracht sind, z. B. $\sphericalangle AOB$.

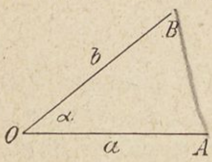


Fig. 1.

Auch die Winkel lassen sich als Größen auffassen, d. h. man kann zwei Winkel vergleichen, addieren und subtrahieren; ferner läſst sich jeder Winkel vervielfachen, theilen und durch einen anderen Winkel messen.

Zwei Winkel sind gleich (und zugleich congruent), wenn sie sich so aufeinanderlegen lassen, daſs sie sich vollständig decken; dann fällt jeder Schenkel des einen mit einem Schenkel des anderen zusammen. Zwei Winkel werden addiert, indem sie in der Ebene so nebeneinander aufgetragen werden, daſs die Scheitel zusammenfallen und ein Schenkel des einen sich mit einem Schenkel des anderen deckt. Von den beiden durch die anderen Schenkel begrenzten Winkeln ist jener, welcher die gegebenen Winkel enthält, die Summe derselben. Daraus ergibt sich von selbst, wie ein Winkel vervielfacht wird. Ein Winkel wird von einem anderen subtrahiert, indem man die beiden Winkel in der Ebene so aufeinander aufträgt, daſs die Scheitel zusammenfallen und ein Schenkel des einen sich mit einem Schenkel des anderen deckt. Von den beiden durch die anderen Schenkel begrenzten Winkeln ist jener, welcher die gemeinsamen Schenkel nicht enthält, die Differenz der gegebenen Winkel. Auf ebendemselben Wege erkennt man, ob ein Winkel größer oder kleiner (> oder <) ist als ein anderer.

Die Subtraction eines Winkels von einem anderen ist stets ausführbar, wenn dieselben als relative Größen aufgefasst werden. Zu diesem Zwecke wird die Drehung eines Halbstrahles um seinen Grenzpunkt als negativ oder positiv erklärt, je nachdem sie für einen auf die Ebene blickenden Beobachter mit der Bewegung eines Uhrzeigers übereinstimmt oder nicht. Ein Winkel (ab) heißt positiv oder negativ, wenn sich der erste Schenkel a im positiven, beziehungsweise negativen Drehungssinne um den Scheitel drehen muss, um den gegebenen Winkel zu beschreiben. Wir werden jedoch in der Planimetrie und in der Stereometrie die Winkel nur als absolute Größen betrachten.

Der Halbstrahl, durch welchen ein gegebener Winkel halbiert, d. i. in zwei gleiche Theile getheilt wird, heißt die Halbierungslinie des Winkels.

§ 8. Der volle Winkel. Wenn ein Halbstrahl in der Ebene um seinen Grenzpunkt in demselben Sinne solange gedreht wird, bis er wieder in seine Anfangslage zurückkehrt, so beschreibt er die ganze Ebene oder einen vollen Winkel. Wird diese Drehung fortgesetzt, so kann die zum zweitenmal beschriebene Fläche als eine neue, zur ersten hinzutretende angesehen werden. Dadurch entstehen Winkel, welche größer sind als ein voller. Solche Winkel werden jedoch in der Folge von den Betrachtungen stets ausgeschlossen bleiben, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich festgesetzt wird.

Der 360. Theil eines vollen Winkels wird ein Grad (^{0}), der 60. Theil eines Grades eine Minute ($'$) und der 60. Theil einer Minute eine Secunde ($''$) genannt.

§ 9. Der gestreckte Winkel. Ein Winkel heißt ein gestreckter, wenn ein Schenkel die Ergänzung des anderen bildet, z. B. AOB.

a) Je zwei gestreckte Winkel sind gleich. Denn legt man zwei gestreckte Winkel AOB und $A_1 O_1 B_1$ so aufeinander, dass die Schenkel OA und $O_1 A_1$ zusammenfallen, so müssen sich auch OB und $O_1 B_1$ decken (§ 3 *c*).

b) Ein gestreckter Winkel ist die Hälfte eines vollen Winkels, er beträgt also 180^0. Denn bildet man die Summe zweier gestreckter Winkel, so erhält man einen vollen Winkel.

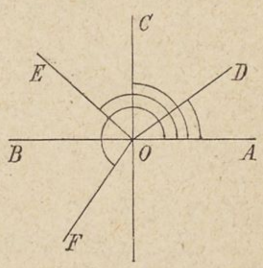


Fig. 2.

Ein Winkel heißt hohl oder concav, wenn er kleiner, hingegen erhaben oder convex, wenn er größer ist als ein gestreckter. Da zu jedem hohlen Winkel ein erhabener mit denselben Schenkeln, also auch mit derselben Bezeichnung durch zwei oder drei Buchstaben gehört, so pflegt man in der Figur denjenigen von beiden Winkeln, von welchem die Rede ist, durch einen die beiden Schenkel verbindenden Bogen zu bezeichnen. Darnach ist AOE (Fig. 2) ein hohler und AOF ein erhabener Winkel.

§ 10. Der rechte Winkel. Die Hälfte eines gestreckten Winkels heißt ein rechter Winkel oder ein Rechter und wird häufig mit R bezeichnet.

Alle rechten Winkel sind gleich. Denn die durch Halbierung eines gestreckten Winkels entstandenen Winkel sind nach der Voraussetzung gleich. In jedem anderen Falle ergibt sich die Richtigkeit des Satzes aus der Überlegung, dass je zwei gestreckte Winkel, also auch ihre Hälften gleich sind.

Folgesätze. Jeder rechte Winkel beträgt 90^{0}. Ein gestreckter Winkel ist gleich $2R$ und ein voller gleich $4R$.

Ein Winkel heißt spitz, wenn er kleiner als ein rechter, und stumpf, wenn er größer als ein rechter und zugleich kleiner als ein gestreckter ist (AOD und AOE). Jeder hohle Winkel, welcher nicht ein rechter ist, wird ein schiefer genannt.

§ 11. Complement- und Supplementwinkel. Zwei spitze Winkel, deren Summe gleich einem Rechten ist, heißen complementär, und jeder wird das Complement des anderen genannt. Zwei hohle Winkel, deren Summe gleich einem gestreckten Winkel ist, heißen supplementär, und jeder wird das Supplement des anderen genannt.

Gleiche spitze Winkel haben gleiche Complemente. Gleiche hohle Winkel haben gleiche Supplemente.

Beweis. Sind α und α_1 die als gleich vorausgesetzten spitzen Winkel, so erhält man aus den Gleichungen $R = R$ und $\alpha = \alpha_1$ durch Subtraction $R - \alpha = R - \alpha_1$. Damit ist der erste Satz bewiesen, da $R - \alpha$ das Complement von α und $R - \alpha_1$ jenes von α_1 ist. Der Beweis des zweiten Satzes ist analog.

Folgesatz. Sind zwei Winkel zu einem und demselben Winkel complementär oder supplementär, so sind sie gleich.

§ 12. Neben- und Scheitelwinkel. Zwei sich schneidende Gerade zerlegen die Ebene in vier hohle Winkel (α, β, γ, δ), von denen je zwei nebeneinanderliegende Nebenwinkel und je zwei gegenüberliegende Scheitelwinkel heißen.

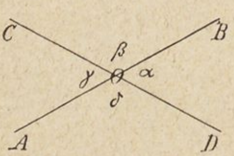


Fig 3.

a) Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt $2R$; denn sie ist gleich einem gestreckten Winkel. $\alpha + \beta = 2R$, $\beta + \gamma = 2R$ u. s. w.

b) Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich. Um z. B. einzusehen, dass $\alpha = \gamma$ ist, überlegt man, dass diese beiden Winkel zu β supplementär sind.

Folgesätze. 1. Sind zwei Nebenwinkel gleich, so ist jeder ein Rechter.

2. Ist von zwei Nebenwinkeln einer ein Rechter, so ist es auch der andere.

3. Ist von zwei Nebenwinkeln der eine spitz, so ist der andere stumpf und umgekehrt. Aus $\alpha + \beta = 2R$ und $\alpha < R$ folgt nämlich durch Subtraction $\beta > R$.

4. Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Nebenwinkel.

5. Sind zwei Winkel supplementär, so sind es auch ihre Nebenwinkel. Bezeichnet man nämlich mit α, β und α_1, β_1 zwei Paare von Nebenwinkeln, so ist

$\alpha + \beta = 2R$, $\alpha_1 + \beta_1 = 2R$, also $\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 = 4R$. Aus der Voraussetzung $\alpha + \alpha_1 = 2R$ folgt somit $\beta + \beta_1 = 2R$.

6. Ist von den vier hohlen Winkeln, in welche die Ebene durch zwei sich schneidende Gerade zerlegt wird, einer ein Rechter, so sind es auch die übrigen; ist einer schief, so sind es auch die übrigen.

Bilden zwei sich schneidende Gerade rechte Winkel, so sagt man, sie durchschneiden sich rechtwinklig oder haben eine normale (senkrechte) Lage zueinander, und die eine Gerade heißt Normale der anderen. Man schreibt $a \perp b$ (spr. a normal zu b).

Bilden zwei sich schneidende Gerade schiefe Winkel, so sagt man, sie durchschneiden sich schiefwinklig oder haben eine schiefe Lage zueinander.

§ 13. Winkel an einer Transversale. Eine Gerade, welche zwei oder mehrere andere Gerade schneidet, wird eine Transversale derselben genannt. Durch zwei Gerade und eine Transversale werden acht hohle Winkel gebildet, von denen die zwischen den zwei Geraden liegenden innere und die übrigen äußere Winkel heißen. Ein innerer und ein äußerer Winkel an verschiedenen Scheiteln und auf derselben Seite der Transversale heißen correspondierende Winkel (auch Gegenwinkel), z. B. α und α_1. Zwei innere oder zwei äußere Winkel auf entgegengesetzten Seiten der Transversale heißen Wechselwinkel, z. B. α und γ_1, α_1 und γ. Zwei innere oder zwei äußere Winkel auf derselben Seite der Transversale heißen Anwinkel, z. B. α und δ_1.

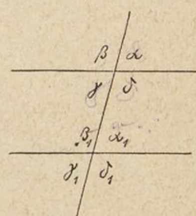


Fig. 4.

a) Bilden zwei Gerade mit einer Transversale zwei gleiche correspondierende Winkel oder zwei gleiche Wechselwinkel oder zwei supplementäre Anwinkel, so sind auch je zwei correspondierende Winkel gleich, je zwei Wechselwinkel gleich und je zwei Anwinkel supplementär. Oder: Besteht eine einzige von den zwölf Gleichungen

1) $\alpha = \alpha_1$	5) $\alpha = \gamma_1$	9) $\alpha + \delta_1 = 2R$
2) $\beta = \beta_1$	6) $\beta = \delta_1$	10) $\beta + \gamma_1 = 2R$
3) $\gamma = \gamma_1$	7) $\gamma = \alpha_1$	11) $\gamma + \beta_1 = 2R$
4) $\delta = \delta_1$	8) $\delta = \beta_1$	12) $\delta + \alpha_1 = 2R$,

so bestehen auch alle übrigen.

Der Beweis wird geführt, indem man zeigt, dass aus jeder der zwölf Gleichungen die nächstfolgende sich ergibt, wobei man die erste der zwölften folgen lässt.

Aus der 1. Gleichung folgt die 2., aus dieser die 3. u. s. f. bis zur 8. (incl.) nach dem Satze: Zu gleichen Winkeln gehören auch gleiche Nebenwinkel.

Aus der 8. Gleichung ergibt sich die 9. in folgender Weise:

Man hat $\delta = \beta_1$ (Vorauss.) und $\beta_1 = \delta_1$ (Scheitelwinkel), folglich $\delta = \delta_1$. Nun ist $\alpha + \delta = 2R$ (Nebenwinkel), also auch $\alpha + \delta_1 = 2R$. Aus der 9. Gleichung folgt die 10., aus dieser die 11. und aus dieser die 12. nach dem Satze: Sind zwei Winkel supplementär, so sind es auch ihre Nebenwinkel.

Aus der 12. Gleichung erhält man endlich die 1.; da nämlich α_1 nach der Voraussetzung und α als Nebenwinkel zu δ supplementär ist, so ist $\alpha = \alpha_1$.

b) Bilden zwei Gerade mit einer Transversale zwei ungleiche correspondierende Winkel oder zwei ungleiche Wechselwinkel oder zwei nicht supplementäre Anwinkel, so sind auch je zwei correspondierende Winkel ungleich, je zwei Wechselwinkel ungleich und je zwei Anwinkel nicht supplementär.

Indirecter Beweis. Nimmt man eine der obigen zwölf Gleichungen als richtig an, so sind es auch alle übrigen, was nach der Voraussetzung nicht möglich ist.

Parallele Gerade.

§ 14. Zwei Gerade in einer Ebene, welche beliebig verlängert sich nicht schneiden, heißen parallel oder gleichlaufend. Man schreibt $AB \parallel CD$ (spr. AB parallel zu CD). Dass eine solche Lage zweier Geraden möglich ist, ergibt sich aus dem folgenden Lehrsatze:

Bilden zwei Gerade mit einer Transversale zwei gleiche correspondierende Winkel oder zwei gleiche Wechselwinkel oder zwei supplementäre Anwinkel, so schneiden sie sich nicht, wie weit sie auch verlängert werden, sie sind also parallel.

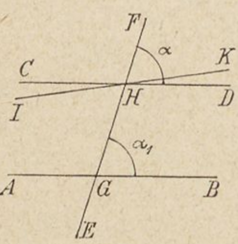


Fig. 5.

Beweis. Dreht man den Flächenstreifen $BGHD$ in der Ebene um die Mitte der Strecke GH, bis jeder der Punkte G und H in die frühere Lage des anderen gelangt, so müssen die Halbstrahlen HD und GA zusammenfallen, da die Wechselwinkel GHD und HGA zufolge der Voraussetzung gleich sind. Zugleich decken sich die Halbstrahlen GB und HC, weil auch die Wechselwinkel BGH und GHC gleich sind. Wenn also die Halbstrahlen GB und HD einen gemeinschaftlichen Punkt hätten, so müssten sich auch die Halbstrahlen GA und HC schneiden. Dann hätten also die Geraden AB und CD zwei gemeinschaftliche Punkte und würden in eine einzige Gerade zusammenfallen, was der Voraussetzung widerspricht. Hieraus folgt $AB \parallel CD$.

§ 15. *a)* Durch einen gegebenen Punkt kann zu einer gegebenen Geraden eine einzige Parallele gezogen werden (Grundsatz von den Parallelen).

b) Wenn zwei Gerade zu einer dritten parallel sind, so sind sie auch untereinander parallel. Denn nach dem vorausgehenden Grundsatze können zwei sich schneidende Gerade nicht zu einer dritten parallel sein.

c) Schneidet eine Gerade die eine von zwei parallelen Geraden, so schneidet sie auch die andere. Dieser Satz wird ebenso bewiesen, wie der vorausgehende.

§ 16. Parallele Gerade bilden mit jeder Transversale gleiche correspondierende Winkel, gleiche Wechselwinkel und supplementäre Anwinkel (Umkehrungssatz zum Lehrsatze im § 14). Beweis indirect. Es sei (Fig. 5) $AB \parallel CD$, jedoch $\alpha > \alpha_1$. Dann läſst sich eine von CD verschiedene Gerade IK so ziehen, daſs $\sphericalangle\, KHF = \alpha_1$ wird. Daraus folgt nach § 14, daſs $IK \parallel AB$ ist, was dem Grundsatze von den Parallelen widerspricht. Ebensowenig darf $\alpha < \alpha_1$ angenommen werden; daher ist $\alpha = \alpha_1$ und daraus folgt nach § 13*a* die ganze Behauptung.

Folgesätze. 1. Alle Normalen zu derselben Geraden sind parallel.

2. Ist von zwei Parallelen die eine zu einer Geraden normal, so ist es auch die andere.

3. Durch einen gegebenen Punkt kann zu einer Geraden nur eine Normale gezogen werden.

Anmerkung. Auf Grund der Lehrsätze in den §§ 14 und 16 kann aus den Winkeln, welche zwei Gerade mit einer Transversale einschließen, erkannt werden, ob die Geraden parallel sind oder nicht.

§ 17. Wenn zwei Gerade von einer Transversale so geschnitten werden, daſs die Summe der inneren Anwinkel auf der einen Seite der Transversale kleiner ist als $2R$, so schneiden sich die Geraden auf derselben Seite der Transversale.

Beweis. Es seien (Fig. 5) AB und IK die beiden Geraden, welche von der Transversale EF so geschnitten werden, daſs $\sphericalangle\, AGH + GHI < 2R$ ist. Zieht man durch den Punkt H die Gerade $CD \parallel AB$, so ist $AGH + GHC = 2R$, also $GHI < GHC$. Hieraus folgt, daſs der Halbstrahl HI in jener von CD begrenzten Halbebene liegt, welche auch AB enthält, während der Halbstrahl HK in der zweiten Halbebene liegt. Da nun IK die Gerade CD, also auch AB schneidet, so muſs der Schnittpunkt mit AB auf dem Halbstrahle HI liegen.

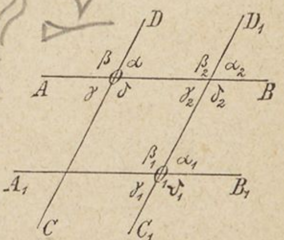


Fig. 6.

§ 18. *a)* Zieht man zu zwei sich schneidenden Geraden zwei parallele Gerade, so bilden diese ebenso große Winkel wie jene.

Beweis. Es seien AB und CD die gegebenen Geraden mit dem Schnittpunkte O, und man ziehe durch einen beliebigen Punkt O_1 die Geraden $A_1B_1 \parallel AB$ und $C_1D_1 \parallel CD$. Es ist dann $\alpha = \alpha_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$, daher auch $\alpha = \alpha_1$. Ebenso beweist man die Gleichungen $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ und $\delta = \delta_1$.

Wenn zwei Halbstrahlen zwei parallelen Geraden angehören, so heißen sie direct oder invers parallel, je nachdem sie auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten jener Geraden liegen, welche durch die Grenzpunkte der beiden Halbstrahlen bestimmt ist. So z. B. sind OA und O_1A_1 direct parallel, hingegen OA und O_1B_1 invers parallel.

Auf Grund dieser Erklärung erhält man aus dem vorausgehenden Lehrsatze die folgenden:

b) Zwei hohle Winkel sind gleich, wenn jeder Schenkel des einen einem Schenkel des anderen direct (invers) parallel ist. Aus $\alpha = \alpha_1$ und $\alpha_1 = \gamma_1$ folgt nämlich $\alpha = \gamma_1$.

c) Zwei hohle Winkel sind supplementär, wenn zwei Schenkel derselben direct und die beiden anderen invers parallel sind. Aus $\alpha = \alpha_1$ und $\alpha_1 + \beta_1 = 2R$ folgt nämlich $\alpha + \beta_1 = 2R$.

Man bemerke, dass der hohle Winkel α mit dem erhabenen Winkel $\beta_1 + \gamma_1 + \delta_1$ direct parallele Schenkel hat und doch von demselben verschieden ist.

d) Sind die Winkel AOD und $A_1O_1D_1$ (Fig. 6) gleich und von gleichem Drehungssinne, ferner die Schenkel OA und O_1A_1 direct (invers) parallel, so sind auch die Schenkel OD und O_1D_1 direct (invers) parallel. Beweis indirect.

§ 19. *a)* Wird ein rechter Winkel um seinen Scheitel gedreht, so beschreiben seine Schenkel gleiche Winkel.

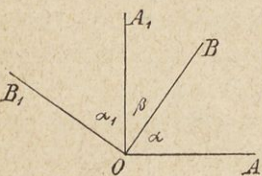


Fig. 7.

Beweis. Es sei AOA_1 die Anfangs- und BOB_1 die Endlage des rechten Winkels. Beträgt die Drehung weniger als 90^0, so liegt OB im rechten Winkel AOA_1 und es ist $\alpha + \beta = R$, $\beta + \alpha_1 = R$, also $\alpha = \alpha_1$. Wenn jedoch die Drehung mehr als 90^0 beträgt, so erhält man bei analoger Bezeichnung $\alpha - \beta = R$, $\alpha_1 - \beta = R$, also wieder $\alpha = \alpha_1$.

Folgesatz. Ein Winkel bleibt ungeändert, wenn beide Schenkel in demselben Sinne um je 90^0 (überhaupt um gleiche Winkel) gedreht werden.

b) Wenn die Schenkel zweier hohler Winkel zueinander normal sind und die Schenkel des einen in demselben Sinne um je 90^0 gedreht werden müssen, um mit den Schenkeln des anderen direct (invers) parallel zu werden, so sind die beiden Winkel gleich.

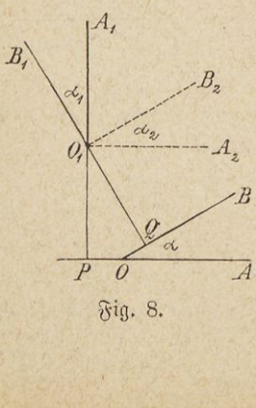


Fig. 8.

Beweis. Es seien AOB und $A_1O_1B_1$ die gegebenen Winkel und $O_1A_1 \perp OA$, $O_1B_1 \perp OB$. Dreht man die Halbstrahlen O_1A_1 und O_1B_1 in demselben (hier negativen) Sinne um je 90^0, so sollen dieselben in die Lagen O_1A_2 beziehungsweise O_1B_2 gelangen. Nun ist offenbar $O_1A_2 \parallel OA$ und $O_1B_2 \parallel OB$ (§ 16, 1. Folgesatz). Da ferner vorausgesetzt wird, dass O_1A_2 und O_1B_2 zu OA beziehungsweise OB direct (invers) parallel sind, so folgt $\alpha = \alpha_2$. Zugleich ist nach dem vorausgehenden Folgesatze $\alpha_2 = \alpha_1$, somit $\alpha = \alpha_1$. — Nach diesem Beweise sind auch die Winkel $BOP = 2R - \alpha$ und $B_1 O_1 P = 2R - \alpha_1$ gleich; daher ist der Lehrsatz auch für stumpfe Winkel bewiesen.

Congruenz und Symmetrie.

§ 20. **Congruenz.** Lassen sich zwei begrenzte oder unbegrenzte Ebenen, von denen jede eine (ebene) Figur enthält, so aufeinanderlegen, dass jeder Punkt der einen Figur mit einem Punkte der anderen zusammenfällt, so heißen die Figuren congruent. Zur Vereinfachung wird in der Regel angenommen, dass die Figuren selbst bei unveränderter gegenseitiger Lage ihrer Punkte und Linien zur Deckung gebracht werden. Je zwei Punkte, Strecken, Winkel u. s. f., welche bei der Deckung congruenter Figuren zusammenfallen, werden homolog oder einander entsprechend genannt.

Zwei in derselben Ebene liegende Figuren heißen direct congruent, wenn dieselben durch bloßes Verschieben in der Ebene zur Deckung gelangen, hingegen invers congruent, wenn die eine Figur zunächst aus der Ebene herausgehoben und nach erfolgtem Umwenden (Umklappen) in dieselbe wieder zurückgelegt werden muss, um mit der zweiten Figur direct congruent zu werden. So z. B. sind die nebenstehenden Figuren I, II, III direct congruent und jede derselben mit der Figur IV invers congruent.

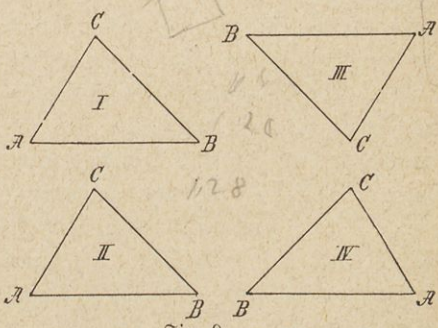


Fig. 9.

§ 21. **Axiale Symmetrie.** Man denke sich eine Ebene E durch eine Gerade g in zwei Halbebenen zerlegt und die eine derselben um g als Achse umgeklappt. Sobald irgend ein außerhalb g liegender Punkt der bewegten Halbebene in die ruhende fällt, decken sich die beiden Halbebenen vollständig (§ 4 *d*). Wenn nun gleichzeitig zwei Figuren der Ebene E zur Deckung gelangen, so heißen dieselben in ihrer ursprünglichen Lage in der Ebene symmetrisch in Bezug auf die Gerade g, und diese wird die Symmetrieachse oder Symmetrale der beiden Figuren genannt. Diese Art der Symmetrie, welche zur Unterscheidung von einer im nächsten Paragraphe zu besprechenden die axiale genannt wird, besteht somit für eine besondere gegenseitige Lage zweier invers congruenter Figuren.

Läſst sich eine Figur durch eine Gerade in zwei Theile so zerlegen, dass diese in Bezug auf jene Gerade symmetrisch sind, so heißt die Figur selbst axialsymmetrisch, und jene Gerade heißt die Symmetrale, Symmetrieachse oder kurzweg Achse der gegebenen Figur.

Wenn die Verbindungsstrecke zweier Punkte zu einer Geraden normal ist und von derselben halbiert wird, so liegen jene Punkte symmetrisch in Bezug auf die Gerade. Zugleich gilt auch der Umkehrungssatz.

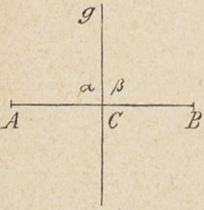


Fig. 10.

Beweis. Es sei $AB \perp g$, also $\alpha = \beta$; ferner sei $AC = CB$. Wenn die Halbebene, welche den Punkt A enthält, um g als Achse gedreht wird, bis sie mit der zweiten Halbebene zusammenfällt, so fallen die Strecken CA und CB in einen Halbstrahl, weil $\alpha = \beta$ ist, und A fällt auf B, weil $CA = CB$ ist. — Die Richtigkeit des Umkehrungssatzes leuchtet unmittelbar ein.

Zusatz. Eine Strecke ist symmetrisch in Bezug auf eine Gerade, welche zu ihr normal ist und sie halbiert. Diese Gerade heißt daher Streckensymmetrale. Die Halbierungslinie eines Winkels ist zugleich die Symmetrale desselben und heißt Winkelsymmetrale.

§ 22. Centrische Symmetrie. Man denke sich eine Ebene E um einen Punkt O derselben so gedreht, dass sie zugleich in sich selbst verschoben wird. Wenn dabei ein Halbstrahl OX einen gestreckten Winkel beschreibt, so sagt man, die Ebene habe eine halbe Umdrehung um den Punkt O in sich selbst ausgeführt. Zwei Figuren der Ebene E heißen symmetrisch in Bezug auf den Punkt O, wenn sie zur Deckung gelangen, sobald die eine ruhig auf ihrem Platze verbleibt, während die Ebene mit der zweiten Figur eine halbe Umdrehung um den Punkt O in sich selbst ausführt. Dieser Punkt heißt das Symmetriecentrum oder einfach Centrum der beiden Figuren, und die eben beschriebene Art der Symmetrie, welche für eine besondere Lage zweier direct congruenter Figuren besteht, wird centrische Symmetrie genannt.

Eine Figur heißt centrisch-symmetrisch, wenn sie nach einer halben Umdrehung in ihrer Ebene um einen Punkt derselben mit ihrer Anfangslage zusammenfällt, und jener Punkt heißt das Symmetriecentrum oder kurzweg Centrum der Figur.

Zwei Punkte liegen symmetrisch in Bezug auf den Halbierungspunkt ihrer Verbindungsstrecke. Zugleich gilt auch der Umkehrungssatz.

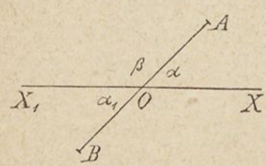


Fig. 11.

Beweis. Es sei O der Halbierungspunkt der Strecke AB, OX jener Halbstrahl der Ebene E, nach welchem die Drehung derselben beurtheilt wird, und OX_1 seine Ergänzung. Wenn die Ebene E eine halbe Umdrehung um den Punkt O in sich selbst ausführt, so gelangt OX in die Lage OX_1, OA fällt der Richtung nach mit der ursprünglichen Lage von OB zusammen, weil $\alpha = \alpha_1$ ist, und wegen $OA = OB$ gelangt der Punkt A in die Anfangslage des

Punktes B. Ebenso erkennt man, dass B in die Anfangslage von A gelangt. Der Beweis des Umkehrungssatzes gestaltet sich ganz einfach.

Zusatz. Eine Strecke ist symmetrisch in Bezug auf ihren Halbierungspunkt als Centrum.

Geschlossene Figuren.

§ 23. Ein allseitig begrenzter Theil der Ebene wird eine geschlossene Figur und die Grenzlinie ihr Umfang genannt.

Wenn der Umfang einer geschlossenen Figur nur aus Strecken besteht, so heißt sie ein Vieleck oder Polygon. Die begrenzenden Strecken werden Seiten und ihre Endpunkte Ecken oder Eckpunkte des Polygones genannt. Unter einem Polygone versteht man häufig auch seinen Umfang und bezeichnet den vom Umfang eingeschlossenen Theil der Ebene als die Fläche des Polygones. Jener von zwei aufeinanderfolgenden Seiten eingeschlossene Winkel, welcher in der nächsten Umgebung des Scheitels die Fläche des Polygones enthält, heißt ein Winkel desselben. Sind alle Winkel eines Polygones concav, so hat es lauter vorspringende Ecken und heißt convex. Die Nebenwinkel zu den Winkeln eines convexen Polygones heißen Außenwinkel; im Gegensatze zu denselben werden die Polygonswinkel Innenwinkel genannt.

Ein Polygon heißt gleichseitig, wenn es lauter gleiche Seiten, gleichwinklig, wenn es lauter gleiche Winkel hat, und regelmäßig oder regulär, wenn es gleichseitig und gleichwinklig ist

Je nach der Anzahl der Ecken wird das Polygon ein Dreieck, Viereck, Fünfeck, . . . n-Eck genannt.

Da jeder Ecke ein Winkel entspricht, so hat jedes Polygon ebensoviel Winkel als Ecken. Da ferner den n Winkeln eines n-Eckes 2n Schenkel entsprechen, welche zu zweien in eine Polygonseite zusammenfallen, so hat das n-Eck auch n Seiten, also ebensoviel Seiten als Ecken und Winkel.

Jede Verbindungsstrecke zweier nicht aufeinanderfolgender Eckpunkte heißt eine Diagonale des Vieleckes.

§ 24. Wenn sich eine Strecke in der Ebene um einen ihrer Endpunkte dreht, bis sie wieder in ihre Anfangslage zurückkehrt, so beschreibt sie eine geschlossene Figur, welche ein Kreis genannt wird. Der Umfang desselben heißt auch die Peripherie oder eine Kreislinie. Häufig versteht man unter einem Kreise die Kreislinie selbst und nennt die von ihr begrenzte Fläche eine Kreisfläche. Es läßt sich stets aus dem Zusammenhange ersehen, ob mit der Bezeichnung „Kreis“ der Umfang oder die Fläche des Kreises gemeint ist.

Das Dreieck.

§ 25. Da offenbar mindestens drei Strecken zur vollständigen Begrenzung eines Theiles der Ebene gehören, so hat das Dreieck unter allen Polygonen die geringste Seitenanzahl. Jeder Seite eines Dreieckes liegt ein Winkel, ihr Gegenwinkel, und jedem Winkel eine Seite, seine Gegenseite, gegenüber. Jeder Seite entsprechen zwei anliegende Winkel und jedem Winkel zwei einschließende Seiten. Jede Dreiecksseite kann als Grundlinie oder Basis und ihre Gegenecke als Spitze des Dreieckes bezeichnet werden. Die von der Spitze bis zur Grundlinie oder deren Verlängerung gezogene Normale der Grundlinie heißt Höhe des Dreieckes. Jedes Dreieck hat drei Höhen.

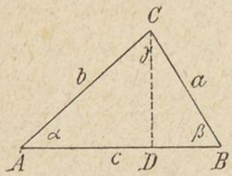


Fig. 12.

Man bezeichnet in der Regel die Eckpunkte eines Dreieckes mit A, B, C, die entsprechenden Winkel in derselben Reihenfolge mit α, β, γ und die Gegenseiten mit a, b, c, so dass a und α, b und β, c und γ Gegenstücke sind. Das Dreieck selbst wird mit ABC bezeichnet.

§ 26. **Beziehungen zwischen den Winkeln.** *a)* Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der ihm gegenüberliegenden Innenwinkel.

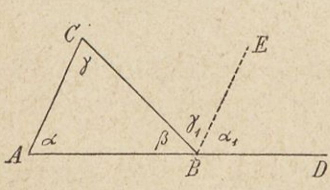


Fig. 13.

Beweis. Ist DBC der betrachtete Außenwinkel, so ziehe man $BE \parallel AC$ und beachte, dass $\alpha_1 = \alpha$ und $\gamma_1 = \gamma$ ist. Hieraus folgt $\sphericalangle\, DBC = \alpha_1 + \gamma_1 = \alpha + \gamma$.

b) Die Summe der Winkel eines Dreieckes beträgt $2R$.

Beweis. Die Summe der Winkel α_1, γ_1 und β ist offenbar gleich einem gestreckten Winkel; somit ist $\alpha_1 + \gamma_1 + \beta = 2R$, also auch $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.

Folgesätze: 1. Durch zwei Winkel eines Dreieckes ist der dritte bestimmt. Wenn also zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so sind auch die dritten Winkel gleich.

2. Ist ein Winkel eines Dreieckes ein rechter, so sind die beiden anderen spitz, u. zw. complementär.

3. Ist ein Dreieckswinkel stumpf, so sind die beiden anderen spitz, und ihre Summe ist kleiner als ein Rechter.

4. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist größer als ein ihm gegenüberliegender Innenwinkel.

5. Die Summe der drei Außenwinkel, von denen jeder an einer anderen Ecke des Dreieckes liegt, beträgt $4R$.

§ 27. **Eintheilung der Dreiecke.** Mit Rücksicht auf die Seiten unterscheidet man ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke, je nachdem alle drei Seiten ungleich oder zwei Seiten gleich oder alle drei Seiten gleich sind. Beim gleichschenkligen Dreiecke heißen die zwei gleichen Seiten Schenkel und die dritte Seite gewöhnlich Grundlinie. Da in den folgenden Sätzen der Fall, dass auch die Grundlinie einem Schenkel gleich ist, nicht ausgeschlossen wird, so ist das gleichseitige Dreieck als ein specieller Fall des gleichschenkligen anzusehen.

Je nachdem ein Dreieck einen stumpfen oder einen rechten Winkel oder lauter spitze Winkel hat, heißt es stumpfwinklig, rechtwinklig oder spitzwinklig. Im rechtwinkligen Dreiecke nennt man die Gegenseite des rechten Winkels Hypotenuse und die beiden anderen Seiten Katheten. Unter der Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes versteht man in der Regel jene, welche der Hypotenuse als Grundlinie entspricht.

§ 28. **Beziehungen zwischen den Gegenstücken.** *a)* Sind zwei Seiten eines Dreieckes gleich, so sind auch ihre Gegenwinkel gleich.

b) Der größeren von zwei ungleichen Seiten liegt auch der größere Winkel gegenüber.

Beweise. *a)* Es sei ABC (Fig. 14) das gegebene Dreieck und $AC = BC$. Zieht man die Symmetrale CD des Winkels ACB und klappt das Dreieck DBC um DC als Achse um, so fällt CB mit CA in eine Gerade, weil $\sphericalangle BCD = ACD$ ist; zugleich fällt wegen $BC = AC$ der Punkt B auf A. Hieraus folgt, dass auch DB und DA sich decken, dass also die Winkel A und B gleich sind.

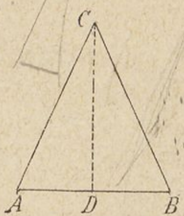


Fig. 14.

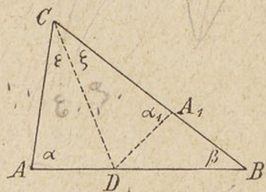


Fig. 15.

b) Es sei (Fig. 15) $BC > AC$ und CD die Symmetrale des Winkels ACB. Klappt man das Dreieck ADC um CD als Achse um, so fällt AC mit BC in eine Gerade und der Punkt A in die Strecke BC, etwa nach A_1. Hieraus folgt $\alpha_1 = \alpha$ und $\alpha_1 > \beta$ (§ 26), also auch $\alpha > \beta$.

Umkehrungssätze: *c)* Sind zwei Winkel eines Dreieckes gleich, so sind auch ihre Gegenseiten gleich.

d) Dem größeren von zwei ungleichen Winkeln liegt auch die größere Seite gegenüber.

Beweise. *c)* Ist $\alpha = \beta$, und nimmt man $AC \gtrless BC$ an, so müsste nach dem vorausgehenden Satze $\beta \gtrless \alpha$ sein. (Von den Ungleichheitszeichen gelten nur die oberen oder nur die unteren.) Da dies der Voraussetzung widerspricht, so muss $AC = BC$ sein.

d) Der Beweis ist ganz analog dem vorausgehenden.

Folgesätze. 1. Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes sind einander gleich und daher spitz.

2. Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes beträgt 60°.

3. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse die größte Seite.

4. In jedem stumpfwinkligen Dreiecke ist die Gegenseite des stumpfen Winkels die größte Seite.

§ 29. Beziehungen zwischen den Seiten. Jede Dreiecksseite ist kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen.

Beweise. *a)* Es sei CD (Fig. 15) die Symmetrale des Winkels ACB, also $\varepsilon = \zeta$.

Es ist dann $\sphericalangle ADC > \zeta$, daher $\sphericalangle ADC > \varepsilon$, also $AC > AD$;
ebenso $\sphericalangle BDC > \varepsilon$, daher $\sphericalangle BDC > \zeta$, also $BC > DB$.

Hieraus folgt durch Addition $AC + BC > AB$.

b) Wird die Seite AB von keiner der beiden anderen Seiten an Größe übertroffen, so ist sie selbstverständlich auch größer als die Differenz derselben. Aus $AB < AC + BC$ folgt ferner $AB - AC < BC$ und $AB - BC < AC$.

§ 30. Lehrsätze über das gleichschenklige Dreieck. Im gleichschenkligen Dreiecke ist die Symmetrale des Winkels an der Spitze zugleich die Symmetrale der Grundlinie und die Höhe zu derselben.

Beweis. Aus dem Beweise zum Lehrsatze in § 28 a geht leicht hervor, dass die Symmetrale CD des Winkels ACB die Grundlinie AB halbiert und zu derselben normal ist. Denn es ist $\sphericalangle ADC = BDC$, also jeder ein Rechter.

Die Umkehrungen des vorausgehenden Lehrsatzes werden am besten indirect bewiesen, indem man beachtet, dass sowohl der Winkel an der Spitze, als auch die Grundlinie nur je eine Symmetrale besitzen, und dass es nur eine Höhe zur Grundlinie gibt.

Folgesätze. 1. Das gleichschenklige Dreieck ist eine symmetrische Figur mit einer Achse (einachsig).

2. Im gleichseitigen Dreiecke fallen die drei Seitensymmetralen mit den drei Winkelsymmetralen und den drei Höhen zusammen.

3. Das gleichseitige Dreieck ist eine dreiachsige symmetrische Figur.

§ 31. Projectionen. Zieht man durch einen Punkt zu einer Geraden die Normale, so heißt der Fußpunkt derselben in der Geraden die Normalprojection des gegebenen Punktes auf die gegebene Gerade. Im Folgenden wird häufig zur Abkürzung der Ausdruck „Projection" für „Normalprojection" gebraucht, da andere Arten von Projectionen hier nicht zur Anwendung kommen.

Unter der Projection einer Linie auf eine Gerade versteht man den geometrischen Ort der Projectionen aller ihrer Punkte. Daher ist die Projection einer Strecke AB jene Strecke, welche von den Projectionen der Endpunkte A und B begrenzt wird. Ist eine Strecke zu einer Geraden normal, so ist die Projection der ersteren auf die letztere ein Punkt.

§ 32. Strecken zwischen einem Punkte und einer Geraden. Von den Strecken, welche einen Punkt außerhalb einer Geraden mit den Punkten derselben verbinden, gelten die folgenden Sätze:

a) Die zur Geraden normale Strecke ist die kürzeste. Sie heißt daher der Abstand des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden.

b) Zu gleichen Projectionen gehören gleiche Strecken und gleiche Winkel der Strecken mit der Normale.

c) Zu der größeren von zwei ungleichen Projectionen gehört die größere Strecke und der größere Winkel der Strecke mit der Normale.

Beweise. *a)* Es sei $AA_1 \perp GH$ und C ein beliebiger von A_1 verschiedener Punkt in GH. Offenbar ist stets $AA_1 < AC$.

b) Ist $CA_1 = A_1B$, so klappe man das Dreieck AA_1B um AA_1 als Achse um. Es ergibt sich $AC = AB$ und $\sphericalangle CAA_1 = BAA_1$.

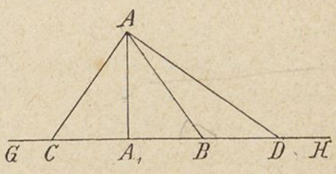


Fig. 16.

c) Befinden sich die ungleichen Projectionen auf derselben Seite der Normale, wie A_1B und A_1D, so folgt aus $A_1B < A_1D$ zunächst $\sphericalangle A_1AB < A_1AD$. Da ferner $\sphericalangle DBA > R$ sein muss (§ 26, 4. Folgesatz), so ist auch $AD > AB$. Liegen hingegen die ungleichen Projectionen auf entgegengesetzten Seiten der Normale, wie A_1C und A_1D, so klappe man A_1AC um die Normale als Achse um und erhält dann den vorausgehenden Fall.

Zu den Sätzen *b)* und *c)* gibt es je zwei Umkehrungssätze, welche leicht indirect bewiesen werden. Ist z. B. $AD > AC$, so muss auch $A_1D > A_1C$ sein. Denn wäre $A_1D \leqq A_1C$, so hätte man nach *b)*, beziehungsweise *c)* auch $AD \leqq AC$.

Folgesätze. 1. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden können zu dieser nicht mehr als zwei gleiche Strecken gezogen werden.

2. Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu derselben drei Strecken, von denen zwei gleich sind, so liegt die dritte innerhalb oder außerhalb des von den beiden ersten gebildeten hohlen Winkels, je nachdem sie kürzer oder länger ist, als eine derselben.

Anmerkung. Zieht man durch A (Fig. 16) eine Gerade normal zu GH und dreht dieselbe um A, etwa im positiven Sinne, so rückt der Schnittpunkt der beiden Geraden in dem Halbstrahle A_1H immer weiter fort, so dass seine Entfernung von A_1 jede beliebige Grenze überschreitet; zugleich wird der spitze Winkel A_1DA der beiden Geraden beliebig klein, da sein Complement A_1AD einem Rechten beliebig nahe gebracht werden kann. Indem man nun die zu GH parallele Lage als die nach einer Vierteldrehung erreichte Grenzlage auffasst, pflegt man zu sagen, dass zwei parallele Gerade sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden und den Winkel 0, beziehungsweise $2R$ mit einander bilden. Demgemäß nennt man auch zwei parallele Gerade mit festgesetzten (positiven) Richtungen gleichgerichtet (direct parallel), beziehungsweise entgegengesetzt gerichtet (invers parallel).

Congruenz der Dreiecke.

§ 33. Aus dem allgemeinen Begriffe der Congruenz schließt man, dass in congruenten Dreiecken je zwei homologe Seiten und je zwei homologe Winkel gleich sind.

Drückt man diese Folgerung durch die Gleichungen

$$a = a_1,\ b = b_1,\ c = c_1,\ \alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1$$

aus, so entsteht die Frage, ob umgekehrt das Bestehen aller sechs Gleichungen oder nur einiger derselben erforderlich ist, um auf die Congruenz der entsprechenden zwei Dreiecke schließen zu dürfen. Die Beantwortung dieser Frage ist in den sogenannten Congruenzsätzen enthalten, welche nebst den Sätzen über die Symmetrie insbesonders zum Nachweise der Gleichheit von Strecken und Winkeln angewendet werden. Kommen nämlich die zu vergleichenden Strecken (Winkel) in congruenten Dreiecken als Seiten (Dreieckswinkel) vor, so sind sie homolog, also auch gleich, wenn ihre Gegenwinkel (Gegenseiten) homolog sind. Kürzer wird dies in folgender Weise ausgedrückt:

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

§ 34. I. **Congruenzsatz.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

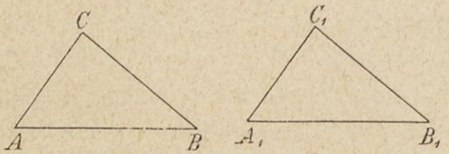


Fig. 17.

Beweis. Es sei $AB = A_1B_1$, $\sphericalangle A = A_1$ und $\sphericalangle B = B_1$. Folgen die Eckpunkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 in den zwei Dreiecken in demselben Drehungssinne aufeinander (wie in der Figur), so verschiebe man $A_1B_1C_1$ derart, dass A_1 mit A und B_1 mit B zusammenfällt. Aus $A = A_1$ und $B = B_1$ folgt, dass dann A_1C_1 mit AC und B_1C_1 mit BC in eine Gerade fällt. Dann liegt also C_1 sowohl in der Geraden, welche durch AC, als auch in jener, welche durch BC bestimmt wird, und fällt somit auf den Punkt C. Die beiden Dreiecke sind daher congruent, da ihre Eckpunkte und somit auch ihre Seiten sich decken. Wenn die sich entsprechenden Eckpunkte in den gegebenen Dreiecken die entgegengesetzte Aufeinanderfolge haben, so muss man zum Beweise der Congruenz das eine Dreieck zunächst umklappen.

§ 35. **II. Congruenzsatz.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Beweis. Ist $AB = A_1B_1$, $\sphericalangle A = A_1$ und $C = C_1$ (Fig. 17), so ist auch $B = B_1$. Daraus folgt nach dem ersten Congruenzsatze $ABC \cong A_1B_1C_1$.

Die ersten zwei Congruenzsätze lassen sich in folgender Weise zusammenfassen: Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie congruent.

§ 36. **III. Congruenzsatz.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Beweis. Ist $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ und $\sphericalangle A = A_1$ (Fig. 17), so lassen sich die beiden Dreiecke durch Verschieben, oder durch Umklappen und darauffolgendes Verschieben so aufeinanderlegen, dass sich die Eckpunkte A und A_1 decken, ferner AB mit A_1B_1 und AC mit A_1C_1 in eine Gerade fällt. Aus der Voraussetzung folgt, dass auch die Punkte B und B_1, ferner C und C_1 zusammenfallen; also sind die beiden Dreiecke congruent.

§ 37. **Lehrsätze über die Streckensymmetrale.** *a)* Jeder Punkt einer Streckensymmetrale hat von den Endpunkten der Strecke gleiche Abstände.

b) Jeder Punkt außerhalb der Streckensymmetrale ist jenem Endpunkte der Strecke näher, welcher mit ihm auf derselben Seite der Symmetrale liegt. Zugleich gelten die Umkehrungssätze.

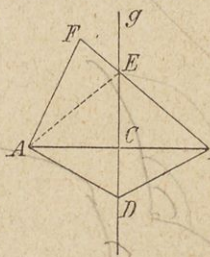


Fig. 18.

Beweise. *a)* Ist $AC = CB$ und $g \perp AB$, so ist g die Symmetrale der Strecke AB. Verbindet man einen beliebigen Punkt D derselben mit A und B, so folgt aus § 32 *b*, dass $AD = BD$ ist.

b) Es sei F ein beliebiger Punkt außerhalb g, und man ziehe AF, BF und AE, wo E den Schnittpunkt der Symmetrale mit der Strecke BF bedeutet. Man findet dann $BF = BE + EF = AE + EF$. Wegen $AE + EF > AF$ ist auch $BF > AF$.

Die Umkehrungssätze können indirect bewiesen werden.

Folgesätze. 1. Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Endpunkten einer Strecke gleiche Abstände haben, ist die Symmetrale der Strecke. Man versteht unter dem geometrischen Orte aller Punkte, welche einer gegebenen Bedingung entsprechen, jenes Raumgebilde, welches die Eigenschaft hat, dass alle Punkte desselben und nur diese der gegebenen Bedingung entsprechen.

2. Wenn von zwei Punkten D und E ein jeder von den Endpunkten einer Strecke AB gleiche Abstände hat, so ist die Gerade DE die Symmetrale der Strecke AB.

c) Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes schneiden einander in einem einzigen Punkte, welcher von den drei Eckpunkten gleiche Abstände hat.

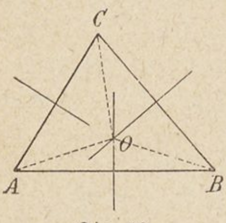


Fig. 19.

Beweis. Die Symmetralen der Seiten AB und BC müssen sich in einem Punkte O schneiden; denn sie könnten nur parallel sein, wenn auch AB und BC parallel wären oder in einer Geraden liegen würden. Weil nun O der Symmetrale der Strecke AB angehört, so ist $AO = BO$, und weil er der Symmetrale der Strecke BC angehört, so ist $BO = CO$. Daraus folgt ferner $AO = CO$; also muss auch die Symmetrale der Seite AC durch den Punkt O gehen.

§ 38. **Lehrsätze über die Winkelsymmetrale.** *a)* Jeder Punkt einer Winkelsymmetrale hat von den Schenkeln des Winkels gleiche Abstände.

b) Jeder Punkt, welcher in einem hohlen Winkel und außerhalb der Symmetrale desselben liegt, ist jenem Schenkel näher, welcher sich mit ihm auf derselben Seite der Symmetrale befindet.

Jedem dieser beiden Sätze entspricht ein Umkehrungssatz.

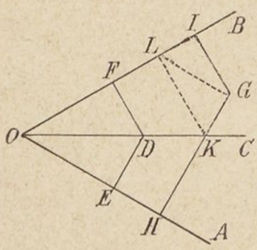


Fig. 20.

Beweis. *a)* Es sei OC die Symmetrale des Winkels AOB, D ein beliebiger Punkt der Symmetrale, ferner $DE \perp OA$ und $DF \perp OB$. Aus der Congruenz der Dreiecke DEO und DFO folgt $DE = DF$.

b) Es sei G ein beliebiger Punkt des Winkels BOC, welcher nicht der Symmetrale OC angehört. Ist nun $GH \perp OA$, $GI \perp OB$, ferner $KL \perp OB$, so folgt $GH = GK + KH = GK + KL$. Nun ist $GK + KL > LG$ und $LG > GI$, also auch $GH > GI$. Die Umkehrungssätze können indirect bewiesen werden.

Folgesatz. Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei sich schneidenden Geraden gleiche Abstände haben, besteht aus den zwei Geraden, welche die vier hohlen Winkel der gegebenen Geraden halbieren.

c) Die drei Winkelsymmetralen eines Dreieckes schneiden einander in einem einzigen Punkte, welcher von den drei Seiten gleiche Abstände hat.

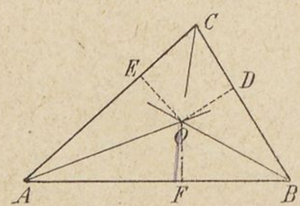


Fig. 21.

Beweis. Die Symmetralen AO und BO müssen sich in einem Punkte O schneiden (§ 17). Zieht man nun die Normalen OD, OE und OF zu den Dreiecksseiten, so ist $OE = OF$, weil O der Symmetrale des Winkels A angehört, und $OF = OD$, weil O auch der Symmetrale des Winkels B angehört.

Daraus folgt $OD = OE$, also geht auch die Symmetrale des Winkels C durch den Punkt O.

d) Jn jedem Dreiecke schneiden sich die Symmetralen eines Innenwinkels und der beiden ihm gegenüberliegenden Außenwinkel in einem einzigen Punkte, welcher von den durch die Dreiecksseiten gelegten Geraden gleiche Abstände hat.

Der Beweis ist jenem des vorausgehenden Lehrsatzes analog.

§ 39. **IV. Congruenzsatz.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren übereinstimmen.

Beweis. Es sei $BC = B_1C_1 = a$, $AC = A_1C_1 = b$, ferner $a > b$ und $\sphericalangle A = A_1 = \alpha$.

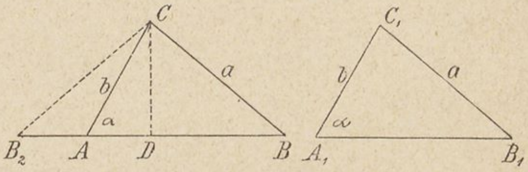


Fig. 22.

Hieraus folgt, dass sich das Dreieck $A_1B_1C_1$ so auf das Dreieck ABC legen läst, dass die Eckpunkte A_1 und A, ferner C_1 und C zusammenfallen, während B_1 in die Seite AB oder deren Verlängerung über B hinaus zu liegen kommt. Da man nun vom Punkte C nur zwei Strecken von der Länge a zu der durch AB bestimmten Geraden ziehen kann, von denen die eine die Seite CB ist, während die andere, CB_2, ihren Fußpunkt in der Verlängerung von BA über A hinaus hat (§ 32, 2. Folgesatz), so muss C_1B_1 mit CB zusammenfallen. Also sind die beiden Dreiecke congruent.

Zusatz. Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren übereinstimmen, so können zwei verschiedene Fälle eintreten: 1. Die Gegenwinkel der größeren Seiten sind ebenfalls gleich und somit die Dreiecke congruent, wie AB_2C und $A_1B_1C_1$ oder 2. die Gegenwinkel der größeren Seiten sind ungleich und daher die Dreiecke nicht congruent, wie ABC und $A_1B_1C_1$. Jn diesem Falle liegen den größeren Seiten supplementäre Winkel gegenüber.

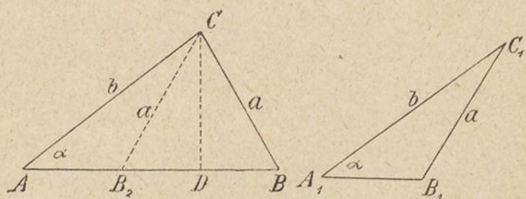


Fig. 23.

§ 40. **V. Congruenzsatz.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in allen drei Seiten übereinstimmen.

Beweis. Ist $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ und $CA = C_1A_1$, so lege man die Dreiecke so aneinander, dass A_1 mit A, B_1 mit B zusammenfällt, und dass C_1 und C sich auf entgegengesetzten Seiten von AB befinden. Da nun

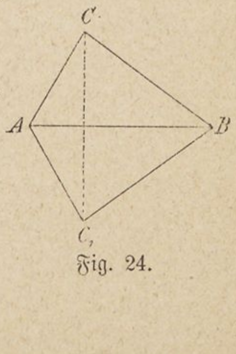


Fig. 24.

AB die Symmetrale der Strecke CC_1 ist, so fällt C_1 auf C, wenn das Dreieck ABC_1 um AB als Achse umgeklappt wird. Die beiden Dreiecke sind also congruent.

§ 41. **Bestimmungsstücke eines Dreieckes.** Da man congruente Dreiecke als ein einziges Dreieck in verschiedenen Lagen ansehen kann, so nennt man jene Größen, aus deren Gleichheit in zwei Dreiecken auf die Congruenz derselben geschlossen werden kann, Bestimmungsstücke des Dreieckes. Von diesen sind die wichtigsten: 1. eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, 2. eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel, 3. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, 4. zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren oder 5. alle drei Seiten.

§ 42. **Änderungen der Gegenstücke.** Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten unverändert bleiben und der von ihnen eingeschlossene Winkel wächst, so wächst auch dessen Gegenseite.

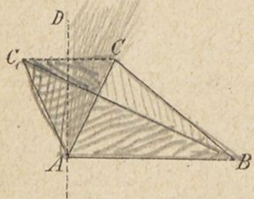


Fig. 25.

Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck, und man lasse den Winkel BAC in den größeren BAC_1 übergehen, während die einschließenden Seiten unverändert bleiben. Zieht man nun die Symmetrale AD der Strecke CC_1, so liegt B außerhalb der Symmetrale und zwar auf der nämlichen Seite, wie der Eckpunkt C. (Da nämlich $\sphericalangle BAC_1 < 2R$ ist, so ist umsomehr $BAD < 2R$.) Somit ist $BC < BC_1$ (§ 37).

Der Umkehrungssatz kann indirect bewiesen werden.

Der Kreis.

§ 43. **Halbmesser, Durchmesser.** Die Kreislinie ist zufolge der Erklärung in § 24 eine in sich selbst zurückkehrende oder geschlossene Linie, deren sämmtliche Punkte von einem bestimmten Punkte, dem Mittelpunkte (Centrum), gleiche Abstände haben. Jede Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit einem Punkte der Kreislinie heißt Halbmesser (Radius). Jede von zwei Punkten der Kreislinie begrenzte Strecke wird Sehne (chorda), und wenn dieselbe durch den Mittelpunkt geht, Durchmesser (Diameter) genannt. Die Endpunkte eines Durchmessers heißen Gegenpunkte.

Folgesätze. 1. Alle Halbmesser eines Kreises sind gleich.

2. Jeder Durchmesser ist doppelt so groß als ein Halbmesser desselben Kreises.

3. Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich.

4. Jeder Durchmesser ist größer als irgend eine andere Sehne desselben Kreises.

Zum Beweise des letzten Satzes ziehe man zu den Endpunkten einer Sehne die beiden Radien und beachte, dass die erstere kleiner ist als die Summe der letzteren (§ 29).

§ 44. Bogen, Centriwinkel, Sector, Segment. Jeder Theil einer Kreislinie heißt Kreisbogen oder einfach Bogen (arcus). Ein Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt eines Kreises ist, wird Centriwinkel genannt. Jener Theil der Kreisfläche, welcher von einem Bogen und den beiden zu seinen Endpunkten gezogenen Radien begrenzt wird, heißt Kreisausschnitt (Sector), und jener Theil, welcher von einem Bogen und der die Endpunkte desselben verbindenden Sehne begrenzt wird, heißt Kreisabschnitt (Segment).

Zum Centriwinkel AOC gehört die Sehne AC, der Bogen AC, der Sector $AOCD$ und das Segment ACD. (Um die Sehne AC in der Bezeichnung von dem Bogen AC zu unterscheiden, schreibt man für erstere $\overline{AC}$ oder chorda AC und für letzteren $\widehat{AC}$ oder arc AC.) Jeder Bogen bestimmt ebenfalls eine Sehne, welche die zugehörige genannt wird, einen Centriwinkel, einen Sector und ein Segment. Hingegen werden durch eine Sehne zwei Bogen, zwei Centriwinkel, zwei Sectoren und zwei Segmente bestimmt. Man pflegt nun jenes Segment, welches den Mittelpunkt nicht enthält, als zur Sehne gehörig zu bezeichnen; desgleichen den Bogen, den Centriwinkel und den Sector, welche durch jenes Segment bestimmt werden.

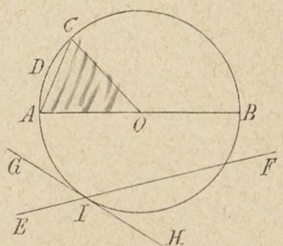


Fig. 26.

§ 45. Kreis und Punkte. *a)* Ein Punkt liegt auf der Kreislinie, innerhalb oder außerhalb derselben, je nachdem sein Centralabstand (Abstand vom Centrum) gleich dem Radius, kleiner oder größer ist als derselbe. Zugleich gelten die Umkehrungssätze.

Beweise. Es sei O das Centrum eines Kreises, r ein Radius desselben und A irgend ein Punkt der Ebene. Ist die Strecke $OA = r$, so kann dieselbe als eine besondere Lage der den Kreis erzeugenden Strecke aufgefasst werden; also liegt A auf der Kreislinie. Ist $OA < r$, so gibt es in der Verlängerung von OA über A hinaus einen Punkt A_1, für welchen $OA_1 = r$ ist. Dann ist A_1 ein Punkt der Kreislinie, hingegen A mit dem Mittelpunkte auf derselben Seite der Kreislinie, also innerhalb derselben. Analog behandelt man den Fall $OA > r$. Die Umkehrungssätze können indirect bewiesen werden.

Folgesätze. 1. Der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, welche von einem Punkte O den Abstand r besitzen, ist der um O als Centrum mit dem Radius r beschriebene Kreis.

2. Haben zwei Kreise einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt und gleiche Radien so decken sie sich vollständig.

b) Je drei Punkte einer Kreislinie liegen nicht in einer Geraden.

Indirecter Beweis (§ 32 *c*, 1. Folgesatz). Hieraus folgt, dass die Kreislinie krumm ist.

c) Durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, ist ein Kreis eindeutig bestimmt.

Beweis. Betrachtet man die gegebenen Punkte A, B, C als Eckpunkte eines Dreieckes, so ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt O der drei Seitensymmetralen von A, B und C gleich weit entfernt. Ist also O der Mittelpunkt und OA der Halbmesser einer Kreislinie, so muss dieselbe auch durch B und C gehen. Würde noch eine zweite Kreislinie durch A, B und C gehen, so müsste ihr Mittelpunkt ebenfalls in den Symmetralen der Strecken AB, BC, CA liegen, also mit O zusammenfallen. Da ferner OA auch ein Radius der zweiten Kreislinie wäre, so müsste sich dieselbe mit der ersten decken (§ 45 *a*, 2. Folgesatz).

d) Unter allen Strecken, welche einen gegebenen Punkt mit den Punkten einer Kreislinie verbinden, ist diejenige die größte, in welcher der Mittelpunkt liegt, und diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht.

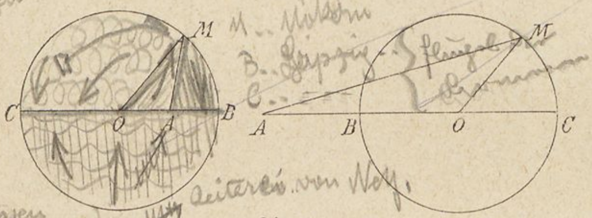


Fig. 27.

Beweis. Liegt der gegebene Punkt A innerhalb der Kreislinie, so folgt: $AM < OM + OA = CO + OA = CA$, also $AM < CA$; ebenso erhält man $AM > OM - OA = OB - OA = AB$, also $AM > AB$. Analog ist der Beweis zu führen, wenn A außerhalb des Kreises liegt. Wie lautet dieser Satz, wenn A der Kreislinie selbst angehört.

Zusätze. 1. Bewegt sich ein Punkt M in der gegebenen Kreislinie immer in demselben Sinne, so wächst seine Entfernung vom gegebenen Punkte A während der Bewegung von B nach C; sie nimmt hingegen während der Bewegung von C nach B immerfort ab. Zum Beweise wende man den Lehrsatz des § 42 auf das Dreieck AOM an.

2. Setzt man $OA = c$ und $OM = r$, so ist die größte Entfernung des bewegten Punktes von A oder $AC = c + r$ und die kleinste Entfernung oder

$$AB = \begin{cases} c - r \\ 0 \\ r - c \end{cases}, \text{ je nachdem } \begin{cases} c > r \\ c = r \\ c < r \end{cases} \text{ ist.}$$

§ 46. Kreis und Gerade. Eine Gerade hat mit einer Kreislinie keinen Punkt, einen Punkt oder zwei Punkte gemeinschaftlich, je nachdem ihr Centralabstand größer, ebenso groß oder kleiner ist als der Radius. Zugleich gelten auch die Umkehrungssätze.

Beweise. Es sei A die Projection des Mittelpunktes O auf die gegebene Gerade GH, also $OA = c$ der Centralabstand. Für $c > r$ liegt A außerhalb der Kreislinie, somit auch jeder andere Punkt B der Geraden, da $OB > OA$ ist. Für $c = r$ ist A ein Punkt der Kreislinie, hingegen liegt jeder andere Punkt der Geraden außerhalb des Kreises. Für $c < r$ liegt A innerhalb der Kreislinie. Denkt man sich nun einen Punkt von A aus längs des Halbstrahles AG weiterbewegt, so übersteigt seine Entfernung von A und umsomehr jene von O jeden beliebig großen Wert. Also muss der bewegte Punkt die Kreislinie in einem Punkte B treffen, für welchen $OB = r$ ist. Macht man ferner in dem Halbstrahle AH die Strecke $AB_1 = AB$, so ist auch $OB_1 = r$; also gehört auch der Punkt B_1 der Geraden und der Kreislinie an. Andere Punkte können die beiden Linien nach § 32 nicht gemeinsam haben.

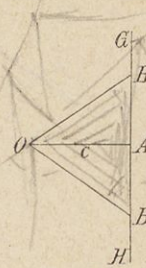


Fig. 23.

Die Umkehrungssätze können indirect bewiesen werden.

Erklärungen: 1. Wenn eine Gerade und eine Kreislinie zwei Punkte gemeinschaftlich haben, so liegt nur die von diesen Punkten begrenzte Strecke der Geraden innerhalb der Kreislinie. Man sagt daher in diesem Falle, dass die beiden Linien einander *schneiden*, nennt die gemeinsamen Punkte *Schnittpunkte* und die Gerade eine *Secante* des Kreises (z. B. EF in Fig. 26).

2. Wenn eine Secante um einen ihrer Schnittpunkte mit der Kreislinie so gedreht wird, dass der zweite Schnittpunkt immer näher an den ersten heranrückt und schließlich mit demselben zusammenfällt, so heißt die Gerade in dieser Grenzlage *Tangente* des Kreises und der Punkt, welchen sie mit demselben gemeinschaftlich hat, *Berührungspunkt* (GH und I in Fig. 26).

§ 47. Gleiche Kreise und Kreisbogen. *a)* Congruente Kreise werden in der Regel als *gleich* bezeichnet.

Haben zwei Kreise gleiche Radien, so sind sie gleich und umgekehrt (§ 45 *a*, 2. Folgesatz).

Folgesätze: 1. Wenn eine Ebene um den Mittelpunkt eines in ihr liegenden Kreises in sich selbst gedreht wird, so fällt jede neue Lage des Kreises mit ihrer ursprünglichen zusammen. Die Kreislinie lässt sich also in sich selbst verschieben.

2. Der Kreis ist eine centrisch-symmetrische Figur.

b) Kreisbogen von gleichem Halbmesser, d. i. Bogen eines Kreises oder gleicher Kreise, lassen sich ebenso wie Strecken vergleichen, addieren, subtrahieren u. s. f. Sie heißen *gleich*, wenn sie sich zur Deckung bringen lassen oder also congruent sind.

Der 360. Theil der Peripherie heißt ein *Grad* (genauer Bogengrad im Gegensatze zu Winkelgrad), der 60. Theil eines Grades heißt eine *Minute* (Bogenminute) und der 60. Theil einer Minute eine *Secunde* (Bogensecunde). Unter *Halbkreis*, *Quadrant*, *Sextant* und *Octant* versteht man beziehungsweise die Hälfte, den vierten, den sechsten und den achten Theil der Peripherie.

§ 48. **Lehrsätze von den Sehnen.** *a)* Die Symmetrale einer jeden Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises; sie fällt also mit der Normale vom Centrum auf die Sehne und mit der Verbindungslinie des Centrums mit dem Halbierungspunkte der Sehne zusammen.

b) Die Symmetralen paralleler Sehnen fallen zusammen. Der Beweis läſst sich mit Hilfe des vorausgehenden Satzes führen.

Folgesatz. Der Kreis ist eine axial-symmetrische Figur und zwar ist jeder Durchmesser eine Symmetrieachse

c) Gleichen Sehnen entsprechen gleiche Centralabstände, und der größeren von zwei verschiedenen Sehnen entspricht der kleinere Centralabstand. Zugleich gelten auch die Umkehrungssätze.

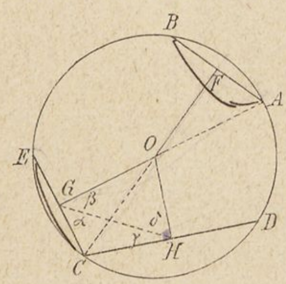


Fig. 29.

Beweise. Es sei $AB = EC$, $OF \perp AB$ und $OG \perp EC$, also auch $AF = CG$. Aus der Congruenz der Dreiecke AFO und CGO folgt also $FO = GO$.

Ist $CD > EC$, so ziehe man $OG \perp EC$, $OH \perp CD$ und verbinde G mit H. In dem Dreiecke GCH ist nun $CH > CG$, also auch $\alpha > \gamma$. Da ferner $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ ist, so folgt $\beta < \delta$ und daraus $OH < OG$. Wenn die gegebenen Sehnen nicht aneinanderstoßen, wie z. B. AB und CD, so denke man sich von C aus die Sehne $CE = AB$ gezogen, und findet $OH < OG$, $OG = OF$, daher $OH < OF$. Die Umkehrungssätze können indirect bewiesen werden.

§ 49. **Beziehungen zwischen Centriwinkeln und den zugehörigen Sehnen und Bogen.** *a)* Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises oder gleicher Kreise gehören auch gleiche Sehnen und gleiche Bogen.

Beweis durch Deckung.

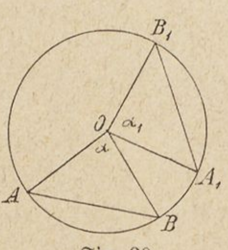


Fig. 30.

b) Zu gleichen Sehnen eines Kreises oder gleicher Kreise gehören auch gleiche Centriwinkel und gleiche Bogen.

Beweis. Aus $AB = A_1B_1$ folgt $\triangle ABO \cong A_1B_1O$, also $\alpha = \alpha_1$. Nach dem vorausgehenden Satze ist daher auch arc AB = arc A_1B_1.

c) Zu gleichen Bogen eines Kreises oder gleicher Kreise gehören auch gleiche Centriwinkel und gleiche Sehnen.

Beweis. Man kann die gleichen Bogen so aufeinanderlegen, daſs sich ihre Endpunkte decken (§ 47). Dann fallen die Sehnen und daher auch die Centriwinkel zusammen.

§ 50. Lehrsätze von den Tangenten. *a)* Die im Endpunkte eines Halbmessers errichtete Normale desselben ist eine Tangente des Kreises.

Dieser Satz, dessen Richtigkeit sich unmittelbar aus dem § 46 ergibt, läſst mehrere Umkehrungen zu, welche sich leicht indirect beweisen lassen.

b) Die Strecken, welche von dem Schnittpunkte zweier Tangenten eines Kreises und den entsprechenden Berührungspunkten begrenzt werden, sind einander gleich.

Beweis. Es ist $\triangle\ ABO \cong AB_1\ O$, daher $AB = AB_1$. Die Strecken AB und AB_1 werden häufig auch Tangenten genannt.

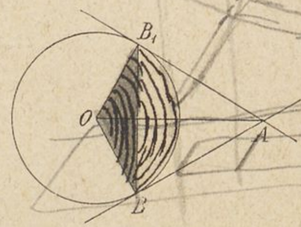


Fig. 31.

c) Die Verbindungslinie des Centrums mit dem Schnittpunkte zweier Tangenten desselben Kreises ist die Symmetrale 1. des hohlen Winkels der beiden Tangenten, 2. des Winkels, welchen die zu den Berührungspunkten gezogenen Radien einschließen, und 3. der Sehne, welche die beiden Berührungspunkte verbindet (der Berührungssehne).

Die Richtigkeit dieser Sätze ergibt sich aus der Congruenz der Dreiecke ABO und AB_1O, ferner aus den Eigenschaften der Streckensymmetrale (§ 37 *b*, 2. Folgesatz).

§ 51. Peripheriewinkel. Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel zwei Secanten oder eine Secante und eine Tangente des Kreises sind, wird ein Peripheriewinkel genannt. Jener im Peripheriewinkel liegende Kreisbogen, dessen Endpunkte in die Schenkel des Peripheriewinkels fallen, heißt der zu demselben gehörige Bogen oder der Bogen, über welchem der Peripheriewinkel steht.

a) Jeder Peripheriewinkel ist gleich der Hälfte des Centriwinkels über demselben Bogen.

Beweis. Es sei $BAC = \beta$ (Fig. 32) ein von einer Tangente und einer Secante gebildeter Peripheriewinkel, also $BOA = \alpha$ der Centriwinkel über demselben Bogen BEA. Zieht man $OE \perp AB$, so ist $AOE = \frac{\alpha}{2}$ und zugleich $AOE = \beta$, da beide Winkel zum Winkel OAB complementär sind. Hieraus folgt $\beta = \frac{\alpha}{2}$. — Ist der stumpfe Winkel $BAD = 2\,R - \beta$ der gegebene Peripheriewinkel, also der convexe Winkel $BOA = 4\,R - \alpha$ der Centriwinkel

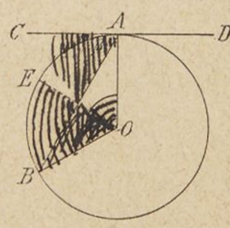


Fig. 32.

über denselben Bogen, so findet man $2R - \beta = 2R - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(4R - \alpha)$. — Für $\beta = R$ ist die Richtigkeit des Satzes ohneweiters klar.

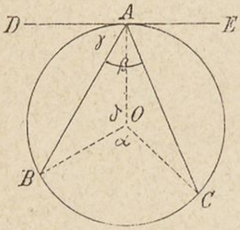


Fig. 33.

Ist hingegen $BAC = \beta$ (Fig. 33) der von zwei Secanten gebildete Peripheriewinkel, also $BOC = \alpha$ der Centriwinkel über denselben Bogen, so erhält man mit Rücksicht auf den vorausgehenden Beweis $\gamma + \beta = \frac{1}{2}(\delta + \alpha)$ und $\gamma = \frac{1}{2}\delta$, daher $\beta = \frac{1}{2}\alpha$.

Folgesätze. 1. Alle Peripheriewinkel eines Kreises, welche zu demselben Bogen gehören, sind einander gleich.

2. Alle Peripheriewinkel eines Kreises oder gleicher Kreise, welche zu gleichen Bogen gehören, sind einander gleich.

3. Zwei Peripheriewinkel eines Kreises, deren Scheitel auf entgegengesetzten Seiten einer Sehne liegen und deren Schenkel durch die Endpunkte der Sehne gehen, sind supplementär.

b) Der geometrische Ort der Scheitel aller gleichen Winkel, deren Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen Strecke gehen und deren Scheitel auf derselben Seite der Strecke liegen, ist ein von den Endpunkten der Strecke begrenzter Kreisbogen.

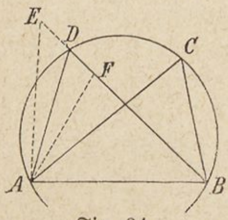


Fig. 34.

Beweis. Es sei AB die gegebene Strecke und $ACB = \alpha$ der gegebene Winkel. Zieht man den durch die Punkte A, B, C bestimmten Kreis, so ist jeder Peripheriewinkel, dessen Schenkel durch A und B gehen und dessen Scheitel im Bogen ACB liegt (z. B. ADB), ebenfalls $= \alpha$. Ist ferner E ein Punkt, welcher mit C auf derselben Seite von AB und außerhalb des Segmentes ACB liegt, so erhält man $\sphericalangle AEB < ADB$, daher $\sphericalangle AEB < \alpha$. Ebenso findet man $\sphericalangle AFB > \alpha$, wenn F im Segmente ACB liegt.

c) Ist der zu einem Peripheriewinkel gehörige Bogen ein Halbkreis, so heißt derselbe ein Winkel im Halbkreise.

Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter.

Beweis. Der Centriwinkel über dem Halbkreise ist nämlich ein gestreckter Winkel.

Folgesätze. 1. Der geometrische Ort der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen Strecke gehen, ist jener Kreis, in welchem die gegebene Strecke ein Durchmesser ist.

2. Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke ein spitzer Winkel wächst, während die Hypotenuse unverändert bleibt, so wächst die gegenüberliegende Kathete und die anliegende nimmt ab.

§ 52. **Zwei Kreise.** Wenn zwei Kreise den Mittelpunkt gemeinschaftlich haben, so heißen sie concentrisch. Die Fläche, welche von zwei concentrischen Kreislinien begrenzt wird, heißt Kreisring; der von zwei Radien des größeren Kreises begrenzte Theil des Kreisringes heißt Ringausschnitt oder Ringsector.

Zwei Kreise, deren Mittelpunkte nicht zusammenfallen, heißen excentrisch. Die durch die beiden Mittelpunkte bestimmte Gerade wird Centrale und der Abstand der beiden Mittelpunkte Centralabstand genannt. Man sagt: „Zwei Kreise berühren einander", wenn sie eine Tangente und den ihr entsprechenden Berührungspunkt gemeinschaftlich haben. Die Berührung wird eine äußere oder eine innere genannt, je nachdem die sich berührenden Kreise einander ausschließen oder nicht. Wenn von zwei Kreislinien die eine theils innerhalb, theils außerhalb der anderen liegt, so sagt man: „Die beiden Kreise schneiden einander".

Bezeichnet man den Centralabstand zweier Kreise mit c, die Radien derselben mit r und r_1 und setzt $r > r_1$ voraus, so bestehen die folgenden Lehrsätze:

a) Für $c < r - r_1$ haben die beiden Kreislinien keinen Punkt gemeinschaftlich und die eine (mit dem Radius r) schließt die andere ein;

b) für $c = r - r_1$ berühren sie sich von innen;

c) für $r - r_1 < c < r + r_1$ schneiden sie sich in zwei Punkten;

d) für $c = r + r_1$ berühren sie sich von außen und

e) für $c > r + r_1$ haben sie keinen Punkt gemeinschaftlich und schließen einander aus.

Beweise. Man bezeichne mit O und O_1 die Mittelpunkte der beiden Kreislinien K und K_1, ferner mit B und C jene Punkte der Kreislinie K_1, von denen der erste den kleinsten und der zweite den größten Abstand von O hat. Nach § 45 *d* liegen die Punkte O, O_1, B und C in einer Geraden, und es ist $OC = c + r_1$

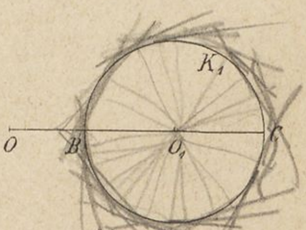


Fig. 35.

und $OB = \begin{cases} c - r_1 \\ 0 \\ r_1 - c \end{cases}$, je nachdem $\begin{cases} c > r_1 \\ c = r_1 \\ c < r_1 \end{cases}$ ist.

a) Aus $c < r - r_1$ folgt $r > c + r_1$ oder $r > OC$. Somit liegt C und daher auch jeder andere Punkt von K_1 innerhalb K.

b) Aus $c = r - r_1$ folgt $r = c + r_1$ oder $r = OC$. Somit gehört C der Kreislinie K an, während jeder andere Punkt von K_1 innerhalb K liegt. Die zur Centrale im Punkte C errichtete Normale ist Tangente der beiden Kreise (§ 50 a); dieselben berühren sich also und zwar von innen.

c) Aus $r - r_1 < c < r + r_1$ folgt zunächst $r < c + r_1$ oder $r < OC$, d. h. C liegt außerhalb des Kreises K. Ferner erhält man $r > c - r_1$ oder $r > OB$, wenn $c > r_1$ ist. Ist $c = r_1$, so ist also $r > 0$ und wegen $OB = 0$ auch $r > OB$. Ist endlich $c < r_1$, so folgt wegen $r > r_1$ umsomehr auch $r > r_1 - c$ oder $r > OB$. In jedem dieser drei Fälle liegt also B innerhalb des Kreises K. Bewegt sich also ein Punkt längs K_1 von B aus, so muss er die Kreislinie K in einem Punkte beim Heraustreten und in einem anderen Punkte beim Wiedereintreten durchschneiden. Diese beiden Punkte sind den Kreislinien K und K_1 gemeinschaftlich und heißen ihre Durchschnittspunkte oder Schnittpunkte. Mehr als zwei Punkte können die Kreislinien nicht gemeinschaftlich haben, ohne vollständig zusammenzufallen.

d) Aus $c = r + r_1$ folgt $r = c - r_1$ und $c > r_1$. Es ist also $r = OB$, d. h. B gehört der Kreislinie K an, während jeder andere Punkt von K_1 außerhalb K liegt. Die zur Centrale im Punkte B errichtete Normale ist Tangente der beiden Kreise; dieselben berühren sich also und zwar von außen.

e) Aus $c > r + r_1$ folgt $r < c - r_1$ und $c > r_1$. Es ist also $r < OB$, d. h. B und somit auch jeder andere Punkt von K_1 liegt außerhalb K. Die beiden Kreise haben also keinen Punkt gemeinschaftlich und schließen einander aus.

Zusätze. 1. Die Umkehrungen der vorausgehenden fünf Sätze sind ebenfalls richtig und können indirect bewiesen werden.

2. Für $r = r_1$ können die Fälle *a)* und *b)* nicht eintreten.

3. Wenn zwei Kreise sich schneiden, so liegen die Schnittpunkte symmetrisch bezüglich der Centrale.

4. Wenn zwei Kreise nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, so liegt derselbe in der Centrale.

Die letzten zwei Sätze ergeben sich aus der Bemerkung, dass jede aus zwei Kreisen bestehende Figur in Bezug auf die Centrale symmetrisch ist.

§ 53. **Kreis und Dreieck.** Ein Vieleck, dessen Eckpunkte in einer Kreislinie liegen, dessen Seiten also Sehnen sind, heißt ein Sehnenvieleck. Man sagt auch in diesem Falle, das Vieleck sei dem Kreise eingeschrieben oder der Kreis dem Vielecke umgeschrieben. Wenn die Seiten eines Vieleckes Tangenten eines Kreises sind, so nennt man es ein Tangentenvieleck oder sagt auch, das Vieleck sei dem Kreise umgeschrieben oder der Kreis dem Vielecke eingeschrieben.

Jedem Dreiecke lässt sich ein Kreis einschreiben und ein Kreis umschreiben (§ 38 c und § 37 c).

Zusätze. 1. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises zugleich der Halbierungspunkt der Hypotenuse; beim spitzwinkligen Dreiecke liegt er innerhalb und beim stumpfwinkligen Dreiecke außerhalb desselben.

Ist nämlich (Fig. 19) $\sphericalangle\, ACB = R$, so ist $\sphericalangle\, AOB = 2R$ (§ 51); aus $\sphericalangle\, ACB < R$ folgt $AOB < 2R$, u. s. f.

2. Jedem Dreiecke lassen sich drei Kreise anschreiben; d. h. es gibt drei Kreise, von denen jeder von einer Dreiecksseite und den Verlängerungen der beiden anderen berührt wird (§ 38 *d*).

Constructionsaufgaben.

§ 54. Erklärungen. Da alle Figuren der Planimetrie aus Geraden und Kreisen bestehen oder durch diese Linien bestimmt werden, so lassen sich die planimetrischen Constructionsaufgaben auf folgende zwei zurückführen:

a) Eine Gerade durch zwei gegebene Punkte zu ziehen;

b) einen Kreis von einem gegebenen Punkte als Centrum mit einer gegebenen Strecke als Radius zu construieren.

Diese beiden Aufgaben, welche mit dem Lineal beziehungsweise Zirkel ausgeführt werden, heißen Postulate oder Forderungssätze, weil sie sich nicht auf einfachere Aufgaben zurückführen lassen. Eine Construction heißt geometrisch, wenn zu ihrer Ausführung nur die genannten zwei Hilfsmittel, und mechanisch, wenn außerdem Maßstäbe, Transporteure, Reißschienen, u. s. w. verwendet werden.

Eine geometrische Constructionsaufgabe heißt je nach der Anzahl und Art der vorgeschriebenen Bedingungen, unbestimmt bestimmt oder überbestimmt sie hat im ersten Falle unendlich viele Auflösungen (Resultate der Construction); im zweiten eine bestimmte (im allgemeinen endliche) Anzahl von Auflösungen und im dritten in der Regel keine Auflösung. Als Beispiel diene die Aufgabe, eine Kreislinie durch zwei, drei oder vier gegebene Punkte zu ziehen. Eine bestimmte Aufgabe heißt eindeutig, zweideutig, ... n-deutig, wenn sie eine Auflösung, zwei, ...n Auflösungen zuläßt. Unmöglich heißt eine Aufgabe, wenn die gestellten Bedingungen den Eigenschaften der verlangten Figur widersprechen; wenn z. B. ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln construiert werden soll.

§ 55. Allgemeine Anleitung. Punkte werden mittelst des Durchschnittes zweier Geraden, einer Geraden und eines Kreises oder zweier Kreise construiert. Die Lage einer Geraden ist durch zwei ihrer Punkte, die Lage und die Größe einer Strecke durch die beiden Endpunkte, die Lage und die Größe eines Kreises durch den Mittelpunkt und die Länge des Radius bestimmt.

Complicierte Aufgaben erfordern ein weitläufigeres Verfahren, welches meistens in vier Theile: die Analysis, die Construction, den Beweis und die Determination zerlegt wird.

Unter der **Analysis** versteht man das Aufsuchen solcher Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Theilen einer Figur, durch welche die Construction der letzteren ermöglicht wird. Zu diesem Zwecke zeichnet man in der Regel eine beliebige Figur, welche in der Anordnung der Bestandtheile mit der gesuchten Figur übereinstimmt, und leitet mittelst passender Lehrsätze, Hilfslinien u. s. w. die zur Construction geeigneten Beziehungen ab. Daran schließt sich die durch die Analysis vorbereitete **Construction**. Durch den **Beweis** wird dargethan, dass die erhaltene Figur den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Die **Determination** besteht in der Angabe der Bedingungen, unter welchen die Aufgabe überhaupt möglich, bestimmt oder unbestimmt, ein-, zwei- oder mehrdeutig ist.

§ 56. Construction von Punkten (durch geometrische Oerter). *a)* Einen Punkt zu construieren, welcher von einem gegebenen Punkte A einen gegebenen Abstand a hat.

Diese Aufgabe ist unbestimmt, weil alle Punkte der Kreislinie mit dem Centrum A und dem Radius a derselben entsprechen. Die Construction dieser Kreislinie bedarf keiner weiteren Erklärung.

b) In einer gegebenen Geraden g einen Punkt zu construieren, welcher von einem gegebenen Punkte A den gegebenen Abstand a hat.

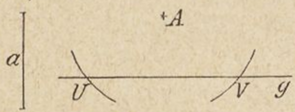


Fig. 36.

Analysis: Der gesuchte Punkt muss sowohl in der Geraden g als auch in der Kreislinie mit dem Centrum A und dem Radius a liegen. Daraus folgt unmittelbar die Construction und der Beweis.

Determination: Die Aufgabe ist unmöglich, eindeutig oder zweideutig, je nachdem die Strecke a kleiner, ebenso groß oder größer ist als der Abstand des Punktes A von der Geraden g.

c) Einen Punkt zu construieren, welcher von zwei gegebenen Punkten A und B den gleichen Abstand a hat.

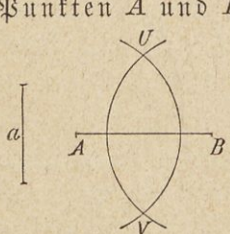


Fig. 37.

Analysis: Der gesuchte Punkt muss sowohl in der Kreislinie mit dem Centrum A und dem Radius a, als auch in der Kreislinie mit dem Centrum B und dem Radius a liegen. Die gemeinsamen Punkte der beiden Kreise entsprechen also der gestellten Aufgabe.

Determination: Die Aufgabe ist unmöglich, eindeutig oder zweideutig, je nachdem a kleiner, ebenso groß oder größer ist als die Hälfte von AB.

d) Einen Punkt zu construieren, welcher vom Punkte A den Abstand a und vom Punkte B den Abstand b hat.

e) Einen Punkt zu construieren, welcher zum Punkte A in Bezug auf die Gerade GH symmetrisch liegt.

Analysis: Der gesuchte Punkt U hat von jedem Punkte der Symmetrale GH denselben Abstand wie der Punkt A. Daraus ergibt sich die aus der Figur ersichtliche Construction. Die Aufgabe ist eindeutig bestimmt.

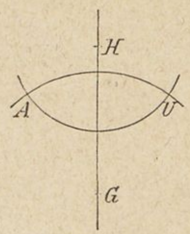


Fig. 38.

§ 57. Aufgaben über Strecken und Normalen. *a)* Auf einer Geraden g von einem Punkte A derselben die Strecke a abzuschneiden.

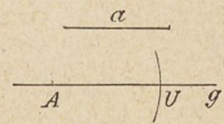


Fig. 39.

Diese Aufgabe, welche als ein specieller Fall der Aufgabe *b)* im § 56 betrachtet werden kann, ist zweideutig. Um sie zu einer eindeutigen zu machen, muss im voraus angegeben werden, auf welcher Seite von A der zweite Endpunkt U liegen soll.

b) Die Symmetrale einer Strecke AB zu construieren.

Man construiere zwei Punkte U und V (Fig. 37), welche von A und B gleiche Abstände haben. Die Gerade UV ist die gesuchte Symmetrale.

c) Eine gegebene Strecke zu halbieren (Aufg. *b*).

d) Durch den Punkt A zur Geraden g die Normale zu ziehen.

1. Der Punkt A liege außerhalb der Geraden g.

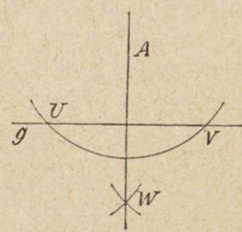


Fig. 40.

Erste Construction. Man bestimme in g zwei Punkte U und V (Fig. 40), welche von A gleiche Abstände haben, und construiere hierauf einen Punkt W, dessen Abstände von U und V ebenfalls gleich sind.

Zweite Construction. Man bestimme jenen Punkt U, welcher zu A in Bezug auf die gegebene Gerade symmetrisch liegt (Fig 38). AU ist die gesuchte Normale.

2. Der Punkt A liege in der gegebenen Geraden.

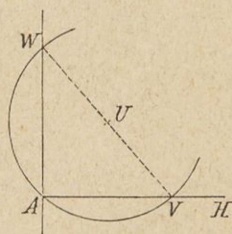


Fig. 41.

Erste Construction wie im vorausgehenden Falle.

Zweite Construction. Man beschreibe um einen Punkt U außerhalb der gegebenen Geraden AH (Fig. 41) mit dem Radius UA einen Kreis, welcher die Gerade zum zweitenmal in einem Punkte V schneidet. Der Gegenpunkt W des letzteren bestimmt mit A die gesuchte Normale, denn VAW ist ein Winkel im Halbkreise. Diese Construction ist insbesonders dann anzuwenden, wenn der Halbstrahl AH über A hinaus nicht verlängert werden kann. Man hat dann den Punkt U so zu wählen, dass seine Normalprojection auf AH in diesen Halbstrahl und nicht in seine Ergänzung fällt.

§ 58. Aufgaben über Winkel und Parallele. *a)* Einen gegebenen Winkel α so zu übertragen, dass ein Schenkel desselben mit einem gegebenen Halbstrahle DX zusammenfällt.

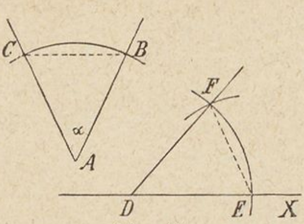


Fig. 42.

Analysis: Es sei α der gegebene und EDF der gesuchte Winkel. Beschreibt man um die Scheitel A und D mit demselben Radius die Kreisbogen BC und EF, so sind nach § 49 die Sehnen BC und EF gleich; daher ist die Construction des Punktes F auf die Aufgabe § 56 d zurückgeführt. — Determination wie in § 57 a.

b) Durch den Punkt A zur Geraden GH die Parallele zu ziehen.

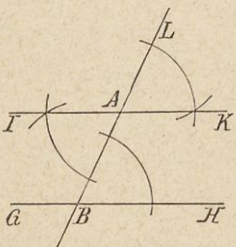


Fig. 43.

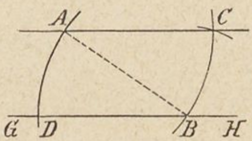


Fig. 44.

Man ziehe eine Gerade durch A und einen Punkt B der Geraden GH und übertrage den Winkel ABH in die Lage BAI oder LAK (Fig. 43). Dann ist $IK \parallel GH$. — Man erspart sich das Ziehen der Geraden AB, wenn man die Construction entsprechend der Figur 44 ausführt.

c) Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Die Construction ergibt sich aus der Überlegung, dass die Symmetrale der Strecke BC (Fig. 42) auch den Winkel α halbiert (§ 30).

§ 59. Aufgaben über Dreiecke. Ein Dreieck zu construieren, wenn drei Umfangsstücke desselben gegeben sind.

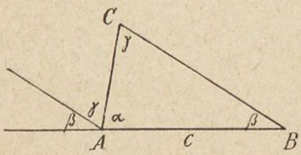


Fig. 45.

Sind z. B. die Seite c, der anliegende Winkel β und der gegenüberliegende Winkel γ gegeben (Fig. 45), so beachte man, dass der dritte Winkel α zur Winkelsumme $\beta + \gamma$ supplementär ist.

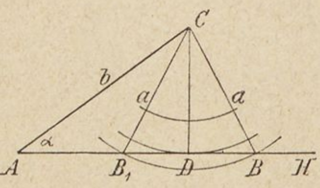


Fig. 46.

Sind die Seiten a und b, ferner der Gegenwinkel α der ersteren gegeben, so mache man (Fig. 46) $\sphericalangle HAC = \alpha$, $AC = b$ und bestimme die gemeinsamen Punkte des Halbstrahles AH und des Kreisbogens, welcher von C als Centrum mit dem Radius a beschrieben wird.

Determination: Wenn $a > b$ ist, so schneidet der Kreisbogen den Halbstrahl AH nur in einem Punkte, die Aufgabe ist also eindeutig. Für $a \leqq b$ ist die Aufgabe unmöglich, wenn $a \geqq R$ ist. Für $a < R$ und $a = b$ ist die Aufgabe eindeutig; für $a < R$ und $a < b$ ist sie unmöglich, eindeutig oder zweideutig, je nachdem a kleiner, ebenso groß oder größer ist als der Abstand des Punktes C vom Halbstrahle AH.

§ 60. Aufgaben über Kreise und Tangenten. *a)* Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis umzuschreiben oder: Einen Kreis zu construieren, welcher durch drei gegebene Punkte geht (§ 53).

b) Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis einzuschreiben (§ 53).

c) Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis anzuschreiben (§ 53).

d) Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises oder Kreisbogens zu construieren. — Man bestimme den Schnittpunkt der Symmetralen zweier nicht paralleler Sehnen.

e) Einen gegebenen Kreisbogen zu übertragen (§ 49).

f) Einen gegebenen Kreisbogen zu halbieren (§ 49).

g) Den Umfang eines gegebenen Kreises in 2, 4, 8, . . . 2^n gleiche Theile zu theilen.

h) Den Umfang eines gegebenen Kreises in 6 gleiche Theile zu theilen.

Analysis: Verbindet man zwei benachbarte Theilungspunkte A und B mit dem Mittelpunkte O, so ist $\sphericalangle AOB = 60^0$, somit das Dreieck AOB gleichseitig. Hieraus ergibt sich sofort die Construction.

Damit ist auch die Aufgabe gelöst, die Kreisperipherie in 3 gleiche Theile zu theilen.

i) Den Umfang eines gegebenen Kreises in $12 = 3.4$, $24 = 3.8$, . . . 3.2^n gleiche Theile zu theilen.

k) Durch einen gegebenen Punkt einer Kreislinie die Tangente an dieselbe zu ziehen (§ 50).

l) Durch einen Punkt A außerhalb eines Kreises Tangenten an denselben zu ziehen.

Analysis: Da das Dreieck ABO (Fig. 31) bei B rechtwinklig ist, so liegt B in der Peripherie des Kreises, welcher über OA als Durchmesser beschrieben wird (§ 51 *c*). Daraus ergibt sich die Construction und der Beweis. Die Aufgabe ist offenbar stets zweideutig, d. h. also: Von jedem Punkte außerhalb eines Kreises lassen sich zwei Tangenten an denselben ziehen.

m) Über einer gegebenen Strecke als Sehne einen Kreisabschnitt zu construieren, in welchem alle zu jener Sehne gehörigen Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel gleich sind.

Es sei $BAT = \alpha$ der gegebene Winkel und AB die gegebene Sehne. Man errichte im Punkte A die Normale zu AT und durchschneide dieselbe durch die Symmetrale der Strecke AB. Wenn nun der Kreis mit O als Centrum und OA als Radius beschrieben wird, so entspricht der Kreisabschnitt ACB der gestellten Aufgabe (§ 51 *a*, 1. Folgesatz).

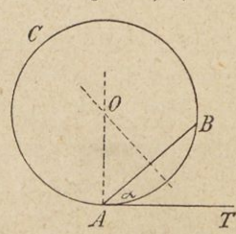


Fig. 47.

Das Viereck.

§ 61. Erklärungen und Lehrsätze. Jeder Seite eines Viereckes entspricht eine gegenüberliegende Seite oder Gegenseite und jedem Winkel ein gegenüberliegender Winkel oder Gegenwinkel.

Jedes Viereck hat zwei Diagonalen. Ist es convex, so wird es durch jede Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt. Im Nachfolgenden werden nur convexe Vierecke betrachtet.

Die Summe der Winkel eines jeden Viereckes beträgt vier Rechte.

Beweis. Zerlegt man das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so ist die Summe der Viereckswinkel gleich der Summe der sechs Dreieckswinkel, also gleich $4R$.

§ 62. Eintheilung der Vierecke. Die Vierecke werden mit Rücksicht auf die gegenseitige Lage ihrer Seiten in Parallelogramme, Trapeze und Trapezoide eingetheilt. Das Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei Gegenseiten parallel sind. Das Trapez ist ein Viereck, in welchem zwei Gegenseiten parallel sind, die beiden anderen hingegen nicht. Die ersteren heißen Parallelseiten und die letzteren Schenkel des Trapezes. Das Trapezoid ist ein Viereck, in welchem keine Seite zu ihrer Gegenseite parallel ist. Von den Trapezoiden wird dasjenige, dessen Umfang aus zwei Paaren gleicher Nachbarseiten besteht, ein Deltoid genannt.

§ 63. Das Parallelogramm. In jedem Parallelogramme sind

a) je zwei Gegenwinkel gleich und

b) je zwei Gegenseiten gleich.

c) Jede Diagonale zerlegt dasselbe in zwei direct congruente Dreiecke.

d) Die beiden Diagonalen halbieren einander.

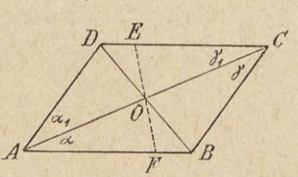


Fig. 48.

Beweise. *a)* Die Schenkel je zweier Gegenwinkel sind invers parallel.

b) Aus $AC = AC$, $\alpha = \gamma_1$ und $\alpha_1 = \gamma$ folgt: $\triangle ABC \cong CDA$. Daher ist $AB = CD$ und $BC = DA$.

c) Die homologen Umfangsstücke der congruenten Dreiecke ABC und CDA folgen in gleichem Sinne aufeinander. Die beiden Dreiecke sind daher direct congruent, u. zw. liegen dieselben symmetrisch in Bezug auf den Halbierungspunkt O der Diagonale AC.

d) Folgt aus der Congruenz der Dreiecke ABO und CDO, wenn der Schnittpunkt der beiden Diagonalen mit O bezeichnet wird.

Folgesätze. 1. Jedes Parallelogramm ist eine centrisch-symmetrische Figur, u. zw. ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen das Symmetriecentrum.

2. Jede Strecke, welche zwei Punkte des Umfanges verbindet und durch das Centrum O geht (Durchmesser des Parallelogrammes, z. B. EF in Fig. 48), wird in O halbiert.

3. Parallele Strecken, deren Endpunkte in parallelen Geraden liegen, sind einander gleich.

4. Wenn zwei Gerade parallel sind, so haben alle Punkte der einen von der anderen gleichen Abstand. Derselbe heißt daher Abstand der Parallelen.

5. Der geometrische Ort aller Punkte, welche auf derselben Seite einer Geraden in gleichem Abstande von derselben liegen, ist eine Parallele zur gegebenen Geraden.

6. Sind in einem Parallelogramme zwei Nachbarwinkel gleich, so sind alle Winkel gleich, also ist jeder ein Rechter. Das Parallelogramm wird dann ein rechtwinkliges genannt.

7. Sind in einem Parallelogramme zwei Nachbarseiten gleich, so sind alle Seiten gleich, und es heißt ein gleichseitiges Parallelogramm.

Zusatz. Im Parallelogramme kann irgend eine Seite als Grundlinie bezeichnet werden; dann heißt der Abstand derselben von der Gegenseite die Höhe des Parallelogrammes.

§ 64. Fortsetzung: Umkehrungssätze. Jedes Viereck ist ein Parallelogramm,

a) wenn in demselben je zwei Gegenwinkel gleich sind, oder

b) wenn je zwei Gegenseiten gleich sind, oder

c) wenn es durch jede Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird, oder

d) wenn seine Diagonalen sich gegenseitig halbieren.

Beweise. *a)* Aus $A + B + C + D = 4R$, ferner $A = C$ und $B = D$ folgt $2A + 2B = 4R$ oder $A + B = 2R$, daher ist $AD \parallel BC$. Ebenso findet man $A + D = 2R$ und daraus $AB \parallel DC$.

b) Aus $AB = DC$ und $AD = BC$ folgt $\triangle ABC \cong CDA$. Es ist also $\alpha = \gamma_1$ und $\alpha_1 = \gamma$, daher $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$.

c) Sind die Dreiecke ABC und CDA congruent, so müssen der gemeinschaftlichen Seite AC gleiche Winkel gegenüberliegen. Es ist also $B = D$ ebenso findet man $A = C$.

d) Es sei O der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD, ferner $AO = OC$ und $BO = OD$. Daraus folgt $\triangle ABO \cong CDO$, somit $AB = DC$. Ebenso findet man $\triangle BCO \cong DAO$, also $BC = AD$.

Zusatz. Da jeder Lehrsatz des § 63 zwei Voraussetzungen ($AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$) und zwei Behauptungen enthält, so findet man noch mehrere giltige Umkehrungen. Insbesonders ist anzuführen:

e) Wenn in einem Vierecke zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Aus $AB = DC$ und $AB \parallel DC$ folgt nämlich $\triangle ABC \cong CDA$. Daher ist auch $BC = AD$.

§ 65. **Eintheilung der Parallelogramme.** Die Parallelogramme werden mit Rücksicht auf die Winkel in rechtwinklige und schiefwinklige und mit Rücksicht auf die Seiten in gleichseitige und ungleichseitige eingetheilt. Hieraus ergeben sich die folgenden vier Arten von Parallelogrammen: 1. Das rechtwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder das Quadrat, 2. das rechtwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rechteck, 3. das schiefwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder der Rhombus und 4. das schiefwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid.

§ 66. **Das rechtwinklige Parallelogramm.** *a)* Die beiden Diagonalen sind einander gleich.

b) Die Symmetrale einer jeden Seite ist auch die Symmetrale der Gegenseite.

c) Die Symmetrale einer jeden Seite ist auch Symmetrale des rechtwinkligen Parallelogrammes.

d) Das rechtwinklige Parallelogramm ist ein Sehnenviereck, u. zw. ist der Schnittpunkt der Diagonalen das Centrum des umgeschriebenen Kreises.

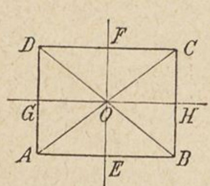


Fig. 49.

Beweise. *a)* Es ist $\triangle ABC \cong BAD$, somit $AC = BD$.

b) und *c)* Man construiere die Symmetrale EF der Seite AB und klappe das Viereck $EBCF$ um EF als Achse um. Dann fällt B auf A, BC auf AD, weil $\sphericalangle A = B$ ist, und C auf D, weil $BC = AD$ ist. Daher ist EF die Symmetrale der Seite CD und zugleich Symmetrale von $ABCD$.

d) Da $AC = BD$ ist, so ist auch $AO = BO = CO = DO$.

Zusatz. Das rechtwinklige Parallelogramm ist symmetrisch in Bezug auf zwei zu einander normale Achsen.

§ 67. **Das gleichseitige Parallelogramm.** Jede Diagonale ist eine Symmetrale

a) der anderen Diagonale,

b) der beiden Winkel, welche sie durchschneidet und

c) des gleichseitigen Parallelogrammes.

d) Das gleichseitige Parallelogramm ist ein Tangentenviereck, u. zw. ist der Schnittpunkt der Diagonalen das Centrum des eingeschriebenen Kreises.

Beweise. *a)* Ergibt sich aus dem 2. Folgesatze im § 37.

b) und *c)* Wenn das Dreieck BCD um BD als Achse umgeklappt wird, so fallen nach *a)* die Punkte A und C zusammen; daher ist $\sphericalangle ADB = BDC$ u. s. f.

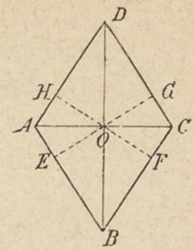


Fig. 50.

d) Da der Schnittpunkt O der Diagonalen den Symmetralen aller vier Winkel angehört, so hat er von allen vier Seiten gleichen Abstand.

Zusätze. 1. Das gleichseitige Parallelogramm ist symmetrisch in Bezug auf zwei zu einander normale Achsen.

2. Das Quadrat hat vier Symmetrieachsen, von denen zwei benachbarte den Winkel von 45° einschließen.

§ 68. Anwendungen. *a)* Trägt man auf einer Geraden mehrere gleiche und aneinanderstoßende Strecken auf und zieht durch die Theilungspunkte parallele Gerade, so schneiden diese auf jeder zu ihnen nicht parallelen Geraden gleiche Strecken ab.

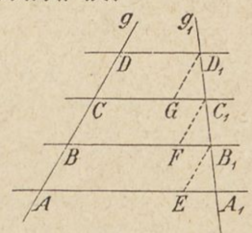


Fig. 51.

Beweis. Sind die gegebenen Geraden g und g_1 parallel, so folgt die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus § 63 *b*. — Sind jedoch g und g_1 nicht parallel, und ist $AB = BC = CD \ldots$, ferner $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1 \ldots$, so ziehe man $B_1E \parallel C_1F \parallel D_1G \ldots \parallel g$. Dann sind die Dreiecke EA_1B_1, FB_1C_1, $GC_1D_1, \ldots$ congruent, also ist $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 \ldots$

Zusatz. Der vorausgehende Lehrsatz bleibt auch dann richtig, wenn der Schnittpunkt der Geraden g und g_1 zwischen den Punkten A und B oder B und $C \ldots$ liegt oder mit einem derselben zusammenfällt.

b) Die drei Höhen eines jeden Dreieckes schneiden sich in einem einzigen Punkte.

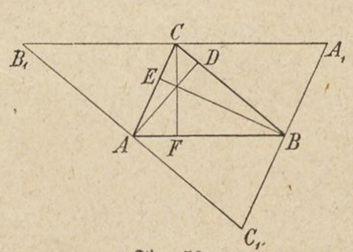


Fig. 52.

Beweis. Ist ABC das gegebene Dreieck, so ziehe man durch die Eckpunkte die Parallelen zu den Gegenseiten, also $A_1B_1 \parallel BA$, $B_1C_1 \parallel CB$ und $C_1A_1 \parallel AC$. Dann ist $B_1A = CB = AC_1$; d. h. A ist der Halbierungspunkt der Strecke B_1C_1. Ebenso beweist man, dass B und C die Halbierungspunkte der Strecken C_1A_1 und A_1B_1 sind. Zieht man also die Höhen AD, BE und CF des Dreieckes ABC, so sind dieselben zugleich die Seitensymmetralen des Dreieckes $A_1B_1C_1$ und schneiden sich daher in einem einzigen Punkte. Ebendieselbe Begründung ist auch auf ein stumpfwinkliges Dreieck anwendbar, während die Richtigkeit des Lehrsatzes für das rechtwinklige Dreieck sofort einleuchtet.

Erklärung. Die Verbindungsstrecke des Halbierungspunktes einer Dreiecksseite mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte wird eine Schwerlinie des Dreieckes genannt.

c) Die drei Schwerlinien eines jeden Dreieckes schneiden sich in einem einzigen Punkte, welcher der Schwerpunkt des Dreieckes heißt.

d) Der Schwerpunkt theilt jede Schwerlinie so, dass der am Eckpunkte liegende Abschnitt doppelt so groß ist als der andere.

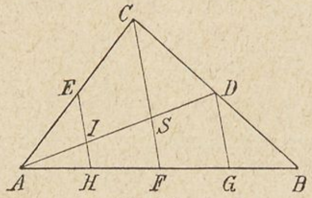


Fig. 53.

Beweise. *c)* Es seien AD und CF zwei Schwerlinien des Dreieckes ABC; S sei der Schnittpunkt derselben und E der Halbierungspunkt der Seite AC. Zieht man $DG \parallel CF$ und $EH \parallel CF$, so wird AB in den Punkten H, F, G in vier und daher AD in den Punkten I und S in drei gleiche Theile getheilt (§ 68 *a*). Hieraus folgt $SD = AD : 3$. Durch einen analogen Vorgang beweist man, dass AD von der Schwerlinie BE in einem Punkte S_1 geschnitten wird, für welchen $S_1D = AD : 3$ ist. Also ist $SD = S_1D$, d. h. die Punkte S und S_1 fallen zusammen.

d) Aus dem vorausgehenden Beweise folgt $AS = 2\,SD$, ebenso $BS = 2\,SE$ und $CS = 2\,SF$.

Zusatz. Unter den merkwürdigen Punkten eines Dreieckes versteht man jene vier Punkte, in welchen sich 1. die Seitensymmetralen, 2. die Winkelsymmetralen, 3. die Höhen und 4. die Schwerlinien des Dreieckes schneiden. Im gleichseitigen Dreiecke fallen diese vier Punkte zusammen.

§ 69. Das Trapez. Im Trapeze kann man jede der beiden Parallelseiten als Grundlinie betrachten. Der Abstand der beiden Parallelseiten heißt die Höhe des Trapezes.

Sind die beiden Schenkel eines Trapezes gleich, so heißt es ein gleichschenkliges Trapez (auch Antiparallelogramm).

Unter der Mittellinie eines Trapezes versteht man die Verbindungsstrecke der Halbierungspunkte seiner Schenkel.

§ 70. Die Mittellinie des Trapezes. *a)* Zieht man in einem Trapeze durch die Mitte eines Schenkels die Parallele zu den Parallelseiten, so theilt dieselbe den anderen Schenkel in zwei gleiche Theile.

b) Die Mittellinie eines Trapezes ist zu den Parallelseiten parallel (Umkehrungssatz zu *a*).

c) Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Parallelseiten.

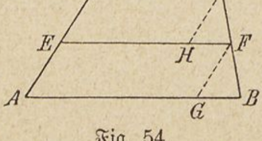


Fig. 54.

Beweise. *a)* Folgt aus § 68 *a*.

b) Lässt sich indirect beweisen.

c) Es sei EF die Mittellinie, ferner $CH \parallel DA$ und $FG \parallel DA$. Dann ist $\triangle GBF \cong HFC$, also $GB = HF$. Mit Rücksicht darauf erhält man

$$EF = AG \quad = \quad AB - GB,$$
$$EF = EH + HF = DC + HF$$
$$2\,EF \quad = \quad AB + DC \text{ und } EF = \frac{1}{2}(AB + DC).$$

Wie lauten die entsprechenden Lehrsätze für das Dreieck?

§ 71. **Das gleichschenklige Trapez.** *a)* Die beiden Winkel an jeder Parallelseite sind einander gleich.

b) Die Symmetrale der einen Parallelseite ist auch die Symmetrale der anderen.

c) Die Symmetrale einer Parallelseite ist auch die Symmetrale des gleichschenkligen Trapezes.

d) Das gleichschenklige Trapez ist ein Sehnenviereck.

Beweise. *a)* Ist $AB \parallel DC$ und $AD = BC$, so ziehe man $CE \parallel DA$. Es ist dann $AD = EC$, also auch $EC = BC$. Hieraus folgt $\alpha_1 = \beta$ und wegen $\alpha_1 = \alpha$ auch $\alpha = \beta$.

Da ferner die Winkel an der zweiten Parallelseite DC zu den gleichen Winkeln α und β supplementär sind, so sind sie ebenfalls gleich.

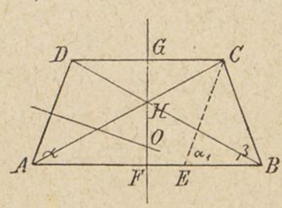


Fig. 55.

b) und *c)*. Ebenso wie die entsprechenden Sätze im § 66 zu beweisen.

d) Ist O der Schnittpunkt der Symmetrale FG mit der Symmetrale von AD, so ist $AO = BO$, $CO = DO$ und $AO = DO$. O ist also der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises.

§ 72. **Das Deltoid.** Jene Diagonale, in deren Endpunkten die einander gleichen Seiten zusammenstoßen, ist die Symmetrale

a) der zweiten Diagonale,

b) der beiden Winkel, welche sie durchschneidet und

c) des Deltoides selbst.

d) Das Deltoid ist ein Tangentenviereck.

Beweise. *a), b)* und *c)* wie im § 67.

d) Ist O der Schnittpunkt der Symmetrale BD mit der Symmetrale des Winkels A, so hat O von allen Seiten des Deltoides gleichen Abstand und ist also der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

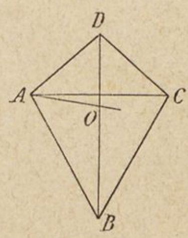


Fig. 56.

Zusatz. Das Deltoid wird durch die Symmetrale in zwei invers congruente Dreiecke zerlegt.

§ 73. **Das Sehnenviereck.** *a)* In jedem Sehnenvierecke sind je zwei Gegenwinkel supplementär.

b) Wenn in einem Vierecke zwei Gegenwinkel (und daher auch die beiden anderen) supplementär sind, so ist es ein Sehnenviereck.

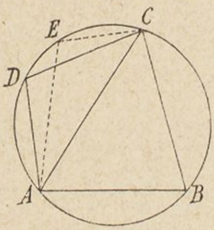


Fig. 57.

Beweise. *a)* S. § 51*a*, 3. Folgesatz.

b) Es sei $ABCD$ das gegebene Viereck und $B + D = 2R$. Construiert man den durch A, B und C bestimmten Kreis und zieht von irgend einem Punkte E jenes Kreisbogens AC, welcher B nicht enthält, die Sehnen EA und EC, so ist nach dem vorausgehenden Satze $B + E = 2R$, also $D = E$. Somit liegt auch D in dem Kreisbogen AEC (§ 51*b*).

§ 74. **Das Tangentenviereck.** *a)* In jedem Tangentenvierecke ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen.

b) Ist in einem Vierecke die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen, so ist es ein Tangentenviereck.

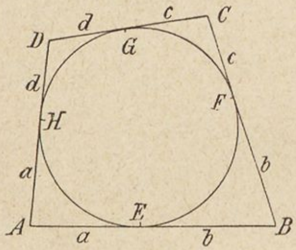


Fig. 58.

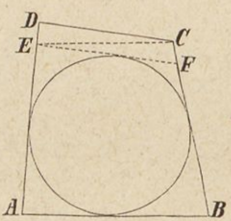


Fig. 59.

Beweise. *a)* Bezeichnet man die gleichen Tangentenabschnitte AE und AH mit a (Fig. 58), BE und BF mit b u. s. f., so findet man

$$AB + DC = a + b + c + d = AD + BC.$$

b) Es sei $ABCD$ (Fig. 59) das gegebene Viereck und $AB + DC = AD + BC$. Nach § 38*a* lässt sich stets ein Kreis construieren, welcher drei Seiten, z. B. AB, BC und AD berührt. Wenn nun dieser Kreis die vierte Seite CD nicht berühren würde, so könnte man die zu CD parallele Tangente EF ziehen und hätte nach dem vorausgehenden Lehrsatze $AB + EF = AE + BF$. Subtrahiert man diese Gleichung von jener, welche die Voraussetzung ausdrückt, so folgt $DC - EF = ED + FC$ und $DC = ED + FC + EF$. Diese Gleichung kann jedoch nicht bestehen; denn man hat $DC < ED + EC$, $EC < FC + EF$, also $DC < ED + FC + EF$. Ebenso gestaltet sich der Beweis, wenn die Tangente EF die Verlängerungen der Seiten AD und BC schneidet.

Constructionsaufgaben.

§ 75. **Allgemeine Anleitung.** Zur Bestimmung eines jeden Parallelogrammes genügt eines der beiden Dreiecke, in welche es durch eine Diagonale, oder eines der vier Dreiecke, in welche es durch beide Diagonalen zerlegt wird. Man erkennt daraus, dass dem Parallelogramme im allgemeinen drei Bestimmungsstücke entsprechen. In speciellen Fällen reduciert sich die Anzahl derselben auf zwei (beim Rechtecke und beim Rhombus) oder auf eins (beim Quadrate).

Da jedes Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt wird, welche in einer Seite und einem Winkel übereinstimmen, so entsprechen also dem Trapeze im allgemeinen vier Bestimmungsstücke. Die Anzahl derselben reduciert sich auf drei, wenn das Trapez gleichschenklig ist. Die Construction eines Trapezes gelingt häufig dadurch, dass man sich dasselbe in ein Dreieck und ein Parallelogramm zerlegt denkt (Fig. 55) und diese beiden Figuren nacheinander construiert.

Jedes Trapezoid wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke mit einer gemeinschaftlichen Seite zerlegt und hat somit im allgemeinen fünf Bestimmungsstücke. Die Construction gelingt meistens dadurch, dass die beiden Dreiecke nacheinander construiert werden. Dem Deltoide entsprechen drei Bestimmungsstücke.

§ 76. Aufgabe. Eine gegebene Strecke AB in n gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe durch A einen Halbstrahl AM und trage auf demselben von A aus n aneinanderstoßende gleiche Strecken auf. Verbindet man den Endpunkt G der letzten Strecke mit B und zieht durch die übrigen Theilungspunkte Parallele zu GB, so zerlegen dieselben die gegebene Strecke in n gleiche Theile.

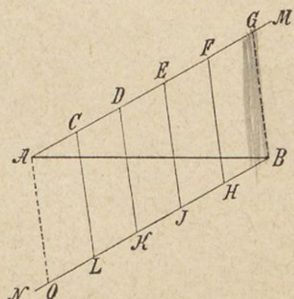


Fig. 60.

Die Construction wird dadurch vereinfacht, dass man die invers parallelen Halbstrahlen AM und BN zieht und auf denselben von A und B aus dieselbe Strecke je $n$mal aufträgt. Die Verbindungslinien CL, DK, EJ, . . . theilen AB in n gleiche Theile.

Das Vieleck.

§ 77. Lehrsätze über die Diagonalen. *a)* Von jedem Eckpunkte eines n-Eckes lassen sich $n-3$ Diagonalen ziehen.

b) Die Anzahl der Diagonalen eines n-Eckes ist $\frac{n(n-3)}{2}$.

c) Jedes convexe n-Eck lässt sich durch Diagonalen, welche von einem Eckpunkte ausgehen, in $n-2$ Dreiecke zerlegen.

Beweise. *a)* Von jedem Eckpunkte eines n-Eckes aus können $n-1$ Verbindungsstrecken zu den übrigen $n-1$ Eckpunkten gezogen werden. Von diesen Strecken sind jene, welche man zu den beiden Nachbarecken gezogen hat, Seiten des Polygones, also die übrigen $n-3$ Diagonalen.

b) Allen n Eckpunkten entsprechen $n\,(n-3)$ Diagonalen. Dabei wird jedoch jede Diagonale zweimal gezählt, nämlich an jedem ihrer Endpunkte; daher ist $\frac{n\,(n-3)}{2}$ die Anzahl der Diagonalen.

c) Das convexe Polygon $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ wird durch die Diagonale $A_1 A_3$ in das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ und das convexe $(n-1)$-Eck $A_1 A_3 A_4 \ldots A_n$ zerlegt. Ebenso wird durch die Diagonalen $A_1 A_4$, $A_1 A_5 \ldots A_1 A_{n-1}$ je ein Dreieck abgeschnitten, und es bleibt schließlich noch das Dreieck $A_1 A_{n-1} A_n$ übrig. Somit ist die Anzahl der erhaltenen Dreiecke um 1 größer als die Anzahl der Diagonalen, also $= n-2$.

§ 78. Lehrsätze über die Winkel. Die Summe aller Winkel eines convexen n-Eckes ist gleich $n-2$ gestreckten Winkeln, also $= (n-2) 2R$.

Beweis. Man zerlege das Polygon durch Diagonalen von einem Eckpunkte aus in $n-2$ Dreiecke und beachte, dass die Summe der Dreieckswinkel gleich ist der Summe der Polygonswinkel.

Zusatz. Man kann diesen Lehrsatz auch für ein Polygon mit erhabenen Winkeln beweisen, indem man dasselbe durch passend gewählte Diagonalen in convexe Polygone zerlegt. Ausgeschlossen sind jene nur selten betrachteten Polygone, deren Umfang keine zusammenhängende Linie bildet (wenn z. B. ein Quadrat aus einem größeren Quadrate ausgeschnitten wird) oder sich selbst durchschneidet (Sternpolygone).

Folgesätze. 1. Jeder Winkel eines regelmäßigen n-Eckes beträgt $2R - \frac{4R}{n}$ er wächst mit der Zahl n, bleibt jedoch stets kleiner als ein gestreckter Winkel.

2. Construiert man an jedem Eckpunkte eines convexen Vieleckes je einen Außenwinkel, so ist die Summe derselben $= 4R$.

§ 79. Das regelmäßige Polygon. *a)* Jede Seitensymmetrale und *b)* jede Winkelsymmetrale eines regelmäßigen Polygones; ist zugleich Symmetrale des Polygones selbst.

c) Jedes regelmäßige n-Eck hat n Symmetrieachsen, welche sich in einem einzigen Punkte schneiden.

d) Jedes regelmäßige Polygon ist ein Sehnen- und ein Tangentenvieleck. Der gemeinsame Schnittpunkt der Symmetrieachsen ist das Centrum des umgeschriebenen und des eingeschriebenen Kreises.

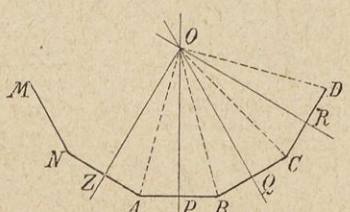


Fig. 61.

Beweise. *a)* Es sei PO die Symmetrale der Seite AB und man klappe den Theil $OPBCD$ des gegebenen Polygones um PO als Achse um. Dann fällt B auf A, ferner C auf N, weil $\sphericalangle B = A$ und $BC = AN$ ist, ferner D auf M, weil $\sphericalangle C = N$ und $CD = NM$ ist u. s. f.

b) Ebenso zu beweisen.

c) Ist n gerade, so schneidet PO den

Umfang des Polygones zum zweitenmal in einer Seite (Gegenseite), da nämlich nach *a)* auf jeder Seite von PO gleich viele Eckpunkte liegen müssen. Aus *a)* folgt ferner, dass PO die Symmetrale der Gegenseite ist. Es gibt somit im ganzen $\frac{n}{2}$ von einander verschiedene Seitensymmetralen und zufolge einer analogen Begründung $\frac{n}{2}$ Winkelsymmetralen, also n Symmetrieachsen.

Ist n ungerade, so schneidet PO den Umfang in einem Eckpunkte und halbiert den zugehörigen Winkel (Gegenwinkel). Daher fällt jede Seitensymmetrale mit einer Winkelsymmetrale zusammen, und es gibt also im ganzen n Symmetrieachsen des Polygones.

Es sei O der Schnittpunkt der benachbarten Seitensymmetralen PO und QO, also $AO = BO = CO$. Da die Punkte D und A in Bezug auf QO symmetrisch liegen, so ist auch $DO = AO$. Hieraus folgt $CO = DO$, also geht auch die Symmetrale der Seite CD durch O u. s. f.

Man hat $\triangle AZO \cong APO$, $BPO \cong BQO$, $CQO \cong CRO \ldots$, also sind $AO, BO, CO, \ldots$ die Symmetralen der Winkel $A, B, C, \ldots$

d) Nach *c)* ist O von allen Eckpunkten gleich weit entfernt, ist also das Centrum des umgeschriebenen Kreises. Zugleich ist O von allen Seiten gleich weit entfernt, ist also auch das Centrum des eingeschriebenen Kreises.

Constructionsaufgaben.

§ 80. Allgemeine Anleitung. Da sich jedes convexe n-Eck in $n-2$ Dreiecke zerlegen lässt, von denen je zwei benachbarte in einer Seite übereinstimmen, so entsprechen dem convexen n-Eck im allgemeinen $3(n-2) - (n-3) = 2n-3$ Bestimmungsstücke.

Die Anzahl der Bestimmungsstücke reduciert sich beim regelmäßigen Vielecke auf zwei; denn dieses lässt sich offenbar construieren, wenn das rechtwinklige Dreieck APO (Fig. 61) gegeben ist. In diesem Bestimmungsdreiecke des regelmäßigen Polygones ist der Radius des umgeschriebenen Kreises die Hypotenuse und der Radius des eingeschriebenen Kreises eine Kathete. Die zweite Kathete ist die Hälfte einer Polygonseite; ferner ist der Winkel $AOP = \frac{2R}{n}$.

§ 81. Aufgaben. Einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges n-Eck *a)* einzuschreiben, *b)* umzuschreiben.

Construction. *a)* Man theile die Peripherie in n gleiche Theile und verbinde die aufeinanderfolgenden Theilungspunkte $A, B, C, D, \ldots$ (Fig. 62) durch Sehnen. $ABCD\ldots$ ist das eingeschriebene regelmäßige n-Eck, denn es ist $AB = BC = CD \ldots$ (§ 49) und $\sphericalangle ABC = BCD = \ldots$ (§ 51 *a*, 2. Folgesatz).

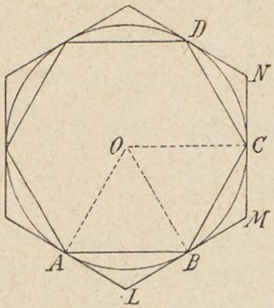


Fig. 62.

b) Zieht man durch die Theilungspunkte $A, B, C, D,$.. Tangenten an den Kreis, so erhält man das umgeschriebene regelmäßige n-Eck LMN.... Es ist nämlich $\sphericalangle\, LAB = LBA = MBC = MCB$... (§ 51) also $\triangle ABL \cong BCM \cong CDN$...; $\sphericalangle L = M = N$..; $AL = BL = BM = CM$..; schließlich $LM = MN = \ldots$

Zusatz. Die Construction ist mit Zirkel und Lineal nur in jenen Fällen ausführbar, in welchen die Zerlegung der Peripherie in n gleiche Theile mit den genannten Hilfsmitteln gelingt (z. B. § 60 *g, h, i* und § 105, 1. Beispiel).

II. Abschnitt: Flächengleichheit.

§ 82. **Erklärungen.** Unter der Fläche einer (ebenen) Figur versteht man die von ihrem Umfange begrenzte Ebene, wenn nicht die Form, sondern nur die Größe derselben berücksichtigt wird. Man kann Flächen ebenso wie Strecken und Winkel als mathematische Größen auffassen, d. h. vergleichen, addieren, subtrahieren u. s. w.

Congruente Flächen sind auch gleich; ferner werden solche Flächen, welche aus congruenten Flächen durch gleiche Operationen (Addition, Subtraction, Vervielfältigung oder Theilung) entstehen, gleich oder inhaltsgleich genannt. Bezeichnet man z. B. mit a, b, a_1, b_1 ebene Figuren und ist $a \cong a_1$, $b \cong b_1$, so folgt nach dem Vorausgehenden: $a = a_1$, $b = b_1$, $a + b = a_1 + b_1$, $a - b = a_1 - b_1$ und $na = na_1$, wo n eine beliebige Zahl bedeutet.

Zwei Flächen a und b werden addiert, indem sie in der Ebene so aneinandergelegt werden, dass sie nur einen Theil des Umfanges und außerdem keine Punkte gemeinschaftlich haben. Dadurch entsteht eine Figur, deren Fläche als die Summe $a + b$ der gegebenen Flächen bezeichnet wird.

Wenn eine Fläche b ganz innerhalb des Umfanges einer Fläche a liegt, so ist jener Theil von a, welcher nicht von b bedeckt wird, die Differenz $a - b$ der gegebenen Flächen. In diesem Falle ist zugleich $a > b$.

Aus dem Vorausgehenden ist leicht ersichtlich, wie eine Fläche vervielfacht, in gleiche Theile getheilt oder durch eine andere Fläche gemessen wird.

Zusatz. Unter dem Rechtecke zweier Strecken (oder aus zwei Strecken) versteht man das Rechteck, welches jene Strecken als Seiten hat. Analog ist der Ausdruck: Quadrat einer Strecke zu erklären.

§ 83. **Parallelogramm.** Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind einander gleich.

Beweis. Man lege die gegebenen Parallelogramme so aufeinander, dass ihre Grundlinien zusammenfallen und die Gegenseiten derselben in einer Geraden liegen, was nach der Voraussetzung möglich ist. Nun ist $\triangle AFD \cong BEC$, somit $ABED - AFD = ABED - BEC$ oder $ABEF = ABCD$.

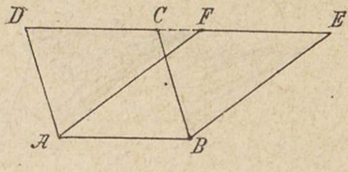


Fig. 63.

Folgesatz. Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist gleich einem Rechtecke mit der gleichen Grundlinie und der gleichen Höhe.

§ 84. Dreiecke. Jedes Dreieck ist gleich der Hälfte eines Parallelogrammes mit der gleichen Grundlinie und der gleichen Höhe.

Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck und $DEFG$ das gegebene Parallelogramm. Zieht man $BH \parallel AC$ und $CH \parallel AB$, so ist $ABHC = DEFG$ (§ 83) und $ABC = \frac{1}{2} ABHC$ (§ 82). Hieraus folgt $ABC = \frac{1}{2} DEFG$.

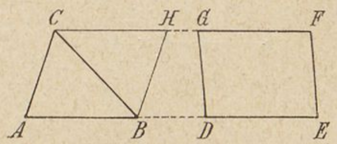


Fig. 64.

Folgesätze. 1. Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind einander gleich. 2. Verschiebt man die Spitze eines Dreieckes in einer zur Grundlinie parallelen Geraden, so bleibt der Flächeninhalt des Dreieckes ungeändert.

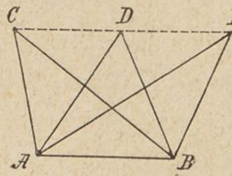


Fig. 65.

§ 85. Trapez. *a)* Jedes Trapez ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie gleich der Summe der Parallelseiten ist, und welches mit dem Trapeze in der Höhe übereinstimmt.

Beweis. Wenn $ABCD$ das gegebene Trapez ist, so verlängere man AB um $BF = DC$ und ziehe DF. Dann ist $\triangle BFE \cong CDE$, also $ABED + BFE = ABED + CDE$ oder $AFD = ABCD$.

b) Jedes Trapez ist einem Parallelogramme gleich, dessen Grundlinie gleich der Mittellinie des Trapezes ist, und welches mit dem Trapeze in der Höhe übereinstimmt.

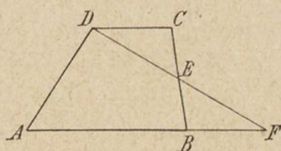


Fig. 66.

Beweis. Man ziehe durch die Mitte des einen Schenkels die Parallele zum anderen und verlängere die kürzere Parallelseite bis zum Durchschnitte mit der eben gezogenen Parallelen. Im Übrigen ist der Beweis dem vorausgehenden analog.

§ 86. Flächensätze für das rechtwinklige Dreieck. *a)* Das Quadrat jeder Kathete ist gleich dem Rechtecke aus der Hypotenuse und der Projection derselben Kathete auf die Hypotenuse.

b) Der Pythagoräische Lehrsatz (Pythagoras, geb. um das Jahr 580 v. Chr.): Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

c) Das Quadrat der Höhe (zur Hypotenuse) ist gleich dem Rechtecke aus den Projectionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse.

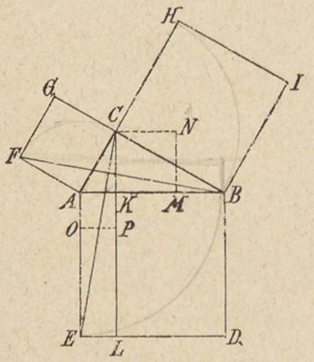


Fig. 67.

Beweise. *a)* Construiert man die Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreieckes ABC und zieht $CL \perp AB$, ferner die Verbindungsstrecken CE und FB, so ist $\triangle ABF \cong AEC$, $ACGF = 2 . AFB$, $AELK = 2 . AEC$ (§ 84), somit $ACGF = AELK$. Ebenso wird die Gleichung $CBIH = LDBK$ bewiesen.

b) Aus dem Vorausgehenden folgt $ACGF + CBIH = AEDB$.

c) Es sei $CKMN$ das Quadrat der Höhe CK und $AOPK$ das Quadrat der Strecke AK. Mit Benützung der Flächensätze *a)* und *b)* findet man: $CKMN = ACGF - AOPK = AELK - AOPK = OELP$. Da $OP = AK$ und $OE = KB$ ist, so ist damit die Behauptung bewiesen.

Constructionsaufgaben.

§ 87. **Verwandlung der Figuren.** Eine gegebene Figur in eine andere von vorgeschriebener Form verwandeln heißt eine neue Figur construieren, welche der gegebenen gleich ist und die vorgeschriebene Form besitzt.

a) Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches die gleiche Grundlinie und einen gegebenen Winkel an der Grundlinie hat.

Die Construction ergibt sich aus der Figur 64, wenn $DEFG$ das gegebene Parallelogramm und BAC der gegebene Winkel ist.

Zusätze. 1. In analoger Weise läſst sich die entsprechende Aufgabe über das Dreieck behandeln.

2. Jedes schiefwinklige Parallelogramm kann in ein Rechteck verwandelt werden.

b) Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm mit der gleichen Grundlinie zu verwandeln.

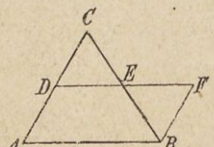


Fig. 68.

Ist ABC das gegebene Dreieck, so ziehe man durch den Halbierungspunkt D der Seite AC die Parallele zu AB und außerdem $BF \parallel AC$. Dann ist $\triangle BEF \cong CED$, daher $ABED + BEF = ABED + CED$ oder $ABFD = ABC$. Also ist $ABFD$ das verlangte Parallelogramm.

Zusatz. Jedes Dreieck läſst sich in ein Rechteck verwandeln.

c) *Ein gegebenes Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.*

Es sei $ABCDE$ das gegebene Vieleck, und man soll die Ecken D und E durch eine einzige ersetzen. Zu diesem Zwecke verlängert man CD über D hinaus und zieht $EF \parallel AD$. Dann ist $\triangle ADF = ADE$ (§ 84), also auch $ABCD + ADF = ABCD + ADE$ oder $ABCF = ABCDE$. Das Vieleck $ABCF$ entspricht somit der gestellten Aufgabe.

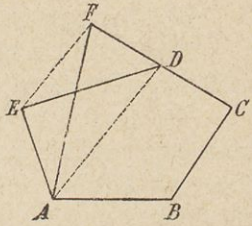


Fig. 69.

Zusatz. Jedes Vieleck läßt sich in ein Rechteck verwandeln.

d) *Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.*

Man verlängere die Seite AB des gegebenen Rechteckes $ABCD$, mache $BE = BC$ und beschreibe über AE als Durchmesser den Halbkreis AFE. Ist F der Durchschnittspunkt desselben mit der Seite BC (oder deren Verlängerung), so entspricht das Quadrat $BFGH$ der gestellten Aufgabe (§ 86 c).

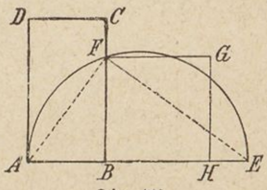


Fig. 70.

Zusatz. Jedes Vieleck läßt sich in ein Quadrat verwandeln.

e) *Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel ungeändert bleibt und eine anliegende Seite eine vorgeschriebene Länge erhält.*

Es sei ABC das gegebene Dreieck, A der beizubehaltende Winkel und $AD = a$ jene Seite, durch welche AB ersetzt werden soll. Man verlängere AC über C hinaus, ziehe $BE \parallel DC$ und verbinde D mit E. Dann ist ADE das gesuchte Dreieck, denn man hat $CDB = CDE$, also $ADC + CDB = ADC + CDE$ oder $ABC = ADE$.

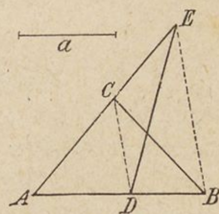


Fig. 71.

f) *Ein Quadrat zu construieren, welches der Summe (Differenz) zweier gegebener Quadrate gleich ist* (§ 86 b).

§ 88. Theilung der Figuren. a) *Ein gegebenes Dreieck in n gleiche Theile so zu zerlegen, daß alle Theilungslinien durch einen Eckpunkt gehen.*

Man theile eine Seite des gegebenen Dreieckes in n gleiche Theile und verbinde die Theilungspunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte.

b) *Ein gegebenes Parallelogramm in n gleiche Theile so zu zerlegen, daß alle Theilungslinien 1. zu einer Seite parallel sind, 2. durch einen Eckpunkt gehen.*

Ist n ungerade, so hat man im zweiten Falle das Parallelogramm zunächst in $2n$ gleiche Theile zu zerlegen.

c) Ein gegebenes Trapez in n gleiche Theile so zu zerlegen, dass alle Theilungslinien beide Parallelseiten schneiden.

d) Ein gegebenes Viereck in n gleiche Theile zu zerlegen. Man ziehe eine Diagonale, theile dieselbe in n gleiche Theile und verbinde die Theilungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Viereckes.

Bei weniger einfachen Theilungsaufgaben gelangt man häufig zum Ziele, indem man zunächst die Theilung nach einer der vorausgehenden Aufgaben ausführt und hierauf die Theile den Forderungen der Aufgabe gemäß verwandelt. Als Beispiel diene die Aufgabe:

e) Ein gegebenes Dreieck in n gleiche Theile so zu zerlegen, dass alle Theilungslinien durch einen gegebenen Punkt einer Dreiecksseite gehen.

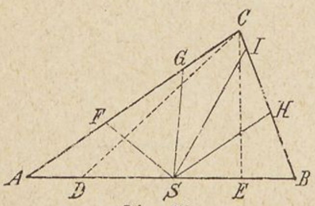


Fig. 72.

Soll z. B. das Dreieck ABC in fünf gleiche Theile so zerlegt werden, dass alle Theilungslinien durch den Punkt S gehen, so theile man AB in fünf gleiche Theile, verbinde den ersten Theilungspunkt D mit C und verwandle das Dreieck ADC in das Dreieck ASF (§ 87 *e*). Dann ist $ASF = \frac{1}{5}\,ABC$ und wenn $FG = AF$ gemacht wird, auch $SGF = \frac{1}{5}\,ABC$. In gleicher Weise verwandle man das Dreieck EBC in SBH, mache $HI = BH$ und ziehe SI.

III. Abschnitt: Ähnlichkeit.

§ 89. Verhältnisse. Eine Raumgröße A durch eine ihr gleichartige B messen oder, mit anderen Worten, das Verhältnis $A : B$ bestimmen heißt jene (unbenannte) Zahl z suchen, welche angibt, wie oft B in A enthalten ist, für welche also die Gleichung $A = zB$ besteht. Man schreibt auch $A : B = z$ oder $\frac{A}{B} = z$ und nennt z die Verhältniszahl oder den Exponenten des Verhältnisses $A : B$. Wenn B als Einheit gewählt wird, so heißt z die Maßzahl von A in Bezug auf B als Einheit.

Bei der Messung von A durch B können zwei wesentlich verschiedene Fälle eintreten:

1. Die Raumgrößen A und B sind commensurabel, d. h. sie haben ein gemeinschaftliches Maß M. Dann ist $A = pM$ und $B = qM$, wo p und q gewisse ganze Zahlen bedeuten. Man schließt daraus $A = p \cdot \frac{B}{q} = \frac{p}{q} B$ oder $\frac{A}{B} = \frac{p}{q}$. Die Verhältniszahl ist also eine rationale, d. h. eine ganze (weil der Fall $q = 1$ nicht ausgeschlossen ist) oder gebrochene Zahl.

Umgekehrt: Wenn das Verhältnis zweier Raumgrößen rational ist, so sind dieselben commensurabel; denn aus der Gleichung $\frac{A}{B} = \frac{p}{q}$ folgt $A = p \cdot \frac{B}{q}$, d. h. $\frac{B}{q}$ ist ein Maß von A und selbstverständlich auch von B.

Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Strecken AB und CD kann durch das aus der Arithmetik bekannte Verfahren der Kettendivision gefunden werden. Man trägt die kleinere Strecke CD auf der größeren AB so oft als möglich auf, ebenso den Rest EB auf CD den neuen Rest FD auf EB u. s. f. Im vorliegenden Falle findet man

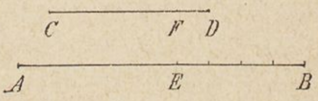


Fig. 73.

$$EB = 4 \,.\, FD,\; CD = EB + FD = 5 \,.\, FD,\; AB = CD + EB = 9 \,.\, FD.$$

Also ist FD das größte gemeinschaftliche Maß der Strecken AB und CD und $\frac{9}{5}$ ist der Exponent des Verhältnisses $A : B$.

2. Die Raumgrößen A und B sind incommensurabel, d. h. sie haben kein gemeinschaftliches Maß. Dann ist irgend ein Maß von B, etwa $\frac{B}{q}$ in A nicht ohne Rest enthalten; es läßt sich jedoch eine ganze Zahl p derart bestimmen, dass

$$p \,.\, \frac{B}{q} < A < (p+1) \,.\, \frac{B}{q}, \text{ also } \frac{p}{q} < \frac{A}{B} < \frac{p+1}{q}$$

ist. Läßt man daher dem Verhältnisse $A : B$ die rationale Zahl $\frac{p}{q}$ oder $\frac{p+1}{q}$ entsprechen, so ist der dabei begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{q}$, denn es ist $\frac{p+1}{q} - \frac{p}{q} = \frac{1}{q}$. Man ersieht daraus, dass das Verhältnis zweier incommensurabler Größen, welches keine rationale Zahl sein kann und daher irrational genannt wird, durch rationale Zahlen mit einem beliebigen Grade der Genauigkeit darstellbar ist.

Incommensurabel sind z. B. der Radius AC eines Kreises und die Seite AB des eingeschriebenen Zehneckes. Es ist nämlich $\sphericalangle\, C = 36^0$ und daher $\sphericalangle\, A = B = 72^0$. Zieht man nun die Symmetrale BC_1 des Winkels B, so folgt $C_1C = C_1B = AB$, also

$$AC = AB + AC_1.$$

J.U.S.H.

Ist ferner $C_1C_2 \parallel CB$, so folgt $C_2B = C_2C_1 = AC_1$, also

$$AB = AC_1 + AC_2.$$

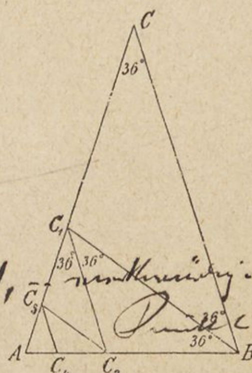


Fig. 74.

Ebenso folgt, wenn $C_2C_3 \parallel BC_1$ ist, $C_3C_1 = C_3C_2 = AC_2$, also

$$AC_1 = AC_2 + AC_3$$

u. s. f. Da somit die Kettendivision niemals einen Abschluss findet, so sind die Strecken AC und AB incommensurabel. Denn hätten dieselben ein gemeinschaftliches Maß M und wäre $AC = pM$ und $AB = qM$, wo p und q ganze Zahlen bedeuten, so müsste die mit den Größen pM und qM ausgeführte Kettendivision ebenso wie jene mit den ganzen Zahlen p und q nach einer endlichen Anzahl von Divisionen zum Reste Null führen. Die beiden Operationen unterscheiden sich nämlich nur dadurch, dass die ganzen Zahlen p und q in dem einen Falle benannt sind und in dem anderen unbenannt.

§ 90. Proportionen. Jede Gleichung, welche die Gleichheit zweier Verhältnisse ausdrückt, heißt eine Proportion, z. B. $A : B = C : D$. Die Größen eines jeden der beiden Verhältnisse müssen unter sich gleichartig sein, sie können jedoch in dem einen Verhältnisse von anderer Art sein als in dem anderen.

Größenproportionen werden häufig durch Zahlenproportionen ersetzt. Dies geschieht dadurch, dass man an die Stelle der beiden Größen in jedem Verhältnisse ihre Maßzahlen in Bezug auf dieselbe Einheit treten lässt. Ist z. B. $A : B = C : D$ und $A = aM$, $B = bM$, $C = cN$, $D = dN$, so folgt $aM : bM = cN : dN$ oder $a : b = c : d$.

Wenn die gleichartigen Größen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ mit den unter sich gleichartigen Größen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ derart zusammenhängen, dass jeder Größe A eine bestimmte Größe B entspricht und umgekehrt jeder Größe B eine bestimmte Größe A, und wenn je zwei Größen A sich ebenso verhalten wie die zugehörigen Größen B, so heißen die beiden Arten von Größen *direct proportional* oder einfach *proportional*.

Die Proportionalität von Größensystemen kommt in geometrischen Untersuchungen sehr häufig vor und lässt sich auf folgende Arten mathematisch ausdrücken:

1. Durch mehrere Proportionen, wie z. B. $A_1 : A_2 = B_1 : B_2$, $A_1 : A_3 = B_1 : B_3$, $A_2 : A_3 = B_2 : B_3$ u. s. f.

2. Durch die fortlaufende Proportion, $A_1 : A_2 : A_3 \ldots = B_1 : B_2 : B_3 \ldots$

3. Mittelst des Proportionalitätsfactors. Ersetzt man nämlich die obigen Größenverhältnisse durch die entsprechenden Zahlenverhältnisse, so erhält man zunächst $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, $a_1 : a_3 = b_1 : b_3$, $a_2 : a_3 = b_2 : b_3, \ldots$ und daraus durch Vertauschung der inneren Glieder $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots$

Bezeichnet man nun den gemeinschaftlichen Exponenten dieser Verhältnisse mit m, so folgt

$$a_1 = mb_1,\ a_2 = mb_2,\ a_3 = mb_3, \ldots\ldots.$$

In gleicher Weise findet man auch

$$A_1 = mB_1,\ A_2 = mB_2,\ A_3 = mB_3, \ldots,$$

wenn die Größen A mit den Größen B gleichartig sind. Diese Zahl m heißt Proportionalitätsfactor oder Modulus.

Wenn zwischen drei gleichartigen Größen A, B, C die Proportion $A : B = B : C$ besteht, so heißt B die mittlere geometrische Proportionale zwischen A und C, ferner C die dritte geometrische Proportionale zu A und B. Aus der entsprechenden Zahlenproportion $a : b = b : c$ erhält man $b^2 = ac$ und $b = \sqrt{ac}$.

Proportionale Strecken.

§ 91. Erklärungen. Jede Gerade, welche nicht durch den Scheitel eines Strahlenbüschels geht, wird eine Transversale desselben genannt, z. B. A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 (Fig. 77). Wird ein Strahlenbüschel von zwei oder mehreren Transversalen geschnitten, so heißen alle auf einem Strahle liegenden Schnittpunkte homologe oder einander entsprechende Punkte der Transversalen; z. B. A_1, A_2, A_3, S. Alle auf einer Transversale liegenden Schnittpunkte heißen homologe oder einander entsprechende Punkte der Strahlen; z. B. A_1, B_1, C_1. Alle von denselben zwei Transversalen begrenzten Strahlenabschnitte, wie z. B. A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 oder SA_1, SB_1, SC_1 heißen ebenfalls homolog oder einander entsprechend und ebenso alle von denselben zwei Strahlen begrenzten Transversalenabschnitte, z. B. A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3.

§ 92. Lehrsätze. Wird ein Strahlenbüschel von parallelen Transversalen geschnitten, so bestehen die folgenden Sätze:

a) Die homologen Abschnitte je zweier Strahlen sind einander proportional.

b) Die homologen Abschnitte zweier Transversalen sind jenen Abschnitten eines beliebigen Strahles proportional, welche von den Transversalen und dem Scheitel des Strahlenbüschels begrenzt werden.

c) Die homologen Abschnitte je zweier Transversalen sind einander proportional.

Beweise. *a)* Es seien a und b (Fig. 75) die betrachteten Strahlen; ferner sei $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, und man habe die Proportion $A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4$ zu beweisen.

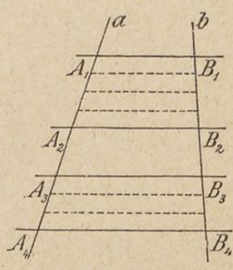


Fig. 75.

Wenn die Strecken A_1A_2 und A_3A_4 commensurabel sind, so läßt sich ein gemeinschaftliches Maß derselben auf A_1A_2 $m$mal und auf A_3A_4 $n$mal auftragen, wo m und n gewisse ganze Zahlen bedeuten. Daraus folgt $A_1A_2 = m.\frac{A_3A_4}{n} = \frac{m}{n}.A_3A_4$.

Zieht man nun durch die Theilungspunkte Parallele zu den Transversalen, so werden dadurch die Strecken B_1B_2 und B_3B_4 in m beziehungsweise n gleiche Strecken zerlegt. Somit ist $B_1B_2 = m \cdot \frac{B_3B_4}{n} = \frac{m}{n} \cdot B_3B_4$, folglich $A_1A_2 : A_3A_4 = B_1B_2 : B_3B_4$.

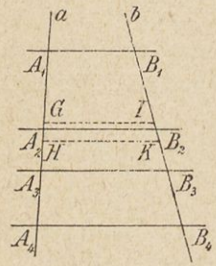


Fig. 76.

Sind hingegen die Strecken A_1A_2 und A_3A_4 incommensurabel, so theile man A_3A_4 in n gleiche Theile und trage einen solchen Theil auf A_1A_2 so oft als möglich, etwa $m$mal, auf (Fig. 76). Dann liegt der Endpunkt G des zuletzt aufgetragenen Theiles noch auf der Strecke A_1A_2 und der Endpunkt H des $(m + 1)$ten Theiles außerhalb A_1A_2. Daraus schließt man

$$m \cdot \frac{A_3A_4}{n} < A_1A_2 < (m+1) \cdot \frac{A_3A_4}{n} \text{ und } \frac{m}{n} < \frac{A_1A_2}{A_3A_4} < \frac{m+1}{n}.$$

Zieht man wieder durch die Theilungspunkte Parallele zu den Transversalen, so zerfällt B_3B_4 in n gleiche Theile, von denen m auf B_1I und $m+1$ auf B_1K entfallen. Dabei ist $B_1I < B_1B_2 < B_1K$. Somit hat man

$$m \cdot \frac{B_3B_4}{n} < B_1B_2 < (m+1) \cdot \frac{B_3B_4}{n} \text{ und } \frac{m}{n} < \frac{B_1B_2}{B_3B_4} < \frac{m+1}{n}.$$

Da nun die Verhältnisse $\frac{A_1A_2}{A_3A_4}$ und $\frac{B_1B_2}{B_3B_4}$ zwischen denselben Grenzen liegen, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann, so sind die beiden Verhältnisse einander gleich.

Dieser Beweis behält offenbar seine Giltigkeit, wenn die Strecken A_1A_2 und A_3A_4 aneinanderstoßen oder sich theilweise decken. So z. B. ist (Fig. 77) $SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2$.

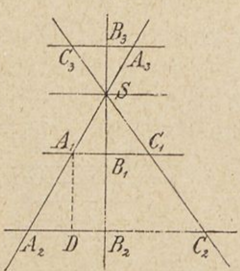


Fig. 77.

b) Um z. B. die Proportion $A_2B_2 : A_1B_1 = A_2S : A_1S$ (Fig. 77) zu beweisen, ziehe man $A_1D \parallel SB_2$ und betrachte A_2S und A_2C_2 als zwei Strahlen, ferner A_1D und SB_2 als zwei parallele Transversalen. Aus dem vorausgehenden Satze folgt $A_2S : A_1S = A_2B_2 : DB_2 = A_2B_2 : A_1B_1$.

Wäre hingegen die Proportion $A_1B_1 : A_3B_3 = A_1S : A_3S$ zu beweisen, so müsste man durch A_3 die Parallele zu SB_1 ziehen, ferner A_1 als den Scheitel der Strahlen A_1A_3 und A_1C_1 betrachten u. s. f.

c) Es sei z. B. die Proportion $A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2$ zu beweisen. Aus dem vorausgehenden Satze folgt $A_1B_1 : A_2B_2 = B_1S : B_2S$ und

$B_1C_1 : B_2C_2 = B_1S : B_2S$. Daraus folgt $A_1B_1 : A_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2$ oder nach Vertauschung der inneren Glieder $A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2$.

Unter den Umkehrungen der vorausgehenden Lehrsätze verdient die folgende hervorgehoben zu werden:

d) Wird ein Strahlenbüschel von zwei Transversalen so geschnitten, daſs zwei Abschnitte eines Strahles den homologen Abschnitten eines anderen proportional sind, so sind die Transversalen parallel.

Beweis. Es sei $SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2$, und man nehme die Transversalen A_1B_1 und A_2B_2 als nicht parallel an. Zieht man $A_2D \parallel A_1B_1$, so ist nach *a)* $SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1D$, somit $B_1D = B_1B_2$. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Punkte B_2 und D zusammenfallen.

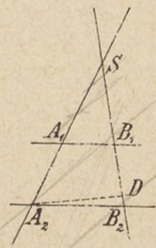


Fig. 78.

Zusätze 1. Dem Beweise des Lehrsatzes *a)* liegen nur die folgenden Beziehungen zwischen den betrachteten Strecken zugrunde:

α) Jeder Strecke auf dem einen Strahle entspricht eine bestimmte Strecke auf dem anderen;

β) gleichen Strecken auf dem einen Strahle entsprechen gleiche Strecken auf dem anderen, und

γ) der Summe zweier Strecken auf dem einen Strahle entspricht die Summe der homologen Strecken auf dem anderen.

Aus diesen Voraussetzungen läſst sich nämlich leicht ableiten, daſs dem $m$fachen, dem $n$tel und dem $\frac{m}{n}$fachen einer Strecke beziehungsweise das $m$fache, das $n$tel und das $\frac{m}{n}$fache der homologen Strecke entspricht. Aus *γ)* ergibt sich ferner, daſs der gröſseren von zwei Strecken des einen Strahles die gröſsere von den homologen Strecken des anderen entspricht. Daraus geht hervor, daſs sich der Beweis des Lehrsatzes *a)* ohne Benützung der Figur aus den Bedingungen *α)*, *β)* und *γ)* ableiten läſst.

Durch Verallgemeinerung dieses Resultates gelangt man zu dem nachstehenden allgemeinen Proportionalitätssatze, welcher in der Geometrie wiederholte Anwendung findet und sich auf analoge Weise begründen läſst:

Zwei Arten A und B von Gröſsen sind proportional, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

α) Jeder Gröſse A entspricht eine bestimmte Gröſse B und umgekehrt;

β) gleichen Gröſsen A entsprechen gleiche Gröſsen B;

γ) der Summe zweier Gröſsen A entspricht die Summe der zugehörigen Gröſsen B.

2. Wenn man auf die Vorzeichen der Strecken Rücksicht nimmt, so haben SA_1 und SA_2 (Fig. 77) gleiches, hingegen SA_1 und SA_3 ungleiches Vorzeichen. Daher ist das Verhältnis $SA_1 : SA_2$ positiv und das Verhältnis $SA_1 : SA_3$ negativ.

§ 93. Anwendungen auf das Dreieck. *a)* Schneidet man von einem gegebenen Dreiecke durch eine Transversale, welche einer Dreiecksseite parallel ist, ein kleineres Dreieck ab, so sind die Seiten desselben den Seiten des gegebenen Dreieckes proportional (§ 92*a* und *b*).

b) Wenn zwei Dreiecksseiten durch eine Transversale in proportionale Abschnitte getheilt werden, so ist die Transversale zur dritten Seite parallel (§ 92*d*).

c) Die Symmetrale eines Dreieckswinkels schneidet die Gegenseite und

d) die Symmetrale eines Außenwinkels die Verlängerung der Gegenseite in je einem Punkte, dessen Abstände von den Endpunkten jener Seite sich ebenso verhalten wie die anliegenden Seiten.

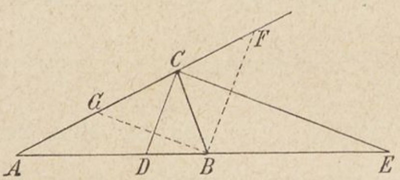


Fig. 79.

Beweise. *c)* Es sei $\sphericalangle ACD = DCB$, ferner $CF = CB$, und man ziehe BF. Dann ist $\sphericalangle ACB = 2 . CFB$, also $\sphericalangle ACD = CFB$. Daraus folgt $CD \parallel FB$ und $AD : DB = AC : CF = AC : BC$.

d) Die Behauptung $AE : BE = AC : BC$ wird analog bewiesen.

Zusatz. Mit Berücksichtigung der Vorzeichen erhält man aus den letzten zwei Lehrsätzen $AD : BD = -(AE : BE)$. Wenn vier Punkte A, B, D, E einer Geraden dieser Bedingung entsprechen, so heißen sie harmonische Punkte. A und B heißen einander zugeordnet, ebenso D und E. Man sagt auch in diesem Falle, dass die Strecke AB durch die Punkte D und E harmonisch getheilt wird. Vier Strahlen, welche von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu vier harmonischen Punkten derselben gezogen werden, bilden einen harmonischen Strahlenbüschel, wie z. B. CA, CB, CD und CE.

Begriff der Ähnlichkeit.

§ 94. Erklärungen. Im § 91 wurde gezeigt, dass sich die Punkte zweier Transversalen durch einen Strahlenbüschel so aufeinander beziehen lassen, dass jedem Punkte der einen Transversale ein bestimmter Punkt der anderen entspricht. Überhaupt erhält man homologe oder einander entsprechende Punkte zweier Figuren, wenn nach irgend einer Vorschrift jedem Punkte der einen Figur ein bestimmter Punkt der anderen zugeordnet wird.

Sind die Punkte A_1, B_1, C_1, ... einer Figur beziehungsweise den Punkten A_2, B_2, C_2, ... einer anderen Figur homolog, so heißen die *Strecken* (Geraden) A_1B_1 und A_2B_2, ferner A_1C_1 und A_2C_2, ... homolog. Ferner sind die *Winkel* $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, ..., die *Vielecke* $A_1B_1C_1D_1$ ... und $A_2B_2C_2D_2$ ... homolog.

Zwei Figuren, deren Punkte einander paarweise entsprechen, heißen *ähnlich*, wenn sie sich in einen Strahlenbüschel so legen lassen, dass je zwei homologe Punkte auf demselben Strahle liegen und das Verhältnis ihrer Abstände vom Scheitel für alle Punktpaare constant ist.

Die eben angegebene Lage der ähnlichen Figuren heißt *perspectivisch* und jede andere *schief*. In der ersteren wird jeder durch zwei homologe Punkte gehende Strahl *Ähnlichkeitsstrahl* genannt. Der Scheitel des Strahlenbüschels, in Bezug auf welchen die ähnlichen Figuren perspectivisch liegen, heißt ihr *Ähnlichkeitspunkt*, und zwar ein *äußerer* oder ein *innerer*, je nachdem je zwei homologe Punkte auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels liegen.

Das constante Verhältnis der Abstände zweier homologer Punkte vom Scheitel heißt *Ähnlichkeitsexponent* oder *Modulus* der ähnlichen Figuren und soll mit m bezeichnet werden. Daher ist $SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = SC_1 : SC_2 = \ldots = m$ oder $SA_1 = m\,SA_2$, $SB_1 = m\,SB_2$, $SC_1 = m\,SC_2$, ... (Fig. 80).

§ 95. Lehrsätze. *Für zwei ähnliche Figuren in perspectivischer Lage gelten die folgenden Sätze:*

a) *Je zwei homologe Strecken*, z. B. A_1B_1 und A_2B_2, *sind parallel* (§ 92*d*), *und zwar direct oder invers parallel, je nachdem der Ähnlichkeitspunkt ein äußerer oder ein innerer ist.* Wenn somit drei Punkte A_1, B_1, C_1 der einen Figur in einer Geraden liegen, so müssen auch die homologen Punkte A_2, B_2, C_2 der zweiten Figur in einer Geraden liegen.

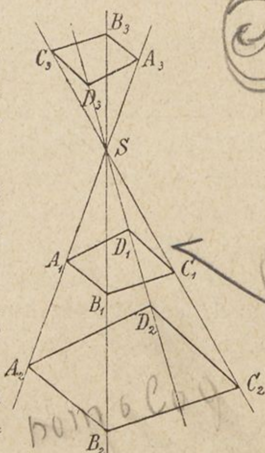


Fig. 80.

b) *Je zwei homologe Winkel*, z. B. $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ oder $A_1B_1C_1$ und $A_3B_3C_3$, *sind gleich und von gleichem Drehungssinne.* Dabei werden selbstverständlich nur die hohlen oder nur die erhabenen Winkel miteinander verglichen.

c) *Die Verhältnisse aller homologen Streckenpaare sind einander gleich, und zwar gleich dem Modulus.* Denn es ist

$A_1B_1 : A_2B_2 = A_1S : A_2S = m$ (§ 92 *b*), ebenso $B_1C_1 : B_2C_2 = B_1S : B_2S = m$ u. s. f. Dieser Satz gilt offenbar auch für schiefe Lagen ähnlicher Figuren.

Zusätze. 1. Man nennt zwei ähnliche Figuren direct oder invers ähnlich, je nachdem die eine durch bloßes Verschieben in der Ebene in eine perspectivische Lage zur anderen gebracht werden kann oder zu diesem Zwecke zunächst umzuklappen ist. Im ersten Falle folgen die homologen Umfangsstücke der beiden Figuren in demselben Sinne aufeinander, im zweiten haben sie entgegengesetzte Aufeinanderfolge.

2. Wenn eine Figur $A_1B_1C_1D_1 \ldots$ (Fig. 80), der äußere Ähnlichkeitspunkt S und der zu A_1 homologe Punkt A_2 der ähnlichen Figur $A_2B_2C_2D_2 \ldots$ gegeben sind, so ist die letztere dadurch eindeutig bestimmt. Lässt man nun bei unveränderter Lage der ersten Figur und des Punktes A_2 den Ähnlichkeitspunkt S in unendliche Entfernung hinausrücken, so verwandelt sich der Strahlenbüschel $SA_1B_1C_1D_1 \ldots$ in einen Parallelstrahlenbüschel, und die Trapeze $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2, \ldots$ gehen in Parallelogramme über. Daraus folgt $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = \ldots$, ferner $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$ u. s. f. Man erkennt nun leicht, dass die beiden Figuren zur Deckung gelangen, wenn die erste so verschoben wird, dass A_1 die Strecke A_1A_2 beschreibt und zugleich A_1B_1 der ursprünglichen Lage parallel verbleibt.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass die Congruenz als ein specieller Fall der Ähnlichkeit anzusehen ist. Der Modulus der eben betrachteten congruenten Figuren ist $+1$, denn aus $SA_1 = mSA_2$ folgt $SA_2 - A_1A_2 = mSA_2$, $1 - m = \frac{A_1A_2}{SA_2}$, also $1 - m = 0$, wenn SA_2 unendlich zunimmt, während A_1A_2 unverändert bleibt.

Auf analoge Weise findet man, dass die ähnlichen Figuren $A_1B_1C_1D_1 \ldots$ und $A_3B_3C_3D_3 \ldots$ durch die Verschiebung des inneren Ähnlichkeitspunktes S in die Mitte der Strecke A_1A_3 in congruente Figuren (in centrisch-symmetrischer Lage) übergehen, und dass zugleich der Modulus den Wert -1 annimmt.

Ähnlichkeit der Dreiecke.

§ 96. Ähnlichkeitssätze. Aus den Lehrsätzen über ähnliche Figuren (§ 95) folgt, dass ähnliche Dreiecke in den Winkeln und in den Verhältnissen homologer Seiten übereinstimmen. Ist also $\triangle ABC \sim A_1B_1C_1$, so hat man $\sphericalangle A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$ und $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$.

Umgekehrt folgt aus diesen Gleichungen die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke. Man kann sogar beweisen, dass im allgemeinen das Bestehen nur zweier von den angeführten Bedingungsgleichungen die Ähnlichkeit der Dreiecke erkennen lässt.

I. Ähnlichkeitssatz. Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so sind sie ähnlich.

Beweis. Es sei $\sphericalangle A = A_1$, $B = B_1$, also auch $C = C_1$, und man lege die gegebenen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ so aufeinander, dass A_1C_1 auf AC und B_1C_1 auf BC fällt. Ist DEC die neue Lage des Dreieckes $A_1B_1C_1$, so hat man $\sphericalangle CDE = A_1 = A$, also $DE \parallel AB$,

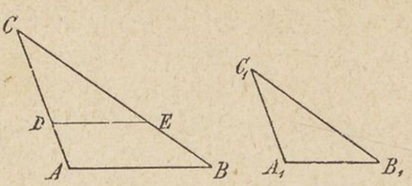


Fig. 81.

somit auch $AB : DE = AC : DC = BC : EC$ (§ 93 a). Hieraus folgt nach der allgemeinen Definition der Ähnlichkeit (§ 94): $\triangle ABC \sim A_1B_1C_1$.

II. Ähnlichkeitssatz. Wenn zwei Dreiecke im Verhältnisse zweier Seiten und im eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie ähnlich.

Beweis. Es sei (Fig. 81) $AC : BC = A_1C_1 : B_1C_1$ und $\sphericalangle C = C_1$. Bringt man das Dreieck $A_1B_1C_1$ in die Lage DEC, so ist die Richtigkeit der Behauptung nach der allgemeinen Definition der Ähnlichkeit unmittelbar einleuchtend.

III. Ähnlichkeitssatz. Wenn zwei Dreiecke im Verhältnisse zweier Seiten und im Gegenwinkel der größeren dieser Seiten übereinstimmen, so sind sie ähnlich.

Beweis. Es sei (Fig. 81) $AC : BC = A_1C_1 : B_1C_1$, ferner $BC > AC$, also $B_1C_1 > A_1C_1$ und $\sphericalangle A = A_1$. Macht man $DC = A_1C_1$ und zieht $DE \parallel AB$, so ist $\triangle ABC \sim DEC$, also $AC : BC = DC : EC = A_1C_1 : EC$. Hieraus und aus der Voraussetzung schließt man $A_1C_1 : B_1C_1 = A_1C_1 : EC$; $B_1C_1 = EC$; somit $\triangle DEC \cong A_1B_1C_1$ (IV. Congruenzsatz). Das Dreieck DEC kann daher als eine zu ABC perspectivische Lage des Dreieckes $A_1B_1C_1$ aufgefasst werden, es ist also $\triangle ABC \sim A_1B_1C_1$.

IV. Ähnlichkeitssatz. Wenn sich je zwei Seiten eines Dreieckes ebenso verhalten wie die entsprechenden Seiten eines anderen, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Beweis. Es sei (Fig. 81) $AB : AC = A_1B_1 : A_1C_1$, $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$, also auch $AC : BC = A_1C_1 : B_1C_1$. Auf analoge Weise wie im vorausgehenden Falle findet man $DE = A_1B_1$, $EC = B_1C_1$ u. s. f.

Dieser Ähnlichkeitssatz kann auch in folgender Weise ausgesprochen werden: Wenn die Seiten eines Dreieckes den Seiten eines anderen proportional sind, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.

§ 97. Anwendungen auf das rechtwinklige Dreieck. *a)* Jedes rechtwinklige Dreieck wird durch die Höhe (zur Hypotenuse) in zwei Dreiecke getheilt, welche einander und dem gegebenen Dreiecke ähnlich sind.

b) Die Höhe ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Projectionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse.

c) Jede Kathete ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen ihrer Projection auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse.

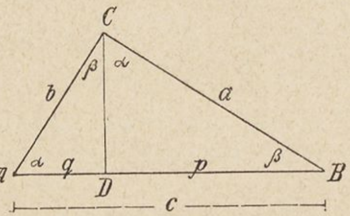


Fig. 82.

Beweise. Es sei ABC das gegebene Dreieck, AB die Hypotenuse, CD die Höhe zu derselben, und man bezeichne die Längenzahlen der Strecken BC, CA, AB, DC, DB und AD der Reihe nach mit a, b, c, h, p und q.

a) Da die Dreiecke ACD und ABC rechtwinklig sind und den Winkel $DAC = \alpha$ gemeinschaftlich haben, so sind sie ähnlich u. s. f.

b) Den Seiten p und h des Dreieckes CBD entsprechen beziehungsweise die Seiten h und q des ähnlichen Dreieckes ACD. Daraus folgt $p : h = h : q$ und $h = \sqrt{pq}$.

c) Den Seiten p und a des Dreieckes CBD entsprechen beziehungsweise die Seiten a und c des ähnlichen Dreieckes ABC. Daraus erhält man $p : a = a : c$, also $a = \sqrt{cp}$ und auf analoge Weise $q : b = b : c$, also $b = \sqrt{cq}$.

Zusätze. 1. Aus $a^2 = cp$ und $b^2 = cq$ folgt $a^2 + b^2 = c\,(p + q) = c^2$. Die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ ist der arithmetische Ausdruck für den Pythagoräischen Lehrsatz (§ 107 *d*).

2. Sind zwei von den Längenzahlen a, b, c, h, p, q gegeben, so können die übrigen vier mittelst der Gleichungen $h^2 = pq$, $a^2 = cp$, $b^2 = cq$ und $c^2 = a^2 + b^2$ berechnet werden. Irgend eine der letzten drei Gleichungen kann durch $c = p + q$ ersetzt werden.

Ähnlichkeit der Vielecke.

§ 98. Lehrsätze. *a)* Je zwei ähnliche Vielecke stimmen in den homologen Winkeln und den Verhältnissen homologer Seiten überein.

b) Wenn die Winkel eines Vieleckes mit den Winkeln eines anderen in der nämlichen oder in der entgegengesetzten Aufeinanderfolge der Größe nach übereinstimmen und die Seiten des einen den homologen Seiten des anderen proportional sind, so sind die Vielecke ähnlich.

c) Ähnliche Vielecke lassen sich durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen.

d) Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie zwei homologe Seiten.

Beweise. *a)* Folgt unmittelbar aus der Definition ähnlicher Figuren (§ 94).

b) Es seien $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ (Fig. 80) die gegebenen Vielecke, ferner sei $\sphericalangle A_1 = A_2,\ B_1 = B_2,\ C_1 = C_2 \ldots$ und $A_1B_1 : A_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2 = C_1D_1 : C_2D_2 \ldots = m$. Wenn die homologen Winkel in demselben Sinne aufeinanderfolgen (wie in der Figur), so verschiebe man die beiden Vielecke derart, daſs die Schenkel zweier homologer Winkel direct parallel werden, z. B. $B_1A_1 \parallel B_2A_2$ und $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ (§ 18 *d*). Hierauf ziehe man die Geraden A_1A_2, B_1B_2 und durch ihren Schnittpunkt S den Strahl SC_1. Wenn dieser die Seite B_2C_2 oder deren Verlängerung in einem Punkte C treffen würde, so wäre $B_1C_1 : B_2C = SB_1 : SB_2 = A_1B_1 : A_2B_2 = m$, $B_1C_1 = m\,B_2C = m\,B_2C_2$, also $B_2C = B_2C_2$, d. h. die Punkte C und C_2 müſsten zusammenfallen. Ebenso beweist man, daſs der Strahl SD_1 durch D_2 geht u. s. f. Da zugleich je zwei homologe Seiten parallel sind (§ 18 *d*), so folgt $SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = SC_1 : SC_2 = \ldots$, womit die Behauptung erwiesen ist.

Wenn die einander entsprechenden Winkel im entgegengesetzten Sinne aufeinanderfolgen, so klappe man zunächst das eine Polygon um und verfahre hierauf ebenso wie im vorausgehenden Falle.

c) Es seien $A_1B_1C_1D_1 \ldots$ und $A_2B_2C_2D_2 \ldots$ die gegebenen ähnlichen Polygone und m ihr Modulus. Zieht man von zwei homologen Punkten aus alle Diagonalen, z. B. $A_1C_1,\ A_1D_1 \ldots,\ A_2C_2,\ A_2D_2 \ldots$, so ist zunächst $\triangle A_1B_1C_1 \backsim A_2B_2C_2$ (II. Ähnlichkeitssatz). Daraus folgt $A_1C_1 : A_2C_2 = m$ und $\sphericalangle A_1C_1D_1 = A_2C_2D_2$. Also ist auch $\triangle A_1C_1D_1 \backsim A_2C_2D_2$ u. s. f.

d) Man erhält $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots = m\,(A_2B_2 + B_2C_2 + C_2D_2 + \ldots)$, also $(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + \ldots) : (A_2B_2 + B_2C_2 + C_2D_2 + \ldots) = A_1B_1 : A_2B_2$.

Anwendung der Ähnlichkeitssätze auf die Kreislehre.

§ 99. Ähnlichkeit der Kreise. Je zwei (ungleiche) Kreise sind ähnlich und haben die perspectivische Lage sowohl in Bezug auf einen äußeren als auch einen inneren Ähnlichkeitspunkt.

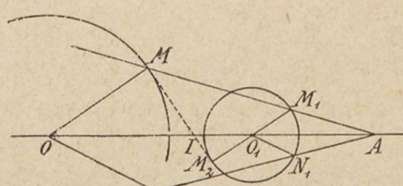


Fig. 83.

Beweis. Es seien O und O_1 die Mittelpunkte der gegebenen Kreise, und man ziehe zu einem beliebigen Radius OM des ersten Kreises den direct parallelen O_1M_1 und den invers parallelen O_1M_2 im zweiten Kreise. Wenn die Centrale von der Geraden MM_1 im Punkte A und von der Geraden MM_2 im Punkte I

geschnitten wird, so ist A der äußere und I der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OAM und O_1AM_1 folgt nämlich $OA = mO_1A$, wenn $OM : O_1M_1 = m$ gesetzt wird. Soll nun A der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise sein, so muss ein beliebiger Halbstrahl AX, welcher mit dem Kreise O_1 einen Punkt N_1 gemeinsam hat, den Kreis O in einem Punkte N treffen, für welchen die Gleichung $AN = mAN_1$ besteht. Dies ist auch wirklich der Fall; denn zieht man $ON \parallel O_1N_1$, so ist $\triangle\, OAN \backsim O_1AN_1$, somit $AN = mAN_1$, ferner $ON = mO_1N_1 = mO_1M_1 = OM$, d. h. N ist ein Punkt der ersten Kreislinie. Analog wird der Beweis für den inneren Ähnlichkeitspunkt geführt.

Folgesätze. 1. Jeder Ähnlichkeitsstrahl ist für beide Kreise zugleich Secante oder Tangente, oder er hat keinen Punkt mit denselben gemeinschaftlich.

2. Aus $OA = mO_1A$ folgt $OO_1 + O_1A = mO_1A$, also

$$O_1A = \frac{1}{m-1}\,OO_1 \text{ und } OA = \frac{m}{m-1}\,OO_1.$$

Ebenso erhält man

$$IO_1 = \frac{1}{m+1}\,OO_1 \text{ und } OI = \frac{m}{m+1}\,OO_1.$$

3. Der Centralabstand der beiden Kreise wird durch die beiden Ähnlichkeitspunkte harmonisch getheilt. Denn man findet

$$OA : O_1A = OI : IO_1.$$

§ 100. Kreis und Strahlenbüschel. Wenn ein Strahlenbüschel durch einen Kreis geschnitten wird, so hat das Product der beiden Abschnitte, welche einerseits vom Scheitel und andererseits vom Kreise begrenzt werden, für alle Strahlen denselben Wert.

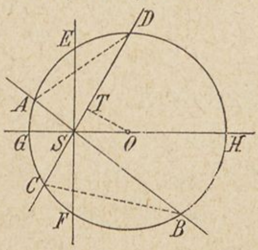


Fig. 84.

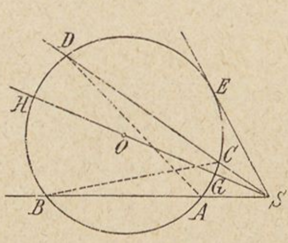


Fig. 85.

Beweis. Es sei S (Fig. 84 oder 85) der Scheitel eines Strahlenbüschels, und man bezeichne mit A und B beziehungsweise C und D die Durchschnittspunkte zweier Strahlen mit dem gegebenen Kreise. Dann ist $\triangle\, SAD \backsim SCB$, somit $SA : SD = SC : SB$.

Daraus folgt $SA \,.\, SB = SC \,.\, SD$, wenn unter SA, SB, ... die Längenzahlen der entsprechenden Strecken verstanden werden. Liegt S in der Peripherie, so ist ein Abschnitt, somit auch das Product der beiden Abschnitte $= 0$.

Folgesätze. 1. Die Hälfte einer Sehne ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten einer jeden durch ihren Halbierungspunkt gezogenen Sehne.

2. Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises zu diesem eine Tangente und eine Secante, so ist der Tangentenabschnitt die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Secantenabschnitten. Alle Abschnitte erstrecken sich vom gegebenen Punkte bis zur Peripherie.

§ 101. Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis. Das constante Product $SA\,.\,SB$ der beiden Strahlenabschnitte (§ 100) mit Berücksichtigung der Vorzeichen wird die Potenz des Punktes S in Bezug auf den Kreis genannt.

Liegt S innerhalb des Kreises (Fig. 84), so sind die Strecken SA und SB ungleich bezeichnet; die Potenz ist also negativ. Bezeichnet man SO mit c, den Radius mit r und nimmt etwa die Richtung von G nach H positiv an, so ist $SH = c + r$, $GS = r - c$, also $SG\,.\,SH = c^2 - r^2$. Der absolute Wert der Potenz ist in diesem Falle gleich dem Quadrate der Hälfte jener Sehne, welche zu dem durch S gehenden Durchmesser normal ist.

Diese Sehne ist die kleinste unter allen, welche durch den Punkt S gezogen werden können; denn aus $OS > OT$ folgt $EF < CD$.

Wenn S außerhalb des Kreises liegt (Fig. 85), so ist die Potenz positiv; denn man hat $SG = c - r$, $SH = c + r$, also $SG\,.\,SH = c^2 - r^2$. In diesem Falle ist die Potenz gleich dem Quadrate jenes Tangentenabschnittes, welcher vom gegebenen Punkte und vom Berührungspunkte begrenzt wird.

Liegt der Punkt S auf der Peripherie des Kreises, so ist die Potenz $= 0$, also gleichfalls in dem Ausdrucke $c^2 - r^2$ enthalten.

§ 102. Der Ptolemäische Lehrsatz (Ptolemäus von Alexandrien, um das Jahr 150 n. Chr.). In jedem Sehnenvierecke ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte je zweier Gegenseiten.

Beweis. Macht man $\sphericalangle ADE = BDC$, so ist $\triangle ADE \sim BDC$, $\triangle ECD \sim ABD$, also $AE : d = b : m$, $EC : c = a : m$. Hieraus folgt, wenn man sich die hier bezeichneten Strecken durch ihre Längenzahlen ersetzt denkt, $mAE = bd$ und $mEC = ac$, also $m(AE + EC) = mn = ac + bd$.

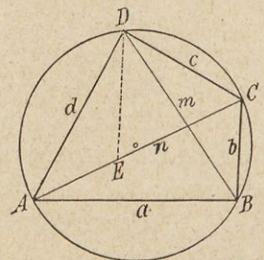


Fig. 86.

Zusatz. Ist das Sehnenviereck ein Rechteck, so erhält man den Pythagoräischen Lehrsatz als einen speciellen Fall des Ptolemäischen.

§ 103. Der goldene Schnitt (Sectio aurea). *a)* Eine Strecke heißt nach dem goldenen Schnitte oder stetig getheilt, wenn der größere Abschnitt derselben die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitte bildet. Eine Strecke AB wird also durch einen Punkt C nach dem goldenen Schnitte getheilt, wenn die Proportion $AB : AC = AC : CB$ oder $AB : CB = CB : AC$ besteht.

b) Wenn der Radius eines Kreises nach dem goldenen Schnitte getheilt wird, so ist der größere Abschnitt desselben gleich der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes.

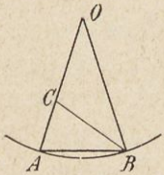


Fig. 87.

Beweis. Es sei AB eine Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes, also $\sphericalangle AOB = 36^0$ und $\sphericalangle ABO = 72^0$. Durch die Symmetrale BC des letzteren Winkels wird nun AO nach dem goldenen Schnitte getheilt. Denn es verhält sich $AC : CO = AB : BO$ (§ 93 c); da ferner die Dreiecke ABC und BCO gleichschenklig sind, so folgt $AB = BC = CO$. Daher hat man $AC : CO = CO : AO$ und $CO = AB$.

Constructionsaufgaben.

§ 104. *a)* Eine gegebene Strecke AB nach einem gegebenen Verhältnisse von innen und von außen zu theilen.

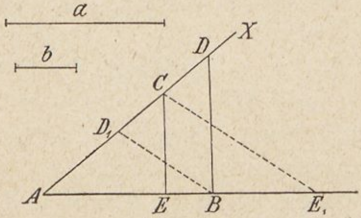


Fig. 88.

Wenn die Strecke AB im Verhältnisse der gegebenen Strecken a und b von innen, d. h. so getheilt werden soll, dass der Theilungspunkt auf AB liegt, so ziehe man durch A einen beliebigen Halbstrahl AX, mache $AC = a$, $CD = b$ und construiere $CE \parallel DB$. Dann ist E der gesuchte Theilungspunkt; denn man hat $AE : EB = AC : CD = a : b$.

Soll AB nach dem Verhältnisse $a:b$ von außen, d. h. so getheilt werden, dass der Theilungspunkt in der Verlängerung von AB liegt, so construiere man $D_1C = b$ und $CE_1 \parallel D_1B$. Dann ist E_1 der gesuchte Theilungspunkt; denn man hat $AE_1 : BE_1 = AC : D_1C = a : b$.

Zusätze. 1. Die Construction kann auch nach § 99 ausgeführt werden, da dort die Strecke OO_1 in den Punkten I und A von innen und von außen nach dem Verhältnisse $r : r_1$ getheilt ist.

2. Soll AB nach dem Zahlenverhältnisse $m : n$ getheilt werden, so construiere man zunächst zwei Strecken a und b, von denen die erste das $m$fache und die zweite das $n$fache einer beliebigen Strecke ist u. s. f.

3. Da die Punkte E und E_1 die Strecke AB harmonisch theilen, so ist im Vorausgehenden die Auflösung der Aufgabe enthalten, zu einem der Punkte E und E_1 den zweiten (harmonisch conjungierten) zu finden.

4. Wenn auf das Vorzeichen der Strecken Rücksicht genommen wird, so liegt der Theilungspunkt E in der gegebenen Strecke AB oder in deren Verlängerung, je nachdem das Verhältnis $AE : BE$ negativ oder positiv ist.

b) Zu drei gegebenen Strecken a, b, c die vierte geometrische Proportionale, d. h. jene Strecke x zu construieren, welche der Bedingung $a : b = c : x$ genügt.

Man mache auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels (Fig. 88) $AC = a$, $CD = b$, $AE = c$ und ziehe $DB \parallel CE$. EB ist die gesuchte Strecke.

c) Zu zwei gegebenen Strecken a, b die mittlere geometrische Proportionale zu construieren.

Man construiere über der Streckensumme $a + b$ als Durchmesser einen Halbkreis und errichte in jenem Punkte, in welchem die Strecken aneinanderstoßen, die Normale zum Durchmesser. Der von letzterem und vom Halbkreise begrenzte Theil der Normale genügt der Aufgabe (§ 97*b* oder § 100, 1. Folgesatz). Zwei weitere Constructionen ergeben sich nach § 97*c* und § 100, 2. Folgesatz.

d) An zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.

Man construiere zunächst die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise und ziehe durch dieselben die Tangenten an den einen Kreis (§ 99, 1. Folgesatz). Wie lautet die Determination?

e) 1. Zu einem gegebenen Dreiecke ABC, 2. zu einem gegebenen Vielecke $ABCD$.. ein ähnliches zu construieren, wenn die zu AB homologe Seite A_1B_1 gegeben oder das Verhältnis $AB : A_1B_1$ durch zwei Strecken oder den Modulus bestimmt ist.

1. Man construiere zunächst die Seite A_1B_1 und mache $\sphericalangle A_1 = A$ und $B_1 = B$.

2. Man ziehe von einem beliebigen Punkte S Strahlen durch alle Eckpunkte des gegebenen Vieleckes und bestimme auf dem Strahle SA einen Punkt A_1 derart, dass das Verhältnis $SA : SA_1$ den für das Verhältnis $AB : A_1B_1$ gegebenen Wert annimmt. Hierauf ziehe man durch A_1 die Parallele zu AB und bezeichne mit B_1 ihren Schnittpunkt mit dem Strahle SB; ebenso ziehe man durch B_1 die Parallele zu BC u. s. f. $A_1B_1C_1$ .. ist das verlangte Polygon.

Der Ähnlichkeitspunkt S kann auch mit einem Eckpunkte des gegebenen Polygones zusammenfallen oder auf einer Seite desselben liegen.

§ 105. Algebraische Analysis von Constructionsaufgaben. Die Analysis mancher Constructionsaufgaben gelingt dadurch am besten, dass man die gegenseitigen Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Raumgrößen durch Gleichungen zwischen ihren Maßzahlen ausdrückt, die Gleichungen passend transformiert und durch geometrische Deutung der erhaltenen Resultate die Construction ableitet.

1. Beispiel. Einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges Zehneck einzuschreiben.

Analysis. Bezeichnet man die Längenzahlen des Radius und der Zehnecksseite mit r beziehungsweise s, so besteht nach § 103 die Proportion $(r - s) : s = s : r$, also $s^2 + rs = r^2$. Addiert man zu beiden Theilen dieser Gleichung

$\left(\frac{r}{2}\right)^2$, so folgt $\left(s + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$, $s + \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$, $s = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$.

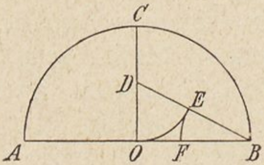


Fig. 89.

Construction. Man ziehe zu einem Durchmesser AB des gegebenen Kreises den normalen Radius OC und verbinde dessen Halbierungspunkt D mit B. Wenn hierauf DO von DB abgeschnitten wird, so ist der Rest $EB = FB$ die verlangte Zehneckseite.

Beweis. Man hat $BD = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$ und $EB = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$.

2. Beispiel. Einem gegebenen Dreiecke ABC ein Quadrat einzuschreiben.

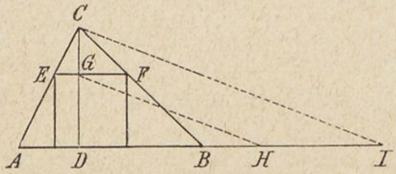


Fig. 90.

Analysis. Es sei dem Dreiecke ABC ein Quadrat bereits eingeschrieben (Fig. 90). Man findet dann $AB : EF = AC : EC = DC : GC$. Sind also c, h und x der Reihe nach die Längenzahlen von AB, DC und $DG = EF$, so folgt $c : x = h : (h - x)$, also $ch - cx = hx$, $ch = (c + h)\, x$, $(c + h) : c = h : x$, d. h. x ist die vierte geometrische Proportionale zu $c + h$, c und h.

Construction. Man mache $DH = c$, $HI = h$ und ziehe $HG \parallel IC$. DG ist die gesuchte Seite des eingeschriebenen Quadrates. Die weitere Construction läſst sich leicht auffinden.

Determination. Je nachdem das Dreieck stumpf-, recht- oder spitzwinklig ist, kann man demselben ein Quadrat, zwei oder drei Quadrate einschreiben.

Zusatz. Wenn die gegebenen und die gesuchten Gröſsen einer Constructionsaufgabe Strecken sind oder sich durch Strecken bestimmen lassen, so kann die Construction mancher durch algebraische Analysis erhaltenen Ausdrücke auf einige ganz einfache Fälle zurückgeführt werden. Diese sind, wenn mit $a, b, c, \ldots$ die gegebenen Strecken oder deren Längenzahlen bezeichnet werden,

1. $a + b$ und $a - b$;

2. na, wo n eine unbenannte Zahl bedeutet. Ist n als Verhältniszahl zweier Strecken gegeben, so liegt die Aufgabe b) im § 104 vor. Aus $\frac{b}{c} . a = x$ folgt nämlich $c : b = a : x$. Wäre $x = \frac{abc}{de}$, so construiere man zunächst $\frac{ab}{d} = y$ und hierauf $\frac{yc}{e} = x$.

3. $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$ (§ 104c und § 97, 1. Zusatz).

IV. Abschnitt: Flächen- und Längenmessung.

Flächeninhalt von Polygonen.

§ 106. Erklärungen. Als Maßeinheit für die Fläche oder als Flächeneinheit wird ein Quadrat gewählt, dessen Seite die Längeneinheit ist. Je nachdem die letztere 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm*, . . . ist, heißt die Flächeneinheit 1 Quadratmeter, 1 Quadratdecimeter, 1 Quadratcentimeter, . . .

Das Verhältnis einer gegebenen Fläche zur Flächeneinheit oder also jene Zahl, welche angibt, wie oft die Flächeneinheit in der gegebenen Fläche enthalten ist, heißt die Maßzahl der gegebenen Fläche oder ihre Flächenzahl. Ist z. B. F die gegebene Fläche, Q die Flächeneinheit und $F : Q = n$ oder $F = nQ$, so ist die unbenannte Zahl n die Flächenzahl, während die benannte Zahl nQ der Flächeninhalt von F genannt wird.

§ 107. Rechteck und Quadrat. *a)* Die Flächen zweier Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundlinien.

Beweis. Es seien $ABCD = R_1$ und $EFGH = R_2$ die gegebenen Rechtecke von gleicher Höhe. Sind die Grundlinien AB und EF commensurabel, so läſst sich eine gewisse Strecke auf beiden ohne Rest auftragen, auf AB etwa $m$mal und auf EF $n$mal.

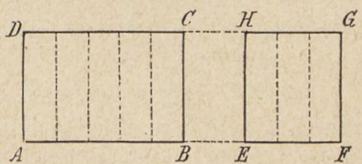


Fig. 91.

Dann ist $AB = m.\frac{EF}{n} = \frac{m}{n} EF$.

Zieht man nun durch die Theilungspunkte die Normalen zu den Grundlinien, so zerfällt R_1 in m und R_2 in n Rechtecke, welche alle untereinander congruent sind. Daher ist $R_1 = m.\frac{R_2}{n} = \frac{m}{n} R_2$, also auch $R_1 : R_2 = AB : EF$.

Sind hingegen die Grundlinien incommensurabel, so erhält man durch ebendieselben Schlüsse, welche beim Beweise des Lehrsatzes § 92 *a* angewendet wurden, die Ungleichungen

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{EF} < \frac{m+1}{n} \text{ und } \frac{m}{n} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{m+1}{n}.$$

Da dieselben für beliebig große n und zugehörige m bestehen, so gilt die Proportion $R_1 : R_2 = AB : EF$ auch in diesem Falle. Dies erkennt man auch sofort aus dem allgemeinen Proportionalitätssatze (§ 92, 1. Zusatz).

b) Die Flächen zweier Rechtecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie die Höhen

Beweis. Man betrachte die Seiten AD und EH (Fig. 91) als Grundlinien, AB und EF als Höhen und benütze den vorausgehenden Lehrsatz.

c) Die Flächenzahl eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus den Längenzahlen der Grundlinie und der Höhe. Kürzer ausgedrückt: Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Beweis. Man vergleiche das gegebene Rechteck R_1 mit einem anderen Rechtecke R_2 und einem Quadrate Q, welche Figuren so gewählt sind, dass jede mit der vorausgehenden in einer Dimension übereinstimmt. Sind also g und h die Längenzahlen der Grundlinie und der Höhe in R_1, so seien 1 und h die entsprechenden Zahlen in R_2, ferner 1 und 1 in Q. Dann folgt $R_1 : R_2 = g : 1$, also $R_1 = gR_2$ und $R_2 : Q = h : 1$, also $R_2 = hQ$. Daher ist $R_1 = ghQ$ und die Flächenzahl $F = gh$.

d) Die Flächenzahl eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz (dem Quadrate) der Längenzahl einer Seite. $F = a^2$.

Zusatz. Daraus läſst sich der Gebrauch des Wortes „Quadrat" in der Arithmetik und die Bezeichnung $1\,m^2$, $1\,dm^2$, . . . für ein Quadratmeter, ein Quadratdecimeter, . . . erklären. Nach dem Vorausgehenden ist ferner $1\,m^2 = 100\,dm^2 = 10000\,cm^2$ u. s. f. Beim Messen von größeren Flächen, z. B. von Grundstücken, werden $100\,m^2$ ein Ar ($1\,a$) und 100 Ar ein Hektar ($1\,ha$) genannt.

§ 108. Parallelogramm, Dreieck und Trapez. *a)* Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogrammes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe (§ 83). $F = gh$.

b) Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus der Grundlinie und der Höhe (§ 84). $F = \frac{gh}{2}$.

Folgesätze. 1. Die Flächen zweier Parallelogramme von gleicher Grundlinie (Höhe) verhalten sich wie die Höhen (Grundlinien). Aus $F = gh$ und $F_1 = gh_1$ ergibt sich nämlich $F : F_1 = h : h_1$ u. s. f.

2. Die Flächen zweier Dreiecke von gleicher Grundlinie (Höhe) verhalten sich wie die Höhen (Grundlinien).

c) Stimmen zwei Dreiecke in einem Winkel überein, so verhalten sich ihre Flächen wie die Producte der Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen.

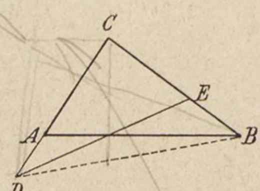


Fig. 92.

Beweis. Man lege die gegebenen Dreiecke ABC und DEC_1 so auf einander, dass sich die gleichen Winkel C und C_1 decken, und ziehe DB. Wenn nun die Längenzahlen der Seiten CA, CB, CD, CE in derselben Reihenfolge mit a, b, d, e bezeichnet werden, so erhält man aus dem vorausgehenden Folgesatze

$$\frac{ABC}{DBC} = \frac{a}{d}, \quad \frac{DBC}{DEC} = \frac{b}{e}, \quad ABC = \frac{a}{d}\; DBC,$$

$DBC = \frac{b}{e}\, DEC$, also $ABC = \frac{ab}{de}\, DEC$ oder $ABC : DEC = ab : de$.

d) Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Beweis. Man bezeichne mit a, b, c, F und a_1, b_1, c_1, F_1 die Maßzahlen der Seiten und Flächen der ähnlichen Dreiecke und mit m den Modulus. Dann ist $a = ma_1$, $b = mb_1$, $c = mc_1$, also nach dem Lehrsatze *c)*

$$\frac{F}{F_1} = \frac{ab}{a_1 b_1} = m^2 = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2}.$$

Zusatz. Das Verhältnis der Flächen zweier ähnlicher Dreiecke ist gleich dem Quadrate des Modulus.

e) Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Producte aus der Summe der Parallelseiten und der Höhe oder gleich dem Producte aus der Mittellinie und der Höhe (§ 85).

$F = \frac{(a + c)\, h}{2}$ oder $F = mh$.

§ 109. Vieleck. *a)* Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Producte aus seinem Umfange und dem Radius des eingeschriebenen Kreises.

Beweis. $F = n.\frac{a\varrho}{2} = \frac{na\,.\,\varrho}{2} = \frac{u\varrho}{2}$.

b) Die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Beweis. Es seien $ABCDE\ldots$ und $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$ die gegebenen ähnlichen Vielecke mit dem Modulus m, und man zerlege dieselben durch homologe Diagonalen, etwa von A und A_1 aus, in ähnliche Dreiecke. Dann erhält man

$$\begin{aligned} ABC &= m^2 A_1B_1C_1 \\ ACD &= m^2 A_1C_1D_1 \\ ADE &= m^2 A_1D_1E_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \hline ABCDE\ldots &= m^2 A_1B_1C_1D_1E_1\ldots\,. \end{aligned}$$

Sind also a und a_1 die Längenzahlen zweier homologer Seiten, so hat man $a = ma_1$, $a^2 = m^2a_1^2$, somit

$$ABCDE\ldots : A_1B_1C_1D_1E_1\ldots = a^2 : a_1^2.$$

Zusätze. 1. Das Verhältnis der Flächen zweier ähnlicher Polygone ist gleich dem Quadrate des Modulus.

2. Der Flächeninhalt eines unregelmäßigen Polygones wird berechnet, indem man dasselbe durch passende Hilfslinien (Diagonalen, Coordinaten der Eckpunkte u. s. f.) als algebraische Summe von Dreiecken und Trapezen darstellt. (§ 228*b*, 2. Zusatz).

Rechnungsaufgaben.

§ 110. Aufgaben über Dreiecke. Man berechne aus den Längenzahlen a, b, c der Seiten eines Dreieckes

$a)$ den Flächeninhalt F,

$b)$ den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises,

$c)$ die Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der angeschriebenen Kreise,

$d)$ den Radius r des umgeschriebenen Kreises.

Auflösungen. $a)$ Mit Benützung der in der Figur ersichtlichen Bezeichnungen findet man

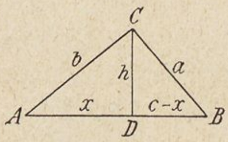


Fig. 93.

$$F = \frac{ch}{2},\ h^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2 \text{ und}$$

daraus $x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$. Demnach ist $h^2 = (b + x)(b - x)$

$$= \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) =$$

$$\frac{[(b+c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b-c)^2]}{4c^2} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung $a + b + c = 2s$, also

$$-a + b + c = 2(s - a),\ a - b + c = 2(s - b),\ a + b - c = 2(s - c),$$

so folgt $h^2 = \dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$, $h = \dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\text{und } F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn einer der Winkel A oder B ein rechter oder ein stumpfer ist.

Zusatz. Die eben gefundene Formel für den Flächeninhalt eines Dreieckes heißt die Heronische Formel (Heron von Alexandrien, 150 v. Chr.).

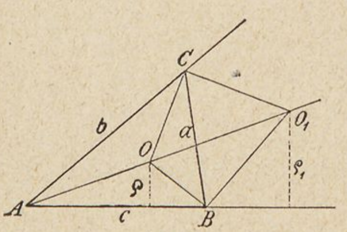


Fig. 94.

$b)$ Verbindet man den Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises mit den Eckpunkten A, B, C, so erhält man

$$ABC = BCO + CAO + ABO, \text{ also}$$

$$F = \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot \varrho = s\varrho.$$

Daraus folgt

$$\varrho = \frac{F}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

$c)$ Man findet (Fig. 94) $ABC + BO_1C = CAO_1 + ABO_1$, daher

$$F = \frac{b\varrho_1}{2} + \frac{c\varrho_1}{2} - \frac{a\varrho_1}{2} = (s - a)\,\varrho_1. \text{ Man hat also}$$

$$\varrho_1 = \frac{F}{s-a},\ \varrho_2 = \frac{F}{s-b},\ \varrho_3 = \frac{F}{s-c}.$$

d) Man ziehe durch den Eckpunkt C des gegebenen Dreieckes ABC den Durchmesser CE des umgeschriebenen Kreises und die Höhe CD. Dann ist $\triangle\ AEC \sim DBC$, somit $\frac{2r}{b} = \frac{a}{h}$,

$$\text{also } r = \frac{ab}{2h} = \frac{abc}{2ch} = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

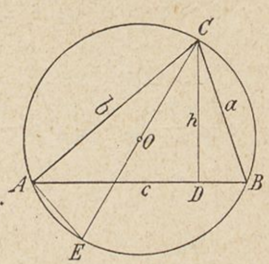


Fig. 95.

Auf analogem Wege überzeugt man sich, daſs diese Formel auch dann noch gilt, wenn einer der Winkel A oder B ein rechter oder ein stumpfer ist.

Zusatz. Für das gleichseitige Dreieck findet man durch Specialisierung die Formeln $\varrho = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ und $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$. Um dieselben direct zu erhalten, beachte man, daſs die vier merkwürdigen Punkte eines gleichseitigen Dreieckes in einen einzigen Punkt zusammenfallen, welcher als Schwerpunkt die Höhe im Verhältnisse 1 : 2 theilt. Daher ist $\varrho = \frac{1}{3}h$, $r = \frac{2}{3}h$, $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ u. s. w.

§ 111. Aufgaben über regelmäßige Polygone. *a)* Wenn einem Kreise die regelmäßigen n-Ecke und $2n$-Ecke ein- und umgeschrieben sind, aus den Umfängen e_n, u_n der n-Ecke die Umfänge e_{2n}, u_{2n} der $2n$-Ecke zu berechnen.

Auflösung. Es sei der Centriwinkel COB der $2n$te Theil des vollen Winkels, OE die Symmetrale desselben, ferner $AB \perp OC$ und $CD \perp OC$.

Dann ist

$$AB = \frac{e_n}{2n},\ CD = \frac{u_n}{2n},\ CB = \frac{e_{2n}}{2n},$$

$$CE = \frac{u_{2n}}{4n},\ ED = \frac{2u_n - u_{2n}}{4n}.$$

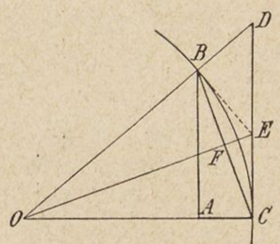


Fig. 96.

Mit Benützung des Lehrsatzes *c)* im § 93 findet man

$$\frac{CE}{ED} = \frac{OC}{OD} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}, \text{ also } \frac{u_{2n}}{2u_n - u_{2n}} = \frac{e_n}{u_n}.$$

Hieraus folgt $u_{2n} = \frac{2\,e_n u_n}{e_n + u_n}$ . . . . 1).

Da ferner $\triangle\ ABC \sim FCE$ ist, so hat man

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CB}{AB}, \text{ also } \frac{u_{2n}}{e_{2n}} = \frac{e_{2n}}{e_n} \text{ und}$$

$$e_{2n} = \sqrt{e_n u_{2n}} \text{ . . . . . . 2).}$$

Zusätze. 1. u_{2n} ist das harmonische Mittel von e_n und u_n; hingegen e_{2n} das geometrische Mittel von e_n und u_{2n}.

2. Da $AB < CB < CE + EB < CE + ED$ ist, so ist auch

$$e_n < e_{2n} < u_{2n} < u_n \;.\;.\;.\;.\;.\; 3).$$

3. Man findet

$$u_{2n} - e_{2n} < u_{2n} - e_n = \frac{2\, e_n\, u_n}{e_n + u_n} - e_n = \frac{e_n}{e_n + u_n} (u_n - e_n).$$

Wegen $\frac{e_n}{e_n + u_n} < \frac{e_n}{e_n + e_n} = \frac{1}{2}$ ist also auch

$$u_{2n} - e_{2n} < \frac{1}{2} (u_n - e_n) \;.\;.\;.\; 4).$$

b) **Wenn einem Kreise die regelmäßigen n-Ecke und $2n$-Ecke ein- und umgeschrieben sind, aus den Flächen E_n und U_n der n-Eck die Flächen E_{2n} und U_{2n} der $2n$-Ecke zu berechnen.**

Auflösung. In der Figur 96 ist

$$OAB = \frac{E_n}{2\,n},\; OCD = \frac{U_n}{2\,n},\; OCB = \frac{E_{2n}}{2\,n},\; OCE = \frac{U_{2n}}{4\,n},$$

$$OED = \frac{2\,U_n - U_{2n}}{4\,n}. \text{ Aus } \frac{OAB}{OCB} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OCB}{OCD}$$

$$\text{folgt } \frac{E_n}{E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{U_n}, \text{ also } E_{2n} = \sqrt{E_n\, U_n} \;.\;.\;.\; 5).$$

Ferner findet man

$$\frac{OCE}{OED} = \frac{CE}{ED} = \frac{OC}{OD} = \frac{OB}{OD} = \frac{OCB}{OCD}, \text{ also } \frac{U_{2n}}{2\,U_n - U_{2n}} = \frac{E_{2n}}{U_n}$$

und

$$U_{2n} = \frac{2\,E_{2n}\,U_n}{E_{2n} + U_n} \;.\;.\;.\;.\; 6).$$

Zusätze. 1. E_{2n} ist das geometrische Mittel von E_n und U_n; hingegen U_{2n} das harmonische Mittel von E_{2n} und U_n.

2. Es ist $OAB < OCB < OCEB < OCD$, also auch

$$E_n < E_{2n} < U_{2n} < U_n \;.\;.\;.\;.\; 7).$$

3. Man findet

$$U_{2n} - E_{2n} = \frac{2\,E_{2n}\,U_n}{E_{2n} + U_n} - E_{2n} = \frac{E_{2n}}{E_{2n} + U_n} (U_n - E_{2n}).$$

Nun ist $\frac{E_{2n}}{E_{2n} + U_n} < \frac{E_{2n}}{E_{2n} + E_{2n}} = \frac{1}{2}$, ferner $U_n - E_{2n} < U_n - E_n$,

also auch

$$U_{2n} - E_{2n} < \frac{1}{2} (U_n - E_n) \;.\;.\;.\; 8).$$

Rectification der Kreislinie.

§ 112. Längenzahl einer Curve. Da sich eine Curve nicht direct mit der Längeneinheit messen läſst, so muſs zunächst festgestellt werden, was unter der Längenzahl einer Curve zu verstehen sei.

Ist AB die gegebene Curve mit den Grenzpunkten A und B, so nehme man auf derselben n Punkte A_1, A_2, ... A_n an, ziehe die Sehnen AA_1, A_1A_2, ... A_nB und bestimme die Längenzahl der gebrochenen Linie $AA_1A_2 \ldots A_nB$. Hierauf füge man zu den bereits gewählten Punkten der Curve noch andere dazu, verbinde wieder in der vergrößerten Menge von Punkten je zwei aufeinanderfolgende durch Sehnen und bestimme die Längenzahl der eben erhaltenen gebrochenen Linie. Durch öftere Wiederholung dieses Verfahrens wird erreicht, dass sich die gebrochene Linie immer genauer an die Curve anschließt. Wenn sich zugleich die Längenzahl der gebrochenen Linie beständig einem Grenzwerte, d. h. einer solchen Zahl nähert, von welcher sie sich nur noch beliebig wenig unterscheidet, sobald die Sehnen hinlänglich klein genommen werden, so ist dieser Grenzwert die Längenzahl der betrachteten Curve. Die Berechnung dieser Zahl wird die Rectification der Curve genannt.

§ 113. **Längenzahl der Kreisperipherie.** Denkt man sich dem gegebenen Kreise je ein regelmäßiges 6-Eck ein- und umgeschrieben und die Längenzahlen e_6 und u_6 der Umfänge direct berechnet, so kann man aus denselben mit Hilfe der Gleichungen 1) und 2) im § 111 die Zahlen e_{12} und u_{12}, durch nochmalige Anwendung derselben Gleichungen die Zahlen e_{24} und u_{24} u. s. f. gewinnen. Aus den Ungleichungen 3) im § 111 erkennt man im voraus, dass sich die erhaltenen Zahlen ihrer Größe nach in folgender Weise anordnen müssen:

$$e_6 < e_{12} < e_{24} < \ldots\ldots < u_{24} < u_{12} < u_6.$$

Die Differenz $u_n - e_n$ kann nun durch fortgesetzte Verdoppelung des n beliebig klein gemacht werden. Denn nach der Ungleichung 4) in § 111 ist $u_{12} - e_{12} < \frac{1}{2}(u_6 - e_6)$, $u_{24} - e_{24} < \frac{1}{2}(u_{12} - e_{12}) < \frac{1}{4}(u_6 - e_6)$, ebenso $u_{48} - e_{48} < \frac{1}{8}(u_6 - e_6)$ u. s. f.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass sich die Zahlen e_6, e_{12}, e_{24}, .. zunehmend und die Zahlen u_6, u_{12}, u_{24}, ... abnehmend ebendemselben Grenzwerte nähern; dieser ist also die Längenzahl der Kreisperipherie.

Man erhält diesen Grenzwert am einfachsten, wenn man die Gleichungen 1) und 2) im § 111 auf die Form

$$\frac{1}{u_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{e_n}\right) \text{ und } \frac{1}{e_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{e_n} \cdot \frac{1}{u_{2n}}}$$

bringt. Man hat dann in der Zahlenreihe

$$\frac{1}{u_6}, \frac{1}{e_6}, \frac{1}{u_{12}}, \frac{1}{e_{12}}, \frac{1}{u_{24}}, \frac{1}{e_{24}}, \ldots$$

die ersten zwei direct zu berechnen und findet hierauf die 3., 5., 7., ..., indem man das arithmetische Mittel, die 4., 6., 8., ..., indem man das geometrische Mittel aus den beiden vorausgehenden Zahlen bildet.

Nimmt man den Durchmesser des gegebenen Kreises als Längeneinheit, so ist $u_6 = \frac{6}{\sqrt{3}}$, $e_6 = 3$, also $\frac{1}{u_6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\frac{1}{e_6} = \frac{1}{3}$.

Die weiteren Resultate der Rechnung sind mit Berücksichtigung von 7 Decimalstellen in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

n	$\frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{e_n}$
6	0·2886751	0·3333333
12	0·3110042	0·3219752
24	0·3164897	0·3192206
48	0·3178552	0·3185372
96	0·3181962	0·3183667
192	0·3182815	0·3183241
384	0·3183028	0·3183135
768	0·3183081	0·3183108
1536	0·3183095	0·3183101
3072	0·3183098	0·3183100

Hieraus findet man $u_{3072} = 3·141593$ und $e_{3072} = 3·141591$. Somit ist die Längenzahl der Kreisperipherie in Bezug auf den Durchmesser als Längeneinheit gleich 3·14159 . . . . Diese Zahl wird zur Abkürzung mit π bezeichnet und heißt die Ludolph'sche Zahl.

Folgesätze. 1. Das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser ist für alle Kreise constant. $p : d = p_1 : d_1 = \pi$.

2. Die Peripherie eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Durchmesser und der Ludolph'schen Zahl oder gleich dem doppelten Producte aus dem Halbmesser und der Ludolph'schen Zahl. Bezeichnet man nämlich die Längenzahlen der Peripherie, des Durchmessers und des Halbmessers beziehungsweise mit p, d und r, so ist nach dem Vorausgehenden $p : d = \pi$, also $p = \pi d$ und $p = 2\pi r$.

3. Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Durchmesser oder wie ihre Halbmesser.

Zusätze. 1. Die Zahl π ist irrational, denn sie läſst sich weder durch das obige, noch durch ein anderes Verfahren vollkommen genau berechnen. Man kann sie jedoch durch rationale Zahlen mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit darstellen. Bereits Archimedes von Syracus (278 bis 212 v. Chr.) fand durch Betrachtung der regelmäßigen 96-Ecke, daſs das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70} = 3\frac{1}{7}$ enthalten sei. Die letztere Zahl pflegt man daher als „das Archimed'sche Verhältnis" zu bezeichnen. Ludolph van Ceulen (um das J. 1600 n. Chr.) berechnete π auf 35 Decimalstellen und fand $\pi = 3{\cdot}1415926536\ldots$ Metius, ein Zeitgenosse Ludolphs, setzte für π die Zahl $\frac{355}{113}$, welche sechs richtige Decimalstellen liefert und in der Form $113|355$ dem Gedächtnisse leicht eingeprägt wird.

Die höhere Mathematik liefert weit bequemere Methoden zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl.

2. Wenn bei der Berechnung von π nur sieben Decimalstellen berücksichtigt werden, so erhält man von $n = 96$ an jede der Zahlen $\frac{1}{u_n}$ und $\frac{1}{e_n}$ als das arithmetische Mittel der beiden vorausgehenden. Ist nämlich $a > b$, so findet man

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = \frac{1}{2}.\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2 < \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{b}+\sqrt{b})^2},$$

$$\text{also auch } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Für $a = \frac{1}{e_{48}} = 0{\cdot}3185372$ und $b = \frac{1}{u_{96}} = 0{\cdot}3181962$ ist nun $\frac{(a-b)^2}{8b} = 0{\cdot}000000045\,.\,.$, somit kann $\frac{1}{e_{96}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e_{48}} + \frac{1}{u_{96}}\right)$ gesetzt werden u. s. f.

§ 114. Rectification der Kreisbogen. Zwei Bogen desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich wie die zugehörigen Centriwinkel.

Beweis. Da in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bogen gehören, und da der Summe zweier Centriwinkel die Summe der zugehörigen Bogen entspricht, so läſst sich dieser Satz analog wie der Lehrsatz *a)* im § 92 oder auch mittelst des allgemeinen Proportionalitätssatzes (§ 92, 1. Zusatz) beweisen.

Folgesatz. Jeder Kreisbogen b verhält sich zur Peripherie desselben Kreises wie der zum Bogen gehörige Centriwinkel α zum vollen Winkel. $b : p = \alpha : 360$, worin α in Graden ausgedrückt sein muſs. Daraus erhält man

$$b = \frac{p\alpha}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

§ 115. Das Bogenmaß der Winkel.

$$\text{Aus } b = \frac{\pi r \alpha}{180} \text{ folgt } \frac{b}{r} = \frac{\pi\alpha}{180} \text{ und } \alpha = \frac{180}{\pi}\cdot\frac{b}{r}.$$

Man sieht also, daſs das Verhältnis $b : r$, d. i. die Längenzahl eines Bogens in Bezug auf den Radius als Längeneinheit, durch den zugehörigen Centriwinkel eindeutig bestimmt ist und umgekehrt. Daher wird jene Längenzahl dazu benützt, um die Größe eines Winkels unzweideutig auszudrücken, und heißt das Bogenmaß des Winkels (im Gegensatze zum Gradmaße, d. i. dem Verhältnisse des gegebenen Winkels zu einem Grade).

Man pflegt das Verhältnis $b : r$ mit $arc\,\alpha$ (spr. $arcus\,\alpha$) zu bezeichnen und hat dann

$$arc\,\alpha = \frac{\pi\alpha}{180} \text{ und } \alpha = \frac{180}{\pi}\, arc\,\alpha.$$

So z. B. ist $arc\,360^0 = 2\pi$, $arc\,180^0 = \pi$, $arc\,90^0 = \frac{\pi}{2}$, $arc\,60^0 = \frac{\pi}{3}$ u. s. w. Soll $arc\,\alpha = 1$ sein, so muss $\alpha = \frac{180}{\pi} = 57^0\,17'\,44{\cdot}8''$ genommen werden; es ist also $arc\,(57^0\,17'\,44{\cdot}8'') = 1$.

Die eben besprochene Beziehung eines Winkels zum zugehörigen Bogen wird häufig in der folgenden Weise ausgedrückt:

Jeder Winkel hat den zugehörigen Bogen zum Maße.

Dieser Satz lässt sich jedoch auch so deuten, dass das Verhältnis eines Bogens zu einem Bogengrade gleich ist dem Verhältnisse des zugehörigen Centriwinkels zu einem Winkelgrade (§ 114), dass also Bogen und Winkel in Bezug auf die genannten Einheiten gleiche Maßzahlen besitzen.

Quadratur des Kreises.

§ 116. Flächenzahl einer krummlinig begrenzten Fläche. Ist eine gegebene Fläche ganz oder theilweise von Curven begrenzt, so denke man sich die krummen Begrenzungslinien derart durch gebrochene ersetzt, dass die Eckpunkte der letzteren in den ersteren liegen. Nun lasse man die Längen der Sehnen beständig abnehmen und daher die Anzahl derselben immerfort zunehmen. Wenn sich zugleich ein Grenzwert auffinden lässt, welchem die Flächenzahl des Ersatzpolygones durch hinlängliche Vermehrung der Seitenanzahl beliebig nahe kommt, so heißt derselbe die Flächenzahl der gegebenen Fläche und die Berechnung desselben die Quadratur der Fläche.

§ 117. Flächenzahl des Kreises. Aus den Ungleichungen 7) und 8) im § 111 erhält man die Relationen

$$E_6 < E_{12} < E_{24} < \ldots < U_{24} < U_{12} < U_6 \text{ und}$$

$$U_{12} - E_{12} < \frac{1}{2}(U_6 - E_6),\ U_{24} - E_{24} < \frac{1}{4}(U_6 - E_6), \ldots.$$

Daraus folgt, dass sich die Zahlen $E_6, E_{12}, E_{24}, \ldots$ zunehmend und die Zahlen $U_6, U_{12}, U_{24}, \ldots$ abnehmend ebendemselben Grenzwerte nähern. Man kann diesen direct mit Hilfe der Gleichungen 5) und 6) im § 111 berechnen und findet, dass die Flächenzahl des Kreises in Bezug auf das Quadrat des Radius als Flächeneinheit ebenfalls π ist. Auf kürzerem Wege gelangt man zu diesem Resultate mittelst der Gleichung $U_n = \frac{u_n\, r}{2}$ (§ 109 a), wenn man darin die Zahl

n ohne Ende wachsen läßt. Wird nämlich die Flächenzahl des Kreises mit F bezeichnet, so ergibt sich $F = \frac{2\pi r . r}{2} = \pi r^2$ oder $F : r^2 = \pi$.

Folgesätze. 1. Das Verhältnis der Kreisfläche zum Quadrate des Radius ist für alle Kreise constant. $F : r^2 = F_1 : r_1{}^2 = \pi$.

2. Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Producte aus der Peripherie und dem Radius oder gleich dem Producte aus dem Quadrate des Radius und der Ludolph'schen Zahl. $F = \frac{p\,r}{2} = \pi r^2$.

3. Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder ihrer Durchmesser.

§ 118. Kreisring, Kreissector und Kreissegment. *a)* Den Flächeninhalt eines Kreisringes berechnet man nach der Formel

$$F = \pi r^2 - \pi r_1{}^2 = \pi\,(r^2 - r_1{}^2) = \pi\,(r + r_1)\,(r - r_1).$$

b) Zwei Sectoren desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich wie die zugehörigen Centriwinkel.

Beweis analog wie beim Lehrsatze *a)* im § 92 oder nach dem allgemeinen Proportionalitätssatze (§ 92, 1. Zusatz).

Folgesatz. Jeder Kreissector S verhält sich zur Kreisfläche F wie der zum Sector gehörige Centriwinkel α zum vollen Winkel. $S : F = \alpha : 360$, worin α in Geraden ausgedrückt sein muss. Daraus erhält man

$$S = \frac{F\alpha}{360} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}.$$

c) Ist das Segment kleiner (größer) als der Halbkreis, so kann es als die Differenz (Summe) aus dem zugehörigen Sector und einem Dreiecke aufgefasst werden. Die Berechnung des Flächeninhaltes gelingt mittelst der vorausgehenden Lehren der Planimetrie nur in wenigen Fällen; in der Regel muss die Rechnung auf trigonometrischem Wege durchgeführt werden.

Ebene Trigonometrie.

I. Abschnitt: Einleitung.

§ 119. Erklärungen. In der Planimetrie wird die Aufgabe gelöst, mittelst der gegebenen Bestimmungsstücke eines Dreieckes dieses selbst, also auch die unbekannten Seiten und Winkel desselben durch Construction zu finden. Soll nun dieselbe Aufgabe auf dem Wege der Rechnung gelöst werden, so sind hiezu neue Begriffe und Sätze erforderlich, deren Gesammtheit man mit dem Namen ebene Trigonometrie bezeichnet. Die gegenseitige Abhängigkeit zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreieckes wird in der ebenen Trigonometrie durch die sogenannten Winkelfunctionen ausgedrückt; es sind dies Verhältniszahlen gewisser Strecken, welche weiter unten genauer besprochen werden. Die allgemeine Lehre von den Winkelfunctionen, ohne Rücksicht auf deren Verwendung in der Trigonometrie, heißt Goniometrie.

Zusatz. Die (ebene und sphärische) Trigonometrie ist in den Ländern mit griechischer Cultur wegen ihrer großen Bedeutung für die Feldmessung und insbesonders für die Astronomie bald nach der Verbreitung der planimetrischen und stereometrischen Lehren durch Euklides (um das Jahr 300 v. Chr.) ausgebildet und gepflegt worden. Als Begründer der Trigonometrie bezeichnet man die Astronomen Hipparch von Nicäa (im 2. Jahrhundert v. Chr.), Menelaus von Alexandrien (um das Jahr 100 n. Chr.) und insbesonders Ptolemäus v. Alexandrien (im 2. Jahrhundert n. Chr.).

Unabhängig von den Griechen haben auch die Inder eine Trigonometrie ausgebildet. Dieselbe ist ebenso wie jene der Griechen durch die Araber im Abendlande verbreitet worden.

§ 120. Strecken als relative Größen. *a)* Wenn die Strecken nach der im § 6 gegebenen Erklärung als relative Größen aufgefasst werden, so erkennt man leicht, dass die Strecken AB und BA entgegengesetzte Größen sind; d. h. es ist

$$AB + BA = 0 \text{ und } BA = -AB.$$

b) Sind A, B, C drei beliebige Punkte einer Geraden mit festgesetzter positiver Richtung, so besteht zwischen den von den Punkten begrenzten Strecken die Gleichung $AB = AC + CB$.

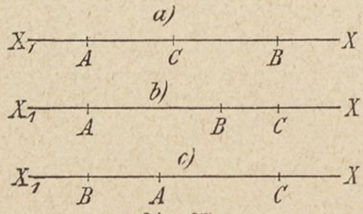


Fig. 97.

Beweis. Liegt C zwischen A und B, so leuchtet die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar ein.

Liegt B zwischen A und C, so hat man $AC = AB + BC$, daher $AB = AC - BC = AC + CB$.

Liegt A zwischen B und C, so findet man zunächst $BC = BA + AC$ und daraus $AB = -BA = AC - BC = AC + CB$.

c) Sind $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ beliebige Punkte einer Geraden mit festgesetzter positiver Richtung, so besteht die Gleichung $A_1 A_n = A_1 A_2 + A_2 A_3 + \ldots + A_{n-1} A_n$.

Beweis (mittelst Schlusses von n auf $n + 1$). Nimmt man die zu beweisende Gleichung für irgend eine Zahl n als richtig an und fügt in der gegebenen Geraden noch einen Punkt A_{n+1} hinzu, so ist nach dem Satze *b)* $A_1 A_{n+1} = A_1 A_n + A_n A_{n+1}$, somit $A_1 A_{n+1} = A_1 A_2 + A_2 A_3 + \ldots + A_{n-1} A_n + A_n A_{n+1}$. Die zu beweisende Gleichung gilt somit auch für $n + 1$ Punkte. Da sie nun für $n = 3$ besteht, so besteht sie auch für $n = 4$, daher für $n = 5$ u. s. f.

§ 121. Winkel als relative Größen. *a)* Nach der im § 7 gegebenen Erklärung über Winkel als relative Größen entspricht jedem positiven Winkel (ab) ein negativer, welcher ebenfalls a als ersten und b als zweiten Schenkel hat. Der erste Winkel entsteht durch eine positive Drehung des Schenkels a und ist daher positiv (z. B. $+60^0$ in Fig. 98); der zweite entsteht durch eine negative Drehung des Schenkels a und ist daher negativ (in dem obigen speciellen Falle -300^0). Zwei Winkel, welche einander in dieser Weise entsprechen, stimmen in der Aufeinanderfolge und in der gegenseitigen Lage ihrer Schenkel überein; sie unterscheiden sich also nur durch ihre Entstehung. Aus dem Nachfolgenden, namentlich aus § 123, erkennt man, dass in allen trigonometrischen Erklärungen und Lehrsätzen nur die Aufeinanderfolge und die gegenseitige Lage der Schenkel, hingegen nicht die Entstehungsweise der Winkel berücksichtigt wird; daher darf man in der Trigonometrie zwei Winkel, welche sich nur durch ihre Entstehung unterscheiden, als gleich betrachten und in gleicher Weise, etwa mit (ab) bezeichnen.

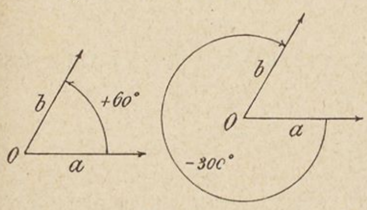


Fig. 98.

Folgesatz. Die Winkel 0^0, $4R$, $8R, \ldots$ können als gleich angesehen werden; ebenso die Winkel α und $\alpha \pm 4nR$, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

b) Sind a und b zwei beliebige von demselben Punkte ausgehende Halbstrahlen, so können die Winkel (ab) und (ba) als entgegengesetzte Größen betrachtet werden; d. h. es ist $(ab) + (ba) = 0$ und $(ba) = -(ab)$.

Beweis. Aus den drei Theilen der Fig. 99 erkennt man, dass $(ab) + (ba) = 0$, $= 4R$ oder $= -4R$ ist, je nachdem die Winkel (ab) und (ba) ungleich bezeichnet, beide positiv oder beide negativ sind. Nach dem Folgesatze in *a)* kann man also stets $(ab) + (ba) = 0$, somit auch $(ba) = -(ab)$ setzen.

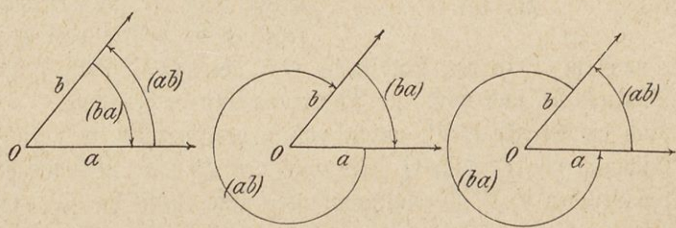


Fig. 99.

c) Sind a, b, c drei beliebige von einem Punkte ausgehende Halbstrahlen, so besteht die Gleichung $(ab) = (ac) + (cb)$.

Beweis. Die drei gegebenen Halbstrahlen haben in dem einen Drehungssinne die Reihenfolge a, c, b. Wenn die Winkel (ab), (ac), (cb) auch in demselben Drehungssinne genommen werden, so ist offenbar $(ab) = (ac) + (cb)$.

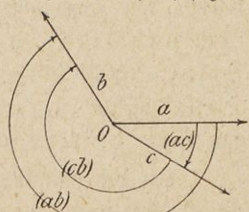


Fig. 100.

Nach *a)* kann nun der positive Winkel $(a\,b)$ durch den negativen Winkel $(a\,b)$ ersetzt werden oder umgekehrt, u. s. f. Daher gilt die eben abgeleitete Gleichung in allen Fällen.

d) Sind $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ beliebige von einem Punkte ausgehende Halbstrahlen, so besteht die Gleichung

$$(a_1\,a_n) = (a_1\,a_2) + (a_2\,a_3) + \cdots + (a_{n-1}\,a_n).$$

Der Beweis ist jenem in § 120 *c)* analog.

Zusatz. Dieser Lehrsatz bleibt auch dann richtig, wenn die Halbstrahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ nicht von demselben Punkte ausgehen. Denn zieht man von irgend einem Punkte den Halbstrahl b_1 direct parallel zu a_1, den Halbstrahl b_2 direct parallel zu a_2, u. s. f., so ist $(b_1\,b_n) = (b_1\,b_2) + (b_2\,b_3) + \cdots + (b_{n-1}\,b_n)$ und $(b_1\,b_n) = (a_1\,a_n)$, $(b_1\,b_2) = (a_1\,a_2)$ u. s. f. (§ 18 *b*). Daraus folgt wieder $(a_1\,a_n) = (a_1\,a_2) + (a_2\,a_3) + \cdots + (a_{n-1}\,a_n)$.

§ 122. Rechtwinkliges Coordinatensystem. Man bezeichne mit $X_1\,X$ und $Y_1\,Y$ zwei zueinander normale Gerade und mit O ihren Durchschnittspunkt. In der ersten Geraden nehme man die Richtung von X_1 nach X und in der zweiten jene von Y_1 nach Y als positiv an. Um nun die Lage irgend eines Punktes M der Ebene in Bezug auf die gegebenen Geraden zu bestimmen, ziehe man durch M Parallele zu denselben und bezeichne mit P und Q die Durchschnittspunkte der Parallelen mit $X_1\,X$ beziehungsweise $Y_1\,Y$. Die Strecke OP, welche nach der für Strecken aufgestellten Zeichenregel (§ 6) positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem P in den Halbstrahl OX oder OX_1 fällt, heißt die Abscisse des Punktes M und wird zur Abkürzung mit x bezeichnet. Die Strecke OQ (oder auch die Strecke PM), welche positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem die Richtung von O nach Q (also auch von P nach M) mit der positiven Richtung der Geraden $Y_1\,Y$ übereinstimmt oder nicht, heißt die Ordinate des Punktes M und wird zur Abkürzung mit y bezeichnet. Die Strecken x und y heißen die Coordinaten des Punktes M. Die Gerade $X_1\,X$ wird die Abscissen- oder x-Achse und die Gerade $Y_1\,Y$ die Ordinaten- oder y-Achse genannt. Beide haben den gemeinschaftlichen Namen Coordinatenachsen und bilden ein rechtwinkliges Coordinatensystem. O ist der Anfangspunkt oder Ursprung desselben. Die beiden Coordinatenachsen zerlegen die Ebene in vier Theile, welche in der aus der Fig. 101 ersichtlichen Aufeinanderfolge erster, zweiter, dritter und vierter Quadrant heißen.

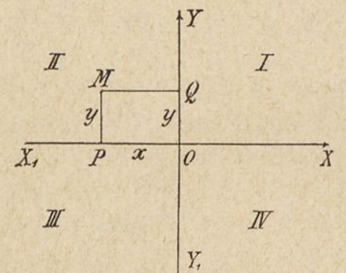


Fig. 101.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Vorzeichen der Coordinaten für die Punkte der vier Quadranten zusammengestellt:

Quadrant	I		III	IV
Abscisse	$+$	$-$	$-$	$+$
Ordinate	$+$	$+$	$-$	$-$

Für jeden Punkt der Abscissenachse ist $y = 0$; für jeden Punkt der Ordinatenachse ist $x = 0$. Dem Anfangspunkte entsprechen die Coordinaten $x = 0$ und $y = 0$.

Aus den vorausgehenden Erklärungen folgt, dass jedem Punkte der Ebene bestimmte Coordinaten entsprechen, und dass umgekehrt durch die Coordinaten x, y oder deren Maßzahlen die Lage eines Punktes eindeutig bestimmt wird.

II. Abschnitt: Goniometrie.

§ 123. Erklärung der Winkelfunctionen. Es sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem gegeben, und man denke sich einen Halbstrahl um den Anfangspunkt O aus der Lage OX in die Lage OR gedreht. Der dadurch beschriebene Winkel heißt ein Winkel im 1., 2., 3. oder 4. Quadranten, je nachdem OR im 1., 2., 3. oder 4. Quadranten liegt. Man nennt übrigens auch jeden Winkel α ohne Rücksicht auf seine Lage in Bezug auf ein Coordinatensystem „einen Winkel im 1., 2., 3. oder 4. Quadranten", je nachdem $0 < \alpha < R$, $R < \alpha < 2R$, $2R < \alpha < 3R$ oder $3R < \alpha < 4R$ ist.

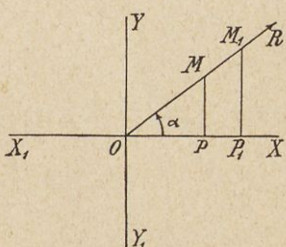


Fig. 102.

Um die Winkelfunctionen des Winkels $XOR = \alpha$ zu erhalten, wähle man einen beliebigen Punkt M des zweiten Schenkels OR und construiere seine Coordinaten $OP = x$ und $PM = y$. Die Strecke OM wird der Leitstrahl oder Radius vector des Punktes M genannt und mit r bezeichnet. Der Leitstrahl ist stets positiv; da nämlich der den Winkel beschreibende Halbstrahl seine positive Richtung nicht sprungweise ändern darf, so muss dieselbe mit Rücksicht auf die positive Richtung in dem Halbstrahle OX auch in der Lage OR von O gegen R genommen werden.

In dem rechtwinkligen Dreiecke OPM lassen sich nun sechs Verhältnisse je zweier Seiten bilden, u. zw. $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{r}{x}, \frac{r}{y}$; dieselben heißen in der gleichen Reihenfolge: Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante von α und werden in folgender Weise bezeichnet:

$$\frac{y}{r} = \sin\alpha, \quad \frac{x}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{y}{x} = tg\,\alpha,$$

$$\frac{x}{y} = cotg\,\alpha, \quad \frac{r}{x} = sec\,\alpha, \quad \frac{r}{y} = cosec\,\alpha.$$

Diese Verhältnisse haben den gemeinschaftlichen Namen Winkelfunctionen oder goniometrische Functionen des Winkels α; man nennt sie auch einfach Functionen des Winkels α, wenn eine Verwechslung mit anderen Functionen nicht zu befürchten ist. Wenn nämlich zwei Größen A und B derart von einander abhängen, dass jedem Werte von A ein bestimmter Wert oder eine Reihe bestimmter Werte von B entspricht, so heißt B eine Function von A. Man erkennt leicht, dass die Quotienten $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}$ u. s. f. wirklich Functionen des Winkels α sind; die gegenseitige Abhängigkeit dieser Größen wird im Nachfolgenden genauer besprochen werden. Hingegen sind jene Quotienten von der Lage des Punktes M in dem Halbstrahle OR oder also von der Größe des Leitstrahles unabhängig. Denn ist M_1 (Fig. 102) ein beliebiger von O und M verschiedener Punkt in OR und P_1 seine Projection auf die x-Achse, so findet man

$$\frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1}, \frac{OP}{OM} = \frac{OP_1}{OM_1} \text{ u. s. f.}$$

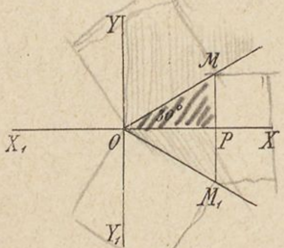


Fig. 103.

Ist z. B. $\alpha = 30^0$, so erhält man mit Hilfe der Fig. 103 $y = \frac{r}{2}$ und $x = \frac{r}{2}\sqrt{3}$. Daraus folgt

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad tg\ 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$cotg\,30^0 = \sqrt{3}, \quad sec\ 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad cosec\,30^0 = 2.$$

Für $\alpha = 45^0$ ist $x = y$ und $r = x\sqrt{2}$. Daraus folgt $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $tg\,45^0 = cotg\,45^0 = 1$, $sec\,45^0 = cosec\,45^0 = \sqrt{2}$.

Folgesatz. Aus der Erklärung der Winkelfunctionen erkennt man, dass dieselben nur von der Aufeinanderfolge und der gegenseitigen Lage der beiden Schenkel OX und OR abhängig sind. Hingegen ist der Drehungssinn des Halbstrahles, welcher den $\sphericalangle XOR$ beschreibt, ohne Einfluss auf die Größe der Winkelfunctionen (§ 121 a).

Zusatz. Aus der Definition des Cosinus ergibt sich sofort der folgende häufig benützte Lehrsatz:

Wenn eine gegebene Strecke einer Geraden auf eine zweite Gerade projiciert wird, so ist die Projection gleich dem Producte aus der Strecke und dem Cosinus des Winkels, welchen die positiven Richtungen der beiden Geraden einschließen.

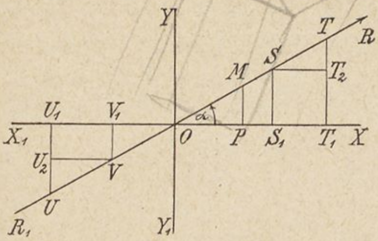


Fig. 104.

Beweis. Es seien X_1X und R_1R die gegebenen Geraden mit den positiven Richtungen von X_1 nach X und von R_1 nach R. Dann ist $XOR = \alpha$ der Winkel, welchen die positiven Richtungen der beiden Geraden einschließen. Wenn zunächst die Strecke OM auf X_1X projiciert wird, so ist nach der Definition des Cosinus $OP = OM \cos \alpha$. Nun denke man sich OM längs R_1R verschoben und beachte, dass die Größe der Projection dadurch nicht geändert wird. Ist also $OM = ST = UV$, so ist auch $OP = S_1T_1 = U_1V_1$, also $S_1T_1 = ST \cos \alpha$, $U_1V_1 = UV \cos \alpha$.

Der Strecke TS entspricht die Projection T_1S_1, und wegen $TS = -ST$, $T_1S_1 = -S_1T_1$ ist auch $T_1S_1 = TS \cos \alpha$.

§ 124. Graphische Darstellung der Winkelfunctionen. *a)* Ist r gleich der Längeneinheit, so hat man $\sin \alpha = y$ und $\cos \alpha = x$, worin x und y die Längenzahlen der Coordinaten bedeuten. Man beschreibt daher einen Kreis, dessen Centrum der Anfangspunkt des Coordinatensystems und dessen Radius die Längeneinheit ist, und construiert die Coordinaten des Punktes M_1, in welchem der zweite Schenkel OR_1 des betrachteten Winkels XOR_1 den Kreis durchschneidet. Die Längenzahl der Ordinate P_1M_1 ist dann der Sinus und jene der Abscisse OP_1 der Cosinus des Winkels XOR_1. Um sich kürzer auszudrücken, nennt man P_1M_1 den Sinus und OP_1 den Cosinus des Winkels XOR_1. Ebenso verfährt man, wenn einer der Winkel XOR_2, XOR_3, XOR_4 u. s. f. gegeben ist.

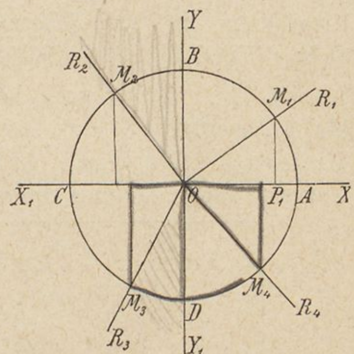


Fig. 105.

b) Für $x = 1$ ist $tg\, \alpha = y$ und $\sec \alpha = r$, worin y und r die Längenzahlen der Ordinate und des Leitstrahles bedeuten. Man beschreibt daher einen Kreis mit dem Centrum O und dem Radius 1 und construiert im Punkte A, in welchem der Halbstrahl OX den Kreis durchschneidet, die Tangente Z_1Z des Kreises. Nimmt man in derselben die Richtung von Z_1 nach Z als positiv an, so ist die Längenzahl von AM_1 die Tangente und jene von OM_1 die Secante des Winkels XOM_1. Ebenso verfährt man, wenn ein Winkel im 4. Quadranten, z. B. XOR_4, gegeben ist. Um die Tangente und die Secante

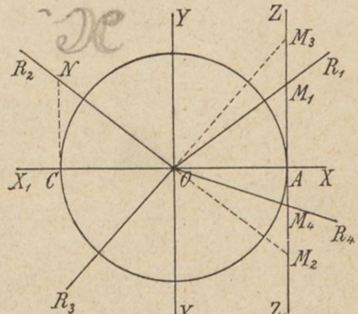


Fig. 106.

eines Winkels im 2. oder 3. Quadranten, z. B. von XOR_2 oder XOR_3, graphisch darzustellen, verlängert man den zweiten Schenkel über O hinaus bis zum Durchschnitte mit der Geraden Z_1Z. Es ist z. B. $tg\,(XOR_2) = \frac{CN}{OC} = \frac{-AM_2}{-OA} = \frac{AM_2}{OA}$ und $sec\,(XOR_2) = \frac{ON}{OC} = \frac{OM_2}{OA}$. Also ist (die Längenzahl von) AM_2 die Tangente und (jene von) OM_2 die Secante des Winkels XOR_2. Beide sind im vorliegenden Falle mit Rücksicht auf die allgemeine Zeichenregel für Strecken negativ zu nehmen.

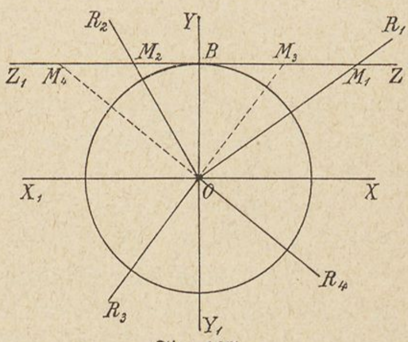


Fig. 107.

c) Für $y = 1$ ist $cotg\,\alpha = x$ und $cosec\,\alpha = r$. Wenn OB als Längeneinheit genommen wird, so findet man auf analogem Wege wie im Falle b), dass (die Längenzahlen von) BM_1, BM_2, BM_3, ... die Cotangenten und (die Längenzahlen von) $OM_1, OM_2, OM_3, \ldots$ die Cosecanten der Winkel $XOR_1, XOR_2, XOR_3, \ldots$ sind.

§ 125. Änderungen der Winkelfunctionen, wenn der Winkel von 0^0 bis $4R$ wächst. Beschreibt ein Halbstrahl von der Lage OX aus im positiven Sinne einen vollen Winkel, so ändern sich die Winkelfunctionen Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente entsprechend den Angaben der folgenden Tabelle:

Winkel α	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente
$\alpha = 0^0$	0	1	0	$\mp\infty$
$0^0 < \alpha < R$	+, z.	+, a.	+, z.	+, a.
$\alpha = R$	1	0	$\pm\infty$	0
$R < \alpha < 2R$	+, a.	—, a.	—, z.	—, a.
$\alpha = 2R$	0	-1	0	$\mp\infty$
$2R < \alpha < 3R$	—, a.	—, z.	+, z.	+, a.
$\alpha = 3R$	-1	0	$\pm\infty$	0
$3R < \alpha < 4R$	—, z.	+, z.	—, z.	—, a.

+ = positiv, — = negativ, z. = zunehmend, a. = abnehmend.

Man erhält diese Resultate am einfachsten mittelst der graphischen Darstellung der Winkelfunctionen (§ 124). Die Secante und Cosecante sind als selten benützte Winkelfunctionen an dieser Stelle übergangen worden und werden auch im Nachfolgenden in der Regel nicht besprochen.

Die Bedeutung der Zeichen $\pm\infty$ und $\mp\infty$ in der Tabelle soll an einem speciellen Falle erklärt werden. Wenn sich ein Winkel, welcher kleiner als R ist, (zunehmend) dem Grenzwerte R nähert, so bleibt die Tangente des Winkels positiv und wächst über alle Grenzen. Somit ist der Grenzwert der Tangente in diesem Falle $+\infty$. Wenn sich hingegen ein Winkel, welcher größer als R ist, (abnehmend) dem Grenzwerte R nähert, so bleibt die Tangente dieses Winkels negativ, und ihr absoluter Wert wächst ebenfalls über alle Grenzen. Somit ist der Grenzwert der Tangente in diesem Falle $-\infty$. Analog ist das Zeichen $\mp\infty$ zu erklären.

§ 126. Beziehungen zwischen den Functionen desselben Winkels. Aus den Definitionsgleichungen der Winkelfunctionen (§ 123) erhält man sofort die nachstehenden Relationen:

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \;\ldots\; 1),\quad cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \;\ldots\; 2),$$

$$cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} \;\ldots\; 3),\quad sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \;\ldots\; 4),\quad cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \;\ldots\; 5).$$

Drei weitere Gleichungen ergeben sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke OPM, dessen Seiten der Leitstrahl und die Coordinaten irgend eines Punktes auf dem zweiten Schenkel des betrachteten Winkels sind (Fig. 102). Welchem Quadranten auch dieser Winkel angehören mag, stets besteht die Gleichung $x^2+y^2=r^2$. Daraus folgt

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1,\quad 1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{r}{x}\right)^2,\quad \left(\frac{x}{y}\right)^2+1=\left(\frac{r}{y}\right)^2;$$

d. h., wenn zur Abkürzung $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, ... statt $(\sin\alpha)^2$, $(\cos\alpha)^2$, ... geschrieben wird,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \;\ldots\; 6),\quad 1+tg^2\alpha=sec^2\alpha \;\ldots\; 7),$$

$$1+cotg^2\alpha=cosec^2\alpha \;\ldots\; 8).$$

Diese drei Gleichungen lassen sich auch direct aus den Figuren 105, 106 und 107 ableiten. Ihre Richtigkeit für die speciellen Werte $\alpha=0$, R, $2R$, $3R$ ist im Vorausgehenden noch nicht bewiesen und muss durch directe Betrachtungen dargethan werden.

Zusatz. Die Relationen 1) bis 8) sind für goniometrische Rechnungen von der größten Wichtigkeit. Man kann sie dazu benützen, um aus einer gegebenen Winkelfunction die übrigen Functionen desselben Winkels zu berechnen. Ist z. B. $\sin\alpha=a$ und $-1<a<+1$, so folgt aus den Gleichungen 6), 1), 2), 4) und 5) der Reihe nach:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-a^2},\quad tg\,\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{1-a^2}},\quad cotg\,\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-a^2}}{a},$$

$$sec\,\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1-a^2}},\quad cosec\,\alpha=\frac{1}{a}.$$

Wenn a positiv ist, so kann α dem 1. oder dem 2. Quadranten angehören. In dem ersten Falle sind alle Winkelfunctionen positiv; im zweiten Falle sind dieselben mit Ausnahme des Sinus und der Cosecante negativ.

§ 127. **Beziehungen zwischen Functionen entgegengesetzter Winkel.** Um entgegengesetzte Winkel zu erhalten, denke man sich einen Halbstrahl aus der Anfangslage OX einmal im positiven und einmal im negativen Sinne um (dem absoluten Werte nach) gleiche Winkel gedreht. Sind OR und OR_1 die Endlagen des Halbstrahles, und bezeichnet man den positiven Winkel XOR mit α, so ist der negative Winkel $XOR_1 = -\alpha$. Macht man nun auf OR und OR_1 die Strecken OM und OM_1 gleich der Längeneinheit, so ist die x-Achse die Symmetrale der MM_1.

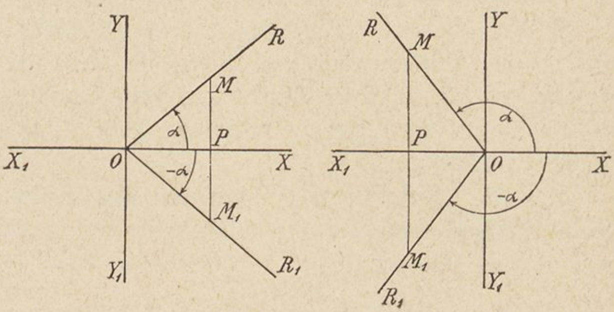


Fig. 108.

Hieraus ergibt sich

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$$
$$= \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\,\alpha,\ cotg(-\alpha) = -cotg\,\alpha.$$

§ 128. **Beziehungen zwischen Functionen complementärer Winkel.** Es sei $XOR = \alpha$ ein gegebener spitzer Winkel, ferner $R_1OY = \alpha$, somit $XOR_1 = 90^0 - \alpha = R - \alpha$. Macht man auf OR und OR_1 die Strecken OM und OM_1 gleich der Längeneinheit und construiert die Coordinaten der Punkte M und M_1, so ist $\triangle OPM \cong M_1P_1O$, also $P_1M_1 = OP$ und $OP_1 = PM$. Daraus folgt

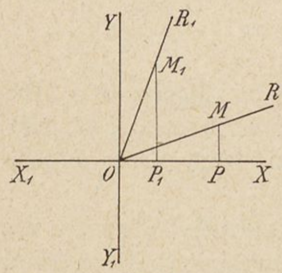


Fig. 109.

$$\sin(R-\alpha) = \cos\alpha,\ \cos(R-\alpha) = \sin\alpha,\ tg(R-\alpha) = \frac{\sin(R-\alpha)}{\cos(R-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = cotg\,\alpha,\ cotg(R-\alpha)$$
$$= tg\,\alpha,\ \sec(R-\alpha) = \frac{1}{\cos(R-\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = cosec\,\alpha,\ cosec(R-\alpha)$$
$$= \frac{1}{\sin(R-\alpha)} = \sec\alpha.$$

Zusätze. 1. Aus den vorausgehenden Gleichungen lassen sich die Namen Cosinus, Cotangens, Cosecans als Abkürzungen von complementi sinus, c. tangens, c. secans erklären.

2. Die abgeleiteten Beziehungen lassen sich in folgender Weise zusammenfassen: Die Cofunction eines Winkels ist gleich der Function des complementären

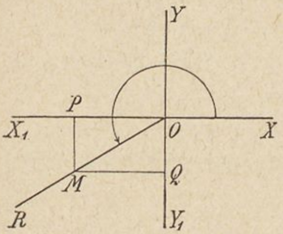


Fig. 110.

Winkels. Unter der Cofunction des Sinus versteht man den Cosinus u. s. f.

3. Wegen späterer Anwendungen soll die Giltigkeit der Gleichungen $sin\,(R - \alpha) = cos\,\alpha$ u. s. f. für beliebige Winkel α nachgewiesen werden.

Es sei $XOR = (xr)$ ein beliebiger Winkel und M ein Punkt auf dem zweiten Schenkel desselben. Man hat dann $sin\,(xr) = \frac{PM}{OM} = \frac{OQ}{OM}$, $cos\,(yr) = \frac{OQ}{OM}$, also $sin\,(xr) = cos\,(yr)$.

Setzt man nun $(xr) = \alpha$, so folgt $(yr) = (yx) + (xr) = \alpha - R$. Daher ist $sin\,\alpha = cos\,(\alpha - R) = cos\,(R - \alpha)$.

Die letzte Gleichung geht durch die Substitution $\alpha = R - \beta$ über in $sin\,(R - \beta) = cos\,\beta$, worin β einen beliebigen Winkel bedeutet und daher auch wieder mit α bezeichnet werden kann. Daraus ergeben sich sofort die übrigen vier Gleichungen.

§ 129. **Beziehungen zwischen den Winkeln, welche zu derselben Function gehören.** Während durch einen Winkel eine jede seiner Functionen eindeutig bestimmt wird, entsprechen umgekehrt jeder Winkelfunction unendlich viele Winkel, welche jedoch in solchen Beziehungen zu einander stehen, dass sich aus einem derselben alle übrigen bestimmen lassen.

a) Denkt man sich den zweiten Schenkel OR eines Winkels $XOR = \alpha$ beliebig oft im positiven oder negativen Sinne um einen vollen Winkel gedreht, so kommt er immer wieder in seine ursprüngliche Lage; daher nehmen auch seine Functionen ihre ursprünglichen Werte an. Daraus folgt

$$sin\,(\alpha \pm 4\,nR) = sin\,\alpha,\quad cos\,(\alpha \pm 4\,nR) = cos\,\alpha \text{ u. s. f.}$$

Zusatz. Man nennt die Winkelfunctionen periodische Functionen des Winkels, da ihre Werte in derselben Reihenfolge wiederkehren, wenn der zweite Schenkel einen Umlauf vollendet hat.

b) Es sei $XOR_1 = \alpha$ irgend ein positiver spitzer Winkel und die Strecke OM_1 auf dem zweiten Schenkel OR_1 gleich der Längeneinheit. Dem Punkte M_1 entsprechen in den übrigen drei Quadranten Punkte (M_2, M_3, M_4), deren Coordinaten dieselben absoluten Werte besitzen wie jene von M_1. Zieht man nun durch diese Punkte die Halbstrahlen OR_2, OR_3, OR_4 und beachtet die Congruenz der Dreiecke OP_1M_1, $OP_2\,M_2$, OP_2M_3, OP_1M_4, so erhält man $OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4$ und $XOR_2 = 2\,R - \alpha$, $XOR_3 = 2\,R + \alpha$, $XOR_4 = 4\,R - \alpha$. Daraus folgt

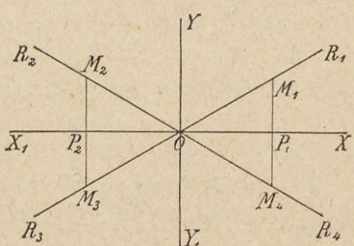


Fig. 111.

$$\sin\alpha = +\sin(2R-\alpha) = -\sin(2R+\alpha) = -\sin(4R-\alpha),$$
$$\cos\alpha = -\cos(2R-\alpha) = -\cos(2R+\alpha) = +\cos(4R-\alpha).$$

Mit Benützung der Gleichungen 1) und 2) in § 126 erhält man ferner

$$tg\,\alpha = -\ tg(2R-\alpha) = +\ tg(2R+\alpha) = -\ tg(4R-\alpha),$$
$$cotg\,\alpha = -\ cotg(2R-\alpha) = +\ cotg(2R+\alpha) = -\ cotg(4R-\alpha).$$

§ 130. Functionen der Summe und der Differenz zweier Winkel. Sind $XOR = (xr)$ und $XOS = (xs)$ (Fig. 112 *a* oder 112 *b*) zwei beliebige Winkel, so mache man auf OR die Strecke OM gleich der Längeneinheit und construiere die Coordinaten von M. Dann ist (die Längenzahl von) $OP = \cos(xr)$ und (jene von) $PM = \sin(xr)$.

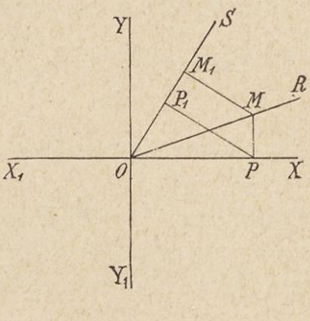


Fig. 112 *a*.

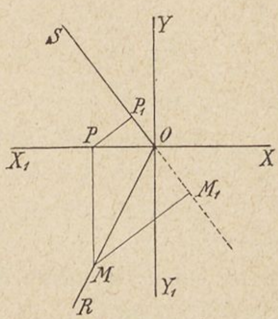


Fig. 112 *b*.

Bezeichnet man nun mit M_1 und P_1 die Projectionen der Punkte M und P auf den Halbstrahl OS oder auf dessen Ergänzung, so folgt $OM_1 = OP_1 + P_1M_1$ (§ 120 *b*), $OM_1 = \cos(sr)$, $OP_1 = OP\cos(xs) = \cos(xr)\cos(xs)$ (§ 123, Zusatz), $P_1M_1 = PM\cos(ys) = \sin(xr)\cos(ys)$. Es ist also

$$\cos(sr) = \cos(xr)\cos(xs) + \sin(xr)\cos(ys).$$

Setzt man in dieser Gleichung zur Abkürzung $(xr) = \alpha$, $(xs) = \beta$,

so ist $(sr) = (sx) + (xr) = (xr) - (xs) = \alpha - \beta$,

$(ys) = (yx) + (xs) = (xs) - (xy) = \beta - R$ und

$\cos(ys) = \cos(\beta - R) = \cos(R-\beta) = \sin\beta$. Daraus folgt

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \ldots 1).$$

Diese Gleichung geht durch die Substitution $\beta = -\beta_1$ über in

$$\cos(\alpha+\beta_1) = \cos\alpha\cos\beta_1 - \sin\alpha\sin\beta_1 \ldots 2).$$

Durch die Substitution $\alpha = R - \alpha_1$ erhält man aus 1) und 2)

$$\cos[R-(\alpha_1+\beta)] = \cos(R-\alpha_1)\cos\beta + \sin(R-\alpha_1)\sin\beta,$$
$$\cos[R-(\alpha_1-\beta_1)] = \cos(R-\alpha_1)\cos\beta_1 - \sin(R-\alpha_1)\sin\beta_1,$$

oder mit Rücksicht auf § 128, 3. Zusatz

$$\sin(\alpha_1+\beta) = \sin\alpha_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta \ldots 3),$$
$$\sin(\alpha_1-\beta_1) = \sin\alpha_1\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\sin\beta_1 \ldots 4).$$

Die Gleichungen 1) bis 4) gelten für beliebige Werte der darin vorkommenden Winkel, weil α und β, daher auch α_1 und β_1 keiner Einschränkung unterliegen. Man braucht also die Winkel α und α_1 nicht von einander zu unterscheiden, ebensowenig die Winkel β und β_1, und erhält somit

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$tg\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta},$$

$$cotg\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}$$

oder, wenn Zähler und Nenner der letzten Brüche durch $\cos\alpha\cos\beta$ beziehungsweise $\sin\alpha\sin\beta$ dividiert werden,

$$tg\,(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\,\beta},\quad cotg\,(\alpha \pm \beta) = \frac{cotg\,\alpha\, cotg\,\beta \mp 1}{cotg\,\beta \pm cotg\,\alpha}.$$

§ 131. **Functionen des doppelten Winkels.** Durch die Substitution $\beta = \alpha$ erhält man aus den vorausgehenden Gleichungen

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$

$$cotg\,2\alpha = \frac{cotg^2\alpha - 1}{2\,cotg\,\alpha}.$$

§ 132. **Functionen des halben Winkels.** Aus $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ und $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ folgt durch Subtraction und Addition

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \text{ und } 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \text{ also}$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \text{ und } \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}.$$

Setzt man $2\alpha = \beta$ und ersetzt schließlich β wieder durch α, so ist

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \text{ und } \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$$

Daraus ergibt sich ferner

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \text{ und } cotg\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}.$$

Liegt α zwischen 0 und $2R$, so sind alle Functionen von $\frac{\alpha}{2}$ positiv; liegt es zwischen $2R$ und $4R$, so ist nur $\sin\frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{und } cosec\,\frac{\alpha}{2}\right)$ positiv u. s. f.

§ 133. **Verwandlung der Summen oder Differenzen von Winkelfunctionen in Producte.** *a)* Mittelst der Gleichungen im § 130 findet man

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta,$$

Setzt man darin $\alpha + \beta = \gamma$ und $\alpha - \beta = \delta$, so folgt

$$\sin\gamma + \sin\delta = 2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2},$$

$$\sin\gamma - \sin\delta = 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2},$$

$$\cos\gamma + \cos\delta = 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2},$$

$$\cos\delta - \cos\gamma = 2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}.$$

b) $\sin\gamma + \cos\delta = \sin\gamma + \sin(R-\delta) = 2\sin\frac{R+\gamma-\delta}{2}\cos\frac{\gamma+\delta-R}{2}$.

c) Unter der Voraussetzung $\alpha+\beta+\gamma = 2R$ findet man $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ $= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ $= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ (§§ 133 *a*, 131, 128 und 130).

d) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Diese und ähnliche Formeln werden vorzugsweise dann angewendet, wenn gewisse goniometrische oder trigonometrische Rechnungen mittelst der Logarithmen durchzuführen sind.

§ 134. **Berechnung der Winkelfunctionen.** Aus § 129 geht hervor, dass man die Functionen beliebiger Winkel stets auf jene von spitzen Winkeln zurückführen kann. Nach § 128 ist ferner jede Function eines Winkels zwischen 45° und 90° gleich der Cofunction des complementären (zwischen 0° und 45° liegenden) Winkels. Es genügt ferner, nur den Sinus und den Cosinus der Winkel im Intervalle von 0° bis 45° direct zu berechnen, weil dann die Tangente und die Cotangente mittelst der Gleichungen 1) und 2) im § 126 gefunden werden.

Um z. B. den Sinus und den Cosinus für alle von Minute zu Minute aufsteigenden Winkel zu berechnen, benützt man die leicht beweisbaren Gleichungen

$$\sin(\alpha + 1') = \sin\alpha\cos 1' + \cos\alpha\sin 1',$$
$$\cos(\alpha + 1') = \cos\alpha\cos 1' - \sin\alpha\sin 1'.$$

Die Functionen $\sin 1'$ und $\cos 1'$ werden in folgender Weise direct berechnet. Es sei β irgend ein spitzer Winkel und der Radius OA des Kreisbogens AM gleich der Längeneinheit. Zieht man $MP \perp OX$ und $AN \perp OX$, so ist $PM = \sin\beta$, $AN = tg\,\beta$ und Bogen $AM = arc\,\beta$. Nun findet man

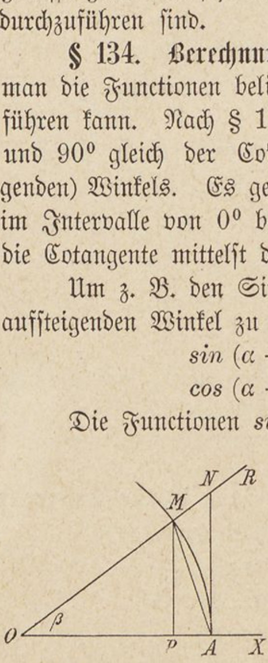


Fig. 113.

$\triangle\, OAM <$ Sector $OAM < \triangle\, OAN$, also

$\dfrac{OA\,.\,PM}{2} < \dfrac{OA\,.\,\widehat{AM}}{2} < \dfrac{OA\,.\,AN}{2}$, somit

$$\sin\beta < arc\,\beta < tg\,\beta \ldots 1).$$

Daraus folgt $$1 < \frac{arc\,\beta}{\sin\beta} < \frac{1}{\cos\beta},$$

$$1 > \frac{\sin\beta}{arc\,\beta} > \cos\beta \ldots 2).$$

Nach § 131 ist ferner $1 - \cos\beta = 2\sin^2\frac{\beta}{2}$ und wegen $\sin\frac{\beta}{2} < arc\,\frac{\beta}{2}$ oder $\sin\frac{\beta}{2} < \frac{1}{2}\,arc\,\beta$ auch

$$1 - \cos\beta < \frac{1}{2}(arc\,\beta)^2 \ldots 3).$$

Mit Rücksicht auf die Relationen 2) ist umsomehr

$$1 - \frac{\sin\beta}{arc\,\beta} < \frac{1}{2}(arc\,\beta)^2, \text{ also auch } arc\,\beta - \sin\beta < \frac{1}{2}(arc\,\beta)^3 \ldots 4).$$

Setzt man nun $\beta = 1'$ und beachtet, dass $1 > \cos\beta$ und $arc\,\beta > \sin\beta$ ist, so folgt wegen $arc\,1' = \frac{\pi}{180.60} = 0{\cdot}0002908882\ldots$

$$0 < 1 - \cos 1' < 0{\cdot}0000000423\ldots,$$

$$0 < arc\,1' - \sin 1' < 0{\cdot}0000000000123\ldots$$

Wenn also nur 7 Decimalstellen berücksichtigt werden, so hat man $\cos 1' = 1$ und $\sin 1' = 0{\cdot}0002909$ zu setzen und findet daher

$$\sin(\alpha + 1') = \sin\alpha + 0{\cdot}0002909\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha + 1') = \cos\alpha - 0{\cdot}0002909\sin\alpha.$$

Zusatz. Die höhere Mathematik liefert bequemere und leichter controlierbare Methoden zur Berechnung der Winkelfunctionen. Für den praktischen Gebrauch sind übrigens die Logarithmen der Winkelfunctionen von weit größerer Bedeutung als die letzteren selbst.

§ 135. Goniometrische Gleichungen. Bestimmungsgleichungen, welche goniometrische Functionen der Unbekannten enthalten, werden goniometrische Gleichungen genannt. Um die Wurzeln einer solchen Gleichung zu finden, ist es in der Regel am zweckmäßigsten, alle Winkelfunctionen durch eine einzige auszudrücken und hierauf die Gleichung nach derselben aufzulösen.

Beispiele: *a)* $a\sin x + b\cos x = 0.$

Daraus folgt $\frac{\sin x}{\cos x} = tg\,x = -\frac{b}{a}\cdot$ Ist etwa $a = 32$, $b = 17$, so hat man

$log\ 17$	$1{\cdot}23045$	$y = 27^0\ 58'\ 46''.$
$log\ 32$	$1{\cdot}50515$	$x_1 = 2R - y,\ x_2 = 4R - y,$
$log\ tg\ y$	$9{\cdot}72530$	allgemein $x = 2nR - y.$

b) $a\sin x + b\cos x = c.$

Man substituiert $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ und löst hierauf die Gleichung nach $sin\,x$ auf; oder man bringt die Gleichung auf die Form $sin\,x + \frac{b}{a} cos\,x = \frac{c}{a}$ und führt einen „Hilfswinkel“ φ durch die Gleichung $\frac{b}{a} = tg\,\varphi$ ein. Es ist dann $sin\,x + \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} cos\,x = \frac{c}{a}$; $sin\,x\,cos\,\varphi + sin\,\varphi\,cos\,x = \frac{c}{a} cos\,\varphi$, $sin\,(x+\varphi) = \frac{c}{a} cos\,\varphi$. Daraus ergibt sich $x + \varphi$, also auch x, da φ bekannt ist.

c) $a\,sin^2 x + b\,cos^2 x + c\,sin\,x\,cos\,x = d$.

Man ersetze d durch $d\,(cos^2 x + sin^2 x)$ und dividiere hierauf beide Theile der Gleichung durch $cos^2 x$. Man findet

$$(a-d)\,tg^2 x + c\,tg\,x = d - b \text{ u. s. f.}$$

d) $x + y = \alpha$, $cos\,x + cos\,y = b$.

Die zweite Gleichung läſst sich auf die folgende Form bringen:

$$2\,cos\,\frac{x+y}{2}\,cos\,\frac{x-y}{2} = b.$$

Ist also der absolute Wert von b kleiner als jener von $2\,cos\,\frac{\alpha}{2}$, so erhält man aus der Gleichung $cos\,\frac{x-y}{2} = \frac{b}{2\,cos\,\frac{\alpha}{2}}$ für $\frac{x-y}{2}$ zwei Werte: ω und $4\,R - \omega$. Aus $\frac{x-y}{2} = \omega$ und $\frac{x+y}{2} = \frac{\alpha}{2}$ findet man $x_1 = \frac{\alpha}{2} + \omega$, $y_1 = \frac{\alpha}{2} - \omega$; aus $\frac{x-y}{2} = 4\,R - \omega$ und $\frac{x+y}{2} = \frac{\alpha}{2}$ folgt $x_2 = 4\,R + \frac{\alpha}{2} - \omega$ und $y_2 = \frac{\alpha}{2} + \omega - 4\,R$.

e) $x + y = \alpha$, $\frac{sin\,x}{sin\,y} = m$.

Man findet $\frac{sin\,x}{sin\,y} - 1 = \frac{sin\,x - sin\,y}{sin\,y} = m - 1$, $\frac{sin\,x + sin\,y}{sin\,y} = m + 1$, also $\frac{sin\,x - sin\,y}{sin\,x + sin\,y} = \frac{m-1}{m+1}$. Daraus folgt (§ 133 a)

$$tg\,\frac{x-y}{2} = \frac{m-1}{m+1}\,tg\,\frac{\alpha}{2} \quad \ldots \quad 1).$$

In manchen Fällen ist es zweckmäßig, einen Hilfswinkel φ durch die Gleichung $m = tg\,\varphi$ einzuführen. Man erhält dann

$$\frac{m-1}{m+1} = \frac{tg\,\varphi - 1}{tg\,\varphi + 1} = \frac{tg\,\varphi - tg\,45^0}{1 + tg\,\varphi\,tg\,45^0} = tg\,(\varphi - 45^0), \text{ also}$$

$$tg\,\frac{x-y}{2} = tg\,(\varphi - 45^0)\ tg\,\frac{\alpha}{2}\ .\ .\ .\ 2).$$

Aus 1) oder 2) ergibt sich $\frac{x-y}{2}$, also auch x und y wie in *d)*.

Zusatz. In der letzten Aufgabe muss $\alpha \gtrless 2R$ sein; denn für $\alpha = 2R$ wäre $x + y = 2R$ und $\frac{\sin x}{\sin y} = 1$. Je nachdem nun die Größe m in der zweiten Gleichung von der Einheit verschieden oder derselben gleich ist, steht diese Gleichung im Widerspruche zur ersten oder ist eine Folgerung aus derselben. (Übrigens sind auch die Werte $\alpha = 0,\ 4R,\ 6R, \ldots$ ausgeschlossen.)

III. Abschnitt: Auflösung der Dreiecke.

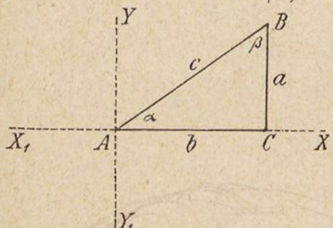


Fig. 114.

§ 136. Das rechtwinklige Dreieck. Um ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, d. h. die unbekannten Umfangsstücke aus den gegebenen Bestimmungsstücken desselben zu berechnen, benützt man außer dem Lehrsatze von der Winkelsumme des Dreieckes und dem Pythagoräischen Lehrsatze die Definitionsgleichungen der Winkelfunctionen. Legt man nämlich das gegebene Dreieck entsprechend der Fig. 114 in ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so erhält man nach § 123

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ tg\,\alpha = \frac{a}{b},\ cotg\,\alpha = \frac{b}{a}.$$

Wegen $\beta = R - \alpha$ hat man ferner

$$\sin\beta = \frac{b}{c},\ \cos\beta = \frac{a}{c},\ tg\,\beta = \frac{b}{a},\ cotg\,\beta = \frac{a}{b}.$$

Folgesätze. 1. Jede Kathete ist gleich dem Producte aus dem Sinus des Gegenwinkels oder dem Cosinus des anliegenden (spitzen) Winkels und der Hypotenuse.

2. Jede Kathete ist gleich dem Producte aus der Tangente des Gegenwinkels oder der Cotangente des anliegenden (spitzen) Winkels und der anderen Kathete.

Bei der Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes aus gegebenen Umfangsstücken können vier verschiedene Fälle vorkommen.

1. Gegeben: eine Kathete und ein spitzer Winkel, z. B. a und α.

Auflösung: $\beta = R - \alpha,\ b = a\,cotg\,\alpha,\ c = \frac{a}{\sin\alpha}$.

2. Gegeben: die Hypotenuse c und ein spitzer Winkel, z. B. α

Auflösung: $\beta = R - \alpha,\ a = c\sin\alpha,\ b = c\cos\alpha$.

Beispiel: Geg. $\begin{cases} c \\ \alpha \end{cases}$

c	627	$\log c$	2·79727
α	23° 30′	$\log \sin \alpha$	9·60070
β	66° 30′	$\log \cos \alpha$	9·96240
a	250·02	$\log a$	2·39797
b	575	$\log b$	2·75967

3. Gegeben: die Katheten a und b.

Auflösung: $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = R - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin \alpha}$.

Die Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist nur dann zu benützen, wenn sich die Quadrate von a und b ohne längere Rechnung bilden lassen.

4. Gegeben: die Hypotenuse c und eine Kathete, z. B. a.

Auflösung: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = R - \alpha$, $b = \sqrt{(c-a)(c+a)}$.

Ist a nahezu $= c$, also $\sin \alpha$ nahezu $= 1$, so zeigt ein Blick in die Logarithmentafeln oder auf die Figur 105, dass eine scharfe Bestimmung des Winkels aus dem bekannten Werte des Sinus nicht möglich ist. Man findet z. B., dass der Gleichung $\log \sin \alpha = 9 \cdot 99977$ in fünfstelligen Tafeln die Winkel 88° 7′, 88° 8′ und 88° 9′ entsprechen. In diesem Falle ist es vortheilhaft, die aus den Gleichungen $\cos \beta = \frac{a}{c}$ und $tg \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}}$ abgeleitete Formel $tg \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$ zu benützen.

Zur Controle der Rechnung kann in den ersten zwei Fällen der Pythagoräische Lehrsatz in der Form $a^2 = (c-b)(c+b)$ oder $b^2 = (c-a)(c+a)$ und in den letzten zwei Fällen etwa die Gleichung $tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$ verwendet werden.

§ 137. Das gleichschenklige Dreieck. Die Auflösung des gleichschenkligen Dreieckes ABC läßt sich offenbar auf jene des rechtwinkligen Dreieckes ADC zurückführen. Das gleichschenklige Dreieck wird auf drei verschiedene Arten durch Umfangsstücke bestimmt: 1. durch die Grundlinie und einen Winkel, 2. durch einen Schenkel und einen Winkel, 3. durch die Grundlinie und einen Schenkel. Wenn z. B. a und β gegeben sind, so erhält man $\alpha = 2R - 2\beta$, $b = \frac{a}{2} : \cos \beta$ u. s. f.

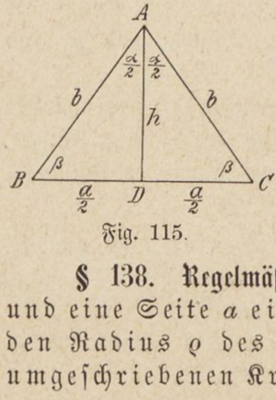


Fig. 115.

§ 138. Regelmäßige Polygone. Gegeben: Die Seitenanzahl n und eine Seite a eines regelmäßigen Polygones. Man berechne den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises, den Radius r des umgeschriebenen Kreises und den Flächeninhalt F.

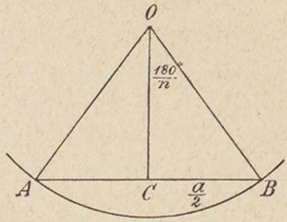


Fig. 116.

Auflösung. Es sei $AB = a$ eine Seite des regelmäßigen Polygones und O der Mittelpunkt desselben. Zieht man $OC \perp AB$, so ist $OC = \varrho$, $AO = BO = r$ und $\sphericalangle\, COB = \frac{180^0}{n} = \frac{2R}{n}$.

Somit ist $\varrho = \frac{a}{2} \cot g \frac{2R}{n}$, $r = \dfrac{a}{2 \sin \frac{2R}{n}}$ und

$$F = \frac{n a \varrho}{2} = \frac{n a^2}{4} \cot g \frac{2R}{n}.$$

§ 139. Trigonometrische Lehrsätze für beliebige Dreiecke. *a)* Sinussatz: Je zwei Seiten eines Dreieckes verhalten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

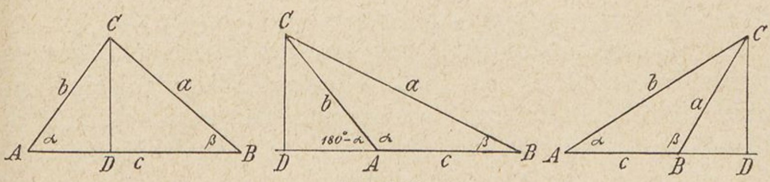


Fig. 117.

Erster Beweis. Es sei ABC das gegebene Dreieck und $CD \perp AB$. Wenn α und β spitze Winkel sind, so findet man $CD = a \sin \beta = b \sin \alpha$, somit $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$. Für $\alpha > R$ ist $CD = a \sin \beta = b \sin (2R - \alpha) = b \sin \alpha$, und für $\beta > R$ ist $CD = a \sin (2R - \beta) = a \sin \beta = b \sin \alpha$. Es gilt also in jedem Falle (auch für $\alpha = R$ oder $\beta = R$) die Proportion

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Analog findet man $b : c = \sin \beta : \sin \gamma$ und $c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$.

Aus diesen drei Proportionen ergibt sich die fortlaufende Proportion $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.

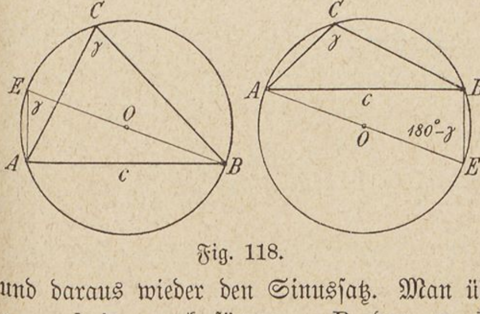


Fig. 118.

Zweiter Beweis. Ist $\gamma < R$, so schreibe man dem Dreiecke ABC einen Kreis um, ziehe den Durchmesser BE und die Sehne AE. Es ist dann $\sphericalangle\, AEB = ACB = \gamma$ und $\sphericalangle\, BAE = R$. Bezeichnet man also den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises mit d, so ist $c = d \sin \gamma$. Analog erhält man $a = d \sin \alpha$, $b = d \sin \beta$ und daraus wieder den Sinussatz. Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung $c = d \sin \gamma$ auch für $\gamma = R$ oder $\gamma > R$ besteht.

b) Cosinussatz:

Man erhält das Quadrat einer Dreiecksseite, wenn man von der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten das doppelte Product aus denselben und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels subtrahiert.

Erster Beweis. Es ist $a = d \sin \alpha = d \sin(\beta + \gamma) = d \sin \beta \cos \gamma + d \sin \gamma \cos \beta$,

somit $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$.

Analog findet man $b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$,

$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$.

Addiert man diese drei Gleichungen, nachdem man sie der Reihe nach mit $a, -b, -c$ multipliciert hat, so folgt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha.$$

Ebenso findet man $b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a \cos \beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma$.

Zweiter Beweis. Wenn α und β spitze Winkel sind, so erhält man aus der Figur 117 $a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = (b \sin \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 =$ u. s. f.

Zusatz. Der Cosinussatz wird häufig nach dem französischen Staatsmanne und Mathematiker Carnot (1753 bis 1823) der Carnot'sche Lehrsatz genannt; er kommt jedoch bereits in Euklids Elementen vor, wenn auch nicht in trigonometrischer Form. Man überzeugt sich leicht, dass der Cosinussatz den Pythagoräischen Lehrsatz als speciellen Fall umfasst.

c) Mollweides Gleichungen:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Erster Beweis. $\frac{a+b}{c} = \frac{d \sin \alpha + d \sin \beta}{d \sin \gamma} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma} =$

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Analog wird die zweite Gleichung bewiesen.

Zweiter Beweis. Sind a, b, c die Seiten des gegebenen Dreieckes ABC, so verlängere man b um $CD = a$. In dem Dreiecke ABD ist nun $\sphericalangle BDA = \frac{\gamma}{2}$ und $\sphericalangle ABD = \beta + \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} + R - \frac{\alpha}{2} = R - \frac{\alpha-\beta}{2}$. Mittelst des Sinussatzes erhält man daher $(a+b) : c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}$.

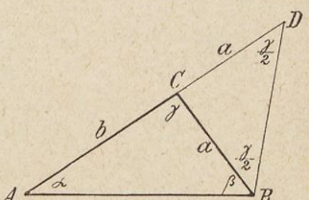


Fig. 119.

Analog verfährt man im zweiten Falle.

Zusatz. Diese Gleichungen sind im Jahre 1804 von Cagnoli und im Jahre 1808 von Mollweide veröffentlicht worden; sie sollten daher die Cagnolischen Gleichungen genannt werden.

d) Tangentensatz: Die Summe zweier Seiten verhält sich zur Differenz derselben wie die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel zur Tangente der halben Differenz derselben.

Erster Beweis. Es ist $(a + b) : (a - b) = (d \sin \alpha + d \sin \beta) : (d \sin \alpha - d \sin \beta) = (\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = tg \frac{\alpha + \beta}{2} : tg \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Zweiter Beweis. Man dividiere die Mollweide'schen Gleichungen durch einander.

§ 140. Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke. I. Auflösungsfall. Gegeben: Eine Seite und zwei Winkel, z. B. a, α und β.

Auflösung: $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$, $b : a = \sin \beta : \sin \alpha$, $c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$, also $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$.

In numerischen Auflösungen benützt man mit Vortheil die Gleichungen $a = d \sin \alpha$, $b = d \sin \beta$, $c = d \sin \gamma$. Z. B.

Geg.	c	51	$\log c$	1·70757
Geg.	α	39° 26′	$\log \sin \gamma$	8·87829
Geg.	β	136° 14′	$\log d$	2·82928
	γ	4° 20′	$\log \sin \alpha$	9·80290
	a	428·73	$\log \sin \beta$	9·83993
	b	466·89	$\log a$	2·63218
			$\log b$	2·66921

Probe:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

II. Auflösungsfall. Gegeben: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z. B. a, b, γ.

Auflösung: Mittelst der Mollweide'schen Gleichungen

$$c \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = (a + b) \sin \frac{\gamma}{2}, \quad c \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = (a - b) \cos \frac{\gamma}{2}$$

erhält man $\log \left(c \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ und $\log \left(c \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$. Durch Subtraction dieser Logarithmen ergibt sich $\log tg \frac{\alpha - \beta}{2}$ und daraus $\frac{\alpha - \beta}{2}$. Berechnet man auch $\frac{\alpha + \beta}{2}$, so sind damit die Winkel α und β selbst bestimmt.

Da nun die Werte von $\log\left(c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\log\left(c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, ferner $\log\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ und $\log\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ bekannt sind, so erhält man $\log c$, indem man den dritten Logarithmus vom ersten oder den vierten vom zweiten subtrahiert. Eine einfache Controle der Rechnung besteht darin, dass man $\log c$ auf beide Arten berechnet und die gefundenen Werte vergleicht.

Beispiel.

Geg. a	16·9	11) $\frac{\alpha-\beta}{2}$	4° 23′ 30″
Geg. b	15·7	14) $\frac{\alpha+\beta}{2}$	64° 23′ 30″
Geg. γ	51° 13′	15) α	68° 47′
1) $a+b$	32·6	16) β	60°
2) $a-b$	1·2	19) c	14·132
3) $\frac{\gamma}{2}$	25° 36′ 30″		
4) $\log(a+b)$	1·51322	5) $\log(a-b)$	0·07918
6) $\log\sin\frac{\gamma}{2}$	9·63570	7) $\log\cos\frac{\gamma}{2}$	9·95510
8) $\log\left(c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	1·14892	9) $\log\left(c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	0·03428
		10) $\log tg\frac{\alpha-\beta}{2}$	8·88536
12) $\log\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$9\cdot99872_5$	13) $\log\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	8·88408
17) $\log c$	$1\cdot15019_5$	18) $\log c$	1·15020

Die Reihenfolge der Operationen ist hier mit 1), 2), 3), ... bezeichnet.

Zusätze. 1. Will man nur die dritte Seite c berechnen, so kann man auch die Gleichung $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$ benützen. Man pflegt dieselbe, namentlich wenn a und b mehrstellige Zahlen sind, in folgender Weise zu transformieren:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\left(2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1\right)}=\sqrt{(a+b)^2-m^2}=\sqrt{(a+b-m)(a+b+m)};$$

die Größe m ist durch die Gleichung $2\sqrt{ab}\cos\frac{\gamma}{2}=m$ bestimmt.

2. Wenn man nur α und β berechnen will, so kann man auch den Tangentensatz benützen. Aus

$$tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}tg\frac{\alpha+\beta}{2}$$

erhält man nämlich $\frac{\alpha-\beta}{2}$, also auch α und β.

III. Auflösungsfall. Gegeben: Zwei Seiten und der Gegenwinkel der größeren Seite; z. B. a, b und α, wenn $a > b$ ist.

Auflösung: Aus $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$ bestimmt man β und findet hierauf $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ und $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$. Auch in diesem Falle ist es vortheilhaft, die Gleichungen $a = d \sin\alpha$ u. s. f. zu benützen. Zur Probe substituiere man die gegebenen und die gefundenen Werte in eine Mollweide'sche Gleichung.

Zusätze. 1. Aus $b < a$ folgt $\frac{b \sin\alpha}{a} < 1$. Es gibt daher stets zwei supplementäre Winkel β, welche der Gleichung $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$ genügen. Von diesen beiden Winkeln ist nur der spitze zulässig; denn aus $b < a$ folgt $\beta < \alpha$, also auch $\beta < R$.

2. Wenn $b > a$ und $\frac{b \sin\alpha}{a} < 1$ oder $= 1$ ist, so gibt es zwei Auflösungen, beziehungsweise eine Auflösung. Ist jedoch $\frac{b \sin\alpha}{a} > 1$, so gibt es kein Dreieck mit den gegebenen Umfangsstücken, weil nicht $\sin\beta > 1$ sein kann. Diese Ergebnisse stimmen mit der Determination im § 59 überein.

Beispiel.

Geg.	a	12	$\log a$	1·07918
	b	15	$\log \sin\alpha$	9·80807
	α	40^0	$\log d$	1·27111
	β_1	$53^0 27' 53''$	$\log b$	1·17609
	β_2	$126^0 32' 7''$	$\log \sin\beta$	9·90498
	γ_1	$86^0 32' 7''$	$\log \sin\gamma_1$	9·99920
	γ_2	$13^0 27' 53''$	$\log \sin\gamma_2$	9·36707
	c_1	18·634	$\log c_1$	1·27031
	c_2	4·3469	$\log c_2$	0·63818

Anmerkungen. 1. Aus $\beta_1 + \beta_2 = 2R$ und $\alpha + \beta_1 + \gamma_1 = 2R$ folgt $\gamma_1 = \beta_2 - \alpha$; ebenso erhält man $\gamma_2 = \beta_1 - \alpha$.

2. Weil d durch a und α bestimmt ist, so haben die den beiden Dreiecken umgeschriebenen Kreise gleiche Durchmesser. Es ist also $c_1 = d \sin\gamma_1$ und $c_2 = d \sin\gamma_2$.

IV. Auflösungsfall. Gegeben: Alle drei Seiten.

Auflösung: Man findet die Winkel mittelst des Cosinussatzes:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Wenn die Längen der Seiten durch mehrstellige Zahlen ausgedrückt sind, so benütze man die Halbwinkelsätze, welche durch Transformation des Cosinussatzes erhalten werden. Es ist nämlich

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} =$$

$$\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

wenn $a+b+c=2s$ gesetzt wird. Ebenso findet man

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

daher $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ und $cotg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$.

Eine jede dieser vier Formeln gestattet eine bequeme Berechnung des Winkels α; doch sind die letzten zwei Formeln den ersten zwei vorzuziehen, weil sie genauere Resultate liefern, und weil bei ihrer Anwendung eine geringere Anzahl von Logarithmen zur Berechnung aller drei Winkel ausreicht.

Wenn man alle drei Winkel berechnen soll, so ist es vortheilhaft, die Gleichung $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ (§ 110 *b*) zur Transformation der eben abgeleiteten Formeln zu benützen. Man findet $tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$, $tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}$, $tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}$, und $cotg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{s-a}{\varrho}$; $cotg\,\frac{\beta}{2} = \frac{s-b}{\varrho}$, $cotg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{s-c}{\varrho}$.

Diese Formeln erhält man auch direct aus der Fig. 120. Es seien D, E, F die Berührungspunkte der Dreiecksseiten mit dem eingeschriebenen Kreise, und man bezeichne $AE = AF$ mit x, $BF = BD$ mit y, $CD = CE$ mit z. Man hat dann $2x + 2y + 2z = 2s$, somit $x + y + z = s$, ferner $y + z = a$, also $x = s - a$. Ebenso findet man $y = s - b$ und $z = s - c$. Daraus folgt $tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{x} = \frac{\varrho}{s-a}$ u. s. f.

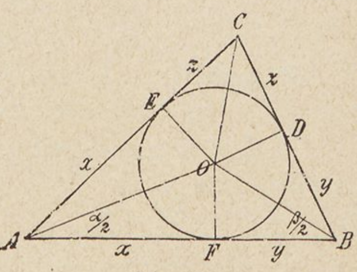


Fig. 120.

Beispiel. Geg. a	$14{\cdot}23$	6) $\log s$	$1{\cdot}44138$
b	$19{\cdot}68$	7) $\log(s-a)$	$1{\cdot}12710$
c	$21{\cdot}53$	8) $\log(s-b)$	$0{\cdot}90037$
1) $2s$	$55{\cdot}26$	9) $\log(s-c)$	$0{\cdot}79796$
2) s	$27{\cdot}63$	10) $\log\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$	$0{\cdot}61595-2$
3) $s-a$	$13{\cdot}40$		
4) $s-b$	$7{\cdot}95$	11) $\log\frac{1}{\varrho}$	$0{\cdot}30797_5-1$
5) $s-c$	$6{\cdot}28$		
15) $\frac{\alpha}{2}$	$20^0\ 9'\ 52''$	12) $\log cotg\,\frac{\alpha}{2}$	$10{\cdot}43507_5$
16) $\frac{\beta}{2}$	$31^0\ 45'\ 20''$	13) $\log cotg\,\frac{\beta}{2}$	$10{\cdot}20834_5$
17) $\frac{\gamma}{2}$	$38^0\ 4'\ 49''$	14) $\log cotg\,\frac{\gamma}{2}$	$10{\cdot}10593_5$

$$\alpha = 40^0\ 19'\ 44'',\ \beta = 63^0\ 30'\ 40'',\ \gamma = 76^0\ 9'\ 38''.$$

Die Größe 10) wird erhalten, indem man die Größen 7), 8) und 9) addiert und zugleich ihre Summe von 6) subtrahiert. Die Größe 12) ist die Summe der Größen 7) und 11), u. s. f.

Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0\ 0'\ 2''$. Eine so kleine Abweichung von der richtigen Summe, d. i. von 180^0, hat meistens ihren Grund im Rechnen mit unvollständigen Decimalzahlen; sie wird in der Regel nachträglich durch gleichmäßige Änderung der gefundenen Werte beseitigt.

IV. Abschnitt: Anwendungen der Trigonometrie in geometrischen Aufgaben.

§ 141. Flächeninhalt des Dreieckes. Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Beweis. Zieht man die Höhe CD zur Seite c (Fig. 117), so ist offenbar $CD = b \sin\alpha$, also $F = \frac{b c \sin\alpha}{2}$.

Zusatz. Wenn das Dreieck durch andere Umfangsstücke bestimmt ist, so kann man mit Hilfe derselben zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel berechnen und dann den vorausgehenden Lehrsatz anwenden. Die im § 110 abgeleiteten Formeln $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ und $F = s\varrho$ entsprechen dem vierten Auflösungsfalle.

§ 142. Weitere Aufgaben über das Dreieck. Gegeben: Die Winkel eines Dreieckes und *a)* der Umfang oder *b)* der Flächeninhalt oder *c)* der Radius des eingeschriebenen Kreises oder *d)* der Radius des umgeschriebenen Kreises. Das Dreieck ist aufzulösen.

Auflösungen. *a)* Es ist $2s = a + b + c = d\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4d\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ (§ 133 *c*). Man berechnet daher $\log d$ aus der Gleichung

$$d = \frac{s}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

und benützt hierauf die Formeln $a = d\sin\alpha$, $b = d\sin\beta$, $c = d\sin\gamma$.

b) $2F = bc\sin\alpha = d^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Also

$$d = \sqrt{\frac{2F}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}},\quad a = d\sin\alpha \quad \text{u. s. f.}$$

c) Man berechne zunächst x, y, z aus den Gleichungen (Fig. 120)

$$x = \varrho\cot g\frac{\alpha}{2},\quad y = \varrho\cot g\frac{\beta}{2},\quad z = \varrho\cot g\frac{\gamma}{2}$$

und findet dann $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.

d) $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$.

e) Aus den gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreieckes die Längen der Schwerlinien zu berechnen.

Auflösung. Es sei $BD = DC$, also $AD = s_1$ die zur Seite $BC = a$ gehörige Schwerlinie. Man findet $s_1^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - ac\cos\beta$ oder $s_1^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 - ab\cos\gamma$.

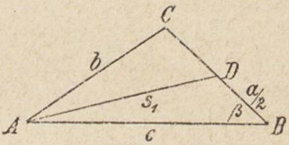


Fig. 121.

Um s_1 durch die Seiten auszudrücken, eliminiert man $ac\cos\beta$ aus der ersten dieser Gleichungen und aus der folgenden: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$. Es ist dann

$$s_1^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

f) Aus den gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreieckes die Längen der Winkelsymmetralen (soweit sie in die Fläche des Dreieckes fallen) zu berechnen.

Auflösung. Ist ABC das gegebene Dreieck und $AD = w_1$ die Symmetrale des Winkels α, so erhält man aus dem Dreiecke ABD

$$w_1 : c = \sin\beta : \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right).$$

Nun ist $\frac{\alpha}{2} + \gamma = \frac{\alpha + \gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = R - \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = R - \frac{\beta - \gamma}{2}$.

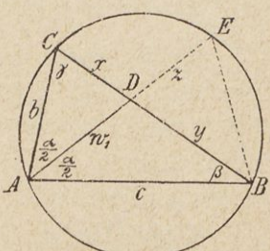


Fig. 122.

Man hat also auch $w_1 : c = \sin\beta : \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$.

Um w_1 durch die Seiten auszudrücken, ersetzt man in dieser Proportion $\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ durch $\frac{2}{ac}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ und $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ $=\frac{b+c}{a}\sin\frac{\alpha}{2}$ (§ 139 c) durch $\frac{b+c}{a}\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$. Es ist dann

$$w_1 = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}.$$

Anmerkung. Zu diesem Resultate gelangt man auch ohne Anwendung trigonometrischer Lehrsätze. Setzt man nämlich (Fig. 122) $CD = x, DB = y$, so ist $x + y = a$ und $x : y = b : c$, also $x = \frac{ab}{b+c}, y = \frac{ac}{b+c}$. Nun verlängere man AD bis zum Durchschnittspunkte E mit dem umgeschriebenen Kreise und bezeichne DE mit z. Es ist dann $w_1 z = xy$ (§ 100); ferner $\triangle ADC \sim ABE$, also $w_1 : b = c : (w_1 + z)$. Hieraus folgt $w_1^2 = bc - w_1 z = bc - xy = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$ u. s. f.

§ 143. Sehnenviereck. Aus den gegebenen Seiten eines Sehnenviereckes die Winkel und den Flächeninhalt zu berechnen.

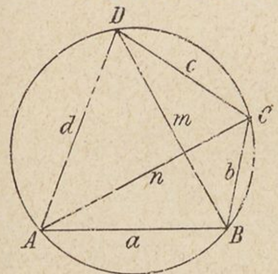


Fig. 123.

Auflösung. Man bezeichne die Seiten und die Diagonalen des Sehnenviereckes $ABCD$ entsprechend der Figur 123 und den Winkel BAD mit α. Bestimmt man das Quadrat der Diagonale m aus den Dreiecken ABD und BCD, so erhält man, da $\sphericalangle BCD = 2R - \alpha$ ist,

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

also $$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}.$$

Auf analogem Wege wie bei der Ableitung der Halbwinkelsätze erhält man daraus, wenn $a + b + c + d = 2s$ gesetzt wird,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}},\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}},$$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}} \text{ u. s. f.}$$

Ferner ist $F = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\alpha = (ad+bc)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, somit $F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

V. Abschnitt: Anwendungen der Trigonometrie auf Höhen- und Distanzmessungen.

§ 144. Höhenmessungen. Unter der Höhe oder der verticalen Erhebung eines Punktes S über einem Punkte A wird der Abstand des Punktes S von der durch A gelegten Horizontalebene verstanden. Wenn es sich um die Bestimmung einer Höhe oder einer Distanz handelt, so misst man in der Regel eine gewisse Strecke, die Standlinie, und außerdem gewisse Winkel, welche durch die gegenseitige Lage der Standlinie und des Objectes bestimmt werden.

a) Die Standlinie $AB = a$ sei horizontal, und ihre Verlängerung gehe durch die Verticale ST. Man messe die Standlinie und die Höhenwinkel $TAS = \alpha$ und $TBS = \beta$. Es ist dann

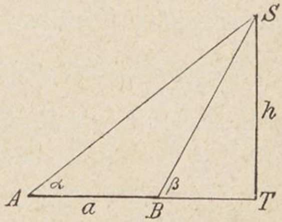


Fig. 124.

$$AS = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \text{ und } h = AS \sin \alpha, \text{ somit}$$

$$h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

b) Die Standlinie sei nicht horizontal, und ihre Verlängerung gehe durch die Verticale ST. Man messe die Standlinie $AB = a$ und die Höhenwinkel α, β und $TAB = \gamma$. Dann ist

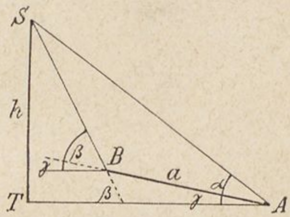


Fig. 125.

$$AS = \frac{a \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)} \text{ und } h = AS \sin \alpha, \text{ somit}$$

$$h = \frac{a \sin \alpha \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

c) Die Standlinie sei horizontal und nicht nach der Verticalen ST gerichtet. Man messe die Standlinie $AB = a$, die Höhenwinkel α, β und die Horizontalwinkel $BAT = \gamma$ und $ABT = \delta$. Man findet dann

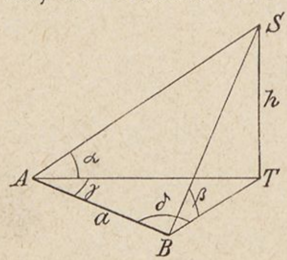


Fig. 126.

$$AT = \frac{a \sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}, \quad BT = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\gamma + \delta)},$$

$$h = AT\, tg\, \alpha = \frac{a \sin \delta\, tg\, \alpha}{\sin(\gamma + \delta)} \quad \text{oder}$$

$$h = BT\, tg\, \beta = \frac{a \sin \gamma\, tg\, \beta}{\sin(\gamma + \delta)}.$$

Die größere oder geringere Übereinstimmung der beiden Werte, welche man aus den letzten Formeln für h erhält, bildet eine Controle für die Genauigkeit der Messungen.

§ 145. Distanzmessungen. *a)* Die Entfernung zweier Punkte M und N durch Winkelmessungen aus zwei anderen Punkten A und B zu bestimmen, wenn alle vier Punkte in einer Ebene liegen und die Länge der Strecke AB (der Standlinie) bekannt ist.

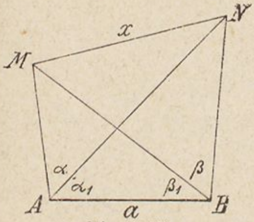


Fig. 127.

Auflösung. Man messe die Winkel, α, α_1, β, β_1 (Fig. 127) und findet dann aus dem Dreiecke ABM

$$AM = \frac{a \sin \beta_1}{\sin(\alpha + \alpha_1 + \beta_1)}, \; BM = \frac{a \sin(\alpha + \alpha_1)}{\sin(\alpha + \alpha_1 + \beta_1)}.$$

Ebenso ergibt sich aus dem Dreiecke ABN

$$AN = \frac{a \sin(\beta + \beta_1)}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta)}, \; BN = \frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1 + \beta)}.$$

Da somit jedes der beiden Dreiecke MAN und MBN durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmt ist, so kann man die dritte Seite $MN = x$ aus beiden Dreiecken berechnen und hat dadurch eine Controle für die Richtigkeit der Messungen.

Zusatz. Dieses Problem ist in der praktischen Geometrie unter dem Namen „das Vorwärtseinschneiden" bekannt.

b) Aus der bekannten Entfernung zweier Punkte A und B die Entfernung zweier anderer Punkte M und N durch Winkelmessungen aus diesen Punkten zu bestimmen, wenn alle vier Punkte in einer Ebene liegen.

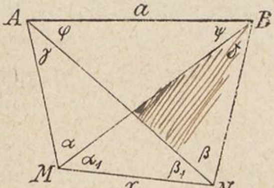


Fig. 128.

Auflösung. Man messe die Winkel $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$. Dann sind auch die Winkel γ, δ und die Winkelsumme $\varphi + \psi$ bekannt. Man findet ferner

$$\frac{AB}{AM} = \frac{\sin \alpha}{\sin \psi}, \; \frac{AM}{MN} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma}, \text{ somit}$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{\sin \alpha \sin \beta_1}{\sin \psi \sin \gamma};$$

$$\frac{AB}{BN} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi}, \; \frac{BN}{MN} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \delta}, \text{ also } \frac{AB}{MN} = \frac{\sin \beta \sin \alpha_1}{\sin \varphi \sin \delta}.$$

Daraus folgt $\dfrac{\sin \alpha \sin \beta_1}{\sin \psi \sin \gamma} = \dfrac{\sin \beta \sin \alpha_1}{\sin \varphi \sin \delta}, \; \dfrac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \dfrac{\sin \alpha_1 \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \delta}.$

Man kennt somit die Summe der Winkel φ und ψ, ferner das Verhältnis ihrer Sinus und kann daher diese Winkel einzeln berechnen (§ 135 *e*). Schließlich erhält man aus den vorausgehenden Gleichungen:

$$MN = \frac{a \sin \psi \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta_1} \text{ oder } MN = \frac{a \sin \varphi \sin \delta}{\sin \alpha_1 \sin \beta}.$$

Zusätze. 1. Diese Aufgabe heißt in der praktischen Geometrie „das Rückwärtseinschneiden aus zwei Punkten" oder auch Hansen's Aufgabe, obwohl ihre erste Lösung nicht von Hansen herrührt.

2. Man beachte, dass die Summe $\alpha_1 + \beta_1$ und daher auch die Summe $\varphi + \psi$ keinen der Werte 0, $2R$, $4R$, ... annehmen kann (§ 135 *e*, Zusatz).

c) Es sind die Entfernungen eines Punktes D von drei anderen Punkten A, B und C durch Winkelmessungen von D aus zu bestimmen, wenn die gegenseitige Lage der Punkte A, B, C bekannt ist, und wenn alle vier Punkte in einer Ebene liegen.

Auflösung. Es seien die Strecken $AB = a$, $BC = b$ und der Winkel $ABC = \gamma$ bekannt, und man messe die Winkel α, β. Man findet dann

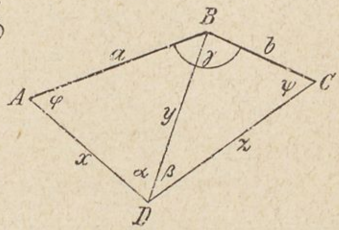


Fig. 129.

$$\varphi + \psi = 4R - (\alpha + \beta + \gamma),$$

ferner $\frac{y}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}, \frac{y}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$, somit

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}.$$

Nun lassen sich φ und ψ (§ 135 *e*), daher auch x, y, z berechnen.

Zusätze. 1. Diese Aufgabe heißt in der praktischen Geometrie „das Rückwärtseinschneiden aus drei Punkten" oder das Pothenot'sche Problem, obwohl sie zuerst von Snellius (1614) veröffentlicht wurde.

2. Für $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, also auch $\varphi + \psi = 2R$ wird diese Aufgabe unbestimmt. Dies ergibt sich aus dem Zusatze zu § 135 *e* oder auch durch geometrische Construction des Punktes D. Dieser wird nämlich gefunden, indem man über a und b als Sehnen Kreisabschnitte construiert, in welchen alle zu jenen Sehnen gehörigen Peripheriewinkel $= \alpha$, beziehungsweise $= \beta$ sind (§ 60 *m*). Im allgemeinen erhält man außer B nur noch einen gemeinschaftlichen Punkt D der beiden Kreislinien. Wenn jedoch $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ und somit $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, so genügt jeder Punkt des Kreisbogens ADC der gestellten Bedingung.

Stereometrie.

I. Abschnitt: Gerade und Ebenen im Raume.

Über die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im allgemeinen.*)

§ 146. **Zwei Ebenen.** *a)* Wenn zwei Ebenen drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gemeinschaftlich haben, so fallen sie zusammen.

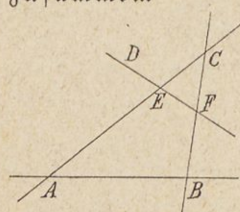


Fig. 130.

Beweis. Man bezeichne mit α und β die beiden Ebenen und mit A, B, C die gemeinschaftlichen Punkte derselben. Legt man durch je zwei dieser Punkte eine Gerade, so liegt diese nach dem Grundsatze von der Ebene (§ 4) mit allen ihren Punkten sowohl in α als auch in β. Um nun von einem beliebigen Punkte D von α nachzuweisen, dass derselbe auch β angehöre, ziehe man durch D in der Ebene α eine Gerade so, dass sie von den Geraden

*) Dazu gehört auch § 4 der Einleitung.

AB, BC, CA mindestens zwei in verschiedenen Punkten durchschneidet. (Liegt z. B. D außerhalb der geschlossenen Figur ABC, so lege man die Gerade durch D und einen Punkt innerhalb jener Figur, und umgekehrt.) Bezeichnet man die Schnittpunkte mit E und F, so sind dieselben auch Punkte der Ebene β; daher fällt die Gerade EF mit allen ihren Punkten, also auch mit dem Punkte D in die Ebene β.

Folgesätze. Eine Ebene ist eindeutig bestimmt:

1. durch drei Punkte A, B, C, welche nicht in einer Geraden liegen (Ebene ABC),

2. durch eine Gerade a und einen Punkt B außerhalb derselben (Ebene aB),

3. durch zwei sich schneidende Gerade a und b (Ebene ab),

4. durch zwei parallele Gerade a und b (Ebene ab). Denn zwei Gerade sind parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und beliebig verlängert einander nicht schneiden (§ 14). Man sieht also, daſs der Grundsatz von den Parallelen auch für den Raum Geltung hat.

Zusatz. Eine Ebene kann man sich entstanden denken:

1. indem eine Gerade sich um einen ihrer Punkte dreht und zugleich längs einer zweiten Geraden gleitet,

2. indem eine Gerade längs zweier sich schneidender Geraden gleitet,

3. indem eine Gerade längs zweier paralleler Geraden gleitet,

4. indem eine Gerade längs einer zweiten Geraden gleitet und zugleich ihrer ersten Lage parallel bleibt.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen geht daraus hervor, daſs die „erzeugende Gerade" stets in derselben Ebene verbleibt und jeden Punkt derselben erreichen kann. (Im zweiten Falle wird die Lage der erzeugenden Geraden im Schnittpunkte der „Leitgeraden" unbestimmt.)

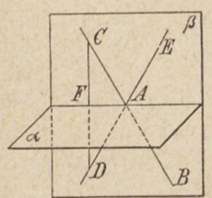


Fig. 131.

b) Wenn zwei nicht zusammenfallende Ebenen einen Punkt gemeinschaftlich haben, so haben sie eine durch diesen Punkt gehende Gerade und nur diese gemeinschaftlich.

Beweis. Es seien α und β die gegebenen Ebenen und A ein gemeinschaftlicher Punkt derselben. Nun ziehe man durch A in β zwei Gerade BC und DE und bemerke, daſs jede derselben durch α in zwei Halbstrahlen zerlegt wird, welche auf entgegengesetzten Seiten von α liegen. Die Gerade CD muſs daher α in einem Punkte F (nicht A) treffen, welcher nach dem Grundsatze von der Ebene auch β angehört. Da nach demselben Grundsatze die Gerade AF in beiden Ebenen liegt, und da Punkte außerhalb dieser Geraden beiden Ebenen zugleich nicht angehören können (§ 146 *a*), so ist damit der Lehrsatz bewiesen.

Folgesatz. Durch zwei einander schneidende Ebenen α und β (§ 4) wird eine Gerade $\alpha\beta$, ihre Durchschnittslinie, bestimmt.

c) Zwei sich schneidende Ebenen zerlegen den Raum in vier Theile, welche *Flächenwinkel* oder *Keile* genannt werden. Von diesen heißen je zwei gegenüberliegende *Scheitelkeile* und je zwei nebeneinanderliegende *Nebenkeile*. Die Durchschnittsgerade der Ebenen heißt *Kante* eines jeden der vier Keile; die beiden Halbebenen, welche einen Keil begrenzen, heißen seine *Seiten* oder *Schenkelflächen*.

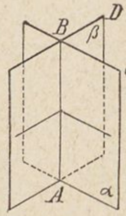


Fig. 132.

Jeden Keil kann man sich durch Drehung einer Halbebene um die sie begrenzende Gerade entstanden denken. Ist AB die Kante des Keiles, α die eine und β die andere Schenkelfläche, ist ferner C ein Punkt von α und D ein Punkt von β, so wird der Keil je nach dem angenommenen Drehungssinne mit $C\overline{AB}D = (\alpha\beta)$ oder $D\overline{AB}C = (\beta\alpha)$ bezeichnet. In allen Betrachtungen, bei welchen es auf den Sinn der Drehung nicht ankommt, ist jede dieser Bezeichnungen zulässig.

§ 147. Zwei Gerade. Wenn zwei Gerade in einer Ebene liegen, so können sie zusammenfallen, sich schneiden oder zueinander parallel sein. Es ist jedoch auch der Fall möglich, dass zwei Gerade nicht in einer Ebene liegen. Man überzeugt sich davon, indem man durch eine Gerade a eine Ebene α legt und einen außerhalb a liegenden Punkt von α mit einem Punkte außerhalb α durch eine Gerade b verbindet. Zwei solche Gerade a und b heißen *sich kreuzende* oder *windschiefe Gerade*. Es ist leicht einzusehen, dass zwei beliebige Gerade im Raume im allgemeinen windschief sind.

Parallele Lage von Geraden und Ebenen.

§ 148. Gerade und Ebene. Eine Gerade heißt zu einer Ebene parallel und zugleich die Ebene zur Geraden, wenn diese (beliebig verlängert) die (beliebig erweiterte) Ebene nicht trifft. Die Möglichkeit einer solchen Lage geht aus dem nachfolgenden Lehrsatze hervor:

a) *Legt man durch die eine von zwei parallelen Geraden eine Ebene, so ist diese zur anderen Geraden parallel.*

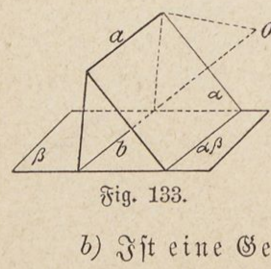


Fig. 133.

Beweis. Es sei $a \parallel b$ und β die durch b gelegte Ebene. Hätte a mit β einen Punkt O gemeinschaftlich, so müsste dieser auch der durch a und b bestimmten Ebene ab angehören; er müsste also in der Schnittlinie der Ebenen β und ab, d. h. in der Geraden b liegen. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung $a \parallel b$; also ist $a \parallel \beta$.

b) *Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, so ist sie auch* zu jeder Geraden der letzteren parallel, welche mit ihr in einer Ebene liegt.

Beweis. Es sei $a \parallel \beta$, und b eine in β liegende Gerade, welche zugleich mit a in derselben Ebene liegt. Hätten a und b einen Schnittpunkt, so wäre derselbe zugleich der Schnittpunkt von a und β u. s. f.

Folgesatz. Legt man durch eine Gerade, welche zu einer Ebene parallel ist, eine zweite Ebene, welche die erstere schneidet, so ist die Schnittlinie zur gegebenen Geraden parallel.

c) Legt man durch jede von zwei parallelen Geraden je eine Ebene derart, dass sich die beiden Ebenen schneiden, so ist ihre Schnittlinie zu jeder der gegebenen Geraden parallel.

Beweis. Es sei $a \parallel b$ (Fig. 133), α die durch a und β die durch b gelegte Ebene. Nach dem Lehrsatze *a)* ist $a \parallel \beta$, somit nach dem vorausgehenden Folgesatze $a \parallel \alpha\beta$. Ebenso findet man $b \parallel \alpha$ und daraus $b \parallel \alpha\beta$.

d) Ist von zwei Geraden eine jede zu einer dritten parallel, so sind jene zwei Geraden auch zueinander parallel.

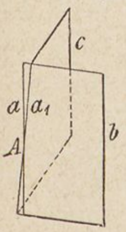


Fig. 134.

Beweis. Es sei $a \parallel c$ und $b \parallel c$. Legt man durch b und einen beliebigen Punkt A der Geraden a, ferner durch c und den Punkt A je eine Ebene, so müssen sich die beiden Ebenen in der Geraden a schneiden. Denn wäre a_1 die Schnittlinie, so hätte man $a_1 \parallel c$ und $a \parallel c$, was dem Grundsatze von den Parallelen widerspricht. Somit ist nach dem vorausgehenden Lehrsatze $a \parallel b$.

§ 149. Zwei Ebenen. Wenn zwei Ebenen (beliebig erweitert) einander nicht schneiden, so heißen sie parallel. Die Möglichkeit einer solchen Lage ergibt sich aus dem folgenden Lehrsatze:

a) Ist eine Ebene zu jeder von zwei sich schneidenden Geraden parallel, so ist sie auch zu jener Ebene parallel, welche durch die beiden Geraden bestimmt wird.

Beweis. Man bezeichne die gegebenen Geraden mit a und b, die gegebene Ebene mit γ. Wenn letztere die Ebene ab schneiden würde, so müsste die Schnittlinie zu a und b parallel sein (§ 148 *b*). Dies ist jedoch nicht möglich, da a und b einander schneiden.

b) Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind die Schnittlinien parallel.

Beweis. Wenn die parallelen Ebenen α und β von der Ebene γ geschnitten werden, so liegen die Schnittlinien $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ in einer Ebene (γ) und haben keinen Punkt gemeinschaftlich. Denn würden sie sich schneiden, so wäre der Schnittpunkt den Ebenen α und β gemeinschaftlich, was nach der Voraussetzung nicht möglich ist.

Folgesatz. Alle von zwei parallelen Ebenen begrenzten Strecken paralleler Geraden sind einander gleich.

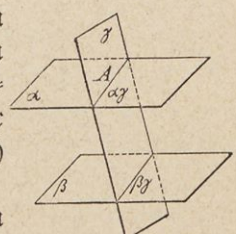


Fig. 135.

c) Durch einen gegebenen Punkt läſst sich zu einer gegebenen Ebene eine einzige parallele Ebene legen.

Beweis. Gesetzt, es lassen sich durch den Punkt A (Fig. 135) zwei Ebenen α und α_1 parallel zur Ebene β legen. Wenn nun durch A und einen Punkt von β eine Ebene γ so gelegt wird, daſs diese die Schnittlinie $\alpha\alpha_1$ nicht enthält, so ist $\alpha\gamma \parallel \beta\gamma$ und $\alpha_1\gamma \parallel \beta\gamma$, was nach dem Grundsatze von den Parallelen nicht möglich ist.

Folgesätze. 1. Der geometrische Ort aller Geraden, welche sich durch einen gegebenen Punkt parallel zu einer gegebenen Ebene ziehen lassen, ist eine zu letzterer parallele Ebene.

2. Schneidet eine Ebene die eine von zwei parallelen Ebenen, so schneidet sie auch die andere (Beweis indirect).

3. Ist eine Ebene zu jeder von zwei Ebenen parallel, so sind diese auch zu einander parallel (Beweis indirect).

d) Wenn die Schenkel eines hohlen Winkels zu den Schenkeln eines anderen hohlen Winkels direct (invers) parallel sind, so sind die Winkel gleich und ihre Ebenen parallel.

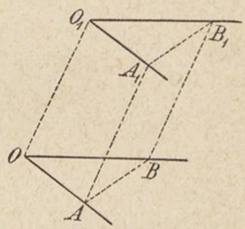


Fig. 136.

Beweis. Es sei $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$, und man mache $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Die Vierecke OAA_1O_1 und OBB_1O_1 sind offenbar Parallelogramme, daher ist $AA_1 = OO_1 = BB_1$ und $AA_1 \parallel OO_1 \parallel BB_1$. Das Viereck ABB_1A_1 ist somit ebenfalls ein Parallelogramm. Daraus schließt man $AB = A_1B_1$, $\triangle AOB \cong A_1O_1B_1$, $\sphericalangle AOB = A_1O_1B_1$.

Man hat ferner $OA \parallel A_1O_1B_1$ und $OB \parallel A_1O_1B_1$ (§ 148*a*), also auch $AOB \parallel A_1O_1B_1$ (§ 149*a*).

Folgesatz. Jeder Keil wird durch parallele Ebenen, welche zur Kante des Keiles nicht parallel sind, in gleichen Winkeln geschnitten.

Zusatz. Unter dem (spitzen, rechten,...) Winkel zweier windschiefer Geraden versteht man jenen (spitzen, rechten,...) Winkel, welchen zwei durch einen beliebigen Punkt des Raumes gezogene Parallele zu den windschiefen Geraden einschließen.

Normale Lage von Geraden und Ebenen.

§ 150. Gerade und Ebene. *a)* Wenn eine Gerade zu zwei sich schneidenden Geraden einer Ebene normal ist, so ist sie zu jeder Geraden der Ebene normal.

Beweis. Es sei $BB_1 \perp AC$ und $BB_1 \perp AE$. Um zu beweisen, daſs $BB_1 \perp AD$ ist, wähle man die Punkte C und E so, daſs sich die Geraden CE und AD schneiden, mache $BA = AB_1$ und ziehe sowohl von B als

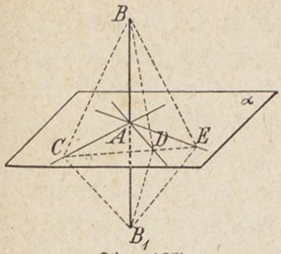


Fig. 137.

auch von B_1 Verbindungsstrecken zu den Punkten C, D, E. Da nun AC und AE Symmetralen der Strecke BB_1 sind, so folgt $BC = B_1C$, $BE = B_1E$ und $\triangle BCE \cong B_1CE$. Diese beiden Dreiecke gelangen dadurch zur Deckung, daſs man das eine solange um CE als Achse dreht, bis die Punkte B und B_1 zusammenfallen. Dann decken sich auch die Strecken BD und B_1D und sind somit gleich lang. Daraus schlieſst man, daſs AD eine Symmetrale der Strecke BB_1, also $BB_1 \perp AD$ ist.

Wenn die betrachteten Geraden der Ebene α nicht durch den Punkt A gehen, so ziehe man durch A Parallele zu denselben und beachte den Zusatz in § 149*d*.

Zusatz. Um nachzuweisen, daſs die Voraussetzung dieses Lehrsatzes stets erfüllbar ist, lege man durch BB_1 zwei Ebenen BCB_1 und BEB_1 und ziehe in denselben $AC \perp BB_1$ und $AE \perp BB_1$. Jene Ebene α, welche durch die Geraden AC und AE bestimmt wird, entspricht der Voraussetzung.

Erklärung. Wenn eine Gerade zu zwei sich schneidenden Geraden einer Ebene und somit zu allen Geraden jener Ebene normal ist, so heiſst sie eine Normale der Ebene und letztere eine Normalebene der Geraden. Man sagt auch in diesem Falle, daſs die Gerade zur Ebene und diese zur Geraden normal ist.

b) Durch einen gegebenen Punkt kann zu einer gegebenen Ebene eine einzige Normale gezogen werden.

Beweis. Wenn durch den Punkt A zwei Normalen b und c zur Ebene α gezogen werden könnten, so wäre die Schnittlinie der Ebenen bc und α zu b und c normal, was nach § 16 nicht möglich ist.

c) Jede Gerade, welche zu einer Normale einer Ebene parallel ist, ist ebenfalls zur Ebene normal.

Beweis. Es sei (Fig. 138) $b \perp \alpha$ und $c \parallel b$. Zieht man durch die Punkte B und C die Gerade a und die Parallelen d und e in der Ebene α, so ist $b \perp a$, $b \perp d$, ferner $c \perp a$ (§ 16) und $c \perp e$.

b_1) Durch einen gegebenen Punkt kann zu einer gegebenen Geraden eine einzige Normalebene gelegt werden.

Beweis. Wenn durch den Punkt A zwei Normalebenen β und γ zur Geraden a gelegt werden könnten, so würde eine durch a gelegte Ebene α, welche die Schnittlinie $\beta\gamma$ nicht enthält, die Ebenen β und γ in zwei Geraden schneiden, welche beide zu a normal wären, was nach § 16 nicht möglich ist.

c_1) Jede Ebene, welche zu einer Normalebene einer Geraden parallel ist, ist ebenfalls zur Geraden normal.

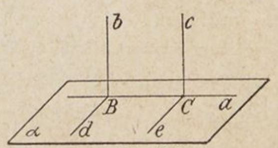


Fig. 138.

Die Winkel (bd) und (ce) haben nämlich direct parallele Schenkel und sind also gleich groß. Hieraus folgt $c \perp \alpha$.

d) Je zwei Normalen derselben Ebene sind parallel.

Beweis. Es sei $b \perp \alpha$ und $c \perp \alpha$ (Fig 138). Wäre nicht $c \parallel b$, so könnte durch C eine andere Gerade c_1 parallel zu b gezogen werden. Dann wäre auch $c_1 \perp \alpha$, was dem Satze *b)* widerspricht.

Beweis. Es sei $\alpha \parallel \beta$ und $\alpha \perp c$. Legt man durch c zwei Ebenen γ und δ, so ist $\alpha\gamma \parallel \beta\gamma$, $\alpha\delta \parallel \beta\delta$, ferner $c \perp \alpha\gamma$, $c \perp \alpha\delta$, also auch $c \perp \beta\gamma$, $c \perp \beta\delta$. Hieraus folgt $c \perp \beta$.

d_1) Je zwei Normalebenen derselben Geraden sind parallel.

Beweis. Es sei $\alpha \perp c$ und $\beta \perp c$. Wäre nicht $\alpha \parallel \beta$, so könnte durch einen Punkt A der Ebene α eine andere Ebene α_1 parallel zu β gelegt werden. Dann wäre auch $\alpha_1 \perp c$, was dem Satze *b_1)* widerspricht.

Folgesätze 1. Der geometrische Ort aller Geraden, welche sich durch einen Punkt einer Geraden normal zu derselben ziehen lassen, ist die jenem Punkte entsprechende Normalebene der gegebenen Geraden. Zieht man nämlich durch den Punkt A der Geraden a die Geraden $b, c, d, \ldots$ normal zu a, so sind auch die Ebenen bc, $cd, \ldots$ normal zu a und fallen daher nach *b_1)* in eine einzige Ebene zusammen.

2. Dreht man einen rechten Winkel um einen Schenkel, so beschreibt der andere eine Normalebene des ersteren.

3. Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Endpunkten einer Strecke gleiche Abstände haben, ist jene Normalebene der Strecke, welche dieselbe halbiert. Sie heißt die Symmetralebene der Strecke.

§ 151. Zwei Ebenen. *a)* Unter dem Normalschnitte eines Keiles versteht man jenen Winkel, in welchem ein Keil durch eine zu seiner Kante normale Ebene geschnitten wird. Nach § 149 *d* ist es gleichgiltig, durch welchen Punkt der Kante die Schnittebene gelegt wird. Wenn man durch einen Punkt der Kante in beiden Schenkelflächen Normalen zur Kante zieht, so ist offenbar der eine Winkel der beiden Normalen zugleich ein Normalschnitt des Keiles.

Legt man durch zwei sich schneidende Ebenen eine Normalebene zur Durchschnittslinie und erhält als Schnittfigur zwei zu einander normale Gerade, so heißt die eine Ebene eine Normalebene der anderen, oder man sagt, jede von beiden Ebenen sei zur anderen normal.

b) Wenn man durch eine Normale einer Ebene eine andere Ebene legt, so sind die beiden Ebenen zueinander normal.

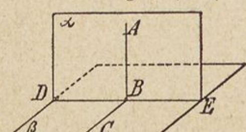


Fig. 139.

Beweis. Es sei $AB \perp \beta$ und α eine durch AB gelegte Ebene. Zieht man in der Ebene β $BC \perp DE$, so ist $\sphericalangle\, ABC$ ein Normalschnitt des Keiles $(\alpha\beta)$ und zugleich $\sphericalangle\, ABC = R$.

c) Sind zwei Ebenen zueinander normal, so liegt jede Normale der einen Ebene, welche mit der anderen einen Punkt gemeinschaftlich hat, ganz in der letzteren.

Beweis. Es sei $\alpha \perp \beta$ (Fig. 139) und A jener Punkt der Ebene α, durch welchen eine Normale zur Ebene β geht. Zieht man $AB \perp DE$ (in α) und $BC \perp DE$ (in β), so ist nach der Voraussetzung $AB \perp BC$, also auch $AB \perp \beta$. Somit ist die in α liegende Gerade AB mit der durch A gehenden Normale von β identisch (§ 150 *b*). Ebenso wird der Beweis geführt, wenn der angenommene Punkt in der Durchschnittslinie liegt.

d) Sind zwei Ebenen zueinander normal, so ist jede Normale der Durchschnittslinie, welche in der einen Ebene liegt, zur anderen normal.

Beweis. Aus $\alpha \perp \beta$ (Fig. 139) und $AB \perp DE$ (in α) folgt, wenn $BC \perp DE$ (in β) errichtet wird, $\sphericalangle ABC = R$, somit $AB \perp \beta$. A

e) Sind zwei sich schneidende Ebenen zu einer dritten Ebene normal, so ist auch ihre Durchschnittslinie zu dieser Ebene normal.

Beweis. Wenn $\alpha \perp \gamma$ und $\beta \perp \gamma$ ist, so ziehe man durch einen Punkt der Durchschnittslinie $\alpha\beta$ die Normale zu γ. Diese muss nach dem Lehrsatze *c)* sowohl in α, als auch in β liegen, also mit $\alpha\beta$ identisch sein.

Folgesatz. Ist von drei Ebenen eine jede zu den beiden anderen normal, so gilt dasselbe von den drei Durchschnittslinien der Ebenen, und umgekehrt.

Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten, Geraden und Ebenen im Raume.

§ 152. Projectionen. Zieht man durch einen Punkt zu einer Ebene die Normale, so heißt der Fußpunkt derselben in der Ebene die Normalprojection des gegebenen Punktes auf die gegebene Ebene. Im Folgenden wird häufig der Ausdruck „Projection" für „Normalprojection" gebraucht, da andere Arten von Projectionen hier nicht zur Anwendung kommen.

Unter der Projection einer Figur auf eine Ebene versteht man den geometrischen Ort der Projectionen aller ihrer Punkte.

Die Projection einer Geraden auf eine Ebene ist im allgemeinen eine Gerade und nur dann ein Punkt, wenn die Gerade zur Ebene normal ist.

Beweis. Es seien $B_1, C_1, D_1, \ldots$ die Projectionen der Punkte $B, C, D, \ldots$ einer Geraden a auf die Ebene α. Jene Ebene β, welche durch a und BB_1 bestimmt ist, ist zu α normal (§ 151 *b*) und enthält die Punkte $C, D, \ldots$, also auch die Normalen $CC_1, DD_1, \ldots$ der Ebene α (§ 151 *c*). Die Punkte $B_1, C_1, D_1, \ldots$ liegen somit in der Geraden $\alpha\beta$ und umgekehrt, jeder Punkt dieser Geraden ist die Projection jenes Punktes von a, welcher mit ihm in einer Normalen der Ebene α liegt. Die Gerade $\alpha\beta$ ist also die Projection der Geraden a auf die Ebene α.

Der zweite Theil der Behauptung ergibt sich sofort aus § 150 *b)*.

Folgesatz. Die Projection einer Strecke ist die von den Projectionen der Endpunkte begrenzte Strecke.

§ 153. Strecken zwischen einem Punkte und einer Ebene. Abstände. Von den Strecken, welche einen Punkt außerhalb einer Ebene mit den Punkten derselben verbinden, gelten die folgenden Sätze:

a) Die zur Ebene normale Strecke ist die kürzeste. Sie heißt daher der Abstand des gegebenen Punktes von der Ebene.

b) Gleichen Strecken entsprechen gleiche Projectionen und umgekehrt.

c) Der größeren von zwei ungleichen Strecken entspricht die größere Projection und umgekehrt.

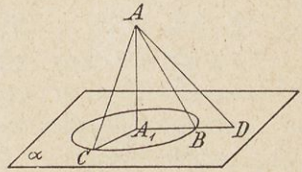


Fig. 140.

Die Beweise sind analog jenen der entsprechenden planimetrischen Sätze (§ 32) oder können für die Sätze *b)* und *c)* mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes geführt werden.

Folgesätze. 1. Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, so haben alle Punkte der Geraden von der Ebene denselben Abstand. Dieser heißt daher der Abstand der Geraden von der parallelen Ebene.

2. Sind zwei Ebenen zu einander parallel, so haben alle Punkte der einen von der anderen denselben Abstand. Dieser heißt daher der Abstand der parallelen Ebenen.

3. Der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, welche von einem Punkte außerhalb der Ebene einen gegebenen Abstand haben, ist im allgemeinen ein Kreis mit der Projection des gegebenen Punktes als Centrum.

§ 154. Symmetralebene eines Winkels zweier Halbstrahlen. Unter derselben versteht man jene Ebene, welche den Winkel halbiert und zu dessen Ebene normal ist.

a) Diese Symmetralebene ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Halbstrahlen gleiche Abstände haben.

b) Sie ist auch der geometrische Ort aller Geraden, welche durch den Scheitel des Winkels gehen und mit den Schenkeln desselben gleiche Winkel einschließen.

Beweise. *a)* Es sei ASB der gegebene Winkel, CSD_1 dessen Symmetralebene und D ein Punkt derselben. Zieht man $DD_1 \perp ASB$, ferner $DE \perp AS$ und $DF \perp BS$, so ist $D_1E = D_1F$, also auch $DE = DF$. Liegt D außerhalb der Symmetralebene, so ist $D_1E \gtrless D_1F$ u. s. w.

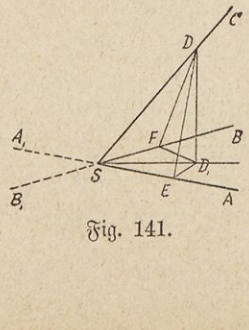


Fig. 141.

b) Ist SC eine Gerade der Symmetralebene, so ist nach dem Vorigen $\triangle DSE \cong DSF$, also $\sphericalangle DSE = DSF$; umgekehrt, ist $\sphericalangle DSE = DSF$, so folgt $\triangle DSE \cong DSF$, also $DE = DF$. Daher ist D ein Punkt der Symmetralebene und SC eine Gerade in derselben.

§ 155. Neigungswinkel einer Geraden zu einer Ebene. *a)* Der Winkel, welchen eine Gerade mit ihrer Projection auf eine Ebene einschließt, heißt der Neigungswinkel der Geraden zur Ebene. Ist die Gerade zur Ebene parallel, so beträgt der Neigungswinkel 0^0; ist sie zur Ebene normal, so ist der Neigungswinkel ein Rechter. Dies sind nämlich die Grenzwerte, welchen der Neigungswinkel einer schiefen Geraden beliebig nahe kommt, wenn dieselbe gegen die parallele oder die normale Lage gedreht wird.

b) Der Neigungswinkel einer schiefen Geraden zu einer Ebene ist der kleinste unter allen Winkeln, welche die Gerade mit den Geraden der Ebene einschließt.

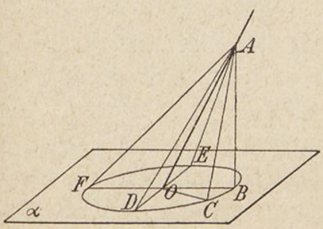


Fig. 142.

Beweis. Es sei OA die gegebene Gerade, O ihr Fußpunkt in der Ebene α, $AB \perp \alpha$, also OB die Projection von OA auf α. Dann ist $\sphericalangle AOB$ der Neigungswinkel der schiefen Geraden OA zur Ebene α. Zieht man durch O in α eine beliebige Gerade OC und macht $OC = OB$, so ist $AB < AC$ (§ 153 *a*), daher $\sphericalangle AOB < AOC$ (§ 42).

Zusatz. Wird die Gerade OC in der Ebene α um den Punkt O gedreht, so wächst der Winkel AOC während der Bewegung aus der Lage OB in die entgegengesetzte Lage OF und nimmt hierauf wieder ab, bis die Umdrehung vollendet ist (§ 45 *d*, 1. Zusatz und § 153 *c*).

c) Zieht man in einer Ebene zur Projection einer schiefen Geraden eine Normale, so ist diese auch zur schiefen Geraden normal. Zugleich gilt der Umkehrungssatz.

Beweis. Es sei OA (Fig. 142) die schiefe Gerade, OB ihre Projection, $DE \perp OB$ (in α) und $OD = OE$. Dann ist OB die Symmetrale der Strecke DE, also $BD = BE$. Hieraus folgt $AD = AE$ (§ 153 *b*); daher ist auch OA die Symmetrale von DE. Ebenso wird der Umkehrungssatz bewiesen.

d) Parallele Gerade bilden mit jeder sie schneidenden Ebene gleiche Neigungswinkel.

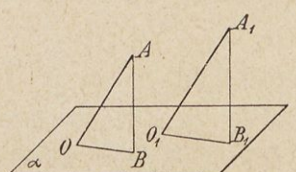


Fig. 143.

d_1) Parallele Ebenen bilden mit jeder sie schneidenden Geraden gleiche Neigungswinkel.

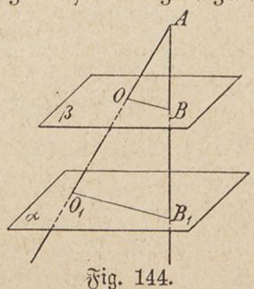


Fig. 144.

Beweis. Ist $OA \parallel O_1A_1$, ferner $AB \perp \alpha$, $A_1B_1 \perp \alpha$, so ist $\sphericalangle OAB = O_1A_1B_1$ (§ 149 *d*), also auch $\sphericalangle AOB = A_1O_1B_1$.

Beweis. Es sei $\alpha \parallel \beta$, AO_1 die gegebene Gerade, ferner $AB_1 \perp \alpha$, also auch $AB \perp \beta$. Es ist dann $OB \parallel O_1B_1$ (§ 149 *b*), also $\sphericalangle AOB = AO_1B_1$.

§ 156. Neigungswinkel zweier Ebenen. *a)* Der Normalschnitt eines Keiles heißt auch der Neigungswinkel der Schenkelflächen. Legt man zur Durchschnittslinie zweier Ebenen eine Normalebene, so wird in der Regel der eine von beiden spitzen Winkeln in der Schnittfigur als der Neigungswinkel der beiden Ebenen bezeichnet.

b) Jede Ebene, welche zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit denselben gleiche Neigungswinkel.

Beweis. Es sei $\alpha \parallel \beta$ (Fig. 135) und γ die Schnittebene. Um zu beweisen, dass die Normalschnitte der Keile $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$ einander gleich sind, legt man eine Ebene δ normal zu $\alpha\gamma$, somit auch normal zu $\beta\gamma$. Weil nun $\alpha\delta \parallel \beta\delta$ ist, so sind die betrachteten Neigungswinkel einander gleich.

Folgesatz. Legt man durch einen Punkt zu zwei sich schneidenden Ebenen parallele Ebenen, so bilden diese ebenso große Neigungswinkel wie jene.

c) Zwischen zwei Keilen und ihren Normalschnitten bestehen analoge Beziehungen wie zwischen zwei Bogen eines Kreises und den zugehörigen Centriwinkeln (§§ 114 und 115). Insbesonders sind die folgenden Sätze zu erwähnen

1. Gleichen Keilen entsprechen gleiche Normalschnitte und umgekehrt.

Beweis durch Deckung.

2. Je zwei Keile verhalten sich ebenso wie ihre Normalschnitte.

Beweis analog wie zum Lehrsatze im § 114.

3. Jeder Keil hat den zugehörigen Normalschnitt zum Maße, d. h. der Keil misst ebensoviel Keilgrade als der zugehörige Normalschnitt Winkelgrade. Die Maßzahlen der beiden Gebilde sind also einander gleich. Ein Keilgrad entspricht dem 360. Theil einer vollen Umdrehung jener Halbebene, durch welche der Keil beschrieben wird.

d) Die Symmetralebene (Halbierungsebene) eines Keiles ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Schenkelflächen gleiche Abstände haben. Zum Beweise lege man durch den betrachteten Punkt einen Normalschnitt des Keiles und verfahre im übrigen so, wie in § 38.

II. Abschnitt: Körperliche Ecken.

§ 157. Erklärungen. Wenn ein Halbstrahl an dem Umfange eines Polygones gleitet und zugleich die Lage seines Grenzpunktes nicht verändert, so bestimmen die vom Halbstrahle beschriebenen Ebenen einen Raum, welcher nach einer Seite hin unbegrenzt ist und körperliche Ecke oder einfache Ecke genannt wird.

In dem speciellen Falle jedoch, wenn die Ecken des „Leitpolygones" und der Grenzpunkt des Halbstrahles in einer Ebene liegen, beschreibt der „erzeugende Halbstrahl" nur jene Ebene.

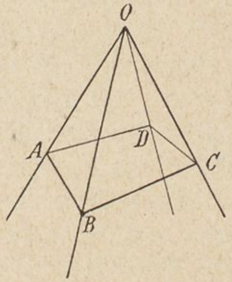


Fig. 145.

Der feste Punkt O des erzeugenden Halbstrahles heißt der Scheitel, die vom Halbstrahle beschriebenen Ebenen OAB, OBC, ... heißen die Seitenflächen und ihre Durchschnittslinien OA, OB, ... die Kanten der körperlichen Ecke. Die Winkel, welche von je zwei aufeinanderfolgenden Kanten eingeschlossen werden, wie z. B. AOB, BOC, ..., heißen Kantenwinkel oder Seiten und werden häufig mit (AB), (BC), ... bezeichnet. Von den beiden Flächenwinkeln, welche je zwei benachbarte Seitenflächen bestimmen, wird derjenige, welcher in der nächsten Umgebung der Kante die körperliche Ecke enthält, Flächenwinkel oder einfach Winkel der Ecke genannt. Sind alle Kanten- und alle Flächenwinkel concav, so hat die Ecke für einen Beobachter außerhalb derselben lauter vorspringende Kanten und heißt convex. Die nachfolgenden Betrachtungen und Lehrsätze beziehen sich nur auf convexe Ecken.

Eine körperliche Ecke heißt gleichseitig, wenn sie lauter gleiche Seiten, gleichwinklig, wenn sie lauter gleiche Winkel hat, und regelmäßig oder regulär, wenn sie gleichseitig und gleichwinklig ist.

Jede Ecke hat ebensoviel Seiten als Kanten; die Anzahl derselben stimmt mit der Anzahl der Seiten oder Eckpunkte des Leitpolygones überein. Man unterscheidet nach der Anzahl der Seiten (beziehungsweise Kanten) dreiseitige, vierseitige, ...n-seitige Ecken oder Dreikante, Vierkante, ...n-Kante.

§ 158. Congruenz und symmetrische Gleichheit der Ecken. *a)* Wenn sich zwei Ecken so ineinanderlegen lassen, dass jede Seitenfläche der einen mit einer Seitenfläche der anderen zusammenfällt, so heißen sie congruent. Daraus folgt, dass zwei congruente Ecken in den Seiten und den Winkeln übereinstimmen, u. zw. haben die homologen Stücke für einen außerhalb der Ecken befindlichen und auf die Scheitel derselben blickenden Beobachter dieselbe Anordnung. Umgekehrt, wenn zwei Ecken die hier angegebenen Eigenschaften besitzen, so lassen sie sich offenbar zur Deckung bringen; sie sind also congruent.

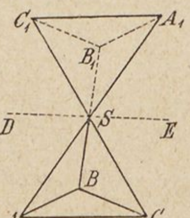


Fig. 146.

b) Wenn sich zwei Ecken so aneinanderlegen lassen, dass jede Kante der einen die Ergänzung einer Kante der anderen bildet, so heißen die Ecken symmetrisch gleich und in der angegebenen Lage Scheitelecken; z. B. $SABC$ und $SA_1B_1C_1$. In zwei symmetrisch gleichen Ecken sind je zwei entsprechende Seiten als Scheitelwinkel und je zwei entsprechende Winkel als Scheitelkeile einander gleich. Jedoch haben die homologen Stücke in den beiden Ecken für einen außerhalb derselben befindlichen und auf die Scheitel derselben blickenden Beobachter entgegengesetzte Aufeinanderfolgen. Umgekehrt, wenn zwei Ecken die eben angeführten Eigenschaften besitzen, so sind sie symmetrisch gleich.

Aus dem Vorausgehenden folgt, dass symmetrisch gleiche Ecken im allgemeinen nicht congruent sind. Davon kann man sich auch dadurch überzeugen, dass man dieselben zur Deckung zu bringen sucht und zu diesem Zwecke zwei entsprechende Seitenflächen, z. B. ASC und A_1SC_1 (Fig. 146), aufeinanderlegt. Dies kann nun auf zweierlei Art geschehen. Entweder dreht man den Winkel ASC in seiner Ebene um den Punkt S, bis er mit dem Winkel A_1SC_1 zusammenfällt oder man dreht die Ecke $SABC$ um die Symmetrale DE des Winkels CSA_1 als Achse, bis SC auf SA_1 und SA auf SC_1 fällt. In beiden Fällen gelangen die Kanten SB und SB_1 im allgemeinen nicht zur Deckung; denn sie liegen im ersten Falle auf entgegengesetzten Seiten der Ebene A_1SC_1 und bilden im zweiten mit den zusammenfallenden Kanten SC und SA_1 im allgemeinen verschiedene Winkel.

Folgesätze. 1. Sind zwei Ecken einer dritten symmetrisch gleich, so sind sie congruent.

2. Ist von zwei congruenten Ecken die eine einer dritten symmetrisch gleich, so ist es auch die andere.

§ 159. **Polarecken.** *a)* Zieht man von einem Punkte im Innern einer körperlichen Ecke Normalen zu den Seitenflächen, so bestimmen jene als Kanten eine neue Ecke, welche Polarecke zur gegebenen genannt wird.

Es sei z. B. O_1 ein Punkt im Innern des Dreikantes $OABC$, ferner $O_1A_1 \perp BOC$, $O_1B_1 \perp AOC$ und $O_1C_1 \perp AOB$; dann ist das Dreikant $O_1A_1B_1C_1$ Polarecke zum gegebenen Dreikante.

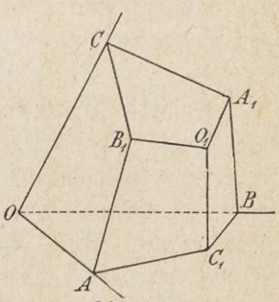


Fig. 147.

Wenn man ferner von irgend einem anderen Punkte des Raumes, z. B. von O, direct parallele Halbstrahlen zu O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 zieht, so bestimmen jene Parallelen als Kanten ein neues Dreikant, welches mit $O_1A_1B_1C_1$ congruent ist, da es mit diesem in den Seiten, den Winkeln und in der Anordnung der homologen Stücke übereinstimmt. Hieraus folgt, dass jeder beliebige Punkt des Raumes als Scheitel der Polarecke gewählt werden kann.

b) Jede Ecke ist selbst Polarecke zu ihrer Polarecke.

Beweis. Da die Ebene $B_1O_1C_1$ die Normalen O_1B_1 und O_1C_1 der Ebenen AOC und AOB enthält, so ist sie ebenfalls zu diesen Ebenen, also auch zu ihrer Schnittlinie OA normal. Es ist somit $OA \perp B_1O_1C_1$; ebenso beweist man, dass auch $OB \perp A_1O_1C_1$ und $OC \perp A_1O_1B_1$ ist.

c) Sind zwei Ecken Polarecken zueinander, so ist jeder

Flächenwinkel der einen supplementär zum entsprechenden Kantenwinkel der anderen.

Beweis. Schneidet die Ebene $B_1 O_1 C_1$ (Fig. 147) die Kante OA im Punkte A, so hat das Viereck $AB_1O_1C_1$ bei B_1 und C_1 rechte Winkel. Daraus folgt $B_1AC_1 + B_1O_1C_1 = 2R$ u. s. w. Ebenso besitzt das Viereck OAB_1C bei A und C rechte Winkel; daher ist $\sphericalangle AOC + AB_1C = 2R$ u. s. w.

Zusatz. Wegen dieser Eigenschaft wird die Polarecke häufig auch Supplementarecke genannt.

§ 160. Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreikantes. Jede Seite eines Dreikantes ist *a)* kleiner als die Summe und *b)* größer als die Differenz der beiden anderen.

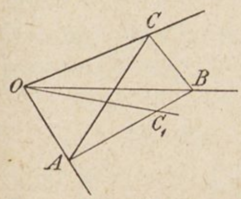


Fig. 148.

Beweise. *a)* Es sei (AB) jene Seite des Dreikantes $OABC$, welche von keiner der beiden anderen an Größe übertroffen wird. Dann ist offenbar $(AC) < (AB) + (BC)$ und $(BC) < (AB) + (AC)$. Man hat also noch die Ungleichung $(AB) < (AC) + (BC)$ zu beweisen. Zu diesem Zwecke ziehe man in der Ebene AOB den Halbstrahl OC_1 so, dass $\sphericalangle AOC_1 = AOC$ ist, mache $OC = OC_1$ und lege durch die Punkte C und C_1 eine Ebene, welche die Kanten OA und OB schneidet. Dann ist $\triangle AOC \cong AOC_1$, also $AC = AC_1$. Subtrahiert man diese Gleichung von der Ungleichung $AC + BC > AB$, so folgt $BC > BC_1$ und daraus $\sphericalangle BOC > BOC_1$. Durch Addition der Gleichung $\sphericalangle AOC = AOC_1$ zur letzten Ungleichung erhält man $\sphericalangle AOC + BOC > AOB$ oder $(AC) + (BC) > (AB)$.

b) Ebenso wie der Lehrsatz *b)* im § 29 zu beweisen.

§ 161. Beziehungen zwischen den Gegenstücken eines Dreikantes. *a)* Sind zwei Winkel eines Dreikantes gleich, so sind auch ihre Gegenseiten gleich und umgekehrt.

b) Dem größeren von zwei ungleichen Winkeln liegt auch die größere Seite gegenüber und umgekehrt.

Beweise. *a)* Es seien im Dreikante $SABC$ (Fig. 146) die an den Kanten SA und SC liegenden Winkel gleich. Dreht man das Dreikant um die Symmetrale DE des Winkels CSA_1 als Achse, bis (AC) mit (A_1C_1) zur Deckung gelangt, so fällt das Dreikant mit seiner Scheitelecke $SA_1B_1C_1$ zusammen. Also ist $(AB) = (C_1B_1) = (CB)$.

b) Es sei im Dreikante $OABC$ (Fig. 148) der Winkel an der Kante OC größer als jener an OB. Schneidet man nun letzteren Winkel vom ersteren durch die Ebene COC_1 ab, so ist nach *a)* $(CC_1) = (BC_1)$. Daraus folgt

$$(AB) = (AC_1) + (C_1B) = (AC_1) + (CC_1) > (AC).$$

Die Umkehrungssätze können indirect bewiesen werden.

§ 162. Summe der Seiten eines n-Kantes. Die Summe aller Seiten einer körperlichen Ecke ist kleiner als $4R$.

Beweis. Man lege durch das gegebene n-Kant (Fig. 145) eine Schnittebene, welche alle Kanten durchschneidet, und bezeichne mit s die Summe aller Seiten oder Kantenwinkel, mit s_1 die Summe aller der Schnittebene anliegenden Dreieckswinkel OAB, OBA, OBC,..., ferner mit s_2 die Summe aller Winkel des Polygones $ABCD$.... Dann ist $s + s_1 = 2nR$ und $s_1 > 2nR - 4R$, also $s < 4R$. Die Ungleichung $s_1 > 2nR - 4R$ erhält man durch Addition folgender Ungleichungen (§ 160):

$$\sphericalangle ABO + OBC > ABC, \sphericalangle BCO + OCD > BCD \text{ u. s. f.}$$

§ 163. Summe der Winkel eines n-Kantes. In jedem n-Kante ist die Summe der Winkel kleiner als $2nR$ und größer als $2nR - 4R$.

Beweis. Man bezeichne mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Winkel der gegebenen Ecke und mit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ die entsprechenden Seiten der zugehörigen Polarecke. Es ist dann

$$\alpha_1 + \beta_1 = 2R, \ \alpha_2 + \beta_2 = 2R, \ \ldots \ \alpha_n + \beta_n = 2R, \text{ also}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 2nR.$$

Nun ist offenbar $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n > 0$, ferner $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 4R$ (§ 162); daher findet man durch Subtraction

$$2nR > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 2nR - 4R.$$

Folgesatz. In jedem Dreikante ist die Summe der Winkel kleiner als $6R$ und größer als $2R$.

§ 164. Lehrsätze über die Congruenz und symmetrische Gleichheit der Dreikante. Zwei Dreikante sind congruent (symmetrisch gleich) wenn sie in derselben (entgegengesetzten) Reihenfolge entsprechend gleich haben:

a) zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel,

b) zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite,

c) zwei Seiten und den Gegenwinkel der einen, außer wenn die Gegenwinkel der anderen supplementär und schief sind,

d) zwei Winkel und die Gegenseite des einen, außer wenn die Gegenseiten des anderen supplementär und schief sind,

e) alle drei Seiten.

f) alle drei Winkel.

Beweise. *a)* und *b)*. Wenn die als gleich angenommenen Umfangsstücke der beiden Dreikante dieselbe Reihenfolge haben, so kann man sie zur Deckung bringen. Anderenfalls läſst sich das eine Dreikant mit der Scheitelecke des anderen zur Deckung bringen.

c) Es genügt nach dem Vorhergehenden, den Fall zu betrachten, daſs die Reihenfolge der gleichen Umfangsstücke in den beiden Dreikanten entgegengesetzt ist. Wir denken uns sodann letztere so aneinandergelegt, daſs die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden gleichen Seiten sich decken. In Fig. 149 sei also

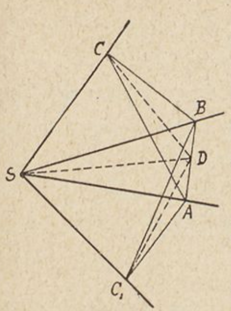


Fig. 149.

(AB) die gemeinschaftliche Seite der beiden Dreikante, $(AC) = (AC_1)$ und $A(SC)B = A(SC_1)B$. Durch die Ebene CSC_1 wird nun das gleichschenklige Dreikant $SACC_1$ abgeschnitten, in welchem die Winkel an den Kanten SC und SC_1 gleich sind; daher sind es auch die im Dreikante $SBCC_1$ an denselben Kanten liegenden Winkel, woraus $(BC) = (BC_1)$ folgt. Analog wird der Beweis geführt, wenn der Punkt D in die Verlängerung von AB fällt. Eine Ausnahme kann nur eintreten, wenn D mit A oder B zusammentrifft. Dann versagt die bisherige Schlussweise, und die Dreikante sind nur symmetrisch gleich, wenn die Winkel an der Kante SA bezw. SB rechte sind. In jedem anderen Falle sind diese Winkel als schief und supplementär voneinander verschieden, also die gegebenen Dreikante nicht symmetrisch gleich. Zwei solche Dreikante erhält man, wenn man durch jene Kante eines gleichschenkligen Dreikantes, in welcher die gleichen Seiten sich schneiden, eine Schnittebene legt.

d) Vergleicht man die Polarecken der gegebenen Dreikante, so sind jene nach c) congruent (symmetrisch gleich). Daraus folgt, dass die Polarecken und somit auch die gegebenen Dreikante in den übrigen Umfangsstücken übereinstimmen.

e) Man zeige, dass in diesem Falle die an den Kanten SC und SC_1 der Fig. 149 liegenden Flächenwinkel gleich sind.

f) Der Beweis ergibt sich aus *e)* durch Betrachtung der Polarecken.

Zusätze. 1. Ein Dreikant lässt sich auf sechs verschiedene Arten durch je drei Umfangsstücke bestimmen, nur sind zwei entgegengesetzte Reihenfolgen der letzteren möglich. In den Fällen *c)* und *d)* ist das Dreikant nicht eindeutig bestimmt, wenn nicht weitere Bedingungen hinzutreten. So z. B. ist ein Dreikant durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der größeren Seite eindeutig bestimmt, wenn der gegebene Winkel $< R$ ist. Denn nach § 161 muss dann der Gegenwinkel der kleineren Seite $> R$ sein. Wenn nämlich noch ein zweiter Wert dieses Gegenwinkels möglich wäre, so müsste derselbe nach *c)* mit dem ersteren supplementär, also $> R$ sein. Dieser Fall ist jedoch mit Rücksicht auf § 161 ausgeschlossen.

2. Sind zwei Scheitelecken gleichschenklig, so sind sie auch congruent.

§ 165. **Das regelmäßige n-Kant.** Die Symmetralebenen der Seiten und Winkel eines regelmäßigen n-Kantes schneiden sich in einer und derselben Geraden, welche mit allen Kanten und mit allen Flächen gleiche Winkel bildet.

Beweis. Legt man durch zwei aufeinanderfolge Kanten SA und SB des n-Kantes die Symmetralebenen der Winkel, ferner durch ihre Schnittlinie SO und die dritte Kante SC eine Ebene, so erkennt man leicht, dass das Dreikant $SABO$ gleichschenklig und mit dem Dreikant $SBCO$ (nach § 164 *a)*) congruent ist.

Daher ist auch SCO die Symmetralebene des Winkels an der Kante SC u. s. w. Nach § 154 b gehört SO auch der Symmetralebene einer jeden Seite an.

Zusatz. Jedes regelmäßige n-Kant wird durch seine n Symmetralebenen in $2n$ congruente rechtwinklige Dreikante zerlegt, von denen irgend eines das Bestimmungsdreikant des regelmäßigen n-Kantes heißt.

III. Abschnitt: Eigenschaften der Körper.

Von den Körpern im allgemeinen.

§ 166. Erklärungen. Ein allseitig begrenzter Theil des Raumes heißt Körper und die Summe seiner Begrenzungsflächen die Oberfläche desselben.

Wenn ein Körper durchwegs ebene Begrenzungsflächen hat, so wird er ein Polyeder oder Vielflach und in jedem anderen Falle, wenn also wenigstens eine Begrenzungsfläche krumm ist, ein krummflächiger (häufig auch runder) Körper genannt.

Die Begrenzungsflächen eines Polyeders sind (ebene) Polygone und heißen seine Flächen. Die Seiten dieser Polygone oder die Schnittlinien benachbarter Flächen heißen Kanten; die körperlichen Ecken, welche von benachbarten Flächen begrenzt werden und in der nächsten Umgebung der Scheitel das Polyeder enthalten, heißen Ecken des Polyeders. Wenn dieselben ausnahmslos convex sind, so heißt das Polyeder ebenfalls convex.

Die nachfolgenden Betrachtungen und Lehrsätze beziehen sich nur auf convexe Polyeder.

Ein Polyeder heißt regelmäßig oder regulär, wenn seine Flächen congruente regelmäßige Polygone und seine Ecken congruent und regelmäßig sind.

Mit Rücksicht auf die Form bezeichnet man gewisse Polyeder als Prismen, Pyramiden u. s. f. Die regelmäßigen Polyeder werden nach der Anzahl ihrer Flächen Tetraeder, Hexaeder u. s. f. genannt.

Das Prisma.

§ 167. Erklärungen und Beschreibung. Gleitet eine Gerade (die erzeugende Gerade) am Umfange eines Polygones (des Leitpolygones) parallel zu sich selbst fort und bewegt sich dabei nicht immer in derselben Ebene, so begrenzen die von der Geraden beschriebenen Flächen einen nach zwei Seiten offenen Raum, welcher prismatischer Raum genannt wird. Jener Theil des prismatischen Raumes, welcher zwischen zwei parallelen Schnittebenen enthalten ist, heißt Prisma. Die parallelen Schnittfiguren sind congruente Polygone, da sie in den Seiten, den Winkeln und in der Anordnung der homologen Stücke übereinstimmen; sie werden Grundflächen und ihr Abstand Höhe des Prismas genannt. Die

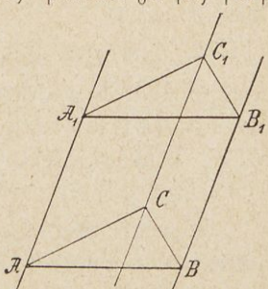


Fig. 150.

übrigen Flächen sind Parallelogramme und heißen Seitenflächen; ihre Summe heißt der Mantel des Prismas. Die Durchschnittslinien der Seitenflächen mit den Grundflächen werden Grundkanten und die Durchschnittslinien je zweier aufeinanderfolgender Seitenflächen Seitenkanten genannt. Alle Seitenkanten sind gleich und parallel.

§ 168. Eintheilungen und Benennungen. Nach der Anzahl der Seitenflächen (oder Seitenkanten) unterscheidet man dreiseitige, vierseitige, . . . n-seitige Prismen.

Nach der Stellung der Seitenkanten gegen die Grundflächen werden die Prismen in gerade und schiefe eingetheilt. Ein Prisma heißt gerade oder schief, je nachdem die Seitenkanten zu den Grundflächen normal oder schief stehen. In jedem geraden Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke und zu den Grundflächen normal; die Seitenkanten sind gleich der Höhe.

Hat ein Prisma alle Kanten gleich, so heißt es gleichkantig. Ist ein Prisma gerade und hat es regelmäßige Polygone als Grundflächen, so heißt es regelmäßig.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt Parallelepiped. Alle sechs Flächen desselben sind Parallelogramme; je zwei gegenüberliegende Flächen können als Grundflächen angesehen werden.

Sind die Grundflächen eines geraden Prismas Rechtecke, so heißt es ein rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 151). Alle sechs Flächen desselben sind Rechtecke.

Jedes gleichkantige und rechtwinklige Parallelepiped heißt Würfel, Cubus oder Hexaeder; es hat sechs congruente Quadrate als Flächen.

§ 169. Ebene Schnitte. Jeder zu den Grundflächen parallele Schnitt ist mit denselben congruent.

Jeder Schnitt, welcher zu einer Seitenkante normal ist, ist zu allen Seitenkanten normal und heißt ein Normalschnitt des Prismas. Ein prismatischer Raum ist durch den zugehörigen Normalschnitt bestimmt.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht benachbarte Seitenkanten gelegt wird, liefert einen Diagonalschnitt des Prismas; derselbe ist stets ein Parallelogramm. Jedes n-seitige Prisma läßt sich durch Diagonalschnitte in $n-2$ dreiseitige Prismen von gleicher Höhe zerlegen.

§ 170. Diagonalen eines Parallelepipedes. *a)* In einem Parallelepipede wird jede Diagonale eines Diagonalschnittes Diagonale des Parallelepipedes selbst genannt. Sie ist die Verbindungsstrecke zweier Gegenecken, d. h. zweier Eckpunkte, welche nicht in einer Fläche des Parallelepipedes liegen, z. B. AC_1, BD_1 u. s. f. Jedes Parallelepiped hat vier Diagonalen.

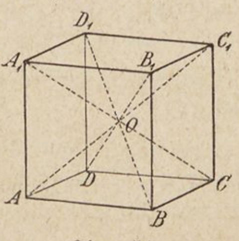


Fig. 151.

b) Die Diagonalen eines jeden Parallelepipedes gehen durch einen und denselben Punkt und halbieren einander.

Beweis. A_1C und BD_1 (Fig. 151) sind die Diagonalen des Parallelogrammes A_1BCD_1; sie halbieren sich also gegenseitig im Schnittpunkte O. BD_1 und B_1D sind die Diagonalen des Parallelogrammes BDD_1B_1; daher geht auch B_1D durch den Punkt O (die Mitte von BD_1) und wird in demselben halbiert u. s. f.

c) Jn jedem rechtwinkligen Parallelepipede sind die Diagonalen einander gleich; das Quadrat einer Diagonale ist gleich der Summe der Quadrate der drei Dimensionen (Länge, Breite und Höhe).

Beweis. Je zwei Diagonalen eines rechtwinkligen Parallelepipedes sind zugleich die Diagonalen eines Rechteckes und daher einander gleich.

Bezeichnet man ferner die Längenzahlen der Strecken AB, BC, BB_1, BD und B_1D mit a, b, c, d_1, d, so erhält man durch Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf die rechtwinkligen Dreiecke B_1BD und ABD

$$d^2 = c^2 + d_1^2,\ d_1^2 = a^2 + b^2, \text{ also } d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

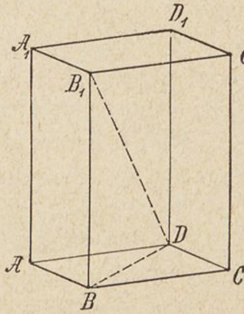


Fig. 152.

Die Pyramide und der Pyramidenstumpf.

§ 171. Erklärungen. Legt man durch eine körperliche Ecke eine Ebene, welche alle Kanten durchschneidet, so heißt das von den Seitenflächen und der Schnittebene begrenzte Polyeder eine Pyramide. Die körperliche Ecke wird aus diesem Grunde auch ein pyramidaler Raum genannt. Aus der Beschreibung des Prismas erklärt sich ohneweiters die Bedeutung der Ausdrücke: Grundfläche, Seitenflächen, Mantel, Grundkanten und Seitenkanten der Pyramide. Der gemeinsame Schnittpunkt aller Seitenkanten heißt die Spitze und sein Abstand von der Grundfläche die Höhe der Pyramide.

§ 172. Eintheilungen und Benennungen. Nach der Anzahl der Seitenflächen unterscheidet man dreiseitige, vierseitige, ... n-seitige Pyramiden.

Nach der Länge der Seitenkanten unterscheidet man Pyramiden mit gleichen Seitenkanten (gerade oder gleichschenklige P.) und solche mit ungleichen Seitenkanten (schiefe oder ungleichschenklige P.).

Sind alle Seitenkanten einer Pyramide gleich, so ist ihre Grundfläche ein Sehnenvieleck und der Fußpunkt der Höhe zugleich das Centrum des der Grundfläche umgeschriebenen Kreises (§ 153, 3. Folgesatz). Zugleich gilt auch der Umkehrungssatz.

Eine Pyramide mit gleichen Seitenkanten heißt regelmäßig, wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges Polygon ist. Die Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide sind congruente gleichschenklige Dreiecke. Die Ecke an der Spitze ist regelmäßig. Umgekehrt: wenn man vom Scheitel einer regelmäßigen Ecke aus gleiche Strecken auf den Kanten abschneidet, so liegen die Endpunkte der Strecken in einer Ebene und bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen Polygones. Der Beweis folgt aus der Congruenz der Dreikante, welche an den Endpunkten der abgeschnittenen Strecken entstehen.

Sind alle Kanten einer Pyramide gleich, so heißt sie gleichkantig. Aus dem Vorausgehenden ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

Jede gleichkantige Pyramide ist auch regelmäßig.

Es gibt nur drei-, vier- und fünfseitige gleichkantige Pyramiden.

§ 173. Ebene Schnitte. *a)* Legt man durch einen pyramidalen Raum zwei parallele Schnittebenen, welche alle Kanten durchschneiden, so sind die Schnittfiguren ähnliche Polygone.

b) Die Schnittflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände vom Scheitel.

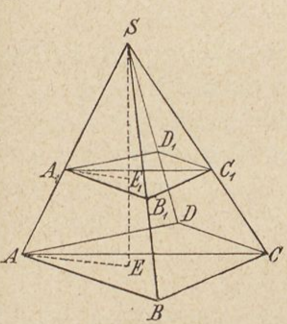


Fig. 153.

Beweise. *a)* Aus $ABCD\ldots \parallel A_1B_1C_1D_1\ldots$ folgt zunächst $\sphericalangle A = A_1,\ B = B_1,\ C = C_1,\ldots$ (§ 149 d, Folgesatz).

Ferner ist $\triangle ABS \sim A_1B_1S,\ BCS \sim B_1C_1S$ u. s. f., also $AB : A_1B_1 = BS : B_1S = BC : B_1C_1 =$ u. s. f. Somit ist $ABCD\ldots \sim A_1B_1C_1D_1\ldots$

b) Es sei $SE \perp ABCD\ldots$ und E_1 der Schnittpunkt der Geraden SE mit der Ebene des Polygones $A_1B_1C_1D_1\ldots$. Man hat dann $SE : SE_1 = SA : SA_1 = AB : A_1B_1$, also nach § 109 *b)*

$$ABCD\ldots : A_1B_1C_1D_1\ldots = \overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = \overline{SE}^2 : \overline{SE_1}^2.$$

Folgesätze. 1. Jeder zur Grundfläche parallele Schnitt einer Pyramide ist der Grundfläche ähnlich.

2. In jeder Pyramide verhält sich die Grundfläche zu einer parallelen Schnittfläche wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

3. Bezeichnet man den Modulus der ähnlichen Polygone $ABCD\ldots$ und $A_1B_1C_1D_1\ldots$ mit m, so hat man $AB = mA_1B_1,\ BC = mB_1C_1,\ldots$ $SA = mSA_1,\ SB = mSB_1,\ldots SE = mSE_1$ und $ABCD\ldots = m^2A_1B_1C_1D_1\ldots$.

c) Wird eine Ebene durch zwei nicht aufeinanderfolgende Seitenkanten einer Pyramide gelegt, so heißt das als Schnittfigur erhaltene Dreieck ein Diagonalschnitt. Jede n-seitige Pyramide läßt sich durch Diagonalschnitte in $n-2$ dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe zerlegen.

§ 174. Der Pyramidenstumpf. Jeder zur Grundfläche einer Pyramide parallele Schnitt zerlegt dieselbe in zwei Polyeder, welche Pyramidenstumpf und Ergänzungspyramide genannt werden. Man erkennt sofort die Bedeutung der Ausdrücke: Grundflächen, Seitenflächen, Mantel, Grundkanten, Seitenkanten und Höhe des Pyramidenstumpfes. Die Grundflächen sind ähnliche Polygone in parallelen Ebenen und die Seitenflächen Trapeze.

Hat die ganze Pyramide gleiche Seitenkanten, so gilt dasselbe von der Ergänzungspyramide und dem Pyramidenstumpfe. Ist die ganze Pyramide regelmäßig, so gilt dasselbe von der Ergänzungspyramide; dann heißt auch der zugehörige Pyramidenstumpf regelmäßig. Die Grundflächen des letzteren sind regelmäßige Polygone von gleicher Seitenanzahl; die Seitenflächen sind congruente gleichschenklige Trapeze.

Aus der vorausgehenden Erklärung folgt, dass die Verlängerungen der Seitenkanten eines Pyramidenstumpfes durch einen und denselben Punkt gehen.

Das Prismatoid.

§ 175. **Erklärungen.** Die bisher betrachteten Körper lassen sich als specielle Fälle einer allgemeinen Körperform auffassen, welche den Namen Prismatoid führt. Dieses hat zwei parallele, im übrigen von einander unabhängige Polygone als Grundflächen und Dreiecke, die mit einer der beiden Grundflächen eine Ecke und mit der anderen eine Seite gemeinschaftlich haben, als Seitenflächen. In besonderen Fällen vereinigen sich zwei derselben zu einem Viereck (Trapez, Parallelogramm). Die Bedeutung der Ausdrücke Grundkanten, Seitenkanten, Höhe und Mantel des Prismatoides ist ohneweiters klar.

Legt man durch die Mitte einer Seitenkante des Prismatoides eine zu den Grundflächen parallele Ebene, so halbiert dieselbe alle Seiten und die Höhe und heißt der Mittelschnitt des Prismatoides (Fig. 169).

§ 176. **Benennung und Beschreibung der speciellen Arten.** *a)* Wenn die Seitenflächen eines Prismatoides durchwegs Vierecke sind, so heißt es Obelisk (Fig. 154). Schneiden sich die Verlängerungen der Seitenkanten in einem Punkte, so sind die Grundflächen ähnlich und der Obelisk ist ein Pyramidenstumpf. Sind alle Seitenkanten parallel, so sind die Grundflächen congruente Polygone, und der Obelisk ist ein Prisma. Wenn eine Grundfläche des Obelisken in einen Punkt zusammenschrumpft, so geht der Obelisk in eine Pyramide über.

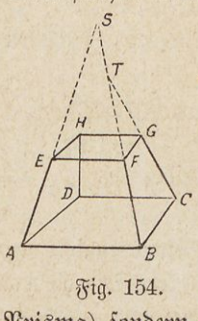


Fig. 154.

b) Sind die Grundflächen eines Prismatoides congruent, die Seitenflächen jedoch nicht Parallelogramme (wie beim Prisma) sondern durchwegs Dreiecke, so heißt das Prismatoid Antiprisma.

c) Läfst man die eine Grundfläche eines Prismatoides in eine zur anderen parallele Gerade oder gebrochene Linie (die Schneide) übergehen, so erhält man ein Polyeder, welches ebenfalls zu den Arten der Prismatoides zählt und Sphenisk (wörtlich übersetzt: Keil) genannt wird.

Allgemeine Eigenschaften der Polyeder.

§ 177. Beziehungen zwischen der Anzahl der Ecken, Flächen, Kanten und Kantenwinkel *(E, F, K, W)*. *a)* Die Anzahl der Kantenwinkel eines Polyeders ist doppelt so groß als jene der Kanten. $W = 2K$.

Beweis. Die Seiten der Polygone, welche die Oberfläche des Polyeders bilden, fallen zu zweien in je eine Kante zusammen. Ihre Anzahl ist daher doppelt so groß als jene der Kanten. Alle Flächen des Polyeders haben nun ebensoviel Seiten als Winkel; daher ist die Anzahl der letzteren, welche zugleich die Kantenwinkel des Polyeders bilden, doppelt so groß als jene der Kanten.

b) Die dreifache Anzahl der Flächen eines Polyeders ist kleiner als die doppelte Anzahl der Kanten und nur dann derselben gleich, wenn alle Flächen Dreiecke sind. $3F \leqq 2K$.

Beweis. Wenn alle Flächen Dreiecke sind, so ist $3F$ die Anzahl der Seiten aller Flächen, somit $3F = W = 2K$. Gibt es jedoch unter den Flächen auch solche mit mehr als drei Seiten, so ist $3F$ kleiner als die Anzahl der Seiten aller Flächen, somit $3F < 2K$.

Folgesatz. Sind alle Flächen eines Polyeders Dreiecke, so können dieselben nur in gerader Anzahl vorhanden sein.

c) Die dreifache Anzahl der Ecken eines Polyeders ist kleiner als die doppelte Anzahl der Kanten und nur dann derselben gleich, wenn alle Ecken Dreikante sind. $3E \leqq 2K$.

Beweis. Sind alle Ecken dreiseitig, so ist $3E = W = 2K$. In jedem anderen Falle ist $3E < 2K$.

Folgesatz. Sind alle Ecken eines Polyeders dreiseitig, so können dieselben nur in gerader Anzahl vorhanden sein.

d) Für jedes (convexe) Polyeder ist die Summe aus der Anzahl der Ecken und jener der Flächen um 2 größer als die Anzahl der Kanten. $E + F = K + 2$.

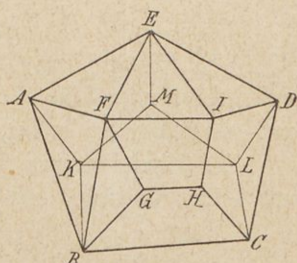


Fig. 155.

Beweis. Man projiciere alle Kanten des gegebenen Polyeders auf eine Ebene und mache die Projectionen jener Kanten, welche auf der dem Beobachter zugewendeten Seite des Polyeders liegen, durch stärkere Linien erkennbar (z. B. AF, BF, FG u. s. w.). Die Projectionsebene kann stets in eine solche Lage gebracht werden, dass sie zu keiner Kante und daher auch zu keiner Fläche des Polyeders normal ist. Dann wird jede Kante als Strecke und jede Fläche als Polygon von derselben Seitenanzahl projiciert.

Bezeichnet man also mit S die Winkelsumme für alle durch Projection der Polyederflächen erhaltenen Polygone (ABF, BGF, $FGHI$, ... ABK, $BCLK$, KLM, ...), ferner mit n_1, n_2, ... n_F die Seitenanzahl der 1., 2., ... Ften Polyederfläche, so ist

$$S = (2n_1 - 4)R + (2n_2 - 4)R + \ldots + (2n_F - 4)R$$
$$= (n_1 + n_2 + \ldots + n_F)2R - F.4R = (K - F)4R.$$

Es bedeutet nämlich $n_1 + n_2 + \ldots + n_F$ die Anzahl der Seiten aller Polyederflächen und ist daher $= 2K$.

Die Zahl S kann jedoch auch gefunden werden, indem man zur doppelten Winkelsumme des Polygones $ABCD$ ..., dessen Umfang die äußere Begrenzung der Projectionsfigur bildet, soviel volle Winkel addiert, als Projectionen von Eckpunkten innerhalb $ABCD$ ... liegen. Wenn also das Polygon $ABCD$ ... m Eckpunkte hat, so folgt

$$S = 2(2m - 4)R + (E - m)4R = (E - 2)4R.$$

Durch Gleichsetzung der beiden Werte von S erhält man schließlich $K - F = E - 2$ und $E + F = K + 2$.

Zusätze. 1. Der Lehrsatz *d)* wird nach dem berühmten Mathematiker Euler (geb. zu Basel 1707, gest. zu Petersburg 1783) der Euler'sche Lehrsatz genannt. In dem obigen Beweise desselben wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass der Lehrsatz von der Winkelsumme (§ 78) für alle Polygone, welche sich durch Projection der Polyederflächen ergeben, giltig ist; ferner, dass diese Polygone einen Theil der Ebene ($ABCD$ ...) zweimal und nicht öfters bedecken. Zu den Euler'schen Polyedern, d. i. jenen, für welche jener Lehrsatz gilt, gehören alle convexen Polyeder. Um ein Polyeder zu erhalten, für welches der Euler'sche Lehrsatz nicht besteht, denke man sich aus einem Würfel einen kleineren Würfel so ausgeschnitten, dass eine Fläche des letzteren in einer Fläche des ersteren liegt.

2. Die Lehrsätze *c)*, *b)* und *d)* lassen sich in folgender Weise ausdrücken:

$$3E + x = 2K, \quad 3F + y = 2K, \quad E + F = K + 2 \ldots \alpha),$$

worin x und y gewisse positive ganze Zahlen bedeuten. Man hat $x = 0$ zu setzen, wenn alle Ecken des Polyeders Dreikante sind, und $y = 0$, wenn alle Flächen Dreiecke sind. Aus den Gleichungen α) erhält man durch Auflösen nach E, F und K

$$E = 4 + \frac{1}{3}(x + 2y), \quad F = 4 + \frac{1}{3}(2x + y), \quad K = 6 + x + y.$$

Es gibt also kein Polyeder, welches weniger als vier Ecken, vier Flächen und sechs Kanten besitzt. Diese kleinsten Zahlen ergeben sich für $x = 0$, $y = 0$ und entsprechen der dreiseitigen Pyramide.

3. Eliminiert man K aus der ersten und dritten, hierauf aus der zweiten und dritten Gleichung α), so folgt

$$E = 2F - 4 - x, \quad E = \frac{F}{2} + 2 + \frac{y}{2},$$

also
$$\frac{F}{2} + 2 \leqq E \leqq 2F - 4.$$

Hieraus erhält man, wenn F gegeben ist, die Grenzen, zwischen denen E liegt, und dann mittelst des Euler'schen Lehrsatzes die Grenzen für K.

Die regelmäßigen Polyeder.

§ 178. Lehrsatz. Es gibt nicht mehr als fünf (convexe) regelmäßige Polyeder.

Beweis. Ein Winkel eines regelmäßigen m-Eckes beträgt $\frac{2mR - 4R}{m}$. Wenn n regelmäßige m-Ecke zur Bildung einer Ecke verwendet werden, so beträgt die Summe der Kantenwinkel $\frac{(2mR - 4R)n}{m}$. Die Zahlen m und n müssen also nach § 162 so gewählt werden, dass die Bedingung $\frac{(2mR - 4R)n}{m} < 4R$ erfüllt ist. Man erhält daraus $2mn - 4n < 4m$, also $mn - 2m - 2n < 0$ oder $(m - 2)(n - 2) < 4$. Die Zahlen m und n müssen ferner den Bedingungen $m \geqq 3$, $n \geqq 3$ oder $m - 2 \geqq 1$, $n - 2 \geqq 1$ genügen. Also müssen für $m - 2$ und $n - 2$ solche Paare positiver ganzer Zahlen gewählt werden, deren Product kleiner als 4 ist. Dies kann nur auf fünf verschiedene Arten geschehen, wie aus der nachfolgenden Tabelle ersichtlich ist.

$m-2$	$n-2$	m	n	K	E	F	Benennung
1	1	3	3	6	4	4	Tetraeder
1	2	3	4	12	6	8	Oktaeder
1	3	3	5	30	12	20	Ikosaeder
2	1	4	3	12	8	6	Hexaeder
3	1	5	3	30	20	12	Dodekaeder

Um die entsprechenden Werte von E, F, K zu erhalten, leitet man zunächst durch Betrachtungen, welche jenen in § 177 *b)* und *c)* ganz analog sind, die Gleichungen $mF = 2K$ und $nE = 2K$ ab. Hierauf substituiert man die daraus berechneten Werte von E und F in die Gleichung $E + F = K + 2$ und erhält

$$K = \frac{2mn}{4 - (m-2)(n-2)},\ E = \frac{2K}{n},\ F = \frac{2K}{m}.$$

Die mit Hilfe dieser Gleichungen gefundenen Werte von K, E und F sind in der obigen Tabelle zusammengestellt.

Zusätze. 1. Im Vorausgehenden ist nur bewiesen worden, dass es nicht mehr als fünf (convexe) regelmäßige Polyeder geben kann. Der Beweis für die Existenz dieser fünf Körper muss durch die Construction derselben erbracht werden. Sie heißen auch die Platonischen Körper, da sie von Platon (geb. zu Athen im Jahre 429 v. Chr.) und dessen Schülern eifrig untersucht wurden.

2. Die Definition der regelmäßigen Polyeder lautet eigentlich: „Ein Polyeder heißt regelmäßig, wenn alle Flächen desselben congruente regelmäßige Polygone sind, und wenn alle Ecken desselben gleichviel Seitenflächen haben." Man kann nämlich nachweisen, dass die Ecken unter den eben angeführten Bedingungen auch congruent und regelmäßig sind. Da jedoch der Beweis für diese Behauptung in Bezug auf das Ikosander sehr langwierig ist und in Bezug auf die übrigen regelmäßigen Polyeder leicht gefunden wird, so soll er in diesem Lehrbuche übergangen werden.

3. Aus der obigen Tabelle ist ersichtlich, dass man dem Oktaeder das Hexaeder und dem Ikosaeder das Dodekaeder derartig zuordnen kann, dass je zwei einander zugeordnete Körper gleichviel Kanten besitzen, und dass der eine ebensoviel Ecken hat als der andere Flächen. Der Grund für diese Erscheinung liegt darin, dass die Gleichungen $mF = 2K$, $nE = 2K$ und $E + F = K + 2$ in sich selbst übergehen, wenn in denselben E und F und gleichzeitig m und n vertauscht werden. — Aus jedem der genannten vier Körper erhält man den zugeordneten, wenn man die Ecken des ersteren durch Ebenen derart abschneidet, dass von jeder Fläche nur der Mittelpunkt als Scheitel einer neuen Ecke übrigbleibt. Daraus geht auch hervor, dass man in gleicher Weise das Tetraeder sich selbst zuordnen kann.

Der Cylinder.

§ 179. Erklärungen und Lehrsätze. *a)* Gleitet eine Gerade längs eines Kreises und bleibt zugleich einer von der Ebene des Kreises geschnittenen Geraden parallel, so beschreibt sie eine krumme Fläche, welche Cylinderfläche genannt wird. Ist die Leitlinie eine beliebige krumme Linie, so erhält man eine Cylinderfläche im allgemeinsten Sinne des Wortes. Im Nachfolgenden soll unter „Cylinderfläche" stets die zuerst erklärte d. i. die Kreis-Cylinderfläche verstanden werden, außer wenn der allgemeinere Begriff ausdrücklich vorausgesetzt wird.

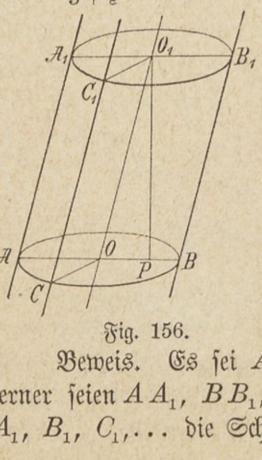


Fig. 156.

Jene Gerade, welche durch den Mittelpunkt des Leitkreises geht und zu irgend einer Lage der erzeugenden Geraden parallel ist, heißt die Achse der Cylinderfläche. Der von der Cylinderfläche begrenzte und nach zwei entgegengesetzten Seiten offene Raum heißt ein cylindrischer Raum.

b) Jede zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene schneidet den cylindrischen Raum in einem dem Leitkreise gleichen Kreise, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt.

Beweis. Es sei ABC der Leitkreis und OO_1 die Achse der Cylinderfläche; ferner seien AA_1, BB_1, $CC_1, \ldots$ besondere Lagen der erzeugenden Geraden und A_1, B_1, $C_1, \ldots$ die Schnittpunkte derselben mit einer Ebene, welche durch irgend einen Punkt O_1 der Achse parallel zur Ebene des Leitkreises gelegt wird. Dann sind die Vierecke AOO_1A_1, BOO_1B_1, $COO_1C_1, \ldots$ Parallelogramme, daher ist $A_1O_1 = AO$, $B_1O_1 = BO$, $C_1O_1 = CO, \ldots$, also auch $A_1O_1 = B_1O_1 = C_1O_1 = \ldots$

Folgesatz. Wenn eine Kreisfläche parallel zu sich selbst so fortbewegt wird, dass ihr Mittelpunkt eine Gerade beschreibt, so beschreibt sie einen cylindrischen Raum.

c) Der Theil des cylindrischen Raumes, welcher zwischen zwei zum Leitkreise parallelen Schnittebenen oder zwischen einer dieser Ebenen und dem Leitkreise enthalten ist, heißt ein Cylinder (genauer ein Kreiscylinder).

Die Oberfläche des Cylinders besteht aus den beiden Grundflächen, welche gleiche und parallele Kreise sind, und der krummen Seitenfläche oder dem Mantel. Die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Grundflächen heißt die Achse, der Abstand der beiden Grundflächen (O_1P) die Höhe des Cylinders. Jede Strecke, welche von den Endpunkten zweier direct paralleler Radien der beiden Grundflächen begrenzt wird, wird eine Seitenlinie des Cylinders genannt. Alle Seitenlinien eines Cylinders sind einander und der Achse gleich und parallel und fallen in den Mantel des Cylinders.

§ 180. Eintheilung. Ein Cylinder heißt gerade oder schief, je nachdem seine Achse zu den Grundflächen normal oder schief ist. Im geraden Cylinder ist die Achse zugleich die Höhe. Der gerade Cylinder kann auch durch Rotation eines Rechteckes um eine Seite entstehen; man zählt ihn daher zu den Rotationskörpern und seinen Mantel, sowie die entsprechende Cylinderfläche zu den Rotationsflächen. Jeder gerade Cylinder, in welchem der Durchmesser der Grundfläche gleich der Höhe ist, heißt gleichseitig.

§ 181. Achsenschnitte. Legt man durch die Achse eines Cylinders eine Ebene, so heißt die erhaltene Schnittfigur ein Achsenschnitt des Cylinders. Alle Achsenschnitte eines beliebigen Cylinders sind Parallelogramme (§ 179 *c*); im geraden Cylinder sind sie congruente Rechtecke und im gleichseitigen Cylinder congruente Quadrate.

Jener Achsenschnitt eines schiefen Cylinders, welcher die Projection der Achse auf eine Grundfläche enthält, heißt das charakteristische Parallelogramm des Cylinders. Seine Ebene ist zu den Grundflächen normal; seine Höhe ist zugleich die Höhe des Cylinders und seine spitzen Winkel sind gleich dem Neigungswinkel der Achse oder irgend einer Seitenlinie zur Grundfläche.

Unter den Achsenschnitten eines schiefen Cylinders gibt es nur ein Rechteck. Seine Ebene wird durch die Achse und jenen Durchmesser der Grundfläche bestimmt, welcher zur Achse normal ist. Da dieser Durchmesser zur Ebene des charakteristischen Parallelogrammes normal ist (§ 155 *c*), so ist auch dieses zum rechteckigen Achsenschnitte normal.

§ 182. Berührungsebenen der Cylinderfläche. Wenn eine Ebene eine Tangente der Grundfläche eines Cylinders und die dem Berührungspunkte entsprechende Seitenlinie enthält, so hat sie außer der Seitenlinie keinen Punkt mit dem Cylindermantel und der entsprechenden Cylinderfläche gemeinschaftlich. Sie heißt daher eine Berührungsebene oder Tangentialebene des Cylindermantels oder der entsprechenden Cylinderfläche.

Beweis. Hätte jene Ebene α außer der Seitenlinie s noch einen Punkt A mit der Cylinderfläche gemeinschaftlich, so müsste die durch A zu s gezogene Parallele einerseits in der Ebene α (Definition der Parallelen) und andererseits im Cylindermantel liegen (§ 179). Die Ebene α würde also den Cylindermantel in zwei Seitenlinien und daher den Umfang der Grundfläche in zwei Punkten schneiden, was der Voraussetzung widerspricht.

§ 183. Ein- und umgeschriebene Prismen. Wenn die Seitenkanten eines Prismas zugleich Seitenlinien eines Cylinders sind, so dass die Grundflächen der beiden Körper in dieselben Ebenen zusammenfallen, so heißt das Prisma dem Cylinder eingeschrieben und letzterer dem ersteren umgeschrieben. Die Grundflächen des eingeschriebenen Prismas sind den Grundflächen des Cylinders eingeschrieben.

Wenn die Seitenflächen eines Prismas Berührungsebenen des Mantels eines Cylinders sind, und wenn die Grundflächen der beiden Körper in dieselben Ebenen fallen, so heißt das Prisma dem Cylinder umgeschrieben und letzterer dem ersteren eingeschrieben. Die Grundflächen des umgeschriebenen Prismas sind den Grundflächen des Cylinders umgeschrieben.

Der Kegel und der Kegelstumpf.

§ 184. Erklärungen und Lehrsätze. *a)* Gleitet eine Gerade so längs eines Kreises, dass einer ihrer Punkte, welcher nicht in der Ebene des Kreises liegt, seine Lage unverändert beibehält, so beschreibt sie eine Kegelfläche oder conische Fläche.

Bezüglich der Kegelfläche im allgemeinsten Sinne des Wortes sieh die analoge Bemerkung im § 179.

Der feste Punkt der erzeugenden Geraden heißt der Scheitel oder die Spitze, die durch den Scheitel und den Mittelpunkt des Leitkreises bestimmte Gerade die Achse der Kegelfläche. Jener von der Kegelfläche begrenzte und nach zwei entgegengesetzten Seiten offene Raum, welcher die Achse enthält, wird ein kegelförmiger oder conischer Raum genannt.

b) Jede zur Ebene des Leitkreises parallele Ebene (ausgenommen jene, welche den Scheitel enthält) schneidet die Kegelfläche in einem Kreise, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt.

Beweis. Es sei ABC der Leitkreis und OS die Achse der Kegelfläche; ferner seien $AS, BS, CS, \ldots$ besondere Lagen der erzeugenden Geraden und A_1, B_1, $C_1, \ldots$ die Schnittpunkte derselben mit einer Ebene, welche durch einen beliebigen (von S verschiedenen) Punkt O_1 der Achse parallel zur Ebene des Leitkreises gelegt wird. Es ist dann $\triangle AOS \backsim A_1O_1S$, $BOS \backsim B_1O_1S, \ldots$; wenn also $OS : O_1S = m$ gesetzt wird, so folgt $AO = mA_1O_1$, $BO = mB_1O_1, \ldots$ und wegen $AO = BO = \ldots$ auch $A_1O_1 = B_1O_1 = \ldots$

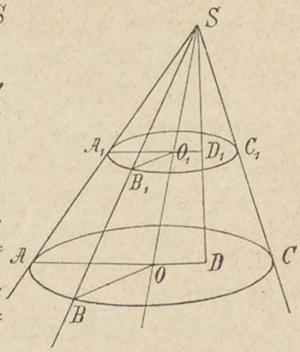


Fig. 157.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn der Scheitel zwischen dem Leitkreise und der parallelen Schnittebene liegt.

c) Jener Theil des kegelförmigen Raumes, welcher zwischen dem Scheitel und der Ebene des Leitkreises oder einer parallelen Schnittebene enthalten ist, heißt ein Kegel (genauer ein Kreiskegel).

Aus der Beschreibung der Pyramide und des Cylinders ist die Bedeutung der Ausdrücke: Grundfläche, Mantel, Scheitel oder Spitze, Achse und Höhe des Kegels ohneweiters klar.

Jede Strecke, welche von der Spitze eines Kegels und einem Punkte des Umfanges der Grundfläche begrenzt wird, heißt eine Seitenlinie des Kegels; sie fällt ganz in den Mantel desselben.

§ 185. Eintheilung. Ein Kegel heißt gerade oder schief, je nachdem sine Achse zur Grundfläche normal oder schief ist. Im geraden Kegel ist die Achse zugleich die Höhe; seine Seitenlinien sind einander gleich. Der gerade Kegel kann auch durch Rotation eines rechtwinkligen Dreieckes um eine Kathete entstehen; man zählt ihn daher zu den Rotationskörpern und seinen Mantel sowie die entsprechende Kegelfläche zu den Rotationsflächen. Jeder gerade Kegel, in welchem der Durchmesser der Grundfläche gleich einer Seitenlinie ist, heißt gleichseitig.

§ 186. Achsenschnitte. Legt man durch die Achse eines Kegels eine Ebene, so heißt die erhaltene Schnittfigur ein Achsenschnitt des Kegels. Die Achsenschnitte eines schiefen Kegels sind im allgemeinen ungleichseitige Dreiecke; jene des geraden Kegels sind congruente gleichschenklige Dreiecke und jene des gleichseitigen Kegels congruente gleichseitige Dreiecke.

Jener Achsenschnitt eines schiefen Kegels, welcher zugleich die Höhe enthält, heißt das charakteristische Dreieck des Kegels. Seine Ebene ist zur Grundfläche normal; seine Höhe ist zugleich die Höhe des Kegels; seine Seiten sind der Durchmesser der Grundfläche, die kürzeste und die längste Seitenlinie des Kegels (§ 155 *b*, Zusatz und § 153).

Unter den Achsenschnitten eines schiefen Kegels gibt es auch ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Ebene zu jener des charakteristischen Dreieckes normal ist (§ 181).

§ 187. **Berührungsebenen der Kegelfläche.** Wenn eine Ebene eine Tangente der Grundfläche eines Kegels und die zum Berührungspunkte gezogene Seitenlinie enthält, so hat sie außer der Seitenlinie keinen Punkt mit dem Kegelmantel und der entsprechenden Kegelfläche gemeinschaftlich. Sie heißt daher eine Berührungsebene des Kegelmantels oder der entsprechenden Kegelfläche. Beweis wie in § 182.

§ 188. **Ein- und umgeschriebene Pyramiden.** Wenn die Seitenkanten einer Pyramide zugleich Seitenlinien eines Kegels sind, so dass die Grundflächen der beiden Körper in eine Ebene zusammenfallen, so heißt die Pyramide dem Kegel eingeschrieben und letzterer der ersteren umgeschrieben. Die Grundfläche der eingeschriebenen Pyramide ist der Grundfläche des Kegels eingeschrieben.

Wenn die Seitenflächen einer Pyramide Berührungsebenen des Mantels eines Kegels sind, und wenn die Grundflächen beider Körper in einer Ebene liegen, so heißt die Pyramide dem Kegel umgeschrieben und letzterer der ersteren eingeschrieben. Die Grundfläche der umgeschriebenen Pyramide ist der Grundfläche des Kegels umgeschrieben.

§ 189. **Der Kegelstumpf.** Jeder Kegel wird durch eine zur Grundfläche parallele Schnittebene in zwei Körper, einen Kegelstumpf und den Ergänzungskegel zerlegt. Die Bedeutung der Ausdrücke: Grundflächen, Mantel, Höhe, Seitenlinie, Achse und Achsenschnitt des Kegelstumpfes ist nach dem Vorausgehenden ohneweiters klar.

Der Kegelstumpf heißt gerade oder schief, je nachdem seine Achse zu den Grundflächen normal oder schief ist.

Die Achsenschnitte eines Kegelstumpfes sind Trapeze, und zwar beim geraden Kegelstumpfe congruente gleichschenklige Trapeze. — Charakteristisches und gleichschenkliges Trapez eines schiefen Kegelstumpfes.

Die Kugel.

§ 190. **Erklärungen.** Wenn ein Halbkreis um den ihn begrenzenden Durchmesser als Achse in demselben Sinne solange rotiert, bis er wieder seine Anfangslage erreicht, so beschreibt er eine geschlossene Fläche, welche Kugelfläche genannt wird. Der von der Kugelfläche eingeschlossene Raum heißt Kugel oder Sphäre. Die Kugelfläche gehört also zu den Rotationsflächen und die Kugel zu den Rotationskörpern.

Da ein beliebiger Punkt des erzeugenden Halbkreises bei der Rotation seinen Abstand vom unbewegten Mittelpunkte nicht verändert, so haben alle Punkte der Kugelfläche gleiche Abstände von jenem Mittelpunkte. Dieser heißt auch Mittelpunkt oder Centrum der Kugelfläche und der Kugel. Jede Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit einem Punkte der Kugelfläche heißt Halbmesser (Radius). Jede von zwei Punkten der Kugelfläche begrenzte Strecke wird Sehne, und wenn dieselbe durch das Centrum geht, Durchmesser (Diameter) genannt. Die Endpunkte eines jeden Durchmessers heißen Gegenpunkte der Kugelfläche

Folgesätze. 1. Alle Radien einer Kugel sind gleich.

2. Jeder Durchmesser ist doppelt so groß als ein Radius derselben Kugel.

3. Alle Durchmesser einer Kugel sind gleich.

4. Jeder Durchmesser ist größer als jede andere Sehne derselben Kugel (§ 43).

§ 191. Kugelfläche und Punkte. *a)* Ein Punkt liegt auf einer Kugelfläche, innerhalb oder außerhalb derselben, je nachdem sein Centralabstand (Abstand vom Centrum) gleich dem Radius, kleiner oder größer ist als derselbe. Zugleich gelten die Umkehrungssätze. Die Beweise sind jenen in § 45 analog.

Folgesätze. 1. Der geometrische Ort aller Punkte (im Raume), welche von einem Punkte O den Abstand r besitzen, ist die Kugelfläche mit dem Centrum O und dem Radius r.

2. Haben zwei Kugelflächen ein gemeinschaftliches Centrum und gleiche Radien, so decken sie sich vollständig. Daher heißen Kugeln mit gleichen Radien congruent oder auch gleich.

b) Je drei Punkte einer Kugelfläche liegen nicht in derselben Geraden (§ 32*c*, 1. Folgesatz).

c) Durch vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, ist eine Kugelfläche eindeutig bestimmt.

Beweis. Sind A, B, C, D die gegebenen Punkte, so können je drei derselben nicht in einer Geraden liegen, weil sonst alle vier Punkte derselben Ebene angehören würden. Die Punkte A, B, C bestimmen also einen Kreis, dessen Achse a, d. i. die im Mittelpunkte zu seiner Ebene errichtete Normale, der geometrische Ort aller Punkte ist, welche von A, B und C gleiche Abstände haben (§ 153*b*). (Die Achse kann auch als Durchschnittslinie der Symmetralebenen der Strecken AB und BC aufgefasst werden, da jeder ihrer Punkte von A und B, ferner von B und C gleiche Abstände hat.) Wenn nun die Symmetralebene γ der Strecke CD die Achse a in einem Punkte O schneidet, so hat dieser von den Punkten A, B, C, D gleiche Abstände; er ist also das Centrum einer Kugelfläche, welche die vier gegebenen Punkte enthält u. s. f. wie in § 45*c*.

Die Gerade a kann nicht zu γ parallel sein. Denn legt man durch a eine Ebene, welche γ in der Geraden c schneidet, so wäre dann $a \parallel c$ und wegen $a \perp ABC$ auch $c \perp ABC$. Daraus schließt man $\gamma \perp ABC$; also müsste CD in der Ebene ABC liegen (§ 151*c*), was der Voraussetzung widerspricht.

Ebensowenig darf angenommen werden, daſs a in der Ebene γ liegt. Denn dann wäre $\gamma \perp ABC$ u. s. f.

d) Unter allen Strecken, welche einen gegebenen Punkt mit den Punkten einer Kugelfläche verbinden, ist jene die größte, welche das Centrum enthält, und jene die kleinste, deren Verlängerung durch das Centrum geht. Beweis analog wie in § 45 *d*.

§ 192. Kugelfläche und Gerade. *a)* Eine Gerade hat mit einer Kugelfläche keinen Punkt, einen Punkt oder zwei Punkte gemeinschaftlich, je nachdem ihr Centralabstand größer, ebenso groß oder kleiner ist als der Radius. Zugleich gelten auch die Umkehrungssätze. Beweise analog wie in § 46.

b) Hat eine Gerade nur einen Punkt mit einer Kugelfläche gemeinschaftlich so heißt sie eine Tangente derselben, und der gemeinschaftliche Punkt heißt der Berührungspunkt. Auch hier ist die Tangente als die Grenzlage einer Geraden aufzufassen, welche zwei Punkte mit der Kugelfläche gemeinschaftlich hat und um einen dieser Punkte solange gedreht wird, bis der andere mit ihm zusammenfällt.

Die Tangente einer Kugelfläche ist normal zu jenem Radius, welcher zum Berührungspunkte gezogen ist.

Der geometrische Ort aller Tangenten, welche eine Kugelfläche in einem gegebenen Punkte berühren, ist eine Ebene, welche nur einen Punkt mit der Kugelfläche gemeinschaftlich hat (§ 193).

c) Gleichen Kugelsehnen entsprechen gleiche Centralabstände, und der größeren von zwei verschiedenen Kugelsehnen entspricht der kleinere Centralabstand. Zugleich gelten die Umkehrungssätze.

Beweise. Bezeichnet man mit r, s und c die Längenzahlen des Kugelradius, einer Kugelsehne und ihres Centralabstandes, so ist $c = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$.

Für eine zweite Kugelsehne erhält man $c_1 = \sqrt{r^2 - \frac{s_1^2}{4}}$. Für $s = s_1$ ist also $c = c_1$ u. s. f.

§ 193. Kugelfläche und Ebene. *a)* Eine Ebene hat mit einer Kugelfläche keinen Punkt, einen Punkt oder eine Kreislinie gemeinschaftlich, je nachdem ihr Centralabstand größer, ebenso groß oder kleiner ist als der Radius. Zugleich gelten die Umkehrungssätze.

Beweise. Die ersten zwei Fälle sind analog zu behandeln wie die entsprechenden im § 46. Ist ferner $OC \perp \alpha$ und $OC < r$, so lege man durch OC eine Ebene und bestimme in der Durchschnittslinie derselben mit der Ebene α einen Punkt A, für welchen $OA = r$ ist. (Wegen $OC < r$ ist diese Construction stets ausführbar.) Beschreibt man nun in der Ebene α eine Kreislinie mit dem Centrum C und dem Radius CA, so haben alle Punkte derselben und nur diese den Abstand r vom Kugelcentrum (§ 153). Diese Kreislinie ist also der geometrische Ort aller Punkte, welche der Kugelfläche und der Ebene gemeinschaftlich sind. — Die Umkehrungssätze können indirect bewiesen werden.

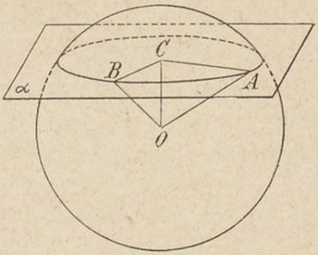


Fig. 158.

b) Hat eine Ebene nur einen Punkt mit einer Kugelfläche gemeinschaftlich, so heißt sie Berührungs- oder Tangentialebene, und der gemeinschaftliche Punkt heißt Berührungspunkt.

Die Berührungsebene ist auf dem zum Berührungspunkte gezogenen Radius normal. Welche Umkehrungen läßt dieser Satz zu?

c) Wenn eine Ebene mehr als einen Punkt mit einer Kugelfläche gemeinschaftlich hat, so schneidet sie dieselbe in einem Kreise, welcher Kugelkreis genannt. Aus *a)* ergibt sich sofort der Satz:

1. Die Normale vom Kugelcentrum auf die Ebene eines Kugelkreises hat das Centrum des letzteren zum Fußpunkte. Welche Umkehrungen läßt dieser Satz zu?

Bezeichnet man mit r, c und ϱ den Radius einer Kugel, den Centralabstand der Ebene eines Kugelkreises und den Radius des letzteren, so ist $\varrho = \sqrt{r^2 - c^2}$. Daraus folgt:

2. Zu gleichen Centralabständen gehören auf derselben Kugel gleiche Kugelkreise und umgekehrt.

3. Dem kleineren Centralabstande entspricht auf derselben Kugel der größere Kugelkreis und umgekehrt.

4. Unter allen Kugelkreisen sind diejenigen die größten, deren Ebenen das Kugelcentrum enthalten. Sie heißen daher größte Kugelkreise oder Hauptkreise, während alle anderen Kugelkreise Nebenkreise genannt werden.

5. Alle Hauptkreise derselben Kugel sind einander gleich; denn der Durchmesser eines jeden ist zugleich Durchmesser der Kugel.

6. Je zwei Hauptkreise einer Kugel schneiden einander in zwei Gegenpunkten der Kugelfläche.

7. Durch zwei Gegenpunkte einer Kugelfläche lassen sich unendlich viele Hauptkreise derselben Kugel legen, während durch irgend zwei andere Punkte der Kugelfläche ein Hauptkreis derselben eindeutig bestimmt ist.

8. Die Achse eines jeden Kugelkreises geht durch das Kugelcentrum (Umkehrungssatz zu 1.). Die Schnittpunkte der Achse mit der Kugelfläche werden die Pole des Kugelkreises genannt.

9. Alle parallelen Kugelkreise haben die Achse und die Pole gemeinschaftlich.

d) Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so zerfällt sie in zwei Körper, welche Kugelabschnitte oder Kugelsegmente heißen, und die Kugelfläche zerfällt in zwei Flächen, welche Kugelmützen, Kugelkappen oder Calotten heißen. Die Oberfläche eines Kugelsegmentes besteht aus einem Kreise, der Grundfläche, und einer Calotte, dem Mantel. Errichtet man die Achse zur Grundfläche eines Kugelsegmentes, so heißt der von der Grundfläche und dem Mantel begrenzte Theil der Achse die Höhe des Kugelsegmentes und der zugehörigen Calotte.

Der Theil einer Kugel zwischen zwei parallelen Schnittebenen heißt Kugelschichte und der zwischen den parallelen Schnittebenen enthaltene Theil der Kugelfläche Kugelzone oder einfach Zone. Die Oberfläche einer Kugelschichte besteht aus zwei parallelen Kugelkreisen, den Grundflächen, und einer Kugelzone, dem Mantel. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe der Kugelschichte und der zugehörigen Kugelzone.

Nimmt man das Kugelcentrum als Spitze und einen Nebenkreis als Leitlinie einer Kegelfläche, so heißt der von der letzteren eingeschlossene Theil der Kugel ein Kugelausschnitt oder Kugelsector. Die Oberfläche desselben besteht aus dem Mantel eines geraden Kegels und aus einer Calotte.

Die im Vorausgehenden bezeichneten Theile der Kugel und der Kugelfläche gehören zu den Rotationskörpern, beziehungsweise Rotationsflächen. Man bestimme die Flächen und Linien, durch deren Rotation jene Theile der Kugel und Kugelfläche erhalten werden.

§ 194. Die Kugel und ihr ein- oder umgeschriebene Körper. *a)* Ein Polyeder heißt einer Kugel eingeschrieben, wenn die Scheitel seiner Ecken in der Kugelfläche liegen, und umgeschrieben, wenn seine Flächen Berührungsebenen der Kugelfläche sind.

Ein Cylinder heißt einer Kugel eingeschrieben, wenn seine Grundflächen dieser Kugel entsprechende Kugelkreise sind, und umgeschrieben, wenn sowohl die beiden Grundflächen als auch alle Seitenlinien die Kugelfläche berühren.

Analog lauten die Erklärungen für den Kegel und den Kegelstumpf.

b) Jedem regelmäßigen Polyeder läßt sich eine Kugel einschreiben und eine Kugel umschreiben. Die Mittelpunkte der beiden Kugeln fallen in einen Punkt (den Mittelpunkt des regelmäßigen Polyeders) zusammen.

Beweis. Es seien ABC und ACD zwei aneinanderstoßende Flächen eines regelmäßigen Polyeders, E und F ihre Mittelpunkte, und G sei der Halbierungspunkt ihrer gemeinschaftlichen Seite AC. Dann ist $EG \perp AC$ und $FG \perp AC$.

Daraus folgt, dass die Ebene EGF zur Kante AC, also auch zu den Flächen ABC und ACD normal ist, und dass EGF der Neigungswinkel dieser beiden Flächen ist. Wenn man nun in E und F die Normalen zu den betrachteten Flächen construiert, so liegen dieselben in der Ebene EGF (§ 151 c) und schneiden sich in einem Punkte O. Von diesem Punkte lässt sich beweisen, dass er sowohl von allen Flächen, als auch von allen Eckpunkten des Polyeders gleiche Abstände hat, dass er also der Mittelpunkt der ein- und der umgeschriebenen Kugel ist.

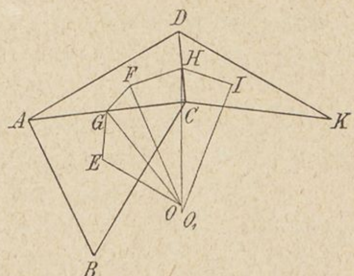


Fig. 159.

Es ist nämlich $\triangle EGO \cong FGO$, also $EO = FO$ und $\sphericalangle EGO = FGO = \frac{\alpha}{2}$, wenn α den Neigungswinkel je zweier aneinanderstoßender Flächen des Polyeders bedeutet. In analoger Weise findet man, dass die in den Mittelpunkten F und I der Flächen ACD und DCK errichteten Normalen dieser Flächen sich in einem Punkte O_1 schneiden, ferner dass $FO_1 = IO_1$ und $\sphericalangle FHO_1 = IHO_1 = \frac{\alpha}{2}$ ist. Aus der Congruenz der Dreiecke FGO und FHO_1 folgt weiter $FO = FO_1$, d. h. die Punkte O und O_1 fallen zusammen. Also ist $OE = OF = OI = \ldots$ und $OA = OB = OC = OD = \ldots$

Ebenso verfährt man, wenn die Flächen des betrachteten Polyeders Quadrate oder regelmäßige Fünfecke sind.

Folgesatz. Jedes regelmäßige Polyeder lässt sich in ebensoviel regelmäßige Pyramiden zerlegen, als es Flächen hat. Die gemeinschaftliche Spitze der Pyramiden ist der Mittelpunkt des regelmäßigen Polyeders.

§ 195. Zwei Kugeln. Haben zwei Kugeln oder zwei Kugelflächen den Mittelpunkt gemeinschaftlich, so heißen sie concentrisch, in jedem anderen Falle excentrisch. Der von zwei concentrischen Kugelflächen eingeschlossene Raum wird eine Hohlkugel genannt.

Aus dem § 52 erkennt man leicht die Bedeutung der folgenden Ausdrücke: Centrale; Centralabstand; zwei Kugeln schließen einander aus; eine Kugel schließt die andere ein; zwei Kugeln berühren einander; die Berührung ist eine äußere oder eine innere; zwei Kugelflächen schneiden einander.

Auch die gegenseitige Lage zweier Kugeln lässt sich analog wie jene zweier Kreise aus der Größe des Centralabstandes und der beiden Radien erkennen. Von den entsprechenden Sätzen muss der folgende hervorgehoben werden:

Zwei Kugelflächen schneiden einander, wenn ihr Centralabstand kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden Radien ist; die Schnittfigur ist eine Kreislinie, deren Mittelpunkt in der Centrale liegt.

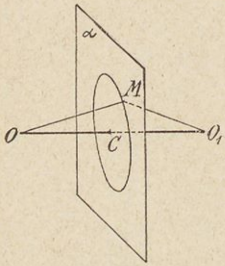


Fig. 160.

Beweis. Sind O und O_1 die Mittelpunkte der beiden Kugeln, ferner r und r_1 die entsprechenden Radien, so ist nach der Voraussetzung $r - r_1 < OO_1 < r + r_1$. Man kann also in irgend einer durch OO_1 gelegten Ebene ein Dreieck OO_1M construieren, in welchem $OM = r$ und $O_1M = r_1$ ist. Dann ist M ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Kugelflächen. Legt man nun durch M die Ebene α normal zu OO_1 und bezeichnet mit C den Schnittpunkt von α und OO_1, so ist die in α liegende Kreislinie mit dem Centrum C und dem Radius CM der geometrische Ort aller Punkte, welche beiden Kugelflächen gemeinschaftlich sind (§ 153).

§ 196. Figuren in der Kugelfläche oder sphärische Figuren. *a)* Zwei Punkte einer Kugelfläche, welche nicht Gegenpunkte sind, bestimmen einen Hauptkreis und sind zugleich Endpunkte zweier Bogen desselben. Der kleinere dieser Bogen heißt der sphärische Abstand der beiden Punkte.

Jeder Pol eines Kugelkreises hat von allen Punkten desselben gleiche sphärische Abstände (§ 49 *b*), welche sphärische Halbmesser des Kugelkreises genannt werden.

Der sphärische Halbmesser eines Hauptkreises beträgt 90^0.

Hat ein Punkt einer Kugelfläche von zwei anderen Punkten derselben, welche nicht Gegenpunkte sind, den sphärischen Abstand von je 90^0, so ist er ein Pol des durch jene zwei Punkte bestimmten Hauptkreises.

b) Unter einem sphärischen Winkel oder dem Winkel zweier sich schneidender Hauptkreisbogen versteht man den Winkel der beiden Tangenten, welche im Durchschnittspunkte der Bogen an dieselben gelegt werden.

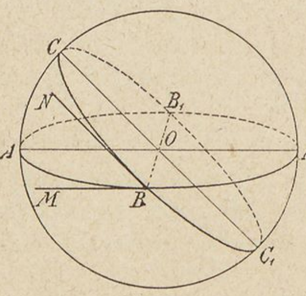


Fig. 161.

So z. B. wird die Größe des sphärischen Winkels ABC durch den Winkel MBN der Tangenten BM und BN angegeben. Die Bogen BA und BC heißen die Schenkel und der Schnittpunkt B der Scheitel des sphärischen Winkels ABC.

Folgesätze. 1. Jeder sphärische Winkel ist gleich dem Neigungswinkel der beiden Ebenen, in welchen seine Schenkel liegen.

2. Ein sphärischer Winkel wird durch den von seinen Schenkeln begrenzten Bogen jenes Hauptkreises gemessen, welcher den Scheitel des sphärischen Winkels zum Pole hat. — Ist nämlich (Fig. 161) ACA_1 jener Hauptkreis, welcher den Scheitel B des sphärischen Winkels ABC zum Pole hat, so ist der Bogen AC das Maß des Winkels AOC und wegen $OA \parallel BM$, $OC \parallel BN$ auch das Maß des Winkels MBN.

c) Zwei Hauptkreise zerlegen die Kugelfläche in vier Theile, welche sphärische Zweiecke genannt werden; z. B. BAB_1CB (Fig. 161). Die beiden sphärischen Winkel eines sphärischen Zweieckes sind einander gleich.

Man kann sich das sphärische Zweieck auch durch Rotation eines Halbkreises um den ihn begrenzenden Durchmesser entstanden denken und erhält dann auch sphärische Zweiecke, deren Winkel mehr als $2R$ betragen.

d) Drei Hauptkreise, deren Ebenen sich nicht in einer Geraden schneiden, zerlegen die Kugelfläche in acht Theile, welche sphärische Dreiecke genannt werden; z. B. ABC, A_1BC, . . . (Fig. 161). Dem Dreiecke ABC entspricht $A_1B_1C_1$ als Gegendreieck; die Dreiecke A_1BC, B_1CA und C_1AB heißen Nebendreiecke und die Dreiecke AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 Scheiteldreiecke des Dreieckes ABC Die Kreisbogen AB, BC, CA heißen Seiten, die sphärischen Winkel CAB, ABC, BCA Winkel und die sphärischen Abstände der Eckpunkte von den Gegenseiten Höhen des sphärischen Dreieckes ABC.

§ 197. Eigenschaften des sphärischen Dreieckes. *a)* Die Seiten und die Winkel eines sphärischen Dreieckes werden in der Regel nach dem Gradmaße angegeben. Nach der oben (§ 196, *d*) beschriebenen Entstehungsweise eines sphärischen Dreieckes ist jede Seite und jeder Winkel desselben kleiner als 180^0 oder $2R$. Man kann jedoch das sphärische Dreieck auch als den von drei beliebigen Hauptkreisen begrenzten Theil der Kugelfläche definieren und muss dann auch sphärische Dreiecke mit erhabenen Seiten und Winkeln zulassen. Solche Dreiecke bleiben jedoch aus allen folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

b) Jedem sphärischen Dreiecke entspricht ein Dreikant, dessen Scheitel das Kugelcentrum ist, und dessen Kanten durch die Eckpunkte des sphärischen Dreieckes gehen. Jeder Winkel des letzteren ist gleich dem entsprechenden Flächenwinkel des zugehörigen Dreikantes; und jede Seite des sphärischen Dreieckes ist das Maß des entsprechenden Kantenwinkels im zugehörigen Dreikante. Aus diesem Grunde lassen sich alle Eigenschaften der Dreikante welche sich nur auf Winkel und Seiten beziehen, unmittelbar auf sphärische Dreiecke übertragen.

Man findet auf diesem Wege die Lehrsätze:

Jede Seite eines sphärischen Dreieckes ist kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen Seiten.

Sind zwei Winkel eines sphärischen Dreieckes gleich, so sind auch ihre Gegenseiten gleich, und umgekehrt.

Dem größeren von zwei ungleichen Winkeln liegt die größere Seite gegenüber, und umgekehrt.

Die Summe der Seiten eines sphärischen Dreieckes ist kleiner als $4R$.

Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreieckes ist kleiner als $6R$ und größer als $2R$.

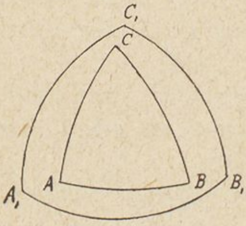


Fig. 162.

c) Haben zwei Polarecken den Scheitel gemeinschaftlich, und wird derselbe als Mittelpunkt einer Kugelfläche gewählt, so werden aus dieser zwei sphärische Dreiecke ausgeschnitten, welche in analogen Beziehungen zueinander stehen, wie die Polarecken; sie werden daher **Polardreiecke** genannt.

In zwei sphärischen Polardreiecken ist jede Seite des einen zu den Winkeln des anderen supplementär, und umgekehrt.

Sind ABC und $A_1B_1C_1$ zwei sphärische Polardreiecke, so sind A_1, B_1, C_1 Pole der Hauptkreise, auf welchen bezw. BC, CA und AB liegen. Desgleichen sind A, B, C Pole jener Hauptkreise, auf welchen bezw. B_1C_1, C_1A_1 und A_1B_1 liegen. In Fig. 162 ist $A_1B_1C_1$ eigentlich das Gegendreieck zum Polardreieck von ABC, doch bleibt die Beziehung zwischen den Seiten und Winkeln dieselbe wie für die beiden Polardreiecke.

d) Auch die Lehrsätze über die Congruenz und symmetrische Gleichheit der sphärischen Dreiecke lassen sich unmittelbar aus den analogen Sätzen über die Dreikante ableiten. Ein sphärisches Dreieck läßt sich also auf sechs verschiedene Arten durch drei Umfangsstücke bestimmen.

Congruenz und symmetrische Gleichheit; Ähnlichkeit und symmetrische Ähnlichkeit der Körper.

§ 198. Congruenz und symmetrische Gleichheit. Aus dem allgemeinen Begriffe der Congruenz folgt, dass in congruenten Körpern die homologen Strecken und Winkel beziehungsweise gleich und die homologen Ecken congruent sind.

Zwei Körper, deren Punkte einander paarweise entsprechen, heißen **symmetrisch in Bezug auf eine Ebene**, wenn diese die Symmetralebene je zweier entsprechender oder homologer Punkte ist, und **symmetrisch in Bezug auf einen Punkt**, wenn dieser der Halbierungspunkt aller Verbindungsstrecken homologer Punkte ist. In beiden Fällen sind die homologen Strecken und Winkel beziehungsweise gleich und die homologen Ecken symmetrisch gleich. Daraus folgt, dass zwei Körper, welche in Bezug auf eine Ebene oder einen Punkt symmetrisch sind, sich im allgemeinen nicht zur Deckung bringen lassen, während in der Ebene zwei axial- oder zwei centrisch-symmetrische Figuren stets auch congruent sind.

Da man nachweisen kann, dass sich zwei bezüglich einer Ebene symmetrische Körper stets in Lagen bringen lassen, in welchen sie bezüglich eines Punktes symmetrisch sind, und umgekehrt, so pflegt man diese beiden Fälle im allgemeinen nicht von einander zu unterscheiden und nennt solche Körper einfach **symmetrisch gleich**. Symmetrisch gleich sind z. B. die rechte und die linke Hand eines Menschen, ein Gegenstand und sein Bild im ebenen Spiegel u. s. f.

§ 199. Ähnlichkeit und symmetrische Ähnlichkeit. Zwei Körper, deren Punkte einander paarweise entsprechen, heißen ähnlich, beziehungsweise symmetrisch ähnlich, wenn sie sich in einen räumlichen Strahlenbüschel auf die nämliche Seite, beziehungsweise auf entgegengesetzte Seiten des Scheitels so bringen lassen, dass je zwei homologe Punkte auf demselben Strahle liegen, und dass alle Verhältnisse der homologen Strahlenabschnitte einander gleich sind. Aus der Lehre von der Ähnlichkeit ebener Figuren erkennt man ohneweiters die Bedeutung der Ausdrücke: Ähnlichkeitsstrahl, äußerer oder innerer Ähnlichkeitspunkt und Modulus.

In ähnlichen Körpern sind die Verhältnisse homologer Strecken einander gleich, u. zw. gleich dem Modulus, die homologen Winkel sind einander gleich und die homologen Ecken congruent. Geht der stets positive Modulus zweier ähnlicher Körper in die positive Einheit über, so verwandeln sich dieselben in congruente Körper.

In symmetrisch ähnlichen Körpern sind die Verhältnisse homologer Strecken ebenfalls einander und dem Modulus gleich, die homologen Winkel sind gleich, die homologen Ecken jedoch symmetrisch gleich. Geht der stets negative Modulus zweier symmetrisch ähnlicher Körper in die negative Einheit über, so verwandeln sich dieselben in symmetrisch gleiche Körper.

IV. Abschnitt: Oberflächen- und Volumsmessung.

Oberflächenmessung.

§ 200. Polyeder. Über die Oberflächen von Polyedern sind die folgenden leicht beweisbaren Sätze hervorzuheben:

a) Der Mantel eines geraden Prismas ist gleich einem Rechtecke, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Prismas zur Höhe hat.

b) Der Mantel eines schiefen Prismas ist gleich einem Rechtecke, welches den Umfang eines Normalschnittes zur Grundlinie und eine Seitenkante zur Höhe hat.

c) Der Mantel einer regelmäßigen Pyramide ist gleich einem Dreiecke, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe einer Seitenfläche zur Höhe hat.

d) Der Mantel eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes ist gleich einem Trapeze, welches die Umfänge der Grundflächen zu Parallelseiten und die Höhe einer Seitenfläche zur Höhe hat, oder gleich einem Rechtecke, welches den Umfang des Mittelschnittes zur Grundlinie und die Höhe einer Seitenfläche zur Höhe hat.

Unter dem Mittelschnitte eines Prismas, einer Pyramide, eines Pyramidenstumpfes, eines Prismatoides, eines Cylinders, eines Kegels oder eines Kegelstumpfes versteht man jenen zur Grundfläche parallelen Schnitt, welcher die Höhe und daher auch alle Seitenkanten oder Seitenlinien halbiert.

§ 201. Complanation krummer Flächen. Da man eine krumme Fläche nicht unmittelbar mit einer ebenen vergleichen kann, so läſst sich die Flächenzahl der ersteren, d. i. jene Zahl, welche angibt, wie oft die Flächeneinheit in der krummen Fläche enthalten ist, nur auf indirectem Wege, und zwar analog wie die Längenzahl einer krummen Linie, bestimmen. Der Vorgang, durch welchen die Flächenzahl einer krummen Fläche berechnet wird, heiſst die Complanation der letzteren. Dieselbe besteht meistens darin, daſs man sich der krummen Fläche ein Polyeder eingeschrieben denkt, hierauf die Anzahl seiner Flächen ohne Ende zunehmen und zugleich die Dimensionen jeder einzelnen Fläche ohne Ende abnehmen läſst. Da die einzelnen Polyederflächen bei diesem Vorgange immer mehr mit der krummen Fläche zusammenfallen, so wird jener Grenzwert, welchem sich die Summe der Flächenzahlen aller eingeschriebenen Polyederflächen unbegrenzt nähert, als die Flächenzahl der krummen Fläche erklärt.

Man kann auch der gegebenen krummen Fläche ein Polyeder umschreiben und im übrigen ebenso wie im vorausgehenden Falle verfahren. Beide Wege müssen zu demselben Resultate führen; daher kann der eine zur Controle des anderen benützt werden.

§ 202. Gerader Cylinder. Der Mantel eines geraden Cylinders ist gleich einem Rechtecke, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Cylinders zur Höhe hat.

Beweis. Man denke sich dem geraden Cylinder ein n-seitiges regelmäßiges Prisma eingeschrieben (oder umgeschrieben) und bezeichne den Radius der Grundfläche des Cylinders mit r, den Umfang der Grundfläche des Prismas mit u_n und die gemeinschaftliche Höhe der beiden Körper mit h. Läſst man nun n unbegrenzt wachsen, so geht u_n in den Grenzwert $2\pi r$ und $u_n h$, d. i. die Flächenzahl des Prismenmantels, in $2\pi r h$ über. Dieses Product ist zugleich die Flächenzahl eines Rechteckes mit der Grundlinie $2\pi r$ und der Höhe h.

Zu demselben Resultate gelangt man auch mittelst des Satzes § 200 *a)*, welcher für eine beliebig große Seitenanzahl des Prismas besteht. Auf diesem Wege erkennt man zugleich, daſs sich die Cylinderfläche in eine Ebene ausbreiten läſst, daſs sie also zu den „abwickelbaren Flächen" gehört.

Folgesatz. Bezeichnet man mit M und O die Flächenzahlen des Mantels und der Oberfläche eines geraden Cylinders, so ist

$$M = 2\pi r h \text{ und } O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r\,(r + h).$$

Zusatz. Die Mantelfläche eines schiefen Cylinders läſst sich auf elementarem Wege nicht berechnen.

§ 203. Gerader Kegel. Der Mantel eines geraden Kegels ist gleich einem Kreissector, welcher die Peripherie der Grundfläche des Kegels zum Bogen und die Seitenlinie des Kegels zum Radius hat.

Beweis. Man denke sich dem geraden Kegel eine n-seitige regelmäßige Pyramide umgeschrieben und bezeichne mit r den Radius der Grundfläche des Kegels, mit s dessen Seitenlinie und mit u_n den Umfang der Grundfläche der Pyramide. Läßt man nun die Zahl n unendlich groß werden, so geht u_n in den Grenzwert $2\pi r$ und $\frac{1}{2} u_n s$, d. i. die Flächenzahl des Pyramidenmantels, in $\frac{1}{2} . 2\pi r s = \pi r s$ über. $\pi r s$ ist zugleich die Flächenzahl eines Kreissectors mit dem Bogen $2\pi r$ und dem Radius s.

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man sich den Mantel der umgeschriebenen regelmäßigen Pyramide längs einer Seitenkante aufgeschnitten und hierauf in die Ebene ausgebreitet denkt. Die erhaltene Figur (das Netz des Pyramidenmantels) ist ein Polygon, welchem sich ein Kreissector einschreiben läßt, und welches in den Sector übergeht, wenn die Seitenanzahl der Pyramide unbegrenzt wächst. Daraus folgt auch, daß die Kegelfläche in die Ebene abwickelbar ist.

Folgesatz. Sind M und O die Flächenzahlen des Mantels und der Oberfläche eines geraden Kegels, so hat man

$$M = \pi r s; \; O = \pi r^2 + \pi r s = \pi r\,(r + s).$$

Zusatz. Die Mantelfläche eines schiefen Kegels läßt sich auf elementarem Wege nicht berechnen.

§ 204. Gerader Kegelstumpf. *a)* Der Mantel eines geraden Kegelstumpfes ist gleich einem Kreisringsector, dessen Bogen und Breite beziehungsweise gleich sind den Peripherien der Grundflächen und der Seitenlinie des Kegelstumpfes.

Beweis. Man denke sich dem geraden Kegelstumpfe einen regelmäßigen Pyramidenstumpf umgeschrieben und verfahre dann ebenso wie im vorausgehenden Falle (§ 203). Es ist $M = \pi (r + r_1) s$ und $O = \pi [r^2 + r_1^2 + (r + r_1) s]$.

b) Der Mantel eines geraden Kegels oder Kegelstumpfes ist gleich dem Producte aus der Peripherie des Mittelschnittes in die Seitenlinie.

Beweis. Legt man durch den geraden Kegel oder Kegelstumpf einen Achsen- und den Mittelschnitt, so ist der Durchmesser 2ϱ des Mittelschnittes zugleich die Mittellinie jenes Dreiecks oder Trapezes, welches man als Achsenschnitt erhält. Daher ist beim Kegel $2\varrho = r$ und beim Kegelstumpfe $2\varrho = r + r_1$, also in beiden Fällen $M = 2\pi \varrho s$.

c) Der Mantel eines geraden Kegels oder Kegelstumpfes ist gleich dem Producte aus seiner Höhe und der Peripherie eines Hauptkreises jener Kugel, welche den Mantel längs des Umfanges des Mittelschnittes berührt.

Beweis. Es sei $ABCD$ der Achsenschnitt eines geraden Kegelstumpfes, EF seine Mittellinie und O der Durchschnittspunkt der Symmetralen von AB und AD. Der Kreis mit dem Centrum O und dem Radius OE berührt die Seiten AD und BC in den Punkten E und F. Läßt man nun die ganze Figur um OI rotieren, so beschreibt der eben construierte Kreis eine Kugel, der Achsenschnitt $ABCD$ den gegebenen Kegelstumpf, und man überzeugt sich leicht, daß die Kugel den Kegelstumpf längs des Mittelschnittes berührt.

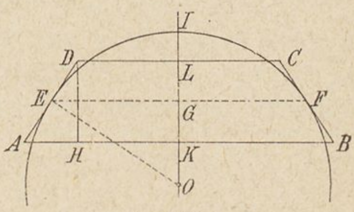


Fig. 163.

Zieht man $DH \perp AB$, so ist $\triangle AHD \backsim OGE$, also $AD : DH = OE : GE$ und $AD \,.\, GE = DH \,.\, OE$. Nach b) ist nun $M = 2\pi GE \,.\, AD$; daher hat man auch $M = 2\pi OE \,.\, DH$. Ebenso wird der Beweis für den Kegel geführt.

Zusatz. Auch die Formel für die Mantelfläche eines geraden Cylinders läßt sich in analoger Weise deuten.

§ 205. Kugel. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich der vierfachen Fläche eines Hauptkreises.

Beweis. Man denke sich einem Hauptkreise der gegebenen Kugel ein regelmäßiges Vieleck mit der geraden Seitenanzahl $2n$ umgeschrieben und die erhaltene Figur um die Verbindungslinie zweier Gegenecken gedreht. Die Oberfläche O des vom Polygone beschriebenen Rotationskörpers besteht aus den Mantelflächen von 2 Kegeln und $n - 2$ Kegelstumpfen oder von 2 Kegeln, $n - 3$ Kegelstumpfen und einem Cylinder. Alle diese Mantelflächen werden von der gegebenen Kugel längs ihrer Mittellinien berührt. Bezeichnet man also mit r den Radius der Kugel und mit $h_1, h_2, \ldots h_n$ die Projectionen der Polygonseiten auf die Rotationsachse, so ist nach § 204 c) $O = 2\pi r\,(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$. Läßt man nun die Zahl n ohne Ende wachsen, so geht die Summe $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ in den Grenzwert $2r$ über, und man hat daher $O = 2\pi r \,.\, 2r = 4\pi r^2$.

§ 206. Kugelzone und Calotte. Eine Kugelzone oder eine Calotte ist gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, welcher einen Hauptkreis der Kugel zur Grundfläche und die Höhe der Zone oder Calotte zur Höhe hat.

Beweis. Man verfahre ebenso wie in § 205; doch ist diesmal nur jener Theil der Rotationsfläche zu betrachten, welcher zwischen zwei auf der Rotationsachse normalen Ebenen oder auf der einen Seite einer solchen Ebene liegt. Es ergibt sich hier der Grenzwert $2\pi rh$, wo h die Höhe der Zone oder Calotte bedeutet. Vergleicht man dieses Resultat mit dem § 202, so erkennt man sofort die Richtigkeit des zu beweisenden Lehrsatzes.

Folgesatz. Sind Z und C die Flächenzahlen der Zone und der Calotte, so hat man also

$$Z = 2\pi r h \text{ und } C = 2\pi r h.$$

§ 207. Sphärisches Zweieck. Zwei sphärische Zweiecke, welche derselben Kugelfläche angehören, verhalten sich wie die zugehörigen sphärischen Winkel. Beweis analog wie in § 114. Um daher die Flächenzahl F des sphärischen Zweieckes zu erhalten, benützt man die Proportion

$$F : 4\pi r^2 = \alpha : 360 \text{ und findet } F = \frac{\pi r^2 \alpha}{90} = 2 r^2 \operatorname{arc} \alpha.$$

§ 208. Sphärisches Dreieck. *a)* Zwei sphärische Gegendreiecke haben gleichen Flächeninhalt.

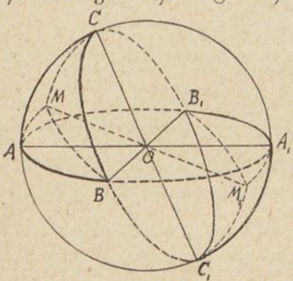


Fig. 164.

Beweis. Es seien ABC und $A_1B_1C_1$ die gegebenen sphärischen Gegendreiecke, und man lege durch die Winkel AOB und BOC die Symmetralebenen. Da die Schnittlinie der letzteren nach § 154 mit den Kanten des Dreikantes $OABC$ gleiche Winkel einschließt, so sind die sphärischen Dreiecke AMB, BMC und CMA gleichschenklig. Dasselbe gilt von ihren Gegendreiecken $A_1M_1B_1$, $B_1M_1C_1$ und $C_1M_1A_1$. Da nun zwei gleichschenklige Gegendreiecke auch congruent sind (§ 164, Zusatz 2), so ist damit die Gleichheit der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ bewiesen. Analog verfährt man, wenn der Punkt M in den Halbierungspunkt einer Seite oder außerhalb des Dreieckes ABC fällt.

b) Aufgabe. Den Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes aus den drei Winkeln zu berechnen.

Aus § 207 und Fig. 164 ergibt sich

$$ABC + BCA_1 = \frac{\pi r^2 \alpha}{90},$$

$$ABC + CAB_1 = \frac{\pi r^2 \beta}{90},$$

$$ABC + ABC_1 = \frac{\pi r^2 \gamma}{90}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man

$$3\, ABC + BCA_1 + CAB_1 + ABC_1 = \frac{\pi r^2}{90}(\alpha + \beta + \gamma);$$

andererseits ist $ABC + BCA_1 + C_1A_1B + ABC_1 = 2\pi r^2$.

Durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen erhält man, da $C_1A_1B = CAB_1$ ist,

$$ABC = \frac{\pi r^2 \varepsilon}{180^0} = r^2 arc\, \varepsilon, \text{ wo } \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$$

bedeutet.

Man nennt die Größe ε, das ist den Überschuſs der Winkelsumme des sphärischen Dreieckes über 180^0, den sphärischen Excess des Dreieckes.

Folgesätze. 1. Jedes sphärische Dreieck verhält sich zur entsprechenden Kugeloberfläche, wie sein sphärischer Excess zu 8 R.

2. Zwei sphärische Dreiecke auf derselben Kugeloberfläche verhalten sich wie ihre sphärischen Excesse.

Volumsmessung.

§ 209. Erklärungen. Unter dem Volumen eines Körpers versteht man den von seiner Oberfläche begrenzten Raum, wenn nicht die Form, sondern nur die Größe desselben berücksichtigt wird. Man kann Körper ebenso wie Strecken, Winkel oder Flächen nach ihrer Größe vergleichen, man kann sie addieren, subtrahieren u. s. w. Die Definitionen für die Vergleichung der Körper, für ihre Addition, Subtraction u. s. w. ergeben sich durch Analogie aus § 82.

Als Volumseinheit nimmt man einen Würfel an, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist, und nennt ihn je nach der Kantenlänge 1 Cubikmeter, 1 Cubikdecimeter u. s. f. Ist V ein betrachtetes Volumen, W die Volumseinheit, und findet man durch Messung, daſs $V : W = a$, also $V = aW$ ist, so heißt die unbenannte Zahl a (welche angibt, wie oft die Volumseinheit in dem gegebenen Volumen enthalten ist) die Volumzahl und die benannte Zahl aW der Cubikinhalt des betrachteten Körpers.

Die Volumzahl eines ganz oder theilweise von krummen Flächen begrenzten Körpers wird analog definiert wie die Flächenzahl einer krummlinig begrenzten ebenen Fläche (§ 116) oder wie jene einer krummen Fläche (§ 201). Man nennt den Vorgang, durch welchen die Volumzahl eines Körpers berechnet wird, die Cubatur desselben.

§ 210. Gerades Prisma und gerader Cylinder. *a)* Gerade Prismen mit congruenten Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

Der Beweis ist jenem in § 107 *a)* ganz analog.

b) Die Volumzahl eines rechtwinkligen Parallelepipedes ist gleich dem Producte aus den Längenzahlen der drei Dimensionen (Länge, Breite und Höhe) oder kürzer ausgedrückt: Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedes ist gleich dem Producte aus den drei Dimensionen desselben.

Beweis. Man vergleiche das gegebene rechtwinklige Parallelepiped P mit zwei anderen rechtwinkligen Parallelepipeden P_1, P_2 und mit einem Würfel W, und wähle die letzten drei Körper so, daſs jeder mit dem vorausgehenden in zwei Dimensionen übereinstimmt, und daſs W die Volumseinheit selbst ist. Sind also a, b, c die Längenzahlen der drei Dimensionen in P, so seien a, b, 1 die entsprechenden Zahlen in P_1, ferner a, 1, 1 die entsprechenden Zahlen in P_2 und 1, 1, 1 die entsprechenden Zahlen in W. Da nun jede Fläche eines Parallelepipedes als Grundfläche angesehen werden kann, so erhält man mit Hilfe des Lehrsatzes $a)$ die Proportionen

$$P : P_1 = c : 1,$$
$$P_1 : P_2 = b : 1,$$
$$P_2 : W = a : 1.$$

Hieraus folgt $P_2 = aW$; $P_1 = bP_2 = abW$; $P = cP_1 = abcW$. Also ist die Volumzahl V des gegebenen Parallelepiepdes P gleich abc. $V = abc$.

Folgesatz. Für den Würfel ist $a = b = c$, also $V = a^3$. Hieraus läßt sich die Benennung „Cubus einer Zahl" für die dritte Potenz derselben und die Bezeichnung $1\,m^3$, $1\,dm^3$, . . . für 1 Cubikmeter, 1 Cubikdecimeter, . . . erklären. Man findet ferner $1\,m^3 = 1000\,dm^3 = 1000000\,cm^3$ u. s. f.

$c)$ Die Volumzahl eines geraden Prismas ist gleich dem Producte aus der Flächenzahl der Grundfläche und der Längenzahl der Höhe; oder kürzer ausgedrückt: Das Volumen eines geraden Prismas ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Beweis. 1. Es sei die Grundfläche des geraden Prismas zunächst ein Rechteck, also nach dem Lehrsatze $b)$ $V = abc$. Da ab die Flächenzahl der Grundfläche und c die Längenzahl der entsprechenden Höhe bedeutet, so ist damit die Behauptung für diesen Fall erwiesen.

2. Hat das gegebene Prisma P als Grundfläche ein schiefwinkliges Parallelogramm $ABCD$, so kann man dieses mit Beibehaltung der Seite AB in ein Rechteck $ABFE$ verwandeln und über demselben als der Grundfläche ein rechtwinkliges Parallelepiped P_1 construieren, welches mit P gleiche Höhe hat. Nun sind die dreiseitigen Prismen $ADEA_1D_1E_1$ und $BCFB_1C_1F_1$ congruent, wovon man sich überzeugt, wenn man das eine so in das andere legt, dass die congruenten Grundflächen ADE und BCF zusammenfallen. Wird also vom Prisma $ABCEA_1B_1C_1E_1$ einmal das eine und einmal das andere dreiseitige Prisma subtrahiert, so müssen gleiche Körper übrigbleiben. Es ist also $P = P_1$. Die Gleichung $V = gh$, welche nach dem 1. Theile des Beweises für P_1 gilt, besteht daher auch für P, da beide Parallelepipede in der Größe des Volumens, der Grundfläche und der Höhe übereinstimmen.

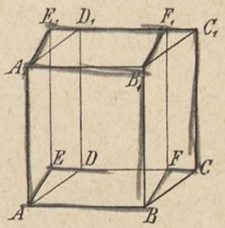


Fig. 165.

3. Ist die Grundfläche des geraden Prismas P ein Dreieck ABD, so ergänze man dieses zum Parallelogramme $ABCD$ und errichte über demselben als der Grundfläche ein gerades Parallelepiped P_1, welches mit dem Prisma P gleiche Höhe hat. Das Prisma $\overline{B}CDB_1C_1D_1$ kann nun mit P zur Congruenz gebracht werden,

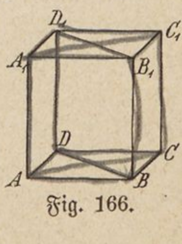


Fig. 166.

also ist $P_1 = 2P$. Bezeichnet man also mit g und h die Maßzahlen von ABD und AA_1, so ist $2gh$ die Volumzahl von P_1, also gh die Volumzahl von P.

4. Ist die Grundfläche ein beliebiges Polygon, so zerlege man das gegebene gerade Prisma in dreiseitige gerade Prismen von derselben Höhe. Es ist dann $V = g_1h + g_2h + g_3h + \ldots = (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots)\,h = gh.$

d) Das Volumen eines geraden Cylinders ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Beweis. Man denke sich dem geraden Cylinder ein n-seitiges gerades Prisma ein- oder umgeschrieben und die Volumzahl g_nh des letzteren berechnet. Läſst man nun die Zahl n unendlich wachsen und gleichzeitig jede Grundkante des Prismas unendlich abnehmen, so geht g_nh in den Grenzwert gh über, wo g den Inhalt der Grundfläche des Cylinders bedeutet. Daher ist $V = gh$.

Zusatz. Aus dem vorausgehenden Beweise geht hervor, daſs der Lehrsatz *d)* für jeden geraden Cylinder mit beliebiger Leitlinie besteht.

§ 211. Satz von Cavalieri. *a)* Wenn ein Körper durch parallele Ebenen in n Schichten von gleicher Höhe zerlegt und jeder Schichte je ein gerader Cylinder (bezw. Prisma) ein- und umgeschrieben wird, so läſst sich der Unterschied zwischen dem gegebenen Körper und der Summe aller ein- oder aller umgeschriebenen Cylinder, (bezw. Prismen) durch entsprechende Vergrößerung der Zahl n beliebig klein machen.

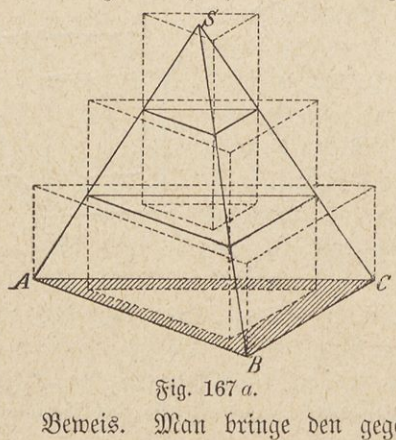


Fig. 167*a*.

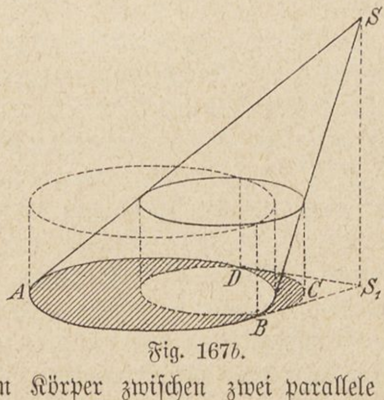


Fig. 167*b*.

Beweis. Man bringe den gegebenen Körper zwischen zwei parallele ihn berührende Ebenen α, β und theile den Abstand h derselben in n gleiche Theile von der Größe δ. Legt man durch die Theilungspunkte Schnittebenen parallel zu α, so zerfällt der gegebene Körper in n Schichten von der Höhe δ. Nun projiciere man den Mantel einer jeden Schichte auf die untere Grundfläche derselben (in den Figuren 167*a* und *b* sind diese Projectionen für die untersten Schichten durch Schraffierung ersichtlich gemacht) und benütze sowohl die äußere als auch die innere Begrenzung der Mantelprojection als Leitlinie je eines geraden Cylinders von der Höhe δ. (Wenn die Leitlinie ein Polygon ist, wie in Fig. 167 *a*, so erhält man anstatt des Cylinders ein Prisma. In diesem § ist zur Vereinfachung der Ausdrucksweise von nun an nur vom Cylinder die Rede, so dass das Prisma als eine specielle Form des Cylinders anzusehen ist.) Der eine Cylinder ist der Schichte umgeschrieben und daher größer als dieselbe; der andere ist der Schichte eingeschrieben und daher kleiner als dieselbe. Bezeichnet man also mit V das Volumen des gegebenen Körpers, mit $g_1, g_2, \ldots g_n$ die Grundflächen der eingeschriebenen und mit $G_1, G_2, \ldots G_n$ jene der umgeschriebenen Cylinder, so ist

$$g_1\delta + g_2\delta + \ldots + g_n\delta < V < G_1\delta + G_2\delta + \ldots + G_n\delta \,.\,. (1).$$

Der Unterschied der beiden Grenzen, zwischen denen V liegt, ist

$$[(G_1 - g_1) + (G_2 - g_2) + \ldots + (G_n - g_n)]\,\delta \ldots\ldots (2).$$

Hierin bedeuten die Differenzen in den runden Klammern die Mantelprojectionen der 1., 2., ... n. Schichte; die ganze Summe in der eckigen Klammer bedeutet also die Projection des Mantels oder der Seitenfläche des ganzen Körpers. (In Fig. 167 *a* erhält man als Projection des ganzen Mantels das Dreieck ABC und in Fig. 167 *b* den Kreis ABD, vermehrt um die doppelt genommene Fläche BDS_1.)

Läßt man nun die Zahl n immer mehr wachsen, so bleibt im Producte (2) der Wert des ersten Factors endlich und ungeändert, während der zweite Factor, also auch das ganze Product beliebig klein wird. Hieraus folgt, dass sich auch der Unterschied zwischen dem Volumen V und der Summe aller ein- oder aller umgeschriebenen Cylinder durch Vergrößerung von n beliebig klein machen läßt, da derselbe kleiner ist, als das Product (2).

b) Wenn man einen Körper durch parallele Ebenen in n Schichten von der gleichen Höhe δ zerlegt und über der unteren Grundfläche einer jeden Schichte einen geraden Cylinder von der Höhe δ errichtet, so kann der Unterschied zwischen dem gegebenen Körper und der Summe aller jener Cylinder durch Vergrößerung der Zahl n beliebig klein gemacht werden.

Beweis. Die Mantelprojection einer jeden Schichte enthält auch den Umfang der unteren Grundfläche derselben. Daher ist der über dieser Grundfläche errichtete gerade Cylinder von der Höhe δ im allgemeinen kleiner als der jener Schichte umgeschriebene und größer als der jener Schichte eingeschriebene Cylinder. In besonderen Fällen ist der erste Cylinder mit dem zweiten oder dritten identisch. Also liegt auch die Summe aller Cylinder über den unteren Grundflächen der Schichten zwischen denselben Grenzen $g_1\delta + g_2\delta + \ldots + g_n\delta$ und $G_1\delta + G_2\delta + \ldots + G_n\delta$ wie das Volumen V, oder sie fällt mit einer dieser Grenzen zusammen. Da nun der Unterschied dieser beiden Grenzen sich durch Vergrößerung von n beliebig verkleinern läßt, so gilt dies umsomehr vom

Unterschiede zwischen V und der Summe aller Cylinder über den unteren Grundflächen der Körperschichten.

c) Lassen sich zwei Körper in eine solche Lage bringen, dass sie durch alle Ebenen, welche zu einer bestimmten Ebene parallel sind, in gleichen Flächen geschnitten werden, so haben sie gleiches Volumen.

Beweis. Man bringe die beiden Körper in jene Lage, in welcher sie von jeder beliebigen aus einer Schar paralleler Ebenen in gleichen Flächen geschnitten werden, und bezeichne mit α, β jene zwei von diesen Ebenen, welche die beiden Körper zwischen sich enthalten und zugleich berühren. Die Voraussetzung des Lehrsatzes ist so zu deuten, dass auch die Berührungsflächen, welche die Ebenen α und β mit den zwei Körpern gemeinschaftlich haben, für jede dieser Ebenen gleich sind. Nun theile man den Abstand der Ebenen α und β in n gleiche Theile von der Größe δ und lege durch die Theilungspunkte Schnittebenen parallel zu α, so dass die beiden Körper in je n Schichten zerfallen. Da je zwei in einer Ebene liegende Grundflächen der Schichten gleich sind, so sind auch die über denselben errichteten geraden Cylinder von der Höhe δ einander gleich (§ 210 *d*). Bezeichnet man also mit S_n für jeden der zwei Körper die Summe der über den unteren Grundflächen seiner Schichten errichteten geraden Cylinder von der Höhe δ, ferner mit V und V_1 die Volumina der beiden Körper, so kann man nach dem Lehrsatze *b)* die Zahl n stets so groß wählen, dass sich die mit n veränderliche Zahl S_n von V und zugleich von V_1 beliebig wenig unterscheidet. Dies ist jedoch nur möglich, wenn $V = V_1$ ist.

Zusatz. Der wichtige Lehrsatz *c)* wird nach Cavalieri (1598 bis 1647) der Satz von Cavalieri genannt. Hie und da wird er ohne Beweis als selbstverständlich angenommen und heißt dann der Grundsatz oder das Princip von Cavalieri. Zwei Körper, welche der Voraussetzung dieses Satzes entsprechen, heißen Cavalierische Körper.

§ 212. **Prisma und Cylinder überhaupt.** Das Volumen eines Prismas oder eines Cylinders ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Beweis. Das gegebene Prisma (der gegebene Cylinder) und ein gerades Prisma mit der gleichen Grundfläche und der gleichen Höhe sind Cavalierische Körper; denn stellt man dieselben mit ihren Grundflächen auf eine Ebene α, so werden sie durch jede zu α parallele Ebene in gleichen Flächen geschnitten. Die für gerade Prismen und Cylinder abgeleitete Formel $V = gh$ gilt also für beliebige Prismen und Cylinder.

Folgesätze. 1. Für den Kreiscylinder findet man $V = \pi r^2 h$. 2. Haben zwei Prismen oder zwei Cylinder gleiche Grundflächen, so verhalten sie sich wie die Höhen; haben sie gleiche Höhen, so verhalten sie sich wie die Grundflächen.

§ 213. Pyramide und Kegel. *a)* Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Beweis. Man bezeichne mit g die gleichen Grundflächen, mit h die gleichen Höhen zweier Pyramiden und stelle dieselben mit den Grundflächen auf eine Ebene α. Legt man hierauf in einem beliebigen Abstande x von der Ebene α eine Schnittebene parallel zu derselben, so befriedigen die erhaltenen Schnitte f_1 und f_2 die Proportionen $g : f_1 = h^2 : (h - x)^2$ und $g : f_2 = h^2 : (h - x)^2$ (§ 173). Daraus folgt $f_1 = f_2$, d. h. also, die gegebenen Pyramiden sind Cavalierische Körper und daher einander gleich.

b) Jedes dreiseitige Prisma kann durch Schnitte in drei gleiche Pyramiden zerlegt werden.

Beweis. Das gegebene Prisma (Fig. 168) wird durch die Schnittebenen AB_1C und A_1B_1C in die dreiseitigen Pyramiden I, II und III zerlegt. Die Pyramiden I und II sind einander gleich; denn sie haben die Grundflächen gleich, $A_1C_1C = ACA_1$, und die Höhe, d. i. die Normale von der gemeinschaftlichen Spitze B_1 auf die Ebene ACC_1A_1 gemeinschaftlich. Ebenso beweist man, dass die Pyramiden II und III gleich sind.

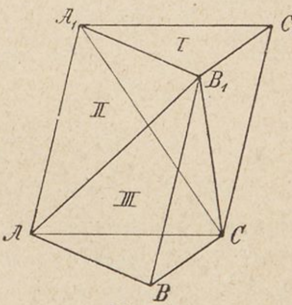


Fig 168.

c) Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche und der Höhe.

Beweis. Die dreiseitige Pyramide $ABCB_1$ (Fig. 168) hat mit dem Prisma $ABCA_1B_1C_1$ gleiche Grundfläche, gleiche Höhe und ist gleich einem Drittel des Prismas. Ist also g die Grundfläche und h die Höhe des Prismas und der Pyramide, so ist gh das Volumen des ersteren und $\frac{gh}{3}$ jenes der letzteren.

d) Das Volumen einer jeden Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche und der Höhe.

Beweis. Jede Pyramide ist gleich einer dreiseitigen Pyramide, welche mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat; also gilt für beide die Formel $V = \frac{gh}{3}$.

e) Das Volumen eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche und der Höhe.

Der Beweis ist jenem in § 210 *d)* analog.

Folgesätze. 1. Für den Kreiskegel gilt die Formel $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

2. Haben zwei Pyramiden oder zwei Kegel gleiche Grundflächen, so verhalten sie sich wie die Höhen; haben sie gleiche Höhen, so verhalten sie sich wie die Grundflächen.

§ 214. Pyramidenstumpf und Kegelstumpf. *a)* Der Pyramidenstumpf ist gleich der Summe dreier Pyramiden, welche die beide Grundflächen des Pyramidenstumpfes und das geometrische Mittel aus denselben zu Grundflächen und die Höhe des Pyramidenstumpfes zur Höhe haben.

Beweis. Man bezeichne mit g und g_1 die Grundflächen des Pyramidenstumpfes, mit h die Höhe desselben und mit x die Höhe der Ergänzungspyramide. Es ist dann

$$V = \frac{g(h+x)}{3} - \frac{g_1 x}{3} = \frac{gh}{3} + \frac{(g-g_1)x}{3}.$$

Zur Berechnung des x benützt man den Lehrsatz § 173 *b)* und erhält

$$g : g_1 = (h+x)^2 : x^2, \sqrt{g} : \sqrt{g_1} = (h+x) : x, \text{ also}$$

$$x = \frac{h\sqrt{g_1}}{\sqrt{g} - \sqrt{g_1}} = \frac{h\sqrt{g_1}\,(\sqrt{g} + \sqrt{g_1})}{g - g_1} = \frac{h(\sqrt{gg_1} + g_1)}{g - g_1}.$$

Daraus folgt

$$V = \frac{gh}{3} + \frac{\sqrt{gg_1}\,.\,h}{3} + \frac{g_1 h}{3} \text{ oder } V = \frac{h}{3}\,(g + \sqrt{gg_1} + g_1).$$

b) Der Kegelstumpf ist gleich der Summe dreier Kegel, welche die beiden Grundflächen des Kegelstumpfes und das geometrische Mittel aus denselben zu Grundflächen und die Höhe des Kegelstumpfes zur Höhe haben.

Der Beweis ist jenem in § 210 *d)* analog.

Folgesatz. Für den Kreiskegelstumpf gilt die Formel

$$V = \frac{\pi h}{3}\,(r^2 + rr_1 + r_1^2).$$

Um dieselbe direct abzuleiten, eliminiere man x aus den leicht beweisbaren Gleichungen

$$V = \frac{\pi r^2 (h+x)}{3} - \frac{\pi r_1^2 x}{3} \text{ und } r : r_1 = (h+x) : x.$$

§ 215. Prismatoid. Das Prismatoid ist gleich der Summe dreier Pyramiden von derselben Höhe, von denen die eine das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen, und die beiden anderen den Mittelschnitt des Prismatoides als Grundfläche haben.

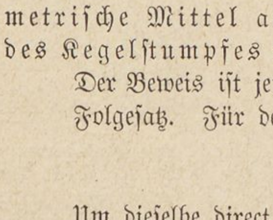


Fig. 169.

Beweis. Man zerlege das Prismatoid in Pyramiden, welche einen Punkt O des Mittelschnittes als gemeinschaftliche Spitze und die Flächen des Prismatoides als Grundflächen haben. Die Seitenkanten jener Pyramiden erhält man, indem man O mit allen Eckpunkten des Prismatoides verbindet. (Es wird hier vorausgesetzt, daß sich ein solcher Punkt O im Mittelschnitte findet, dass alle jene Verbindungsstrecken ganz innerhalb des Prismatoides liegen.) Die beiden

2 = 0·25

1 : 3 = 2/4 2/4 : 2 = 1/4

Pyramiden, welche den Grundflächen g und g_1 des Prismatoides entsprechen, haben die Volumzahlen $\frac{g\,h}{6}$ und $\frac{g_1\,h}{6}$. Jede Pyramide, welche eine Seitenfläche zur Grundfläche hat, läſst sich, wenn sie nicht dreiseitig ist, in zwei dreiseitige Pyramiden zerlegen. Das Volumen einer solchen, z. B. von $ABEO$, wird in folgender Weise berechnet:

$$ABEO : HIEO = ABE : HIE = 4 : 1.$$

Nun ist $HIEO = HIO \,.\, \frac{h}{6}$, also $ABEO = HIO \,.\, \frac{2\,h}{3}$.

Daraus folgt $ABEO + BEFO + BCFO + \ldots =$

$$= (HIO + IKO + KLO + \ldots)\,\frac{2\,h}{3} = \frac{2\,h\,m}{3},$$ wo m den Inhalt des Mittelschnittes bedeutet. Demnach erhält man für das Volumen des ganzen Prismatoides die Formel

$$V = \frac{h}{3}\left(\frac{g + g_1}{2} + 2\,m\right).$$

$\frac{6}{4} : 2 = \cancel{\frac{3}{4}}$

$1 \cdot \cancel{5} \cdot 2 =$

Daraus läſst sich die Behauptung des obigen Lehrsatzes leicht ableiten.

§ 216. Kugel. Die Kugel ist gleich einem Kegel, welcher die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche und den Kugelradius zur Höhe hat.

$\frac{6}{4} :$

Erster Beweis. Man denke sich der Kugel ein Polyeder mit n Flächen $g_1, g_2, \ldots g_n$ umgeschrieben und zerlege dasselbe in n Pyramiden, welche ihre Spitzen im Centrum der Kugel und die Flächen $g_1, g_2, \ldots g_n$ als Grundflächen haben. Dann ist das Volumen des Polyeders $1 \cdot 5 : 2$

$$V = \frac{g_1\,r}{3} + \frac{g_2\,r}{3} + \cdots + \frac{g_n\,r}{3} = (g_1 + g_2 + \cdots + g_n)\,\frac{r}{3}.$$

Läſst man nun n unendlich zunehmen und zugleich jede einzelne Fläche unendlich abnehmen, so geht die Summe $g_1 + g_2 + \ldots + g_n$ in die Oberfläche der Kugel über, und es wird

$$V = O \,.\, \frac{r}{3} = 4\pi r^2 \,.\, \frac{r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Zweiter Beweis. Man schreibe einem Hauptkreise $EGFH$ der gegebenen Kugel ein Quadrat $ABCD$ um, ziehe die Diagonalen des Quadrates und die Symmetrale EF der Seite AB. Läſst man hierauf die ganze Figur um EF als Achse rotieren, so beschreibt der Halbkreis EGF die gegebene Kugel und das Dreieck OBC einen Rotationskörper R, welchen man als Differenz aus dem der Kugel umgeschriebenen geraden Cylinder und einem diesem Cylinder eingeschriebenen Doppelkegel auffassen kann. Die Kugel und der Körper R sind in der hier erhaltenen Stellung Cavalierische Körper, da jede zu EF normale Ebene

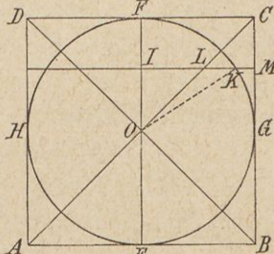


Fig. 170.

in beiden Körpern gleiche Schnitte erzeugt. Ist nämlich $OI = c$ der Centralabstand einer solchen Ebene, so schneidet dieselbe die Kugel in einem Kreise mit dem Flächeninhalte $\pi . \overline{IK}^2 = \pi (r^2 - c^2)$ und den Körper R in einem Kreisringe mit dem Flächeninhalte $\pi\ (\overline{IM}^2 - \overline{IL}^2) = \pi (r^2 - c^2)$. Also ist das Volumen der Kugel

$$V = \pi r^2 . 2r - 2 . \pi r^2 . \frac{r}{3} = \frac{4 \pi r^3}{3}.$$

§ 217. **Kugelsegment.** Das Volumen eines Kugelsegmentes wird gefunden, wenn man zur Hälfte eines Cylinders mit der gleichen Grundfläche und der gleichen Höhe eine Kugel addiert, welche die Höhe des Segmentes zum Durchmesser hat.

Beweis. Das Kugelsegment, welches durch Rotation der Fläche IKF (Fig. 170) um die Achse EF erhalten wird, ist nach § 216 gleich jenem Körper, welcher durch Rotation des Dreieckes LMC um dieselbe Achse entsteht. Bezeichnet man also die Höhe IF des Segmentes mit h, so ist

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3} [r^2 + r(r - h) + (r - h)^2].$$

Daraus folgt

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) \ldots \ldots \ldots . (1).$$

Diese Formel gilt auch für ein Segment, welches größer ist als die Halbkugel. Man erhält z. B. für jenes Segment, welches das eben berechnete zur Kugel ergänzt, wenn EI mit h bezeichnet wird,

$$V = \pi r^2 h - \left(\frac{\pi r^3}{3} + \frac{\pi (h - r)^3}{3}\right) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right).$$

Nun setze man $IK = \varrho$ und beachte, dass IK die mittlere geometrische Proportionale zwischen EI und IF ist. Man hat also $\varrho^2 = h(2r - h)$, $r = \frac{\varrho^2}{2h} + \frac{h}{2}$, somit

$$V = \frac{\pi \varrho^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6} = \frac{\pi h}{2}\left(\varrho^2 + \frac{h^2}{3}\right) \ldots \ldots . (2).$$

Zusätze. 1. Ist das gegebene Segment kleiner als die Halbkugel, so kann man die Gleichung (2) auch in der folgenden Weise in Worten ausdrücken: Das Volumen eines Kugelsegmentes wird erhalten, wenn man zur Hälfte des umgeschriebenen Cylinders die eingeschriebene Kugel addiert.

2. In Rechnungsaufgaben über Kugelsegmente hat man die Gleichungen (1) oder (2) zu benützen, je nachdem r und h oder ϱ und h gegeben sind.

§ 218. **Kugelsector.** Jeder Kugelsector ist gleich einem Kegel, welcher die zum Sector gehörende Calotte zur Grundfläche und den Kugelradius zur Höhe hat.

Beweis. Je nachdem der Sector kleiner oder größer als die Halbkugel ist, kann derselbe als Summe oder Differenz eines Kugelsegmentes und eines Kegels aufgefasst werden.

Im ersten Falle ist

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) + \frac{\pi \varrho^2 (r-h)}{3} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) + \frac{\pi h (2r-h)(r-h)}{3}$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left(3hr - h^2 + 2r^2 - 3hr + h^2\right) = \frac{2\pi r^2 h}{3} = 2\pi r h . \frac{r}{3}.$$

Im zweiten Falle ist

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) - \frac{\pi \varrho^2 (h-r)}{3} = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) + \frac{\pi \varrho^2 (r-h)}{3}$$ u. s. f. wie im ersten Falle.

§ 219. **Kugelschichte.** Das Volumen einer Kugelschichte wird gefunden, wenn man zum arithmetischen Mittel aus zwei Cylindern, welche die Grundflächen der Schichte zu Grundflächen und die Höhe derselben zur Höhe haben, eine Kugel addiert, deren Durchmesser gleich der Höhe der Schichte ist.

Beweis. Man bezeichne mit h die Höhe der Schichte, mit ϱ_1, ϱ_2 die Radien und mit x, y die Centralabstände der Grundflächen. Liegen die letzteren auf derselben Seite des Kugelcentrums und ist $x > y$, so hat man zunächst

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}(x^2 + xy + y^2).$$

Nun ist $x^2 = r^2 - \varrho_1^2$, $y^2 = r^2 - \varrho_2^2$, $x - y = h$; daraus folgt $x^2 + xy + y^2 = x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2 - (x-y)^2}{2} = \frac{3}{2}(x^2 + y^2) - \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{3}{2}(2r^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2) - \frac{h^2}{2}$ und $V = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{2}(2r^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2) + \frac{\pi h^3}{6}$,

also $$V = \frac{\pi h}{2}(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Liegen die Grundflächen der Schichte auf entgegengesetzten Seiten des Kugelcentrums, so hat man $x + y = h$ und $V = \pi r^2 h - \frac{\pi}{3}(x^3 + y^3)$. Nun ist $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = h\left[x^2 + y^2 - \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}\right] = h\left[\frac{3}{2}(x^2 + y^2) - \frac{h^2}{2}\right] = h\left[\frac{3}{2}(2r^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2) - \frac{h^2}{2}\right]$ u. s. f.

Fällt das Kugelcentrum in eine Grundfläche der Kugelschichte, so ist $V = \pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{3}$, und man überzeugt sich leicht, dass diese Gleichung in der allgemeineren $V = \frac{\pi h}{2}(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) + \frac{\pi h^3}{6}$ als specieller Fall enthalten ist. Zu diesem Zwecke hat man $\varrho_2 = r$ und $\varrho_1^2 = r^2 - h^2$ zu substituieren.

Zusatz. Wenn das Kugelcentrum nicht im Innern der Kugelschichte liegt, so läſst sich der eben bewiesene Lehrsatz auch in der folgenden anschaulichen Weise aussprechen: Das Volumen einer Kugelschichte wird gefunden, wenn man zum arithmetischen Mittel aus dem umgeschriebenen und dem eingeschriebenen Cylinder die eingeschriebene Kugel addiert.

Analytische Geometrie der Ebene.

I. Abschnitt: Allgemeine Begriffe und Fundamentalaufgaben.

Lagenbestimmung für Punkte in der Geraden.

§ 220. Erklärungen. Wenn eine Gerade $X_1 X$ mit festgesetzter positiver Richtung, etwa von X_1 nach X, gegeben ist, so läſst sich die Lage beliebiger Punkte $P, P_1, P_2, \ldots$ dieser Geraden in Bezug auf einen gegebenen Punkt O derselben Geraden dadurch eindeutig bestimmen, daſs man die Längenzahlen der Strecken $OP, OP_1, OP_2, \ldots$ dem Vorzeichen und dem absoluten Werte nach angibt.

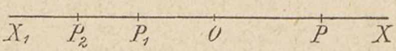


Fig. 171.

Man nennt diese Strecken oder auch ihre Längenzahlen mit dem entsprechenden Vorzeichen die Abscissen der Punkte $P, P_1, P_2, \ldots$ und bezeichnet sie zur Abkürzung mit $x, x_1, x_2, \ldots$. Die Gerade X_1X heiſst die Achse und der Punkt O der Anfangspunkt (der Abscissen).

Folgesätze. 1. Je nachdem ein Punkt auf dem Halbstrahle OX oder OX_1 liegt, hat er eine positive oder eine negative Abscisse und umgekehrt.

2. Jedem Punkte einer Geraden entspricht eine bestimmte Abscisse in Bezug auf einen gegebenen Anfangspunkt und umgekehrt.

§ 221. Aufgaben. Wenn die Lagen zweier Punkte P_1 und P_2 in der Achse durch ihre Abscissen $OP_1 = x_1$ und $OP_2 = x_2$ bestimmt sind,

a) die Länge der Strecke P_1P_2 dem Vorzeichen und dem absoluten Werte nach zu berechnen;

b) die Abscisse $OP = x$ jenes Punktes P zu berechnen, welcher die Strecke P_1P_2 im Verhältnisse $a:b$ theilt;

c) die Abscisse $OP = x$ jenes Punktes P zu berechnen, welcher die Strecke P_1P_2 halbiert.

Auflösungen. *a)* Nach § 120 *b* ist $P_1P_2 = P_1O + OP_2 = OP_2 - OP_1$ $= x_2 - x_1$; d. h. man subtrahiere die Abscisse des Anfangspunktes der Strecke von der Abscisse des Endpunktes.

b) Es soll $P_1P : PP_2 = a:b$ sein. Nach *a)* ist $P_1P = x - x_1$ und $PP_2 = x_2 - x$. Daraus folgt $(x - x_1):(x_2 - x) = a:b$ und

$$x = \frac{a x_2 + b x_1}{a + b}.$$

Zusatz. Je nachdem a und b gleich oder ungleich bezeichnet sind, sind es auch die Strecken $P_1 P$ und $P P_2$. Im ersten Falle liegt also P in der Strecke $P_1 P_2$, im zweiten außerhalb derselben. Je nachdem der absolute Wert von a oder von b größer ist, liegt P näher an P_2 oder näher an P_1.

c) Man erhält aus der Gleichung $P_1 P = P P_2$ oder aus b) durch die Substitution $a = b$ den Wert $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; d. h., die Abscisse des Halbierungspunktes ist das arithmetische Mittel aus den Abscissen der Endpunkte.

Lagenbestimmung für Punkte in der Ebene. Coordinatensysteme.

§ 222. Parallelcoordinaten. Sind in der Ebene zwei unter einem beliebigen Winkel sich schneidende Gerade $X_1 X$ und $Y_1 Y$ mit festgesetzten positiven Richtungen gegeben, so läßt sich die Lage irgend eines Punktes M der Ebene in Bezug auf jene Geraden dadurch eindeutig bestimmen, daß man durch den Punkt M Parallele zu den Geraden zieht und die Längenzahlen der Abschnitte OP und OQ mit den entsprechenden Vorzeichen angibt. Die Geraden $X_1 X$ und $Y_1 Y$ bilden ein Parallel-Coordinatensystem; die Strecken $OP = x$ und $OQ = PM = y$ oder deren Längenzahlen mit dem entsprechenden Vorzeichen heißen Parallel-Coordinaten. Je nachdem die Geraden $X_1 X$ und $Y_1 Y$, welche Coordinatenachsen genannt werden, rechte oder schiefe Winkel bilden, heißt das Parallel-Coordinatensystem ein rechtwinkliges (orthogonales) oder ein schiefwinkliges. Das erstere ist bereits im § 122 ausführlich besprochen worden und soll in allen nachfolgenden Betrachtungen, welche sich auf ein Parallel-Coordinatensystem beziehen, als das einfachste benützt werden.

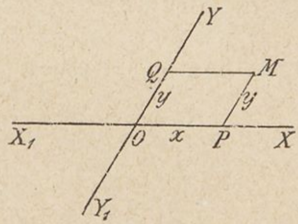


Fig. 172.

Zusatz. Der Gedanke, die Lage der Punkte in der eben angeführten Weise zu bestimmen, rührt vom Philosophen und Mathematiker Descartes oder Cartesius (1596—1650) her, welcher als der Schöpfer der analytischen Geometrie zu betrachten ist.

§ 223. Polarcoordinaten. Ist OX ein gegebener Halbstrahl und M ein beliebiger Punkt der Ebene, so wird die Lage des letzteren in Bezug auf OX dadurch eindeutig bestimmt, daß man die Maßzahlen des Winkels XOM und der Strecke OM angibt. Man nennt OX die Polarachse, O den Pol, den Winkel $XOM = u$ einen Polarwinkel und die Strecke $OM = r$ einen Leitstrahl oder Radius vector. Die Größen r und u oder deren Maßzahlen heißen die Polarcoordinaten des Punktes M.

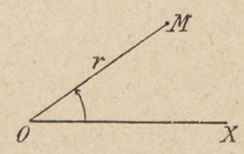


Fig. 173.

Wenn es sich nur um die Lagenbestimmung von Punkten in der Ebene handelt, so reicht man mit positiven Polarcoordinaten aus. Durch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie wird man jedoch genöthigt, auch negative Polarcoordinaten zuzulassen. Ein negativer Leitstrahl liegt auf der Ergänzung zum zweiten Schenkel des Polarwinkels.

Fundamentalaufgaben.

§ 224. Transformation der Coordinaten. Es seien in der Ebene zwei Coordinatensysteme und außerdem jene Größen gegeben, durch welche die gegenseitige Lage der beiden Systeme bestimmt wird. Man kann sich dann die Aufgabe stellen, aus den gegebenen Coordinaten eines Punktes in Bezug auf das eine System jene in Bezug auf das andere System zu berechnen. Die Auflösung dieser Aufgabe wird eine Transformation der Coordinaten genannt.

a) Parallelverschiebung des rechtwinkligen (Parallel-) Coordinatensystems. Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass die gleichbenannten Achsen zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme direct parallel sind. Man kann dies so auffassen, als ob das eine System durch Parallelverschiebung in eine neue Lage gebracht worden wäre.

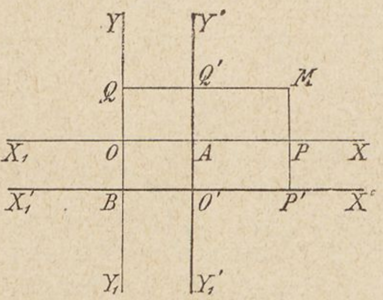


Fig. 174.

Das erste System bezeichnen wir kurz mit XOY und das zweite mit $X'O'Y'$. Der Anfangspunkt O' des zweiten Systems habe in Bezug auf das erste die Coordinaten $OA = a$, $AO' = b$; irgend ein Punkt M der Ebene habe im ersten Systeme die Coordinaten $OP = x$, $OQ = PM = y$ und im zweiten die Coordinaten $O'P' = x'$, $O'Q' = P'M = y'$. Man erhält dann (§ 120 *b*)

$$x' = O'P' = AP = AO + OP = OP - OA = x - a,$$
$$y' = P'M = BQ = BO + OQ = OQ - OB = y - b.$$

Man beachte, dass die Gleichungen $O'P' = AP$ und $P'M = BQ$ auch mit Rücksicht auf die Vorzeichen stets bestehen.

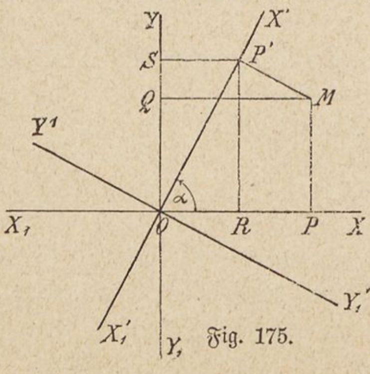


Fig. 175.

b) Drehung des rechtwinkligen Coordinatensystems um den Anfangspunkt. Es sei XOY das erste, $X'OY'$ das zweite System. Als positiv wähle man die Richtungen von X_1 nach X, von Y_1 nach Y, von X_1' nach X' und von Y_1' nach Y'. Die beiden Systeme seien direct congruent, d. h. es sei möglich, durch Drehung des ersten Systems um den Winkel $XOX' = \alpha$ zu bewirken, dass die gleichbenannten Achsen der beiden Systeme der Lage und der Richtung nach übereinstimmen (Fig. 175).

Nun construiere man die Coordinaten irgend eines Punktes M in Bezug auf beide Systeme und setze $OP = x$, $PM = OQ = y$, $OP' = x'$, $P'M = y'$. Ferner ziehe man $P'R \perp X_1X$ und $P'S \perp Y_1Y$.

Dann ist nach § 120 b und nach dem Zusatze in § 123

$$x = OP = OR + RP = OP' \cos(xx') + P'M \cos(xy'),$$
$$y = OQ = OS + SQ = OP' \cos(yx') + P'M \cos(yy').$$

Darin bedeuten (xx'), (xy'), ... die Winkel, welche die positiven Richtungen der Achsen X_1X und $X_1'X'$, ferner X_1X und $Y_1'Y'$ u. s. f. einschließen. Nach § 121 c ist nun $(xy') = (xx') + (x'y') = \alpha + R$; $(yx') = (yx) + (xx') = (xx') - (xy) = \alpha - R$; $(yy') = (yx) + (xy') = -R + \alpha + R = \alpha$. Daher hat man

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

da $\cos(\alpha + R) = \cos\alpha \cos R - \sin\alpha \sin R = -\sin\alpha$ und $\cos(\alpha - R) = \cos(R - \alpha) = \sin\alpha$ ist.

Löst man die eben gefundenen Gleichungen nach x' und y' auf, so ergibt sich schließlich

$$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$
$$y' = -x \sin\alpha + y \cos\alpha.$$

c) Beliebige Verschiebung eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Sind XOY und $X'O'Y'$ zwei direct congruente rechtwinklige Coordinatensysteme, so kann man das erstere durch Parallelverschiebung zunächst in die Lage $\Xi O'H$ und hierauf durch Drehung um O' in die Lage $X'O'Y'$ bringen. Es seien nun x, y beziehungsweise ξ, η und x', y' die Coordinaten irgend eines Punktes M n Bezug auf XOY, beziehungsweise $\Xi O'H$ und $X'O'Y'$. Dann ist nach *a)* $\xi = x - a$, $\eta = y - b$ und nach *b)* $x' = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha$, $y' = -\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha$.

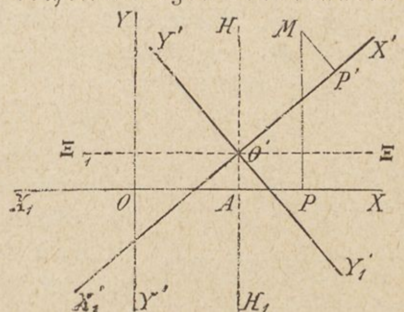


Fig. 176.

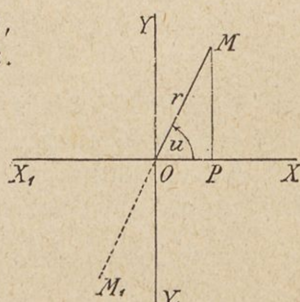
Daraus folgt

$$x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha.$$

d) Übergang von rechtwinkligen zu Polar-Coordinaten und umgekehrt. Wir betrachten nur den einfachsten Fall, dass der Anfangspunkt O des rechtwinkligen Coordinatensystems zugleich der Pol und der Halbstrahl OX die Polarachse ist.

Nach § 123 ist $x = r \cos u$ und $y = r \sin u$.

Aus diesen Gleichungen erhält man



Figur 177.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Zusätze. 1. Aus $r^2 = x^2 + y^2$ könnte auch gefolgert werden

$$r_1 = -\sqrt{x^2 + y^2},\ \cos u_1 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin u_1 = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Diese Gleichungen führen jedoch zu keinem neuen Resultate. Denn man findet $\cos(u_1 - u) = \cos u_1 \cos u + \sin u_1 \sin u = -1$, also $u_1 - u = 2R$, d. h. die zweiten Schenkel OM und OM_1 der Winkel u und u_1 sind entgegengesetzt gerichtet; ferner ist $r_1 = -r$, d. h. die Strecke r ist auf der Ergänzung des Halbstrahles OM_1 aufzutragen. Man gelangt somit wieder zum Punkte M und braucht daher die zweite Auflösung nicht zu berücksichtigen. Aus diesem Grunde kann man auch sagen, dass x und y durch r und u eindeutig bestimmt sind, und umgekehrt.

2. Anstatt der oben gefundenen Gleichungen für $\cos u$ und $\sin u$ kann die einfachere Gleichung $tg\, u = \frac{y}{x}$ zur Berechnung von u benützt werden. Da die Vorzeichen von x und y angeben, welchem Quadranten der Punkt M angehört, so genügt eine einzige dieser Gleichungen zur eindeutigen Bestimmung von u.

§ 225. **Länge eines Leitstrahles und einer Strecke.** *a)* Sind x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes M, was kurz durch $M\ (x, y)$ angedeutet wird, so ist nach § 224 *d*

$$OM = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

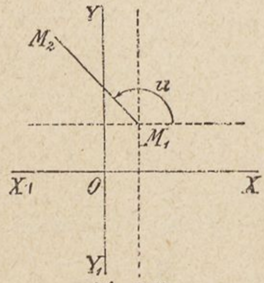


Fig. 178.

b) Es seien $M_1\ (x_1, y_1)$ und $M_2\ (x_2, y_2)$ die Endpunkte der Strecke, deren Längenzahl zu berechnen ist. Zu diesem Zwecke lege man durch M_1 als Anfangspunkt ein neues Coordinatensystem, dessen Achsen zu jenen des gegebenen Systems direct parallel sind, und bezeichne mit ξ, η die Coordinaten des Punktes M_2 in Bezug auf das neue System. Man hat dann $\xi = x_2 - x_1$, $\eta = y_2 - y_1$ und

$$M_1 M_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Zusatz. Wenn die Strecke $M_1 M_2$ einer Geraden mit festgesetzter positiver Richtung angehört, so ist das Vorzeichen der Wurzelgröße nach der allgemeinen Zeichenregel für Strecken zu bestimmen.

§ 226. **Winkel der Abscissenachse mit einem Leitstrahle und mit einer Strecke.** *a)* Gehört der Leitstrahl r dem Punkte $M\ (x, y)$ an, so erhält man den Winkel (xr) nach § 123 aus einer der Gleichungen $\sin(xr) = \frac{y}{r}$, $\cos(xr) = \frac{x}{r}$, $tg\,(xr) = \frac{y}{x}$ u. s. f.

Die Vorzeichen der Coordinaten x, y zeigen an, welchem Quadranten der gesuchte Winkel angehört.

b) Es seien M_1 (x_1, y_1) und M_2 (x_2, y_2) die Endpunkte der gegebenen Strecke, und man nehme die Richtung von M_1 nach M_2 als positiv an. Durch Parallelverschiebung des Coordinatensystems (§ 224 *a*) findet man (Fig. 178)

$$\sin u = \frac{y_2 - y_1}{r}, \cos u = \frac{x_2 - x_1}{r}, tg\, u = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ u. s. f.};$$

darin ist zur Abkürzung $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = r$ und $(xr) = u$ gesetzt. Die Vorzeichen der Coordinatendifferenzen $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ zeigen an, welchem Quadranten der gesuchte Winkel angehört.

§ 227. Winkel zweier Leitstrahlen oder zweier Strecken. *a)* Es seien $OM_1 = r_1$ und $OM_2 = r_2$ die Leitstrahlen zweier gegebener Punkte M_1 (x_1, y_1) und M_2 (x_2, y_2), also $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ und $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$. Dann ist (§ 121 *c*) $(r_1 r_2) = (r_1 x) + (x r_2) = (xr_2) - (xr_1)$,

$$\sin(r_1 r_2) = \sin(x r_2) \cos(x r_1) - \cos(x r_2) \sin(x r_1)$$

$$= \frac{y_2}{r_2} \cdot \frac{x_1}{r_1} - \frac{x_2}{r_2} \cdot \frac{y_1}{r_1} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{r_1 r_2}.$$ Ebenso findet man $\cos(r_1 r_2) = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{r_1 r_2}$; daraus folgt

$$tg\,(r_1 r_2) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2} \text{ u. s. f.}$$

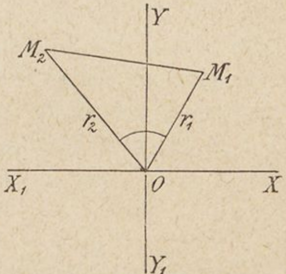


Fig. 179.

Die Vorzeichen der Ausdrücke $x_1 y_2 - x_2 y_1$ und $x_1 x_2 + y_1 y_2$ geben an, welchem Quadranten der Winkel $(r_1 r_2)$ angehört. Ist z. B. $x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0$ und $x_1 x_2 + y_1 y_2 < 0$, so hat man $\sin(r_1 r_2) > 0$ und $\cos(r_1 r_2) < 0$, daher ist $(r_1 r_2)$ ein Winkel im zweiten Quadranten. Es ist offenbar am einfachsten, den Winkel $(r_1 r_2)$ aus der Gleichung für $tg\,(r_1 r_2)$ oder $cotg\,(r_1 r_2)$ zu berechnen.

b) Sind A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) und C (x_3, y_3) drei gegebene Punkte, so erhält man den Winkel $BAC = \alpha$ aus der Gleichung

$$tg\,\alpha = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}.$$

Beweis durch Parallelverschiebung des Coordinatensystems.

§ 228. Flächeninhalt eines Dreieckes. *a)* Man habe zunächst den Flächeninhalt F des Dreieckes OM_1M_2 zu berechnen, wenn O der Anfangspunkt des Coordinatensystems ist und die Punkte M_1 und M_2 durch ihre Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 bestimmt sind. Bezeichnet man OM_1 mit r_1, OM_2 mit r_2 und den absoluten Wert des Dreieckswinkels M_1OM_2 mit α, so erhält man F aus der Gleichung $2F = r_1 r_2 \sin \alpha$.

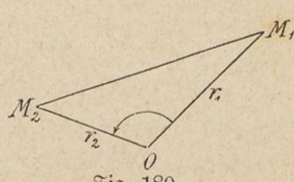


Fig. 180.

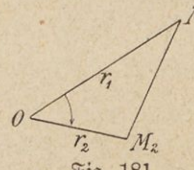


Fig. 181.

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem r_1 im positiven oder im negativen Sinne über die Dreiecksfläche gedreht werden muss, um mit r_2 zusammenzufallen.

Im ersten Falle (Fig. 180) ist $(r_1 r_2) = \alpha$, also $2F = r_1 r_2 \sin(r_1 r_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ (§ 227).

Im zweiten Falle (Fig. 181) ist $(r_1 r_2) = -\alpha$ oder $= 4R - \alpha$, somit $2F = -r_1 r_2 \sin(r_1 r_2) = -(x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

Wir setzen nun fest, dass der Flächeninhalt eines Dreieckes ABC positiv oder negativ ist, je nachdem die Seite AB (um den Punkt A) im positiven oder negativen Sinne über die Dreiecksfläche gedreht werden muss, um mit der Seite AC zusammenzufallen. Nach dieser Festsetzung gilt die Formel

$$2F = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

für das Dreieck $O M_1 M_2$ auch mit Rücksicht auf das Vorzeichen.

b) Es seien $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ die Eckpunkte des Dreieckes ABC, dessen Flächeninhalt F zu berechnen ist. Man lege durch A als Anfangspunkt ein neues Coordinatensystem, dessen Achsen zu jenen des gegebenen Systems direct parallel sind, und bezeichne mit ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 die Coordinaten von B und C in Bezug auf das neue System. Dann hat man $2F = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$ und $\xi_1 = x_2 - x_1$, $\eta_1 = y_2 - y_1$, $\xi_2 = x_3 - x_1$, $\eta_2 = y_3 - y_1$. Daraus folgt

$$2F = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \text{ oder}$$

$$2F = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2).$$

Aus der Ableitung dieser Formel geht hervor, dass dieselbe für das Dreieck ABC auch mit Rücksicht auf das Vorzeichen besteht.

Zusätze. 1. Um die letzte Formel leicht im Gedächtnisse zu behalten, entwickelt man aus $x_1(y_2 - y_3)$ die beiden anderen Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung durch cyklische Vertauschung der Stellenzeiger, d. h. man ersetzt 1 durch 2, 2 durch 3, 3 durch 1 u. s. f. (Fig. 182).

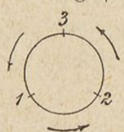


Fig. 182.

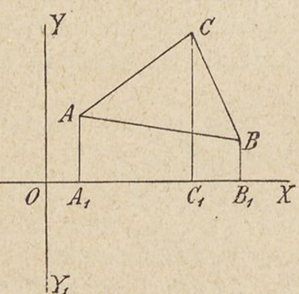


Fig. 183.

2. In speciellen Fällen kann man den Flächeninhalt eines Dreieckes oder jenen eines Polygones überhaupt unmittelbar aus der entsprechenden Figur berechnen. So findet man aus der Figur 183

$$ABC = AA_1C_1C + CC_1B_1B - AA_1B_1B,$$

somit $F = \dfrac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2} + \dfrac{(y_3 + y_2)(x_2 - x_3)}{2} - \dfrac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2}$, woraus wieder die oben abgeleitete Formel hervorgeht.

3. Der Flächeninhalt des Dreieckes ABC ist offenbar gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem die Punkte A, B, C in einer Geraden liegen oder nicht. Zugleich gilt auch der Umkehrungssatz. Also ist die Gleichung

$$x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) in einer Geraden liegen.

§ 229. Theilung einer Strecke. Man bestimme die Coordinaten x, y desjenigen Punktes M, welcher die Strecke mit den Endpunkten M_1 (x_1, y_1) und M_2 (x_2, y_2) im Verhältnisse $a : b$ theilt.

Auflösung. Projiciert man die Punkte M_1, M_2 und M auf die beiden Coordinatenachsen, so folgt $M_1M : MM_2 = P_1P : PP_2 = Q_1Q : QQ_2$ (dem absoluten Werte und dem Vorzeichen nach). Soll also $M_1M : MM_2 = a : b$ sein, so muss auch der Punkt P die Strecke P_1P_2 und der Punkt Q die Strecke Q_1Q_2 im Verhältnisse $a : b$ theilen. Nach § 221 b erhält man daher

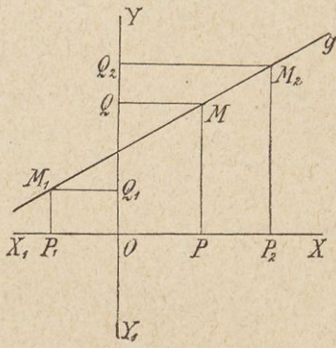


Fig. 184.

$$x = \frac{ax_2 + bx_1}{a + b}, \quad y = \frac{ay_2 + by_1}{a + b}.$$

Zusatz. Der Halbierungspunkt der Strecke M_1M_2 hat die Coordinaten

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Gleichung einer Linie.

§ 230. Variable und constante Größen einer Gleichung. Eine Gleichung zwischen zwei unbekannten Größen, etwa x und y, hat unendlich viele Auflösungen, von denen beliebig viele erhalten werden, indem man für die eine Unbekannte irgend welche Werte substituiert und hierauf die Gleichung nach der anderen Unbekannten auflöst. Aus der Gleichung

$$2y + x^2 = 6 \text{ oder } y = -\frac{x^2}{2} + 3$$

erhält man auf diese Weise durch die Substitutionen $x = -2, -1, 0, \ldots$ die aus der folgenden Tabelle ersichtlichen Auflösungen. Die Gleichungen $x = -2$ und $y = 1$ bilden eine Auflösung der obigen Gleichung, da dieselbe befriedigt wird, wenn für die Unbekannten x und y die speciellen Werte -2 und 1 substituiert werden.

x	y	Punkt
-2	1	M_1
$-$	2·5	M_2
0	3	M_3
1	2·5	M_4
1·5	1·875	M_5
2	1	M_6
2·5	$-0·125$	M_7
3	$-1·5$	M_8

Man nennt die Unbekannten einer derartigen Gleichung veränderliche oder variable Größen, weil jede derselben beliebig verändert wird, indem man von einem speciellen Werte zu irgend einem anderen übergeht, worauf sich auch die zweite Größe der Gleichung entsprechend verändert. Im Gegensatze hiezu heißen alle übrigen speciellen oder allgemeinen Größen der Gleichung *constante Größen*. Von den beiden varialben Größen heißt jede eine Function der anderen (§ 123).

§ 231. Graphische Darstellung der Functionen, Gleichung einer Linie.
a) Man erhält ein anschauliches Bild von der gegenseitigen Abhängigkeit zweier durch eine Gleichung verbundener variabler Größen, indem man je zwei specielle Werte derselben, welche eine Auflösung der Gleichung bilden, als (rechtwinklige) Coordinaten eines Punktes auffasst und diesen Punkt construiert. Je mehr Punkte auf diesem Wege gewonnen werden, desto deutlicher tritt die Gestalt einer Linie hervor, welche den geometrischen Ort aller jener Punkte bildet, deren Coordinaten Auflösungen der gegebenen Gleichung sind. Wenn man z. B. die in der Tabelle (§230) angegebenen Auflösungen der Gleichung $2y + x^2 = 6$ zur Construction der Punkte M_1, M_2, . . . benützt und diese durch eine ununterbrochene Linie verbindet, so erhält man (mehr oder minder genau) die in der Figur 185 gezeichnete Curve. Die Figur 186 erhält man aus der Gleichung $y = sin\, x$ durch die Substitutionen $x = -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}, \ldots.$

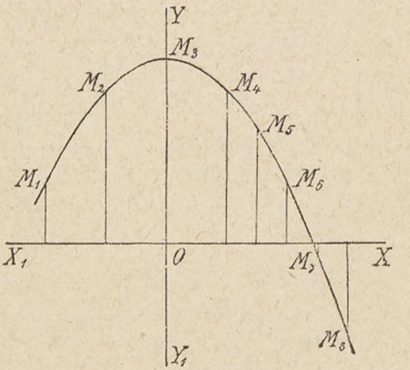


Fig. 185.

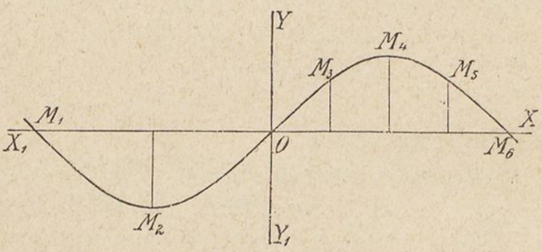


Fig. 186.

Zusatz. Die graphische Darstellung der Functionen wird auch in anderen Wissenschaften, insbesonders in der Naturlehre angewendet. Die Coordinaten der einzelnen Punkte gewinnt man häufig durch Beobachtungen, da sich die gegenseitige Abhängigkeit zweier Größen (z. B. der Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes und der Temperatur oder des Barometerstandes an einem bestimmten Orte und der Zeit u. s. f.) nicht immer durch Gleichungen ausdrücken lässt.

b) Die Aufgabe, zu einer gegebenen Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen die entsprechende Linie zu suchen, lässt sich auch umkehren. Man kann nämlich zu einer durch die Construction oder eine charakteristische Eigenschaft bestimmten Linie die entsprechende Gleichung zwischen den Coordinaten x und y suchen. In beiden Fällen bestimmt jede Auflösung der Gleichung einen Punkt der Linie und umgekehrt jeder Punkt der Linie eine Auflösung der Gleichung. Dieser Zusammenhang zwischen einer Linie und einer Gleichung wird dadurch ausgedrückt, dass man die letztere geradezu die *Gleichung der gegebenen Linie* nennt.

§ 232. Aufgaben der analytischen Geometrie. Diese sind: *a)* die Gleichungen von gegebenen Linien aufzusuchen,

b) mit Hilfe der Gleichungen, also auf dem Wege der Rechnung, die Eigenschaften der Linien nachzuweisen,

c) durch Transformationen und Verbindungen von Gleichungen Aufgaben über die entsprechenden Linien aufzulösen und

d) Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen, welche nach gewissen Grundsätzen aufgestellt werden oder in den Anwendungen der Mathematik sich von selbst ergeben, geometrisch zu interpretieren.

II. Abschnitt: Die Gerade.

Gleichung einer Geraden.

§ 233. Gerade durch den Anfangspunkt. *a)* Es sei g eine durch den Anfangspunkt O gezogene Gerade, welche mit der x-Achse den Winkel $(xg) = \alpha$ einschließt. Wenn in g eine positive Richtung angegeben ist, so bedeute (xg) jenen Winkel, um welchen die x-Achse (etwa im positiven Sinne) um den Punkt O gedreht werden muss, bis sie mit g zusammenfällt und auch der Richtung nach übereinstimmt. Im entgegengesetzten Falle wollen wir in g jene Richtung als positiv annehmen, welcher ein hohler positiver Winkel α entspricht (Fig. 187 und 188).

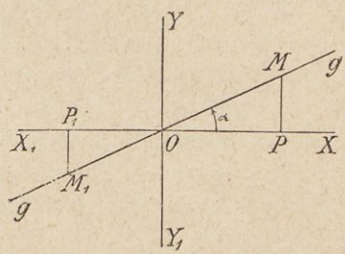


Fig. 187.

Construiert man nun die Coordinaten irgend eines Punktes M der Geraden g, für welchen der Leitstrahl OM positiv ist, so hat man $PM : OP = tg\,\alpha$ (§ 123), daher $PM = OP\,tg\,\alpha$. Liegt hingegen ein Punkt M_1 der Geraden so, dass $OM_1 < 0$, so hat man $P_1M_1 : OP_1 = tg\,(\alpha + 2R) = tg\,\alpha$, somit $P_1M_1 = OP_1 tg\,\alpha$. Bezeichnen wir also mit x und y die Coordinaten irgend eines Punktes der Geraden g und setzen zur Abkürzung $tg\,\alpha = a$, so ist stets

$$y = ax.$$

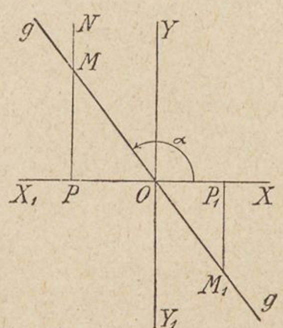


Fig. 188.

Man überzeugt sich nachträglich durch die Substitution $x = 0$ und $y = 0$, dass diese Gleichung auch für den Anfangspunkt O besteht; sie gilt somit für alle Punkte der Geraden g.

Die Gleichung $y = ax$ kann hingegen für keinen außerhalb g liegenden Punkt N (Fig. 188) bestehen. Denn es müsste sonst $PN = a\,.\,OP$ und zugleich $PM = a\,.\,OP$ sein, worin M den Schnittpunkt der Geraden g und

PN bedeutet. Daraus würde $PN = PM$ folgen, was der Annahme widerspricht, dass N außerhalb g liegt.

$y = ax$ ist somit die Gleichung der Geraden g. Die Constante a wird der Richtungscoefficient dieser Geraden genannt.

b) Die Gleichung der Abscissenachse ist $y = 0$; denn für jeden Punkt derselben ist $y = 0$ und für jeden Punkt außerhalb derselben $y \gtrless 0$.

Zu demselben Resultate gelangt man auch mittelst der Gleichung $y = ax$, wenn man darin $\alpha = 0$ setzt; dann ist nämlich $a = 0$, also für jedes x auch $y = 0$.

c) Die Gleichung der Ordinatenachse ist $x = 0$; denn für jeden Punkt derselben ist $x = 0$ und für jeden Punkt außerhalb derselben $x \gtrless 0$.

Zu demselben Resultate gelangt man auch mittelst der Gleichung $y = ax$ wenn man dieselbe zunächst auf die Form $x = \frac{y}{a}$ bringt und hierauf α in R übergehen, also a unendlich groß werden läſst.

d) Aufgabe: Die der Gleichung $y = ax$ entsprechende Linie zu bestimmen, wenn a irgend eine reelle Zahl bedeutet.

Auflösung. Man berechne das kleinste positive α, welches der Gleichung $tg\alpha = a$ entspricht, und ziehe durch den Anfangspunkt eine Gerade g so, dass $(xg) = \alpha$ wird. Die Gerade g ist die gesuchte Linie, da nach *a)* alle ihre Punkte und nur diese der Gleichung $y = ax$ entsprechen. Die übrigen Wurzeln der Gleichung $tg\alpha = a$ führen zu derselben Geraden g.

§ 234. Gerade in beliebiger Lage. *a)* Die Lage der Geraden g sei durch einen ihrer Punkte M_0 (x_0, y_0) und durch den Winkel $(xg) = \alpha$ bestimmt.

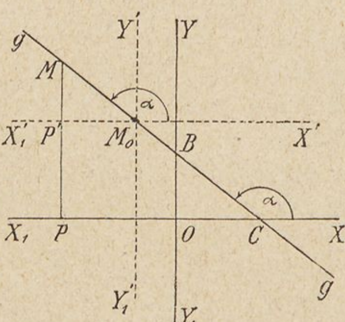


Fig. 189.

Legt man durch M_0 als Anfangspunkt ein neues Coordinatensystem, dessen Achsen jenen des ersten Systems direct parallel sind, und bezeichnet mit x', y' die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Geraden g in Bezug auf das neue System, so ist stets $y' = ax'$, worin a für $tg\alpha$ gesetzt ist. Nun hat man $x' = x - x_0$ und $y' = y - y_0$; somit ist

$$y - y_0 = a\,(x - x_0) \;.\;.\;.\;.\;.\; 1)$$

die Gleichung der Geraden g (in Bezug auf das erste System), da sie ebenso wie die Gleichung $y' = ax'$ für alle Punkte dieser Geraden und nur für dieselben besteht.

Wenn der Durchschnittspunkt B der Geraden mit der Ordinatenachse als der gegebene Punkt angenommen und $OB = b$ gesetzt wird, so ist $x_0 = 0$, $y_0 = b$, also

$$y = ax + b \;.\;.\;.\;.\;.\; 2)$$

die Gleichung der Geraden g. Dies ist die **einfachste Form** der Gleichung einer Geraden.

b) Für $g \parallel X_1X$ sind die Ordinaten aller Punkte der Geraden $= y_0$ und außerhalb derselben $\gtrless y_0$; also ist $y = y_0$ die Gleichung der Geraden g Dasselbe Resultat erhält man aus der Gleichung 1), wenn man $\alpha = 0$ annimmt.

c) Für $g \parallel Y_1Y$ sind die Abscissen aller Punkte der Geraden $= x_0$ und außerhalb derselben $\gtrless x_0$; also ist $x = x_0$ die Gleichung der Geraden g. Dasselbe Resultat erhält man aus der Gleichung 1), wenn man dieselbe nach $x - x_0$ auflöst und hierauf α in R übergehen läſst.

d) Aufgabe: Die der Gleichung $y = ax + b$ entsprechende Linie zu bestimmen, wenn a und b beliebige reelle Zahlen bedeuten.

Auflösung. Man bestimme in der Ordinatenachse den Punkt B, dessen Ordinate $= b$ ist, und verfahre im übrigen so wie in § 233 *d.* Man erhält stets eine Gerade, deren Lage durch die Gleichungen $OB = b$ und $tg\ (xg) = a$ bestimmt ist.

e) Aufgabe: Die der Gleichung $Ax + By + C = 0$ entsprechende Linie zu bestimmen, wenn A, B, C beliebige reelle Zahlen bedeuten.

Auflösung. Man unterscheide die beiden Fälle: $B = 0$ und $B \gtrless 0$.

Im ersten Falle ist $Ax + C = 0$ oder $x = -\dfrac{C}{A}$ die gegebene Gleichung. (A kann nicht zugleich mit B gleich Null sein, weil sonst in der vorgelegten Gleichung weder x noch y enthalten wäre.) Man hat dann eine Gleichung von der Form $x = x_0$, welche einer zur Ordinatenachse (im Abstande $-\dfrac{C}{A}$) parallelen Geraden entspricht.

Im zweiten Falle kann die gegebene Gleichung nach y aufgelöst, somit auf die Form $y = ax + b$ gebracht werden. Nach *d)* entspricht auch dieser Gleichung eine bestimmte Gerade.

Zusatz. $Ax + By + C = 0$ ist die **allgemeine Form der Gleichung einer Geraden.** Man sieht, daſs jeder **linearen Gleichung** zwischen x und y (d. i. jeder Gleichung ersten Grades zwischen diesen Variablen) eine bestimmte Gerade entspricht.

Aufgaben.

§ 235. Erste Abtheilung. Man soll aus den gegebenen Gleichungen von Geraden die Lagen der letzteren in Bezug auf das Coordinatensystem oder in Bezug aufeinander bestimmen. Z. B.

a) Wenn die Gleichung $Ax + By + C = 0$ einer Geraden g gegeben ist, so berechne man 1. zu der gegebenen Abscisse eines Punktes der Geraden die zugehörige Ordinate oder umgekehrt; 2. die vom Anfangspunkte und der gegebenen Geraden begrenzten Abschnitte der Coordinatenachsen; 3. den Winkel (xg).

Auflösungen. 1. Es sei x_1 die gegebene Abscisse und y_1 die gesuchte Ordinate eines Punktes der Geraden, also $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Hieraus kann y_1 berechnet werden, wenn $B \gtrless 0$ ist. Für $B = 0$ ist die Aufgabe unbestimmt oder unmöglich, je nachdem x_1 die Wurzel der Gleichung $Ax + C = 0$ ist oder nicht.

2. Die Gerade schneide die x-Achse im Punkte C und die y-Achse im Punkte B. Die Ordinate von C ist $= 0$; daher ergibt sich die Abscisse $OC = c$ aus der Gleichung $Ac + C = 0$. Die Abscisse von B ist $= 0$; daher ergibt sich die Ordinate $OB = b$ aus der Gleichung $Bb + C = 0$.

3. Löst man die gegebene Gleichung nach y auf, so erkennt man, daß $-\frac{A}{B}$ der Richtungscoefficient der Geraden g ist. Also läßt sich $(xg) = \alpha$ aus der Gleichung $tg\,\alpha = -\frac{A}{B}$ berechnen.

Zusatz. Um die Gerade g zu construieren, berechnet man die Coordinaten zweier beliebiger Punkte derselben, wodurch die Lage dieser Punkte, also auch jene der Geraden in Bezug auf das Coordinatensystem bestimmt wird. Wenn die Gerade nicht durch den Anfangspunkt geht, so ist es in der Regel am zweckmäßigsten, ihre Schnittpunkte mit den Coordinatenachsen zur Construction zu verwenden.

b) Gegeben seien die Gleichungen $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ zweier Geraden g und g_1. Man berechne 1. die Coordinaten ihres Schnittpunktes und 2. den Winkel (gg_1).

Auflösungen. 1. Hat der Schnittpunkt der Geraden g und g_1 die Coordinaten x_1, y_1, so müssen diese die Gleichungen der beiden Geraden befriedigen, da der Punkt (x_1, y_1) in beiden Geraden liegt. Man hat daher x_1 und y_1 aus den Gleichungen $Ax_1 + By_1 + C = 0$ und $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$ zu berechnen und findet

$$x_1 = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B},\quad y_1 = \frac{CA_1 - C_1A}{AB_1 - A_1B}.$$

Die gefundenen Werte sind stets endlich und bestimmt, außer wenn $AB_1 - A_1B = 0$ ist. In diesem Falle haben die beiden Geraden gleiche Richtungscoefficienten und sind daher parallel.

2. Nach § 121 ist $(gg_1) = (gx) + (xg_1) = (xg_1) - (xg)$. Daraus folgt

$$tg\,(gg_1) = \frac{tg\,(xg_1) - tg\,(xg)}{1 + tg\,(xg)\; tg\,(xg_1)}.$$

Bezeichnet man also die Richtungscoefficienten der Geraden g und g_1 mit a, beziehungsweise a_1, so hat man

$$tg\,(xg) = a = -\frac{A}{B} \text{ und } tg\,(xg_1) = a_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \text{ somit}$$

$$tg\,(gg_1) = \frac{a_1 - a}{1 + a a_1} \text{ oder } tg\,(gg_1) = \frac{A B_1 - A_1 B}{A A_1 + B B_1}.$$

Um dieses Resultat auch direct aus der Figur abzuleiten, wollen wir unter (gg_1), (xg), (xg_1) jene hohlen Winkel verstehen, um welche jeder erste Schenkel im positiven Sinne gedreht werden muss, bis er mit dem entsprechenden zweiten zusammenfällt. Nun ziehe man durch den Schnittpunkt S der beiden Geraden den Halbstrahl SX' direct parallel zur x-Achse und denke sich SX' im positiven Sinne um S gedreht. Je nachdem dieser Halbstrahl zunächst in die Gerade g oder g_1 fällt, hat man (Fig. 190) $(xg) + (gg_1) = (xg_1)$, also $(gg_1) = (xg_1) - (xg)$, oder (Fig. 191) $(xg_1) + 180^0 = (xg) + (gg_1)$, also $(gg_1) = (xg_1) - (xg) + 180^0$. In beiden Fällen erhält man wieder die oben abgeleiteten Ausdrücke.

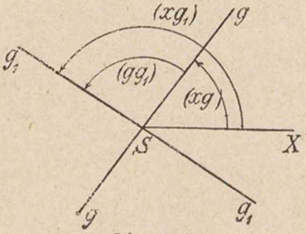


Fig. 190.

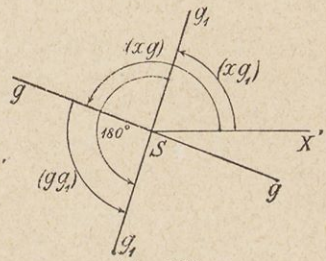


Fig. 191.

Folgesätze. 1. Parallelen Geraden entsprechen gleiche Richtungscoefficienten und umgekehrt. Aus $(gg_1) = 0$ oder $= 2R$ folgt nämlich $tg\,(gg_1) = 0$, also $a_1 = a$ und umgekehrt. Für Gerade, welche zur x-Achse normal sind, ist die Richtigkeit des Satzes ohneweiters klar.

2. Sind zwei Gerade zueinander normal (und zu den Coordinatenachsen nicht parallel), so ist das Product ihrer Richtungscoefficienten gleich -1; der eine Richtungscoefficient ist also gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen reciproken Werte des anderen. Zugleich gilt auch der Umkehrungssatz. Zum Beweise lasse man (gg_1) in den Grenzwert $\pm R$ übergehen, also $tg\,(gg_1)$ unendlich groß werden. Dies ist für endliche a und a_1 nur möglich, wenn $a a_1 + 1 = 0$ wird. Daraus folgt $a a_1 = -1$ und $a_1 = -\frac{1}{a}$. Aus diesen Gleichungen erhält man wieder $(gg_1) = \pm R$.

Zu diesem Resultate gelangt man auch direct durch folgende Schlüsse: Es ist $(gg_1) = (gx) + (xg_1) = (xg_1) - (xg)$, daher auch $\cos\,(gg_1) = \cos\,(xg_1)\,\cos\,(xg) + \sin\,(xg_1)\,\sin\,(xg) = 0$, wenn $(gg_1) = \pm R$ gesetzt wird. Daraus folgt durch Division mit $\cos\,(xg_1)\,\cos\,(xg)$ die Gleichung $1 + tg\,(xg_1)\,tg\,(xg) = 0$ oder $1 + a a_1 = 0$. Aus $1 + a a_1 = 0$ kann umgekehrt wieder $(gg_1) = \pm R$ abgeleitet werden.

Der Fall, dass von zwei Geraden eine jede zu einer Achse parallel ist, lässt sich am einfachsten direct erledigen.

§ 236. Zweite Abtheilung. Man soll die Gleichung einer Geraden suchen, wenn deren Lage in Bezug auf das Coordinatensystem oder in Bezug auf gegebene Punkte oder Gerade bestimmt ist. Die Lage der gegebenen Punkte und Geraden sei durch ihre Coordinaten, beziehungsweise ihre Gleichungen bestimmt. Z. B. Die Gleichung einer Geraden g zu suchen,

a) welche durch den gegebenen Punkt (x_0, y_0) geht und mit der Abscissenachse den gegebenen Winkel $(xg) = \alpha$ einschließt,

b) welche durch den gegebenen Punkt (x_0, y_0) geht und mit der durch die Gleichung $Ax + By + C = 0$ bestimmten Geraden g_1 den gegebenen Winkel (gg_1) einschließt,

c) welche durch zwei gegebene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht.

Auflösungen. *a)* Man erhält nach § 234 die Gleichung $y - y_0 = (x - x_0)\, tg\, \alpha$.

b) Bezeichnet man zur Abkürzung die Richtungscoefficienten der Geraden g und g_1 mit a, beziehungsweise a_1, setzt ferner $tg\,(gg_1) = k$, so findet man nach § 235 *b*

$$k = \frac{a_1 - a}{1 + a a_1} \text{ und daraus } a = \frac{a_1 - k}{1 + a_1 k}. \text{ Daher ist}$$

$$y - y_0 = \frac{a_1 - k}{1 + a_1 k}(x - x_0)$$

die gesuchte Gleichung.

Soll speciell $g \parallel g_1$ sein, so ist $y - y_0 = a_1 (x - x_0)$, und soll $g \perp g_1$ sein, so ist $y - y_0 = -\frac{1}{a_1}(x - x_0)$ die Gleichung der Geraden g (§ 235 *b*, 1. und 2. Folgesatz).

c) Die Gleichung der Geraden g besitzt jedenfalls die Form $Ax + By + C = 0$. Da die gegebenen Punkte der Geraden angehören sollen, so müssen ihre Coordinaten die Gleichung derselben befriedigen. Es ist also $Ax_1 + By_1 + C = 0$ und $Ax_2 + By_2 + C = 0$. Daraus folgt weiter durch Subtraction $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ und $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$, oder $A(x - x_1) = -B(y - y_1)$ und $A(x_2 - x_1) = -B(y_2 - y_1)$. Dividiert man nun die letzten zwei Gleichungen durch einander, so erhält man

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ oder } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

als Gleichung der Geraden g.

Bei dieser Ableitung wurde $x_2 \gtrless x_1$ und $y_2 \gtrless y_1$ vorausgesetzt. Der specielle Fall $x_2 = x_1$ oder $y_2 = y_1$ lässt sich leicht direct erledigen.

Zusatz. Soll g durch die Punkte $(c, 0)$ und $(0, b)$ gehen, d. h auf den Coordinatenachsen die Abschnitte $OC = c$ und $OB = b$ bestimmen, so lautet die entsprechende Gleichung $y = \frac{b}{-c}(x - c)$. Diese läßt sich in folgender Weise transformieren:

$$\frac{y}{b} = \frac{x - c}{-c}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{c} + 1, \text{ also } \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1.$$

Gleichung der Geraden in der Normalform.

§ 237. **Ableitung der Gleichung.** Man ziehe durch den Anfangspunkt die Normale n zur Geraden g und nehme jene Richtung in n als positiv an, für welche der Winkel $(xn) = \varphi$ der Bedingung $0 \leqq \varphi < 2R$ entspricht (Fig. 192 u. 193). (Selbstverständlich kann die positive Richtung in der Normale auch nach anderen Regeln bestimmt werden oder im vorhinein gegeben sein.) Nach dieser Festsetzung ist die Lage von g in Bezug auf das Coordinatensystem eindeutig bestimmt, wenn man den Winkel $(xn) = \varphi$ und die Strecke $OA = p$ kennt, wo A den Schnittpunkt von g und n bedeutet.

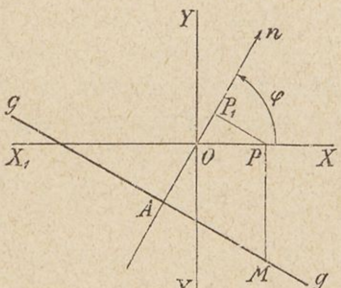


Fig. 192.

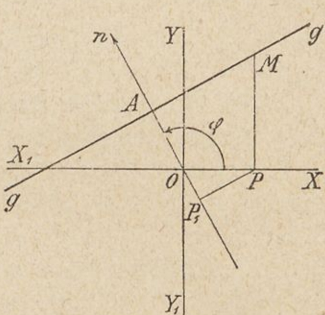


Fig. 193.

Nun construiere man zu einem beliebigen Punkte M der Geraden g die Coordinaten $OP = x$, $PM = y$ und projiciere die Punkte M und P auf die Normale. Die Projection von M ist stets der Punkt A, welchen Punkt M der Geraden man auch wählen mag, während für jeden außerhalb g liegenden Punkt die Projection nicht mit A zusammenfällt. Die Projection von P heiße P_1. Man findet dann $OP_1 + P_1A = OA$; $OP_1 = OP \cos(nx) = x \cos\varphi$; $P_1A = PM \cos(ny) = y \cos[(nx) + (xy)] = y \cos(R - \varphi) = y \sin\varphi$. Somit besteht für alle Punkte der Geraden und nur für diese die Relation

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Geraden in der Normalform.

§ 238. **Transformation der Gleichung einer Geraden in die Normalform.** Um die Gleichung $Ax + By + C = 0$ der Geraden g auf die Normalform zu bringen, berechnet man die Größen $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, p mittelst der Gleichungen $tg\,\alpha = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ (§ 235) und substituiert die erhaltenen Werte in die

Gleichung $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$. Man findet $\varphi = (xn) = (xg) + (gn) = \alpha \pm R$; daher ist

$$tg\,\varphi = \frac{\sin(\alpha \pm R)}{\cos(\alpha \pm R)} = \frac{\pm \cos\alpha}{\mp \sin\alpha} = -\frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{A}{B};$$

$$\sec\varphi = \pm\sqrt{1 + tg^2\varphi} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2} = \frac{\pm\sqrt{A^2+B^2}}{A};$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sec\varphi} = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin\varphi = tg\,\varphi \, . \cos\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad . \ . (1)$$

Da p als die Projection des Ordinatenabschnittes b auf die Normale betrachtet werden kann, so ist

$$p = b \cos(ny) = b \cos[(nx) + (xy)] = -\frac{C}{B} . \cos(R - \varphi) = -\frac{C}{B}\sin\varphi,$$

$$\text{somit } p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Von den doppelten Vorzeichen der Wurzelgrößen in (1) und (2) hat man übereinstimmend entweder nur das obere oder nur das untere beizubehalten. Aus der Bedingung $0 \leq \varphi < 2R$ folgt nun $\sin\varphi > 0$. Daher erhält die Wurzelgröße das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem $B > 0$ oder $B < 0$ ist.

Die Gleichung der Geraden g in der Normalform lautet also

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Um noch den speciellen Fall $B = 0$ zu erledigen oder also die Gleichung $Ax + C = 0$ auf die Normalform zu bringen, beachte man, dass die x-Achse zugleich die Normale der hier betrachteten Geraden ist. Hieraus folgt $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$ und $p = -\frac{C}{A}$. Man erhält also $x + \frac{C}{A} = 0$.

Aufgaben.

§ 239. **Abstand eines Punktes von einer Geraden.** *a)* Es sei $Ax + By + C = 0$ die Gleichung der Geraden g, und man suche zunächst den Abstand des Anfangspunktes O von jener Geraden. Nach § 238 ist

$$OA = p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Wenn hierin das Vorzeichen der Wurzelgröße übereinstimmend mit jenem von B gewählt wird, so erhält man die Strecke OA mit jenem Vorzeichen, welches der positiven Richtung der Normale entspricht.

b) Es sei $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ die Gleichung der Geraden g, und man habe den Abstand des Punktes M_0 (x_0, y_0) von g zu berechnen. Zu diesem Zwecke legt man durch M_0 als Anfangspunkt ein neues Coordinatensystem, dessen Achsen zu jenen des gegebenen Systems direct parallel sind. Bezeichnet man die Coordinaten irgend eines Punktes M in Bezug auf das erste System mit x, y und in Bezug auf das zweite mit x', y', so ist $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, also

$$x' \cos\varphi + y' \sin\varphi + (x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - p) = 0$$

die Gleichung der Geraden in Bezug auf das neue System. Man erhält nun die Strecke $M_0 A$ mit Hilfe der in *a)* angegebenen Formel, wenn man darin $A = \cos\varphi$, $B = \sin\varphi$ und $C = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - p$ setzt. Es ist dann wegen $\sin\varphi > 0$

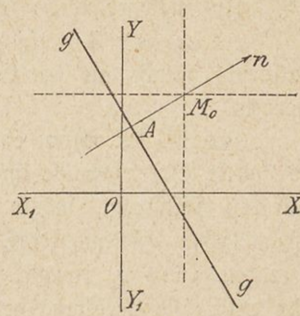


Fig. 194.

$$M_0 A = -(x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - p).$$

Nach dieser Formel, für welche eine einfache Gedächtnisregel aufgestellt werden kann, erhält man die Strecke $M_0 A$ positiv oder negativ, je nachdem die Richtung von M_0 nach A mit der positiven Richtung der Normale übereinstimmt oder nicht.

Hat die Gleichung der Geraden die Form $Ax + By + C = 0$, so ist der Abstand

$$M_0 A = -\frac{A x_0 + B y_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

worin die Wurzelgröße das Vorzeichen $+$ oder $-$ erhält, je nachdem B positiv oder negativ ist.

§ 240. Gleichung einer Winkelsymmetrale. Es seien g und g_1 zwei sich schneidende Gerade, $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ und $x \cos\varphi_1 + y \sin\varphi_1 - p_1 = 0$ ihre Gleichungen in der Normalform, ferner h und h_1 die Symmetralen der vier von g und g_1 gebildeten hohlen Winkel. Für jeden Punkt M (ξ, η) der Symmetrale h haben nun die Abstände MP und MP_1 von den Geraden g und g_1 gleiche absolute Werte und gleiche Vorzeichen, wenn die Normalen der Geraden g und g_1 zugleich nach dem Innern des von h halbierten Winkels gerichtet sind oder zugleich aus demselben heraustreten (Fig. 195). Dann ist also $MP = MP_1$ oder $-(\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi - p) = -(\xi \cos\varphi_1 + \eta \sin\varphi_1 - p_1)$. Da diese Gleichung für alle Punkte der Symmetrale h und nur für dieselben besteht, so ist sie die gesuchte Gleichung von h. Bezeichnet man in derselben die variablen Coordinaten mit x und y, so läſst sie sich auch auf die Form

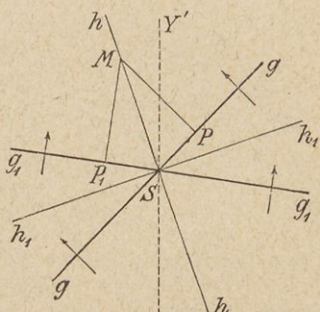


Fig. 195.

$$(x \cos\varphi + y \sin\varphi - p) - (x \cos\varphi_1 + y \sin\varphi_1 - p_1) = 0$$

bringen; man erkennt also, daſs sie aus den Gleichungen der Geraden g und g_1 durch Subtraction abgeleitet wird.

In analoger Weise zeigt man, daſs der Symmetrale h_1 die Gleichung

$$(x \cos \varphi + y \sin \varphi - p) + (x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1) = 0$$

entspricht, welche aus den Gleichungen der Geraden g und g_1 durch Addition hervorgeht.

Zusätze. 1. Wenn ein Halbstrahl um seinen Grenzpunkt S gedreht wird, so ändert seine Normale ihre nach § 237 bestimmte positive Richtung in Bezug auf den Halbstrahl, sobald dieser eine zur y-Achse parallele Lage überschreitet (Fig. 195). Hieraus folgt, daſs die Gerade, welche durch den Schnittpunkt S der Geraden g und g_1 parallel zur y-Achse gezogen wird, jene Winkel durchschneidet, für welche die Gleichung der Symmetrale durch Subtraction der Gleichungen von g und g_1 abgeleitet wird.

2. Bildet man aus den Gleichungen $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ der Geraden g und g_1 die neue Gleichung

$$(Ax + By + C) + \lambda (A_1 x + B_1 y + C_1) = 0,$$

worin λ einen constanten Factor bedeutet, so erhält man wieder eine lineare Gleichung, welche also ebenfalls einer Geraden entspricht. Diese geht durch den Schnittpunkt der Geraden g und g_1, da ihre Gleichung durch jene Werte von x und y befriedigt wird, für welche die Trinome $Ax + By + C$ und $A_1 x + B_1 y + C_1$ verschwinden. Man erkennt hierin eine Verallgemeinerung des Resultates, welches oben bezüglich der Winkelsymmetralen gewonnen wurde.

§ 241. Anwendungen auf die merkwürdigen Punkte des Dreieckes. Man beweise mittelst der Sätze der analytischen Geometrie, daſs sich *a)* die Winkelsymmetralen, *b)* die Seitensymmetralen, *c)* die Höhen und *d)* die Schwerlinien eines Dreieckes in je einem Punkte schneiden.

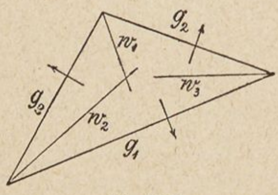


Fig. 196.

a) Die Gleichungen der drei Geraden, auf welchen die Dreiecksseiten liegen, seien in der Normalform gegeben, und man bezeichne dieselben zur Abkürzung symbolisch mit $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$. Wenn man festsetzt, daſs die Normalen aus dem Innern des Dreieckes nach außen gerichtet sind, so entsprechen den Winkelsymmetralen w_1, w_2, w_3 der Reihe nach die Gleichungen

$$g_2 - g_3 = 0, \; g_3 - g_1 = 0, \; g_1 - g_2 = 0.$$

Durch Addition der ersten zwei Gleichungen erhält man nun $g_2 - g_1 = 0$, und daraus $g_1 - g_2 = 0$. Also geht w_3 durch den Schnittpunkt von w_1 und w_2 (§ 240, 2. Zusatz).

b) Die Eckpunkte des gegebenen Dreieckes seien A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3). Die Symmetrale t_1 der Seite BC ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von B und C gleiche Abstände haben, deren Coordinaten also der Gleichung

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 \text{ oder}$$

$$2x(x_3 - x_2) + 2y(y_3 - y_2) - (x_3^2 - x_2^2) - (y_3^2 - y_2^2) = 0$$

entsprechen. Auf analoge Weise erhält man die Gleichungen der Symmetralen t_2 und t_3. Dieselben lauten

$$2x(x_1 - x_3) + 2y(y_1 - y_3) - (x_1^2 - x_3^2) - (y_1^2 - y_3^2) = 0,$$

$$2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) - (x_2^2 - x_1^2) - (y_2^2 - y_1^2) = 0.$$

Wenn man die letzten zwei Gleichungen addiert (und hierauf die Vorzeichen verändert), so erhält man die Gleichung für t_1. Also geht t_1 durch den Schnittpunkt von t_2 und t_3.

c) Die Gleichung der Geraden h_1, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht und zu der durch die Punkte (x_2, y_2), (x_3, y_3) bestimmten Geraden normal ist, lautet

$$(x - x_1)(x_2 - x_3) + (y - y_1)(y_2 - y_3) = 0.$$

Den Geraden h_2 und h_3 entsprechen die Gleichungen

$$(x - x_2)(x_3 - x_1) + (y - y_2)(y_3 - y_1) = 0,$$

$$(x - x_3)(x_1 - x_2) + (y - y_3)(y_1 - y_2) = 0.$$

Wenn man zwei von diesen Gleichungen addiert, so erhält man (nach Änderung der Vorzeichen) die dritte u. s. f.

d) Die Gleichung der Geraden s_1, welche durch den Punkt $A\,(x_1, y_1)$ und den Halbierungspunkt $\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ der Strecke BC geht, lautet

$$y - y_1 = \frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{x_2 + x_3 - 2x_1}(x - x_1).$$

Diese Gleichung kann auch auf die Form

$$y - y_1 = \frac{(y_1 + y_2 + y_3) - 3y_1}{(x_1 + x_2 + x_3) - 3x_1} \cdot (x - x_1) \text{ oder}$$

$$y - y_1 = \frac{\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} - y_1}{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} - x_1} \cdot (x - x_1)$$

gebracht werden. Man erkennt daraus, daß s_1 durch die Punkte $A\,(x_1, y_1)$ und $S\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ geht. Auf analoge Weise überzeugt man sich, daß auch s_2 und s_3 durch den Punkt S gehen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Polargleichung der Geraden.

§ 242. Gerade durch den Pol. Wenn die gegebene Gerade g durch den Pol O geht, so ist ihre Lage in Bezug auf die Polarachse OX durch den Winkel (xg) eindeutig bestimmt. Nun ist für alle Punkte der Geraden und nur für diese der Polarwinkel $u = (xg)$ oder $u = (xg) \pm 2R$, also $tg\,u = tg\,(xg)$. Daher ist $tg\,u = a$ die Polargleichung der gegebenen Geraden.

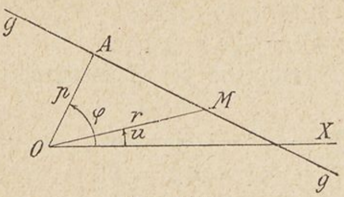


Fig. 197.

§ 243. Gerade in beliebiger Lage. Die Lage der Geraden g sei durch die Polarcoordinaten p und φ jenes Punktes A bestimmt, in welchem die durch den Pol O gezogene Normale n der Geraden g die letztere trifft. Nun ist für alle Punkte der Geraden und nur für diese p die Projection des Leitstrahles r auf die Normale n. Daraus folgt $p = r \cos(nr) = r \cos[(xr) - (xn)] = r \cos(u - \varphi)$. Also ist

$$r = \frac{p}{\cos(u - \varphi)}$$

die Polargleichung der gegebenen Geraden.

Zusatz. Zu demselben Resultate gelangt man auch durch die Substitutionen $x = r \cos u$, $y = r \sin u$ in die Gleichung $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$.

III. Abschnitt: Der Kreis.

Gleichung eines Kreises.

§ 244. Allgemeine Gleichung. Wenn C (p, q) das Centrum und r der Radius des gegebenen Kreises ist, so hat jeder Punkt M (x, y) der Kreislinie den Abstand r von C, während für jeden anderen Punkt N der Ebene $CN \gtrless r$ ist. Daher gilt für alle Punkte der Kreislinie und nur für diese die Gleichung $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r$, also auch

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung des Kreises.

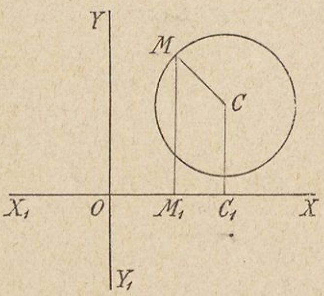


Fig. 198.

§ 245. Scheitelgleichung. Liegt der Mittelpunkt in dem Halbstrahle OX, und geht der Kreis durch den Anfangspunkt, so hat man in der allgemeinen Gleichung des Kreises $p = r$ und $q = 0$ zu setzen. Dann geht dieselbe in $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ oder

$$y^2 = 2rx - x^2$$

über und heißt die Scheitelgleichung des Kreises.

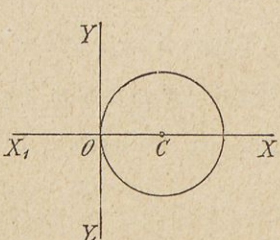


Fig. 199.

§ 246. Mittelpunktsgleichung. Fällt das Centrum des Kreises in den Anfangspunkt des Coordinatensystems, so hat man in der allgemeinen Gleichung $p = q = 0$ zu setzen. Dann geht dieselbe in

$$x^2 + y^2 = r^2$$

über und heißt die Mittelpunktsgleichung des Kreises.

§ 247. Discussion der Mittelpunktsgleichung. Um die gegebene Gleichung einer Linie zu discutieren, d. h. aus der Gleichung den Verlauf und die wichtigsten Eigenschaften der Linie abzuleiten, betrachtet man insbesonders *a)* die Schnittpunkte mit den Coordinatenachsen, *b)* den Verlauf der Werte der Ordinate, wenn die Abscisse alle reellen Werte durchläuft, *c)* den Verlauf der Werte der Abscisse, wenn die Ordinate alle reellen Werte durchläuft, *d)* die Symmetrie in Bezug auf Achsen oder ein Centrum u. s. f.

Obwohl die Eigenschaften des Kreises hinlänglich bekannt sind, soll hier die Discussion der Mittelpunktsgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ . . . (1) als Beispiel einer solchen Discussion durchgenommen werden.

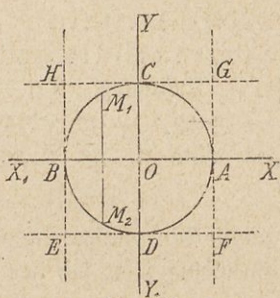


Fig. 200.

a) Die Schnittpunkte mit der x-Achse haben die Ordinate 0 und jene Abscissen, welche sich aus (1) für $y = 0$ ergeben. Man erhält $x = \pm r$. Um die Schnittpunkte mit der Ordinatenachse zu erhalten, setzt man $x = 0$ und erhält $y = \pm r$. Es sind also die folgenden vier Schnittpunkte vorhanden:

$A(r, 0)$, $B(-r, 0)$, $C(0, r)$, $D(0, -r)$.

b) Aus (1) folgt $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Für $x < -r$ und $x > r$ ist $x^2 > r^2$, also y imaginär. Man schließt daraus, dass zu den Abscissen in den betrachteten Intervallen keine Punkte der Curve gehören. Für $x = -r$ und $x = +r$ ist $y = 0$. Für $-r < x < +r$ oder $x^2 < r^2$ gehören zu jeder Abscisse zwei entgegengesetzte Werte der Ordinaten, somit zwei in Bezug auf die x-Achse symmetrische Punkte (M_1 und M_2). Die betrachtete Curve ist also in Bezug auf die x-Achse symmetrisch und ganz zwischen zwei Geraden enthalten, welche durch A und B parallel zur y-Achse gezogen werden. Zwischen diesen Parallelen werden die Ordinaten immer kleiner, wenn der absolute Wert der Abscisse zunimmt.

c) Auf analoge Weise wie in *b)* findet man, dass die Curve auch in Bezug auf die y-Achse symmetrisch ist, dass sie zwischen zwei Geraden liegt, welche durch C und D parallel zur x-Achse gezogen werden, und dass zwischen diesen Parallelen die Abscissen immer kleiner werden, wenn die absoluten Werte der Ordinaten zunehmen.

Aus *b)* und *c)* folgt, dass die Curve in einem begrenzten Theile der Ebene, und zwar innerhalb des Quadrates $EFGH$ liegt.

d) Wenn $M_1(x_1, y_1)$ irgend ein Punkt der betrachteten Linie ist, so hat man $x_1^2 + y_1^2 = r^2$. Daraus folgt $OM_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r$, d. h. alle Punkte der Linie haben vom Anfangspunkte O denselben Abstand r. Auf diese Weise gewinnt man aus (1) die charakteristische Eigenschaft des Kreises und erkennt zugleich die geometrische Bedeutung der Größe r.

Der Punkt O ist offenbar das Symmetriecentrum der Curve.

§ 248. Aufgaben. *a)* Die der Gleichung $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ entsprechende Linie zu bestimmen und zu construieren, wenn p, q und r beliebige reelle Zahlen bedeuten.

Auflösung. Man construiere den Punkt (p, q) und beschreibe um diesen als Centrum mit dem Radius r eine Kreislinie. Diese ist nach § 244 die gesuchte Linie; ihre Construction ist im Vorausgehenden bereits angegeben.

b) Man suche die Bedingungen, unter welchen die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen x und y, nämlich

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \ldots (2),$$

worin $A, B, C, \ldots$ beliebige reelle Zahlen bedeuten, einem Kreise entspricht, und construiere denselben, wenn jene Bedingungen erfüllt sind.

Auflösung. Da die Gleichung eines jeden Kreises auf die Form $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ gebracht werden kann (§ 244), so erkennt man sofort, daſs vor allem die drei Bedingungen

$$A \gtrless 0,\ B = A,\ C = 0$$

erfüllt sein müssen, wenn die Gleichung (2) einem Kreise entsprechen soll. Diese Gleichung läſst sich dann in folgender Weise transformieren:

$$x^2 + \frac{2Dx}{A} + y^2 + \frac{2Ey}{A} + \frac{F}{A} = 0,$$

$$x^2 + \frac{2Dx}{A} + \frac{D^2}{A^2} + y^2 + \frac{2Ey}{A} + \frac{E^2}{A^2} = \frac{D^2}{A^2} + \frac{E^2}{A^2} - \frac{F}{A},$$

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}.$$

Wenn also noch die vierte Bedingung

$$D^2 + E^2 - AF > 0$$

erfüllt ist, so entspricht die Gleichung (2) einem Kreise, und zwar demjenigen, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $p = -\frac{D}{A}$, $q = -\frac{E}{A}$ besitzt, und dessen Radius gleich dem absoluten Werte von $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - AF}}{A}$ ist. Damit ist auch die Construction jenes Kreises angegeben.

§ 249. Polargleichung. *a)* Wenn das Centrum des Kreises mit dem Pole zusammenfällt und der Radius mit a bezeichnet wird, so besteht für alle Punkte der Kreislinie und nur für dieselben die Gleichung $r = a$. Dies ist also die Polargleichung des Kreises in dem betrachteten speciellen Falle.

b) Die Lage und die Gröſse des Kreises seien durch die Polarcoordinaten ϱ, φ des Centrums C und den Radius a bestimmt. Wenn man in der allgemeinen Gleichung des Kreises $(x-p)^2 + (y-q)^2 = a^2$ die rechtwinkligen Parallelcoordinaten durch Polarcoordinaten mittelst der Gleichungen

$x = r \cos u,\ y = r \sin u,\ p = \varrho \cos \varphi,\ q = \varrho \sin \varphi$ ersetzt, so erhält man

$$r^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - u) + \varrho^2 = a^2, \text{ also}$$

$$r = \varrho \cos(\varphi - u) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2 \sin^2(\varphi - u)}.$$

Dies ist die Polargleichung des gegebenen Kreises.

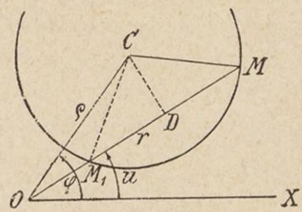


Fig. 201.

Zusatz. Aus der Figur 201 erhält man leicht die Gleichungen $OD = \varrho \cos(\varphi - u)$, $DC = \varrho \sin(\varphi - u)$, $M_1D = DM = \sqrt{a^2 - \varrho^2 \sin^2(\varphi - u)}$ und kann mit Hilfe derselben aus der Polargleichung die Lehrsätze des § 46 ableiten.

Aufgaben.

§ 250. Erste Abtheilung. Man soll die Lage eines gegebenen Kreises in Bezug auf das Coordinatensystem oder in Bezug auf gegebene Punkte, Gerade und Kreise bestimmen. Die Punkte sind durch ihre Coordinaten, die Geraden und die Kreise durch ihre Gleichungen bestimmt. Z. B.

a) Man kennt die Gleichung $Ax + By + C = 0$ der Geraden g und die Gleichung $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ des Kreises k und soll den Centralabstand der Geraden berechnen und die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Linien bestimmen.

Auflösung. Der Centralabstand der Geraden g ist zugleich der Abstand des Punktes (p, q) von g (§ 239).

Die Coordinaten x_1, y_1 eines gemeinschaftlichen Punktes von g und k müssen die Gleichungen der beiden Linien befriedigen; sie werden daher berechnet, indem man die Gleichungen $Ax_1 + By_1 + C = 0$ und $(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2$ nach x_1, y_1 oder, was dasselbe ist, die gegebenen Gleichungen nach x, y auflöst. Man erhält zwei Auflösungen und somit zwei gemeinschaftliche Punkte, einen oder keinen gemeinschaftlichen Punkt, je nachdem die Auflösungen reell und verschieden, reell und gleich oder complex sind. Welcher von diesen drei Fällen eintreten muss, kann nach § 46 im vorhinein beurtheilt werden, wenn der Centralabstand der Geraden g bereits berechnet ist.

b) Wenn die Gleichungen $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ und $(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2$ zweier Kreise k und k_1 gegeben sind, den Centralabstand der beiden Kreise zu berechnen und ihre gemeinschaftlichen Punkte zu bestimmen.

Auflösung. Der Centralabstand der beiden Kreise ist zugleich der Abstand der beiden Punkte (p, q) und (p_1, q_1).

Bezüglich der gemeinschaftlichen Punkte gelten analoge Bemerkungen wie in der Auflösung der Aufgabe *a)*.

§ 251. Zweite Abtheilung. Man soll die Gleichung eines Kreises k suchen, d. h. die entsprechenden Werte der Constanten p, q, r berechnen, wenn die Lage des Kreises in Bezug auf das Coordinatensystem oder in Bezug auf gegebene Punkte, Gerade und Kreise gegeben ist. Zu diesem Zwecke leite man aus den Bedingungen der Aufgabe drei Gleichungen zwischen p, q, r ab und berechne hierauf diese Größen. Wenn z. B. k durch den Punkt (x_1, y_1) gehen soll, so muss die Gleichung

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2$$

bestehen. Wenn k die Gerade $Ax + By + C = 0$ berühren soll, so ist r dem absoluten Werte von

$$\frac{Ap + Bq + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

gleichzusetzen. Soll k den Kreis $(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2$ von außen berühren, so muss die Gleichung

$$(p - p_1)^2 + (q - q_1)^2 = (r + r_1)^2$$

bestehen u. s. f.

§ 252. **Die Potenzlinie.** Es ist der geometrische Ort aller Punkte zu bestimmen, von denen jeder in Bezug auf zwei gegebene Kreise $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ und $(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2$ gleiche Potenzen hat.

Auflösung. Die Potenz eines Punktes $M\,(\xi, \eta)$ in Bezug auf den ersten Kreis ist nach § 101 gleich $c^2 - r^2 = (\xi - p)^2 + (\eta - q)^2 - r^2$ und in Bezug auf den zweiten gleich $c_1^2 - r_1^2 = (\xi - p_1)^2 + (\eta - q_1)^2 - r_1^2$. Setzt man diese beiden Werte einander gleich, so erhält man nach einigen Transformationen die Gleichung

$$2\xi(p_1 - p) + 2\eta\,(q_1 - q) + (p^2 + q^2 - r^2) - (p_1^2 + q_1^2 - r_1^2) = 0,$$

welche einer Geraden entspricht. Also ist eine Gerade der geometrische Ort aller Punkte, von denen jeder in Bezug auf zwei gegebene Kreise gleiche Potenzen hat; sie wird die Potenzlinie oder Chordale der beiden Kreise genannt.

Zusätze. 1. Bezeichnet man die auf Null reducierten Gleichungen der beiden Kreise zur Abkürzung mit $k = 0$ und $k_1 = 0$, so ist $k - k_1 = 0$ die Gleichung der entsprechenden Potenzlinie.

Man überzeugt sich davon, indem man in der oben gefundenen Gleichung der Potenzlinie ξ und η durch x und y ersetzt.

2. Die Potenzlinie ist zur Centrale der beiden Kreise normal; denn die Richtungscoefficienten dieser beiden Geraden sind $-\dfrac{p_1 - p}{q_1 - q}$ und $\dfrac{q_1 - q}{p_1 - p}$.

3. Wenn die beiden Kreise gemeinschaftliche Punkte haben, so liegen diese auch in der Potenzlinie; denn jene Werte von x und y, welche die Gleichungen $k = 0$ und $k_1 = 0$ zugleich befriedigen, befriedigen auch die Gleichung $k - k_1 = 0$.

4. Drei Kreise $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ haben zu zweien die Potenzlinien $k_1 - k_2 = 0$, $k_2 - k_3 = 0$, $k_1 - k_3 = 0$. Man erkennt daraus, dass die drei Potenzlinien sich in einem einzigen Punkte schneiden, welcher das Potenzcentrum der drei Kreise genannt wird.

IV. Abschnitt: Die Ellipse.

Gleichung der Ellipse.

§ 253. Erklärungen. Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summen der Abstände von zwei gegebenen Punkten einander gleich sind. Die gegebenen Punkte heißen die Brennpunkte der Ellipse und die Verbindungsstrecken derselben mit einem Punkte der Ellipse die Leitstrahlen oder Radien vectoren dieses Punktes. Die Hälfte des Abstandes der beiden Brennpunkte wird die Excentricität der Ellipse genannt.

§ 254. Mittelpunktsgleichung. Man lege das Coordinatensystem so, daſs die Brennpunkte F_1 und F_2 in die x-Achse fallen und in Bezug auf die y-Achse symmetrisch liegen. Dann ist $F_2O = OF_1$ die Excentricität der Ellipse; dieselbe wird in der Regel mit e bezeichnet.

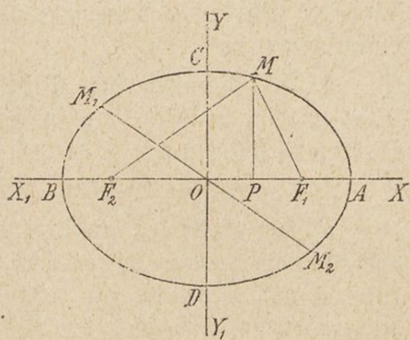


Fig. 202.

Ist nun M (x, y) ein beliebiger Punkt der Ellipse, so hat die Summe $F_1M + F_2M$ für alle Lagen dieses Punktes ebendenselben Wert, welcher mit $2a$ bezeichnet werden soll. Also ist

$$\sqrt{(x-e)^2+y^2} + \sqrt{(x+e)^2+y^2} = 2a \ . \ . \ . \ (1)$$

(§ 225) die Gleichung der Ellipse, da sie nach § 253 für alle Punkte der letzteren und nur für dieselben besteht. Um die Gleichung (1) rational zu machen, führt man die folgenden Transformationen durch:

$$\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+e)^2+y^2},$$

$$x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2+y^2} + x^2 + 2ex + e^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x+e)^2+y^2} = a^2 + ex,$$

$$a^2x^2 + 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2ex + e^2x^2,$$

$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Wegen $F_1M + F_2M > F_2F_1$ ist $2a > 2e$, also $a > e$ und $a^2 - e^2 > 0$. Man kann also stets eine reelle Zahl b bestimmen, für welche $a^2 - e^2 = b^2$ ist. Dann erhält man

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

$$\text{oder } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

Die Gleichung (2) oder (3) gilt zufolge ihrer Ableitung für alle Punkte der Ellipse; sie gilt jedoch für keinen Punkt, welcher der Ellipse nicht angehört. Denn wäre M_1 ein solcher Punkt, so hätte man $F_1M_1 + F_2M_1 \gtrless 2a$, also

$\sqrt{(x_1 - e)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 + e)^2 + y_1^2} \gtrless 2a$. Daraus erhält man durch ebendieselben Transformationen, welche zur Ableitung der Gleichungen (2) und (3) benützt worden sind, die Relationen

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 \gtrless a^2 b^2 \text{ und } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \gtrless 1.$$

Somit ist (2) oder (3) ebenfalls die Gleichung der Ellipse und heißt die Mittelpunktsgleichung derselben.

Zusatz. Für $e = 0$ oder $a = b$ geht die Mittelpunktsgleichung der Ellipse in jene des Kreises über. Man kann also den Kreis als eine specielle Form der Ellipse betrachten, was übrigens auch aus den Definitionen der beiden Linien hervorgeht.

§ 255. **Discussion der Mittelpunktsgleichung.** *a)* Für $y = 0$ ist $x = \pm a$, und für $x = 0$ ist $y = \pm b$. Es gibt also vier Schnittpunkte mit den Coordinatenachsen, welche Scheitel der Ellipse heißen, und zwar

$$A(a, 0),\ B(-a, 0),\ C(0, b),\ D(0, -b).$$

b) und *c)* Analog wie in § 247 findet man, dass die Ellipse in Bezug auf beide Coordinatenachsen symmetrisch ist und zwischen den Geraden liegt, welche durch A und B parallel zur y-Achse, ferner durch C und D parallel zur x-Achse gezogen werden. Innerhalb des Rechteckes, welches durch diese Parallelen begrenzt wird, nehmen die Ordinaten und die Abscissen ab, wenn die absoluten Werte der Abscissen, beziehungsweise der Ordinaten zunehmen.

d) Ist $M_1\ (x_1, y_1)$ irgend ein Punkt der Ellipse, also $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, so gehört offenbar auch der Punkt $M_2\ (-x_1, -y_1)$ der Ellipse an (Fig. 202). Die Sehne $M_1 M_2$ geht nun durch den Anfangspunkt O und wird in demselben halbiert. Daher heißt jede durch O gezogene Sehne ein Durchmesser der Ellipse. Aus dem Vorausgehenden folgt zugleich, dass die Ellipse in Bezug auf O als Centrum symmetrisch ist. Daher heißt O der Mittelpunkt (das Centrum) der Ellipse.

Man findet ferner

$$M_1 M_2 = 2 . OM_1 = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2\sqrt{x_1^2 + b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}} = 2\sqrt{b^2 + \frac{e^2 x_1^2}{a^2}}.$$

Hieraus geht hervor, dass der Durchmesser immer größer wird, wenn der absolute Wert von x_1 wächst. Der größte Durchmesser entspricht also den Abscissen $x_1 = +a$ und $x_1 = -a$, zu welchen die Punkte A und B gehören; d. h. $AB = 2a$ ist der größte Durchmesser der Ellipse und heißt die große Achse derselben. Den kleinsten Durchmesser erhält man für die Abscisse $x_1 = 0$, zu welcher die Punkte C und D gehören; d. h. $CD = 2b$ ist der kleinste Durchmesser der Ellipse und wird die kleine Achse derselben genannt. a und b heißen die große, beziehungsweise die kleine Halbachse der Ellipse.

Zusatz. Jene Sehnen, welche in den Brennpunkten normal zur großen Achse errichtet werden, heißen Parameter der Ellipse und werden mit $2p$ bezeichnet. Aus der Gleichung der Ellipse ergibt sich $p = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2} = \frac{b^2}{a}$. Daraus folgt $a : b = b : p$, d. h. p ist die dritte geometrische Proportionale zu a und b.

Construction der Ellipse.

§ 256. Aus der Gleichung $a^2 - e^2 = b^2$ oder $a^2 = b^2 + e^2$ folgt, dass a die Hypotenuse jenes rechtwinkligen Dreieckes ist, welches b und e als Katheten hat. Daher ist (Fig. 202) $F_1C = F_2C = F_1D = F_2D = a$, und man erkennt leicht, wie die Punkte A, B, C, D, F_1 und F_2 construiert werden, wenn zwei von den Größen a, b, e gegeben sind. Dabei wollen wir stets voraussetzen, dass die Achsen der Ellipse in die Coordinatenachsen fallen.

Andere Punkte der Ellipse werden gefunden, indem man von dem einen Brennpunkte als Centrum mit einem Radius r, welcher der Bedingung $a - e < r < 2a$ entspricht, einen Kreis beschreibt und die Durchschnittspunkte desselben mit einem zweiten Kreise sucht, welcher den zweiten Brennpunkt als Centrum und den Radius $r_1 = 2a - r$ hat. Die erhaltenen Durchschnittspunkte gehören der Ellipse an.

Um zu einer gegebenen Abscisse $OP = x$ (Fig. 203) die entsprechende Ordinate $PM = y$ eines Ellipsenpunktes zu construieren, beschreibe man um O als Centrum zwei Kreise mit den Radien a und b, ziehe die Kreisordinate PN, hierauf den Radius ON und lege durch den Punkt Q, in welchem ON den kleineren Kreis durchschneidet, die Parallele zur x-Achse. Der Schnittpunkt M dieser Parallelen mit PN ist der gesuchte Ellipsenpunkt. Denn man findet $PM : PN = OQ : ON = b : a$. Daher ist

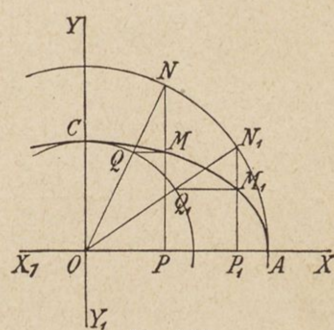


Fig. 203.

$$PM = \frac{b}{a}\, PN = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Aus dem Vorausgehenden ergibt sich auch der Lehrsatz:

Bezieht man eine Ellipse und den ihr umgeschriebenen Kreis auf ein Coordinatensystem, dessen Achsen mit jenen der Ellipse zusammenfallen, so verhält sich jede Ellipsenordinate zu der derselben Abscisse entsprechenden Kreisordinate wie die kleine Halbachse der Ellipse zur großen.

Längen der Leitstrahlen.

§ 257. Für die Leitstrahlen $F_1M = r_1$ und $F_2M = r_2$ eines Ellipsenpunktes $M\ (x, y)$ gelten die Gleichungen
$$r_1^2 = (x - e)^2 + y^2,\ r_2^2 = (x + e)^2 + y^2.$$
Man kann dieselben mittelst der Gleichung der Ellipse oder auch in folgender Weise vereinfachen:

Es ist $r_2^2 - r_1^2 = 4ex$, ferner $r_2 + r_1 = 2a$, somit $r_2 - r_1 = \frac{2ex}{a}$.

Aus den letzten zwei Gleichungen erhält man
$$r_1 = a - \frac{ex}{a},\ r_2 = a + \frac{ex}{a}.$$

Quadratur der Ellipse.

§ 258. **Lehrsatz.** Jeder Ellipsenstreifen, welcher von der großen Achse und zwei Normalen zu derselben begrenzt wird, verhält sich zu dem von denselben Geraden begrenzten Streifen des umgeschriebenen Kreises wie die kleine Halbachse der Ellipse zur großen.

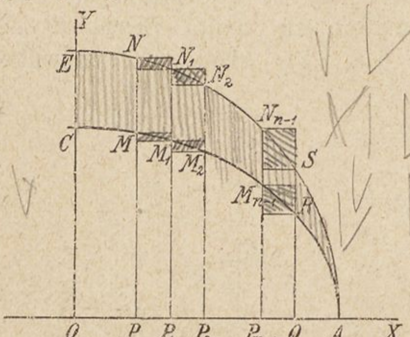


Fig. 204.

Beweis. Es sei OAC ein Quadrant der gegebenen Ellipse, OAE der entsprechende Quadrant des umgeschriebenen Kreises und XOY ein Coordinatensystem, dessen Achsen mit jenen der Ellipse zusammenfallen.

Um die Flächenstreifen $PQRM$ und $PQSN$ zu vergleichen, zerlegen wir PQ in n gleiche Theile ($PP_1 = P_1P_2 = \ldots = \delta$) und ziehen durch die Theilungspunkte die Kreisordinaten $P_1N_1,\ P_2N_2, \ldots$

Dadurch zerfallen jene beiden Streifen in je n schmälere Streifen, welchen man durch Parallele zur x-Achse Rechtecke ein- und umschreiben kann. Da nun jeder der beiden gegebenen Flächenstreifen zwischen der Summe der ein- und jener der umgeschriebenen Rechtecke enthalten ist, so folgt
$$(P_1M_1 + P_2M_2 + \ldots + QR)\,\delta < PQRM < (PM + P_1M_1 + \ldots + P_{n-1}M_{n-1})\,\delta,$$
$$(P_1N_1 + P_2N_2 + \ldots + QS)\,\delta < PQSN < (PN + P_1N_1 + \ldots + P_{n-1}N_{n-1})\,\delta$$
oder wegen $PN = \frac{a}{b}\,PM,\ P_1N_1 = \frac{a}{b}\,P_1M_1, \ldots$ (§ 256)
$$\frac{a}{b}\,(P_1M_1 + P_2M_2 + \ldots + QR)\,\delta < PQSN < \frac{a}{b}\,(PM + P_1M_1 + \ldots + P_{n-1}M_{n-1})\,\delta,$$
also
$$(P_1M_1 + P_2M_2 + \ldots + QR)\,\delta < \frac{b}{a}\,PQSN < (PM + P_1M_1 + \ldots + P_{n-1}M_{n-1})\,\delta.$$

Da somit die Fläche $PQRM$ mit dem $\frac{b}{a}$ fachen der Fläche $PQSN$ zwischen denselben Grenzen liegt, und da sich die Differenz $(PM - QR)\delta$ dieser Grenzen durch entsprechende Vergrößerung von n beliebig verkleinern läßt, so schließt man $PQRM = \frac{b}{a} PQSN$ oder $PQRM : PQSN = b : a$.

Dieser Lehrsatz besteht offenbar auch dann, wenn Q mit A zusammenfällt, oder wenn P und Q auf entgegengesetzten Seiten von O liegen.

§ 259. Flächeninhalt der Ellipse. Der Flächeninhalt der Ellipse ist gleich dem Producte aus den zwei Halbachsen und der Ludolphischen Zahl.

Beweis. Nach § 258 ist $OAC = \frac{b}{a} OAE = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a b}{4}$.

Bezeichnet man also mit F die Flächenzahl des von der Ellipse begrenzten Theiles der Ebene (kürzer ausgedrückt: den Flächeninhalt der Ellipse), so ist $F = \pi a b$.

§ 260. Ellipsensector, Ellipsensegment. *a)* Um den Flächeninhalt des Sectors $OAUM$ zu berechnen, verlängert man die Ordinate PM bis zum Durchschnitte mit dem umgeschriebenen Kreise und zieht den Radius ON. Es ist dann $OAUM = OPM + PAUM = \frac{b}{a} OPN + \frac{b}{a} PAVN = \frac{b}{a} OAVN = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^2 \alpha}{360} = \frac{\pi a b \alpha}{360}$.

Der Winkel α wird aus der Gleichung $\cos\alpha = \frac{OP}{ON} = \frac{x}{a}$ berechnet.

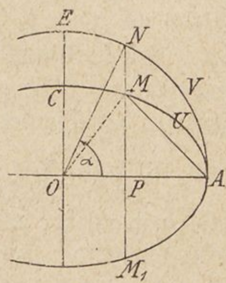


Fig. 205.

b) Segment $M_1AM = 2\,PAUM = \frac{2b}{a} PAVN = \frac{2b}{a}(OAVN - OPN)$

$$= \frac{2b}{a}\left(\frac{\pi a^2 \alpha}{360} - \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2}\right) = \frac{\pi a b \alpha}{180} - \frac{bx\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

c) Segment $AUM = OAUM - OAM = \frac{\pi a b \alpha}{360} - \frac{a}{2} \cdot \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{\pi a \alpha}{180} - \sqrt{a^2 - x^2}\right).$$

V. Abschnitt: Die Hyperbel.

Gleichung der Hyperbel.

§ 261. Erklärungen. Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenzen der Abstände von zwei gegebenen Punkten einander gleich sind. Die Begriffe: Brennpunkte, Leitstrahlen und Excentricität der Hyperbel werden ebenso wie bei der Ellipse erklärt.

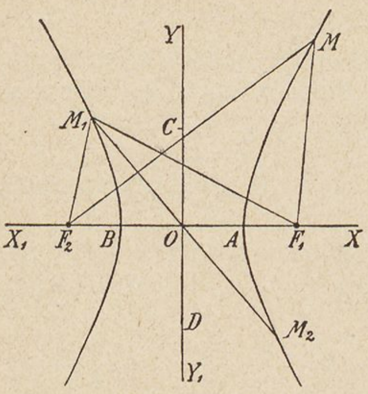


Fig. 206.

§ 262. Mittelpunktsgleichung. Bezeichnet man den Abstand $F_2 F_1$ der beiden Brennpunkte mit $2e$ und die constante Differenz zweier Leitstrahlen mit $2a$, so ist also $F_2M - F_1M = 2a$ und $F_1M_1 - F_2M_1 = 2a$ zu setzen. Verfährt man im übrigen ebenso wie im § 254, so erhält man die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel in folgenden drei Formen:
$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2} = \pm 2a \ldots (1), \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ldots (2),$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots (3).$$

Darin ist zur Abkürzung $e^2 - a^2 = b^2$ gesetzt, wo b eine reelle Größe bedeutet. Es ist nämlich $F_2M - F_1M < F_2F_1$ oder $2a < 2e$, somit auch $a < e$ und $e^2 - a^2 > 0$.

§ 263. Discussion der Mittelpunktsgleichung. *a)* Für $y = 0$ ist $x = \pm a$, und für $x = 0$ ist $y = \pm bi$. Die Hyberbel schneidet also nur die x-Achse und zwar in den Punkten $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$, welche Scheitel der Hyperbel heißen.

b) Aus (2) folgt $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Für $-a < x < a$ ist $x^2 < a^2$, also y imaginär; d. h. zu den Abscissen in dem angegebenen Intervalle gehören keine Punkte der Curve. Für $x = \pm a$ ist $y = 0$. Für $x < -a$ und $x > a$ ist $x^2 > a^2$, also gehören in diesen Intervallen zu jeder Abscisse zwei entgegengesetzte Werte der Ordinaten. Die Curve ist somit in Bezug auf die x-Achse symmetrisch und hat keine Punkte zwischen den beiden Geraden, welche durch A und B parallel zur y-Achse gezogen werden. Aus dem Vorausgehenden ersieht man auch, dass die Hyperbel aus zwei getrennten Zweigen besteht, welche sich zu beiden Seiten der x-Achse ins Unendliche erstrecken, da nämlich die absoluten Werte der Ordinaten gleichzeitig mit jenen der Abscissen ohne Ende zunehmen.

c) Löst man die Gleichung (2) nach x auf, so sieht man sofort, dass jeder beliebigen Ordinate zwei entgegengesetzte Werte der Abscisse entsprechen. Die Curve ist also auch in Bezug auf die y-Achse symmetrisch.

d) Ist M_1 (x_1, y_1) irgend ein Punkt der Hyperbel, also $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$, so gehört auch der Punkt M_2 $(-x_1, -y_1)$ der Hyperbel an (Fig. 206). Die Sehne M_1M_2 geht durch O und wird durch diesen Punkt halbiert; sie heißt daher ein Durchmesser der Hyperbel. Da diese Curve in Bezug auf O als Centrum symmetrisch ist, so heißt O der Mittelpunkt (das Centrum) derselben.

Aus $M_1M_2 = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2\sqrt{\frac{e^2x_1^2}{a^2} - b^2}$ folgt, dass der Durchmesser gleichzeitig mit dem absoluten Werte von x_1 ohne Ende zunimmt. Der kleinste Durchmesser entspricht den Abscissen $x_1 = a$ und $x_1 = -a$, zu welchen die Punkte A und B gehören. Also ist $AB = 2a$ der kleinste Durchmesser und wird die Hauptachse genannt. Als Nebenachse, welche jedoch kein Durchmesser ist, trägt man auf der Ordinatenachse die Strecke $CD = 2b$ so auf, dass O ihr Halbierungspunkt ist.

Zusatz. Jene Sehnen, welche in den Brennpunkten normal zur Hauptachse errichtet werden, heißen Parameter der Hyperbel und werden mit $2p$ bezeichnet. Man findet $p = \frac{b^2}{a}$ wie bei der Ellipse.

Construction der Hyperbel.

§ 264. Aus der Gleichung $e^2 - a^2 = b^2$ oder $e^2 = a^2 + b^2$ folgt, dass e die Hypotenuse jenes rechtwinkligen Dreieckes ist, welches a und b als Katheten hat. Daher ist (Fig. 206) $AC = BC = AD = BD = e$, und man erkennt leicht, wie die Punkte A, B, C, D, F_1 und F_2 construiert werden, wenn zwei von den Größen a, b, e gegeben sind. Zwei andere Punkte der Hyperbel erhält man als Schnittpunkte zweier Kreise, welche die Brennpunkte als Mittelpunkte haben, und deren Radien sich um $2a$ unterscheiden u. s. f.

Um zu einer gegebenen Abscisse $OP = x$ (Fig. 207) die entsprechende Ordinate $PM = y$ eines Hyperbelpunktes zu construieren, beschreibe man um O als Centrum zwei Kreise mit den Radien $OP = x$ und $OE = b$, ziehe $AU \parallel EV \parallel OY$ und verbinde O mit dem Schnittpunkte N der Geraden AU und des ersten Kreises. Es ist dann $AN : EQ = OA : OE = a : b$ und $EQ = \frac{b}{a} AN = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y$.

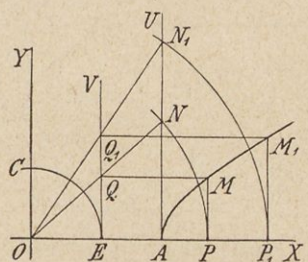


Fig. 207.

Zieht man also $PM \parallel OY$ und $QM \parallel OX$, so ist M der gesuchte Hyperbelpunkt.

Längen der Leitstrahlen.

§ 265. Ist $M(x, y)$ ein Punkt des ersten Hyperbelzweiges, d. h. desjenigen, welcher vom Halbstrahle OX durchschnitten wird, so bestehen die Gleichungen
$$F_1M = r_1 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}, F_2M = r_2 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2},\ r_2 - r_1 = 2a.$$

Daraus folgt $r_1 = \frac{ex}{a} - a,\ r_2 = \frac{ex}{a} + a.$

Wenn M dem zweiten Hyperbelzweige angehört, so ist
$$r'_1 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2},\ r'_2 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2},\ r'_1 - r'_2 = 2a.$$

Daraus folgt $r'_1 = -\frac{ex}{a} + a,\ r'_2 = -\frac{ex}{a} - a.$

Asymptoten der Hyperbel.

§ 266. *a)* Stellt man sich die Aufgabe, die gemeinschaftlichen Punkte der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ und der Geraden $y = kx$ zu bestimmen, so hat man offenbar jene Werte von x und y zu berechnen, welche die Gleichungen der beiden Linien zugleich befriedigen. Man erhält die beiden Lösungen:

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}},\ y_1 = \frac{abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}$$

$$\text{und } x_2 = -\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}},\ y_2 = -\frac{abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}},$$

somit zwei Schnittpunkte oder keinen Schnittpunkt, je nachdem $b^2 - a^2k^2 > 0$ oder $b^2 - a^2k^2 < 0$ ist. Der Fall $b^2 - a^2k^2 = 0$ oder $k = \pm\frac{b}{a}$ bedarf einer genaueren Untersuchung.

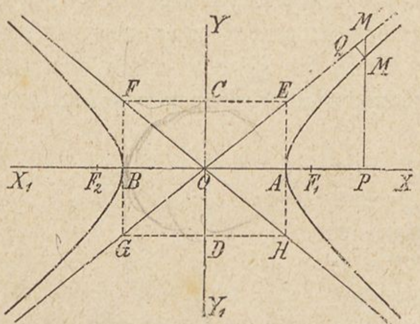


Fig. 208.

Es sei zunächst $0 < k < \frac{b}{a}$, also $b^2 - a^2k^2 > 0$; dann liegt der eine Schnittpunkt im ersten und der andere im dritten Quadranten. Dreht man nun die Gerade $y = kx$ um den Punkt O im positiven Sinne, so nähert sich der Ausdruck $b^2 - a^2k^2$ dem Grenzwerte 0 und geht in denselben über, wenn $k = \frac{b}{a}$ wird. Zugleich nehmen die Coordinaten x_1, y_1 den Grenzwert $+\infty$, hingegen x_2, y_2 den Grenzwert $-\infty$ an. Die Gerade $y = \frac{b}{a}x$ trifft somit die Hyperbel in zwei unendlich entfernten Punkten.

Ist hingegen $0 > k > -\frac{b}{a}$, so schneidet die Gerade $y = kx$ die Hyperbel in zwei Punkten, von denen der eine im zweiten und der andere im vierten Quadranten liegt. Dreht man nun die Gerade so, dass $k = -\frac{b}{a}$ wird, so werden die Coordinaten der Durchschnittspunkte unendlich groß. Die Gerade $y = -\frac{b}{a}x$ trifft somit die Hyperbel ebenfalls in zwei unendlich entfernten Punkten.

Die Geraden $y = \frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}x$ heißen die Asymptoten der Hyperbel.

b) Wenn sich ein Punkt längs eines Hyperbelzweiges so bewegt, dass der absolute Wert seiner Abscisse ohne Ende zunimmt, so nimmt der Abstand des Punktes von der benachbarten Asymptote unbegrenzt ab.

Beweis. Es ergibt sich (Fig. 208) $MQ < MM' = PM' - PM = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} < \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x} = \frac{ab}{x}$. Man kann somit x stets so groß wählen, dass $\frac{ab}{x}$ und umsomehr auch MQ beliebig klein wird.

c) Zieht man durch die Endpunkte A und B der Hauptachse Parallele zur Nebenachse, ferner durch die Endpunkte C und D der Nebenachse Parallele zur Hauptachse, so erhält man ein Rechteck $EFGH$, dessen Diagonalen auf den Asymptoten der Hyperbel liegen. Denn der Punkt E hat die Coordinaten a und b; er liegt also auf der Geraden $y = \frac{b}{a}x$ u. s. f.

VI. Abschnitt: Die Parabel.

Gleichung der Parabel.

§ 267. Erklärungen. Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, von denen jeder von einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Punkte gleiche Abstände hat. Die gegebene Gerade heißt die Leitlinie und der gegebene Punkt der Brennpunkt der Parabel. Die Verbindungsstrecke des Brennpunktes mit einem Punkte der Parabel wird der Leitstrahl (Radius vector) dieses Punktes genannt.

§ 268. Scheitelgleichung. Es sei L_1L die Leitlinie und F der Brennpunkt einer Parabel. Wir ziehen $FA \perp L_1L$ und halbieren die Strecke AF im Punkte O. Das Coordinatensystem soll so gelegt werden, dass O der Anfangspunkt ist und der Halbstrahl OX durch den Brennpunkt geht.

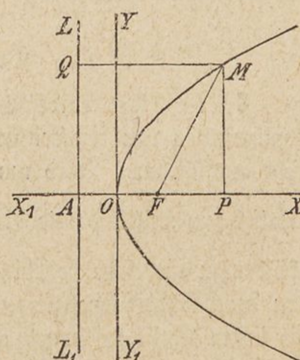


Fig. 209.

Ist nun M (x, y) ein Punkt der Parabel, ferner $MP \perp X_1X$ und $MQ \perp L_1L$, so folgt nach § 267

$$FM = QM = AP = AO + OP.$$

Setzt man also zur Abkürzung $AF = p$, so ist

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x \;\ldots.\; (1)$$

die Gleichung der Parabel, da sie für alle Punkte der letzteren und nur für dieselben besteht. Um sie zu vereinfachen, führt man die folgenden Transformationen durch:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2,$$

$$y^2 = 2px \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Wenn der Punkt M_1 (x_1, y_1) der Parabel nicht angehört, so ist $FM_1 \gtrless QM_1$, also auch $y_1^2 \gtrless 2px_1$. Die Gleichung (2) heißt die Scheitelgleichung der Parabel.

§ 269. **Discussion der Scheitelgleichung.** *a)* Für $x = 0$ ist $y = 0$ und umgekehrt. Die Curve hat also nur den Punkt O mit den Coordinatenachsen gemeinschaftlich. Dieser Punkt heißt der Scheitel der Parabel.

b) Aus der Gleichung (2) folgt $y = \pm\sqrt{2px}$. Man erkennt daraus daſs negativen Abscissen keine Punkte der Curve entsprechen, daſs diese in Bezug auf die x-Achse symmetrisch ist, und daſs die absoluten Werte der Ordinaten gleichzeitig mit der (positiven) Abscisse unbegrenzt zunehmen. Die Gerade, welche durch den Brennpunkt normal zur Leitlinie gezogen wird, heißt die Achse der Parabel.

c) Löst man die Gleichung (2) nach x auf, so erkennt man, daſs jeder Ordinate eine bestimmte Abscisse entspricht, und daſs letztere gleichzeitig mit dem absoluten Werte der ersteren unendlich zunimmt. Die Parabel ist somit unbegrenzt; sie liegt jedoch ganz auf jener Seite der Leitlinie, auf welcher sich der Brennpunkt befindet.

d) Die Linie $y^2 = 2px$ hat kein Symmetriecentrum.

Zusatz. Die im Brennpunkte normal zur Achse errichtete Sehne heißt der Parameter der Parabel. Derselbe ist $= 2p$, wovon man sich mittelst der Gleichung (2) überzeugen kann.

Construction der Parabel.

§ 270. Der halbe Parameter p einer Parabel ist zugleich der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie. Darnach ist die Construction der Punkte F und O leicht ausführbar. Wird nun ein Coordinatensystem so gelegt, daſs die y-Achse parallel zur Leitlinie und die Abscisse des Brennpunktes $= \frac{p}{2}$ ist (§ 268), so erhält man die einer beliebigen Abscisse OP entsprechenden Parabelpunkte, indem man durch P die Parallele zur y-Achse zieht und die Schnittpunkte dieser Parallelen mit jenem Kreise bestimmt, welcher den Brennpunkt als Centrum und den Abstand des Punktes P von der Leitlinie als Radius hat. Die Schnittpunkte sind die gesuchten Parabelpunkte.

Quadratur eines Parabelsegmentes.

§ 271. Es sei zunächst der Inhalt der Fläche OMQ zu berechnen, welche vom Parabelbogen OM und den Coordinaten $OQ = y$ und $QM = x$ eines Parabelpunktes M begrenzt wird. Zu diesem Zwecke theile man OQ in n gleiche Theile von der Größe δ und ziehe durch die Theilungspunkte Parallele zur x-Achse bis zum Durchschnitte mit der Parabel. Einem jeden der n Streifen, in welche die Fläche OMQ dadurch zerlegt wird, schreibe man ein Rechteck ein und ein Rechteck um. Dann ergibt sich, wenn $Q_1 M_1 = x_1$, $Q_2 M_2 = x_2$, ... gesetzt wird,

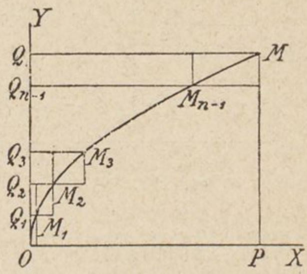


Fig. 210.

$$\delta\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) < OMQ < \delta\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x)$$

oder auch, weil $\delta^2 = 2px_1$, $(2\delta)^2 = 2px_2$, ... $(n\delta)^2 = 2px$ ist,

$$\frac{\delta^3}{2p}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right] < OMQ < \frac{\delta^3}{2p}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right].$$

Es ist nun $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

und $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$,

wovon man sich überzeugt, wenn man in die identische Gleichung $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ der Reihe nach $a = 1, 2, \ldots n$ substituiert und die so erhaltenen Gleichungen addiert.

Man hat also

$$\frac{\delta^3}{2p}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) < OMQ < \frac{\delta^3}{2p}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)$$

oder $\frac{y^3}{6p} - \frac{y^2}{4p}.\delta + \frac{y}{12p}.\delta^2 < OMQ < \frac{y^3}{6p} + \frac{y^2}{4p}.\delta + \frac{y}{12p}.\delta^2$.

Läßt man nun n unendlich zunehmen, so nähern sich die beiden Grenzen, zwischen denen OMQ liegt, dem gemeinschaftlichen Grenzwerte $\frac{y^3}{6p}$. Daraus schließt man

$$OMQ = \frac{y^3}{6p} = \frac{xy}{3} = \frac{1}{3}\,OPMQ,$$

ferner

$$OPM = OPMQ - OMQ = \frac{2\,xy}{3} = \frac{2}{3}\,OPMQ.$$

Zusatz. Die erhaltenen Resultate werden auch häufig auf folgende Art abgeleitet. Man zieht von zwei benachbarten Parabelpunkten M_1, M_2 die

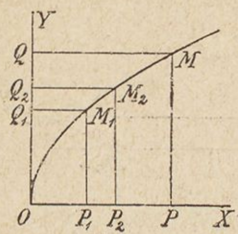


Fig. 211.

Normalen zu den Coordinatenachsen und denkt sich zunächst den Bogen $M_1 M_2$ durch die zugehörige Sehne ersetzt. Man kann nun mittelst der Gleichungen $y_1^2 = 2px_1$ und $y_2^2 = 2px_2$ nachweisen, daſs sich das Trapez $M_1 P_1 P_2 M_2$ von dem doppelten des Trapezes $M_1 M_2 Q_2 Q_1$ beliebig wenig unterscheidet, wenn die Strecke $P_1 P_2$ entsprechend klein gewählt wird u. s. f.

VII. Abschnitt: Über Kegelschnittslinien*) im allgemeinen.

Die Scheitelgleichungen.

§ 272. *a)* Ellipse. Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse geht in die Scheitelgleichung über, wenn man das Coordinatensystem parallel zu sich selbst so verschiebt, daſs der Anfangspunkt in einen Scheitel der Ellipse fällt, z. B. in den Punkt B (Fig. 202). Es ist dann $x_1 = BP = BO + OP = a + x$ und $y_1 = y$. Die Gleichung (3) in § 254 verwandelt sich nun durch die Substitution $x = x_1 - a$ und $y = y_1$ in

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{2x_1}{a} + 1 + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ oder } y_1^2 = \frac{2b^2x_1}{a} - \frac{b^2x_1^2}{a^2}.$$

Wenn man noch x_1, y_1 durch x, y, ferner $\frac{b^2}{a}$ durch p ersetzt, so erhält man die Scheitelgleichung der Ellipse in der folgenden Form:

$$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Zusatz. Für $b = a$ geht diese Gleichung in die Scheitelgleichung des Kreises über (§ 245).

b) Hyperbel. Verschiebt man das Coordinatensystem parallel zu sich selbst, bis der Anfangspunkt in den Scheitel A der Hyperbel (Fig. 208) fällt, so erhält man auf analoge Weise

$$y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

c) Parabel. Die Scheitelgleichung lautet $y^2 = 2px$ (§ 268).

d) Die Gleichung $y^2 = 2px + qx^2$ ist somit die Scheitelgleichung einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel, je nachdem $q < 0$, $q = 0$ oder $q > 0$ ist. Vergleicht man also das Quadrat der Ordinate mit dem Rechtecke aus dem Parameter und der Abscisse, so sind bei der Parabel beide Flächen einander gleichzusetzen (*παραβάλλειν*). Bei der Ellipse geht dem Quadrate im Vergleiche zum Rechtecke an Größe etwas ab (*ἐλλείπειν*), und bei der Hyperbel übertrifft (*ὑπερβάλλειν*) das Quadrat an Größe das Rechteck.

*) Man versteht darunter die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel (§ 281).

Die Polargleichungen.

§ 273. *a)* Ellipse. Wählt man den Brennpunkt F_2 als Pol und den Halbstrahl F_2X als Polarachse (Fig. 202), so findet man

$$r = F_2M = a + \frac{ex}{a},\ x = OP = OF_2 + F_2P = -e + r\cos u.$$

Daraus folgt durch Elimination von x

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos u} = \frac{b^2}{a - e\cos u} = \frac{b^2 : a}{1 - (e:a)\cos u} \text{ oder}$$

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos u},$$

wenn zur Abkürzung $e : a = \varepsilon$ gesetzt wird. Die Zahl ε, welche offenbar stets kleiner als 1 ist, heißt die numerische oder astronomische Excentricität (zum Unterschiede von der linearen Excentricität e).

b) Hyperbel. Es sei F_1 der Pol und F_1X die Polarachse (Fig. 208). Für alle Punkte des ersten Hyperbelzweiges gelten die folgenden Gleichungen:

$$r = F_1M = \frac{ex}{a} - a,\ x = OP = OF_1 + F_1P = e + r\cos u.$$

Daraus folgt

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos u},$$

wenn $e : a = \varepsilon$ gesetzt wird. ε heißt die numerische Excentricität der Hyperbel und ist stets größer als 1.

c) Parabel. Es sei F der Pol und FX die Polarachse (Fig. 209). Dann ist $r = FM = QM = AP = AF + FP = p + r\cos u$, also

$$r = \frac{p}{1 - \cos u}.$$

d) Die Gleichung $r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos u}$ entspricht somit als Polargleichung der Ellipse, der Parabel oder einem Hyperbelzweige, je nachdem $\varepsilon < 1, = 1$ oder > 1 ist.

e) Aufgabe: Den geometrischen Ort der Punkte zu suchen, für welche der Abstand von einem gegebenen Punkte F zum Abstande von einer gegebenen Geraden L_1L ein constantes Verhältnis ε hat.

Auflösung: Es ist (Fig. 209) $r = FM = \varepsilon . QM = \varepsilon(AF + r\cos u)$, also $r = \frac{\varepsilon . AF}{1 - \varepsilon\cos u}$. Bezeichnet man mit p jenen Leitstrahl, welcher dem Polarwinkel $u = R$ entspricht, so ist $p = \varepsilon . AF$, also

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos u}$$

die Polargleichung der gesuchten Linie.

Man erhält also eine Ellipse, eine Parabel oder einen Hyperbelzweig, je nachdem $\varepsilon < 1, = 1$ oder > 1 ist.

Gerade und Kegelschnittslinie.

§ 274. Eine Gerade und eine Kegelschnittslinie haben im allgemeinen zwei Punkte gemeinschaftlich, da der ersteren eine Gleichung des ersten und der letzteren eine Gleichung des zweiten Grades zwischen x und y entspricht. Sind die gemeinschaftlichen Auflösungen der beiden Gleichungen reell und voneinander verschieden, so gibt es wirklich zwei gemeinschaftliche Punkte (Schnittpunkte), und die Gerade heißt eine Secante des Kegelschnittes. Wenn die Auflösungen reell und einander gleich sind, so haben die beiden Linien zwei zusammenfallende Punkte oder also einen einzigen Punkt (Berührungspunkt) gemeinschaftlich, und die Gerade heißt eine Tangente des Kegelschnittes. Man kann sich dieselbe aus der Secante dadurch entstanden denken, dass die letztere um einen ihrer Schnittpunkte mit der Curve solange gedreht wird, bis auch der andere mit ihm zusammenfällt. Sind die Auflösungen complex oder imaginär, so entsprechen der Geraden und dem Kegelschnitte keine gemeinschaftlichen Punkte.

Jene Gerade, welche normal zu einer Tangente durch den Berührungspunkt derselben gezogen wird, heißt eine Normale der Curve.

Unter dem Winkel, welchen zwei Curven in einem Schnittpunkte bilden (unter welchem sie sich schneiden), versteht man den Winkel der beiden Tangenten, welche im Schnittpunkte an die Curven gelegt werden. Winkel einer Geraden mit einer Curve.

Zusatz. Um die gemeinschaftlichen Punkte der Geraden $y = kx + l$ und der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ zu bestimmen, substituiere man den Wert von y aus der ersten Gleichung in die zweite und erhält dann

$$(b^2 - a^2k^2)\,x^2 - 2\,a^2klx = a^2\,(b^2 + l^2) \ldots (1)$$

oder für $x = \frac{1}{z}$

$$a^2\,(b^2 + l^2)\,z^2 + 2\,a^2klz = b^2 - a^2k^2 \ \ldots \ (2).$$

Wenn $b^2 - a^2k^2 \gtrless 0$ ist, so sind auch die beiden Wurzeln der Gleichung (2) von Null verschieden. Dreht man jedoch die Gerade so, dass $b^2 - a^2k^2 = 0$ wird (§ 266), so wird die eine Wurzel der Gleichung (2) $= 0$ und die entsprechende Wurzel der Gleichung (1) unendlich groß. Somit hat jede zu einer Asymptote parallele Gerade mit der Hyperbel einen unendlich entfernten und einen in endlicher Entfernung liegenden Punkt gemeinschaftlich; sie ist als Secante und nicht etwa als Tangente aufzufassen.

Der Fall $b^2 - a^2k^2 = 0$ und $l = 0$ ist bereits im § 266 besprochen worden.

Auf analoge Weise findet man, dass eine Gerade, welche zur Achse einer Parabel parallel ist, mit der letzteren einen unendlich entfernten und einen in endlicher Entfernung liegenden Punkt gemeinschaftlich hat.

Gleichungen der Tangenten.

§ 275. *a)* Ellipse. Es seien M_1 (x_1, y_1) und M_2 (x_2, y_2) zwei Punkte der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, also

$$\left.\begin{aligned} b^2x_1^2 + a^2y_1^2 &= a^2b^2 \\ \text{und } b^2x_2^2 + a^2y_2^2 &= a^2b^2 \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

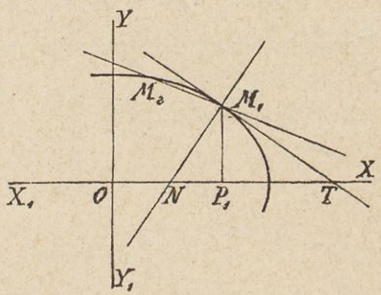


Fig. 212.

Die Gleichung der durch die Punkte M_1, M_2 bestimmten Secante lautet (§ 236 *c*)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

dieselbe kann mittelst der Gleichungen (1) in folgender Weise umgeformt werden. Es ist

$$b^2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + a^2(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0,$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}, \text{ somit}$$

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}(x - x_1)$$

die Gleichung der Secante $M_1 M_2$.

Läßt man nun M_2 mit M_1 zusammenfallen, also x_2 in x_1 und y_2 in y_1 übergehen, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

oder nach einigen Transformationen in

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2.$$

Dies ist die Gleichung der Ellipsentangente, welche dem Berührungspunkte (x_1, y_1) entspricht.

Zusatz. Durch die Substitution $b = a$ erhält man

$$xx_1 + yy_1 = a^2$$

als Gleichung der Tangente, welche den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ im Punkte (x_1, y_1) berührt.

b) Hyperbel. Auf analoge Weise wie in *a)* findet man, daſs der Tangente, welche die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ im Punkte (x_1, y_1) berührt, die Gleichung

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$$

entspricht.

c) Parabel. Die Gleichung der Tangente, welche die Parabel $y^2 = 2px$ im Punkte (x_1, y_1) berührt, lautet

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Gleichungen der Normalen.

§ 276. *a)* Ellipse. Ist M_1 (x_1, y_1) der Berührungspunkt, so hat die Tangente den Richtungscoefficienten $-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$, somit die durch M_1 gezogene Normale den Richtungscoefficienten $\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$. Daher lautet die Gleichung der Normale (§ 236 *b*)

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

$$b) \text{ Hyperbel. } y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

$$c) \text{ Parabel. } y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Lehrsätze über Tangenten und Normalen.

§ 277. *a)* Ellipse. Zieht man durch irgend einen Punkt einer Ellipse die Tangente, die Normale und die beiden Leitstrahlen, so halbiert die Normale den hohlen Winkel der beiden Leitstrahlen und die Tangente den Nebenwinkel.

Beweis. Den beiden Geraden, welche sich durch die Leitstrahlen $r_1 = F_1 M_1$ und $r_2 = F_2 M_1$ legen lassen, entsprechen die Gleichungen

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{e - x_1}(x - x_1) \text{ und } y - y_1 = \frac{y_1}{e + x_1}(x - x_1).$$

Daher ist $tg\,(r_2 n) = tg\,[(xn) - (xr_2)] = \frac{tg\,(xn) - tg\,(xr_2)}{1 + tg\,(xn)\,tg\,(xr_2)} =$

$$\frac{\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} - \frac{y_1}{e + x_1}}{1 + \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \cdot \frac{y_1}{e + x_1}} = \frac{a^2 y_1 (e + x_1) - b^2 x_1 y_1}{b^2 x_1 (e + x_1) + a^2 y_1^2} = \frac{a^2 e y_1 + e^2 x_1 y_1}{b^2 e x_1 + a^2 b^2} = \frac{e y_1}{b^2}.$$

Ebenso findet man $tg\,(n r_1) = \frac{e y_1}{b^2}$. Daraus folgt $(r_2 n) = (n r_1)$, weil nur hohle Winkel in Betracht kommen.

Der zweite Theil der Behauptung läſst sich leicht planimetrisch begründen.

b) Hyperbel. Zieht man durch irgend einen Punkt einer Hyperbel die Tangente, die Normale und die beiden Leitstrahlen, so halbiert die Tangente den hohlen Winkel der beiden Leitstrahlen und die Normale den Nebenwinkel.

Beweis analog wie in *a)*.

c) Parabel. Zieht man durch irgend einen Punkt einer Parabel die Tangente, die Normale, den Leitstrahl und den zur Parabelachse direct parallelen Halbstrahl, so wird der von den beiden letzteren gebildete hohle Winkel durch die Normale und der Nebenwinkel durch die Tangente halbiert.

Beweis. Dem Leitstrahle r und der Normale n entsprechen die Gleichungen:

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{\frac{p}{2} - x_1}(x - x_1) \text{ und } y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Daraus erhält man $tg\,(rn) = \frac{y_1}{p}$. Bezeichnet man ferner den zur Parabelachse direct parallelen Halbstrahl mit s, so ist $(ns) = (nx)$, also $tg\,(ns) = -tg\,(xn) = \frac{y_1}{p}$. Hieraus folgt $(rn) = (ns)$.

Die Berührungsgrößen.

§ 278. Zieht man durch einen Punkt M_1 einer Curve die Ordinate, die Tangente und die Normale und bezeichnet die Fußpunkte dieser drei Geraden in der x-Achse der Reihe nach mit P_1, T und N (Fig. 212), so heißt $M_1 T$ die Tangente, $P_1 T$ die Subtangente, $M_1 N$ die Normale und $P_1 N$ die Subnormale. Alle vier Strecken werden die dem Punkte M_1 entsprechenden Berührungsgrößen genannt.

a) Ellipse. Die Coordinaten OT und 0 des Punktes T müssen die Tangentengleichung $b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2$ befriedigen. Hieraus folgt $OT = \frac{a^2}{x_1}$, $P_1 T = OT - OP_1 = \frac{a^2}{x_1} - x_1$, $M_1 T = \sqrt{y_1{}^2 + \left(\frac{a^2}{x_1} - x_1\right)^2}$. Ebenso erhält man mittelst der Normalgleichung $ON = x_1 - \frac{b^2}{a^2} x_1$, also

$$P_1 N = -\frac{b^2}{a^2} x_1, \text{ ferner } M_1 N = \sqrt{y_1^2 + \frac{b^4}{a^4} x_1^2}.$$

b) Hyperbel. $P_1 T = \frac{a^2}{x_1} - x_1$, $P_1 N = \frac{b^2}{a^2} x_1$ u. s. f.

c) Parabel. $P_1 T = -2x_1$, $P_1 N = p$ u. s. f.

Aufgaben.

§ 279. **Rechnungsaufgaben.** *a)* Man soll die Gleichungen der Tangenten ableiten, welche sich vom Punkte $A\,(u, v)$ an die Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ ziehen lassen.

Auflösung. Die Gleichung irgend einer Tangente der gegebenen Ellipse lautet $b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2$. Zwischen den Unbekannten x_1, y_1 besteht zunächst die Gleichung

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

weil der Punkt (x_1, y_1) der Ellipse angehört. Da ferner der Punkt A in der

Tangente liegen soll, so müssen seine Coordinaten die Gleichung derselben befriedigen, d. h. es muss

$$b^2 u x_1 + a^2 v y_1 = a^2 b^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

sein. Aus (1) und (2) erhält man

$$x_1 = \frac{a^2(b^2 u \pm v w)}{b^2 u^2 + a^2 v^2}, \; y_1 = \frac{b^2 (a^2 v \mp u w)}{b^2 u^2 + a^2 v^2},$$

worin zur Abkürzung $\sqrt{b^2 u^2 + a^2 v^2 - a^2 b^2} = w$ gesetzt ist. Wenn w reell ist, so sind die gesuchten Gleichungen in

$$(b^2 u \pm v w)\, x + (a^2 v \mp u w)\, y = b^2 u^2 + a^2 v^2$$

enthalten. Von den doppelten Vorzeichen sind gleichzeitig die oberen oder die unteren zu nehmen.

b) Wie lautet die Gleichung jener zur Parabel $y^2 = 2px$ gehörigen Normale, welche zur Geraden $y = kx + l$ parallel ist?

Auflösung. Die Gleichung einer Normale der gegebenen Parabel lautet: $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$. Zwischen den Unbekannten x_1, y_1 bestehen die Gleichungen

$$y_1^2 = 2px_1 \text{ und } -\frac{y_1}{p} = k,$$

weil der Punkt (x_1, y_1) der Parabel angehört, und weil die Normale zur Geraden parallel sein soll. Daher ist $y_1 = -kp$, $x_1 = \frac{k^2 p}{2}$; die gesuchte Gleichung lautet also:

$$y = kx - kp\left(1 + \frac{k^2}{2}\right).$$

In derselben Weise lassen sich die analogen Aufgaben für die übrigen Kegelschnittslinien behandeln.

§ 280. Constructionsaufgaben. *a)* Durch einen gegebenen Punkt A an eine gegebene Ellipse Tangenten zu ziehen.

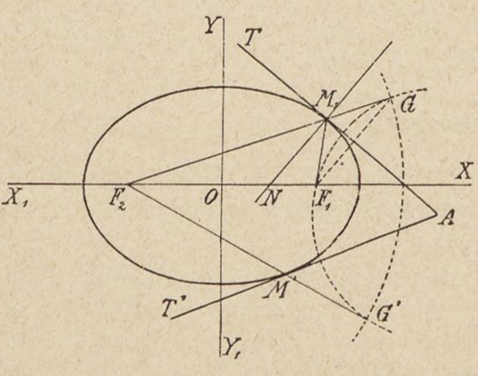


Fig. 213.

Analysis. Verlängert man den Leitstrahl $F_2 M_1$ des Berührungspunktes M_1 um $M_1 G = F_1 M_1$, so ist die Tangente AT die Symmetrale der Strecke $F_1 G$. Der Punkt G liegt daher sowohl in dem Kreise mit dem Centrum F_2 und dem Radius $2a$ als auch in dem Kreise mit dem Centrum A und dem Radius AF_1.

Construction. Man construiere die beiden Durchschnittspunkte G und

G' der in der Analysis bezeichneten Kreise und erhält hierauf die gesuchten Tangenten als Symmetralen der Strecken $F_1 G$ und $F_1 G'$.

Der Beweis ergibt sich aus § 277 *a*.

Determination. Man erhält zwei Tangenten, eine oder keine Tangente, je nachdem A außerhalb der Ellipse liegt, derselben angehört oder innerhalb derselben liegt.

b) Durch einen gegebenen Punkt A an eine gegebene Hyperbel Tangenten zu ziehen.

Analysis. Verkürzt man den Leitstrahl $F_2 M_1$ des Berührungspunktes M_1 um $G M_1 = F_1 M_1$, so ist die Tangente AT die Symmetrale der Strecke $F_1 G$.

Daraus ergibt sich sofort die Construction und der Beweis (§ 277 *b*).

Determination. Man erhält zwei Tangenten, eine Tangente oder keine Tangente, je nachdem A zwischen den beiden Hyperbelzweigen liegt, der Hyperbel angehört oder auf der concaven Seite eines Hyperbelzweiges liegt.

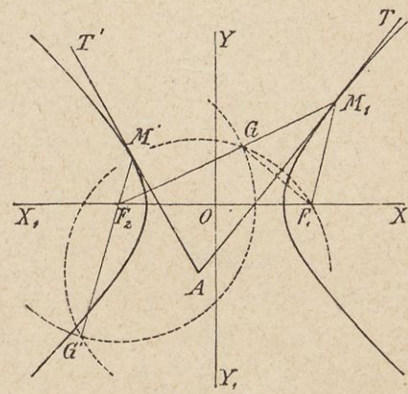


Fig. 214.

c) Durch einen gegebenen Punkt A an eine gegebene Parabel Tangenten zu ziehen.

Analysis. Zieht man durch den Berührungspunkt M_1 die Parallele zur Parabelachse, so schneidet jene die Leitlinie in einem Punkte G, welcher mit F in Bezug auf die Tangente AT symmetrisch liegt.

Construction. Man beschreibt den Kreis mit dem Centrum A und dem Radius AF und construiert die Symmetralen der Strecken FG und FG', wenn G und G' die Schnittpunkte jenes Kreises mit der Leitlinie bedeuten.

Der Beweis (§ 277 *c*) und die Determination sind leicht zu finden.

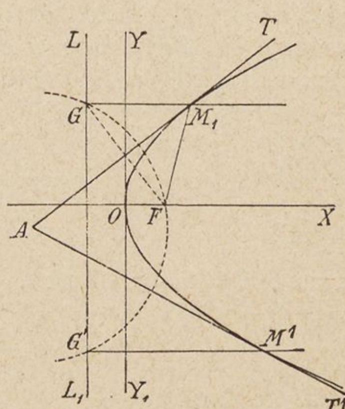


Fig. 215.

d) An eine gegebene Ellipse Tangenten zu ziehen, welche zu einer gegebenen Geraden parallel sind.

Auflösung. Man ziehe durch den Brennpunkt F_1 die Normale zur gegebenen Geraden und bestimme die Schnittpunkte G, G' jener Normale mit einem Kreise, welcher F_2 als Centrum und $2a$ als Radius hat. Die Symmetralen der Strecken $F_1 G$ und $F_1 G'$ sind die gesuchten Tangenten.

Analog sind die entsprechenden Aufgaben für die Hyperbel und die Parabel zu behandeln.

Ebene Kegelschnitte.

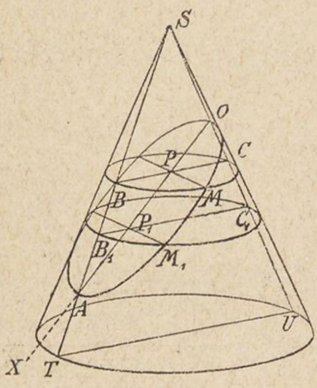


Fig. 216.

§ 281. Es sei STU (Fig. 216, 217 und 218) ein Achsenschnitt eines geraden Kegels, und man lege durch einen Punkt O der Seitenlinie SU eine Schnittebene α normal zum Achsenschnitte. Die Schnittfigur beziehe man auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, welches O als Anfangspunkt und die Durchschnittslinie der Ebenen α und STU als Abscissenachse hat. In der letzteren bestimme man die Richtung von O nach X als positiv. Legt man nun durch zwei beliebige Punkte M und M_1, welche dem Umfange der betrachteten Schnittfigur angehören, Schnittebenen parallel zur Ebene des Leitkreises, so schneiden dieselben den Kegel in zwei Kreisen BMC und $B_1 M_1 C_1$ und die x-Achse in zwei Punkten P und P_1. Dadurch erhält man die rechtwinkligen Coordinaten $OP = x$, $PM = y$ und $OP_1 = x_1$, $P_1 M_1 = y_1$ der Punkte M und M_1 (§ 151 *e*).

Um die Gleichung des betrachteten Kegelschnittes abzuleiten, stellt man zunächst die Gleichungen

$$y^2 = BP.PC \text{ und } y_1^2 = B_1 P_1 . P_1 C_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(§ 100) auf und unterscheidet hierauf die drei wesentlich verschiedenen Fälle, je nachdem die Schnittebene α den Halbstrahl ST (Fig. 216) oder dessen Ergänzung ST' (Fig. 217) trifft oder zu ST parallel ist (Fig. 218).

a) Es ist $\triangle\, ABP \sim AB_1 P_1$ und $\triangle\, OPC \sim OP_1 C_1$, somit $BP : B_1 P_1 = PA : P_1 A$ und $PC : P_1 C_1 = OP : OP_1$. Durch Multiplication dieser beiden Proportionen erhält man

$$BP.PC : B_1 P_1 . P_1 C_1 = PA . OP : P_1 A . OP_1 \text{ oder}$$

$$y^2 : y_1^2 = x\,(2a - x) : x_1\,(2a - x_1),$$

wenn $OA = 2a$ gesetzt wird. Daraus folgt

$$\frac{y^2}{x\,(2a - x)} = \frac{y_1^2}{x_1 (2a - x_1)} = k,$$

d. h. der Quotient $\frac{y^2}{x\,(2a - x)}$ hat für alle Punkte der betrachteten Kegelschnittslinie denselben Wert k. Also ist

$$y^2 = kx\,(2a - x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die gesuchte Gleichung. Da für alle Punkte der Kegelschnittslinie $y^2 > 0$, $x > 0$ und $2a - x > 0$ ist, so ist auch $k > 0$. Man kann daher stets eine reelle Zahl

b so bestimmen, daſs $\frac{b^2}{a^2} = k$ wird. Durch diese Substitution verwandelt sich (2) in die Scheitelgleichung einer Ellipse.

b) In diesem Falle schneidet die Ebene α auch den zweiten Theil der vollständigen Kegelfläche, welche dem gegebenen geraden Kegel entspricht. Setzt man $AO = 2a$, so erhält man auf analoge Weise wie in *a)* die Gleichung

$$y^2 = kx\,(2a + x),$$

in welcher k stets positiv ist. Dies ist offenbar die Scheitelgleichung einer Hyperbel.

Man überzeugt sich leicht, daſs die gefundene Gleichung auch für jenen Theil der Schnittlinie besteht, welcher auf dem zweiten Theile der Kegelfläche liegt.

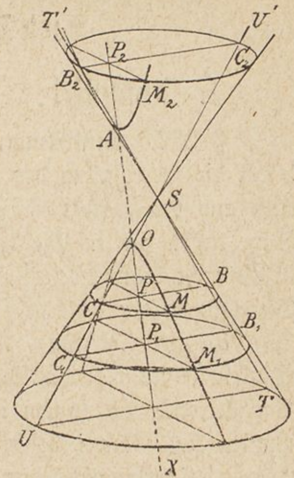


Fig. 217.

c) Man findet

$$\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{BP.PC}{B_1P_1.P_1C_1} = \frac{PC}{P_1C_1} = \frac{OP}{OP_1} = \frac{x}{x_1}.$$

Daraus folgt $y^2 = kx$, worin k eine positive Zahl bedeutet, d. i. also die Scheitelgleichung einer Parabel.

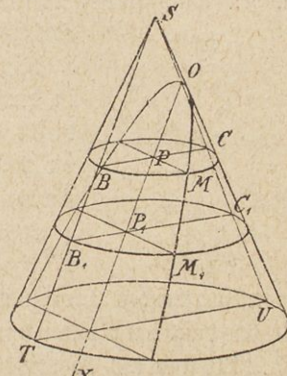


Fig. 218.

Zusätze. 1. Wenn die Schnittebene α durch den Scheitel S gelegt wird, so erhält man als Schnittfiguren einen Punkt, zwei sich schneidende Gerade oder eine Gerade.

2. Der schiefe Kegel liefert ebendieselben Arten von Schnittfiguren wie der gerade.

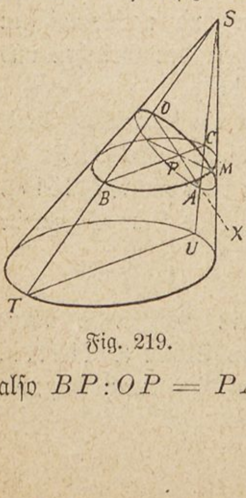


Fig. 219.

3. Bemerkenswert ist, daſs der schiefe Kegel nicht nur durch die zur Grundfläche parallelen Ebenen, sondern auch durch eine zweite Schar von parallelen Ebenen in Kreisen geschnitten wird. Um dies zu beweisen, betrachten wir einen schiefen Kegel (Fig. 219) mit dem charakteristischen Dreiecke STU und schneiden denselben durch zwei zu diesem Dreiecke normale Ebenen BMC und OMA. Der erste Schnitt sei zur Grundfläche parallel, und der zweite (Wechselschnitt genannt) schneide die Seiten des Dreieckes STU so, daſs $\sphericalangle\, OAS = SBC$ ist. Dann ist $y^2 = \overline{PM}^2 = BP.PC$, ferner $\triangle BPO \backsim APC$, also $BP:OP = PA:PC$. Daraus folgt $BP.PC = OP.PA$, somit

$$y^2 = OP.PA = x\,(2a - x).$$

Sphärische Trigonometrie.

I. Abschnitt: Auflösung der sphärischen Dreiecke.

§ 282. Einleitung. *a*) Den Gegenstand der sphärischen Trigonometrie bildet die Berechnung der unbekannten Seiten und Winkel eines sphärischen Dreieckes aus den gegebenen Bestimmungsstücken desselben. Die hiezu erforderlichen Sätze lassen sich in Gleichungen ausdrücken, welche vermöge der Natur der hier in Betracht kommenden Größen nur Winkelfunctionen enthalten. Die gegenseitigen Beziehungen der letzteren sind bereits in der Goniometrie auseinandergesetzt worden.

b) Zur Ableitung der Fundamentalgleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes benützt man das rechtwinklige Parallelcoordinatensystem im Raume (Fig. 220), durch welches die Lage eines Punktes im Raume bestimmt wird. Dieses Coordinatensystem besteht aus drei Ebenen (Coordinatenebenen), von denen jede zu den beiden anderen normal ist. In den Schnittlinien dieser Ebenen (den Coordinatenachsen) nimmt man gewisse Richtungen als positiv an, etwa von X_1 nach X in der x-Achse, von Y_1 nach Y in der y-Achse und von Z_1 nach Z in der z-Achse. Die Lage eines Punktes M in Bezug auf dieses Coordinatensystem ist dann eindeutig bestimmt, wenn die Abstände (Coordinaten) des Punktes von den Coordinatenebenen dem absoluten Werte und dem Vorzeichen nach gegeben sind. Das Vorzeichen einer Coordinate (z. B. von $NM = z$) ist positiv oder negativ, je nach dem die Richtung von der entsprechenden Coordinatenebene (XY) gegen den betrachteten Punkt (M) hin mit der positiven Richtung in der entsprechenden Achse übereinstimmt oder nicht. In Fig. 220 sind als Coordinaten des Punktes M die Strecken $OP = x$, $PN = y$ und $NM = z$ angenommen.

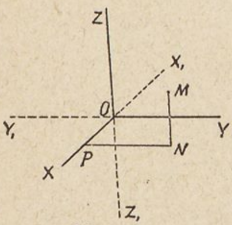


Fig. 220.

c) Die sphärische Trigonometrie, eines der wichtigsten und nothwendigsten Hilfsmittel der Astronomie, wurde schon im Alterthum von den Griechen und später von den Arabern ausgebildet und gepflegt (Sieh § 119).

§ 283. Das rechtwinklige sphärische Dreieck. Hat ein sphärisches Dreieck drei rechte Winkel, so sind auch seine drei Seiten rechtwinklig (§ 151, Folgesatz). Hat es zwei rechte Winkel, so sind auch die Gegenseiten rechtwinklig (§ 151 *e*), und der dritte Winkel hat dieselbe Maßzahl (in Graden), wie seine Gegenseite (§ 196).

Zugleich gelten die Umkehrungen.

Ist nur e i n Winkel eines sphärischen Dreieckes ein Rechter, so nennt man seine Gegenseite H y p o t e n u s e und die beiden anderen Seiten K a t h e t e n. In diesem Falle sind alle Seiten schiefwinklig, wovon man sich durch folgende Betrachtung überzeugen kann.

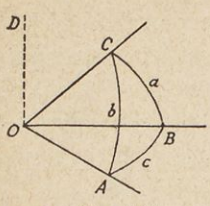


Fig. 221.

Wäre $AOB \perp BOC$ ($\beta = R$) und $AOB = R$ ($c = R$), so hätte man (nach § 151 *d*) $OA \perp OBC$, also $b = R$ und $\gamma = R$ (§ 151 *b*).

Wäre hingegen $\beta = R$ und $b = R$, so hätte man, wenn $OD \perp OB$ in BOC errichtet wird, $OD \perp AOB$ (§ 151 *d*), also $OD \perp OA$. Daraus folgt $OA \perp BOC$, daher $c = R$ und $\gamma = R$. Wenn OD mit OC zusammenfällt, so ist diese Schlussweise nicht zulässig; dann ist jedoch $a = R$ und $\alpha = R$.

Im Nachfolgenden wird unter einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke stets nur ein solches verstanden, welches einen rechten Winkel und außerdem nur schiefwinklige Umfangsstücke besitzt. Das Polardreieck zu einem rechtwinkligen Dreiecke hat eine rechtwinklige Seite und außerdem durchaus schiefwinklige Umfangsstücke. Ein solches Dreieck wird Quadrantendreieck genannt.

§ 284. Trigonometrische Lehrsätze für das rechtwinklige sphärische Dreieck.

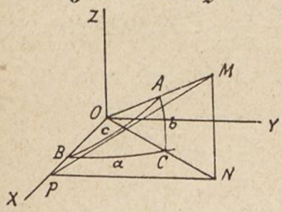


Fig. 222.

ABC (Fig. 222) sei das gegebene rechtwinklige sphärische Dreieck, und man bezeichne mit c die Hypotenuse, mit a und b die beiden Katheten, ferner mit α und β deren Gegenwinkel. Das dem sphärischen Dreiecke entsprechende Dreikant $OABC$ lege man so in ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dass OB in den Halbstrahl OX, BOC in die Halbebene XYX_1 und der Punkt A mit dem Halbstrahle OZ auf die gleiche Seite der Ebene XOY fällt. (Wäre die letzte Bedingung nicht erfüllbar, so denke man sich das Dreikant durch seine Scheitelecke ersetzt).

Ist nun M ein Punkt des Halbstrahles OA mit den Coordinaten $OP = x$, $PN = y$, $NM = z$ und dem Leitstrahle $OM = r$, so erhält man:

a) $x = r \cos c$ und $x = ON \cos a = r \cos b \cos a$. Daraus folgt

$$\cos c = \cos a \cos b \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

b) $y = ON \sin a = r \cos b \sin a$ und $y = PM \cos\beta = r \sin c \cos\beta$; also $\cos b \sin a = \sin c \cos\beta$. Daraus folgt durch Division mit $\cos a \cos b = \cos c$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \operatorname{tg} c \cos\beta, \\ \text{und analog } \operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} c \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

c) $z = r \sin b$ und $z = PM \sin\beta = r \sin c \sin\beta$. Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \sin b &= \sin c \sin\beta, \\ \text{und analog } \sin a &= \sin c \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Anmerkung. Die vorausgehenden trigonometrischen Gleichungen gelten allgemein, da die für die Coordinaten von M aufgestellten Ausdrücke auch dem Vorzeichen nach stets Geltung haben, in welchem oberhalb XOY liegenden Octanten des Raumes man auch M annehmen mag. (Hiebei ist r als absolute Größe anzusehen.) Außer den bisher abgeleiteten Relationen zwischen der Hypotenuse und a) den beiden Katheten, b) einer Kathete und dem derselben anliegenden schiefen Winkel, c) einer Kathete und deren Gegenwinkel benöthigt man noch die Relationen zwischen d) der Hypotenuse und den beiden schiefen Winkeln, e) zwischen den beiden Katheten und einem schiefen Winkel und f) einer Kathete und den beiden schiefen Winkeln. Diese weiteren Relationen erhält man aus den vorausgehenden durch folgende Rechnung:

d) Man eliminiere a und b aus den vorhergehenden Gleichungen, indem man das Product der Gleichungen (3) durch die Gleichung (1) dividiert. Man erhält

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \sin^2 c \sin \alpha \sin \beta : \cos c\,;$$

andererseits aus den Gleichungen (2)

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \operatorname{tg}^2 c \cos \alpha \cos \beta\,.$$

Daraus folgt $\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$ . . . . (4).

e) und f) Man eliminiere c aus den obigen Gleichungen, indem man $\operatorname{tg} c$ aus (1) und einer Gleichung (3) berechnet und in eine Gleichung (2) substituiert Es ist $\operatorname{tg} c = \dfrac{\sin c}{\cos c} = \dfrac{\sin b}{\sin \beta \cos a \cos b} = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin \beta \cos a}$. Je nachdem man diesen Wert in die erste oder zweite Gleichung (2) substituiert, erhält man

$$\left.\begin{array}{ll} & \operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} \beta \\ \text{und analog} & \operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} \alpha \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (5),$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{oder} & \cos \alpha = \cos a \sin \beta \\ \text{und analog} & \cos \beta = \cos b \sin \alpha \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ (6).$$

Zusätze. 1. Die vorausgehenden zehn Gleichungen enthalten alle möglichen Combinationen zwischen je dreien der fünf Umfangsstücke a, b, c, α, β. Man überzeugt sich leicht nachträglich, dass sie auch für zwei- oder dreirechtwinklige Dreiecke Geltung haben, wenn man sie zur Vermeidung von Unbestimmtheiten zuvor derart transformiert, dass alle Functionen, welche Null werden können, in den Zähler kommen, wobei die Tangente und Cotangente als Quotienten von Sinus und Cosinus einzuführen sind. Trotzdem sind die erhaltenen trigonometrischen Gleichungen im allgemeinen zur Auflösung von zwei- und dreirechtwinkligen Dreiecken nicht geeignet, aber auch nicht nothwendig.

2. Die Gleichungen (1) bis (6) lassen sich auf folgende Form bringen:

$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta = \sin (R - a) \sin (R - b)$ aus (4) und (1);
$\cos (R - a) = \operatorname{cotg} (R - b) \operatorname{cotg} \beta = \sin c \sin \alpha$ aus (5) und (3)
$\cos (R - b) = \operatorname{cotg} (R - a) \operatorname{cotg} \alpha = \sin c \sin \beta$ aus (5) und (3);
$\cos \alpha = \operatorname{cotg} (R - b) \operatorname{cotg} c = \sin (R - a) \sin \beta$ aus (2) und (6);
$\cos \beta = \operatorname{cotg} (R - a) \operatorname{cotg} c = \sin (R - b) \sin \alpha$ aus (2) und (6).

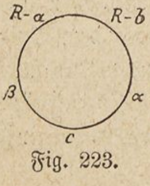


Fig. 223.

Daraus ergibt sich die folgende von Napier (spr. Neper) aufgestellte Gedächtnisregel: Man schreibe mit Übergehung des rechten Winkels die Umfangsstücke des rechtwinkligen Dreieckes an einem Kreise in jener Aufeinanderfolge, welche sie im Dreiecke haben, ersetze jedoch die Katheten durch ihre Complemente. Dann ist der

Cosinus eines jeden Stückes (am Kreise) gleich dem Producte der Cotangenten der Nachbarstücke und auch gleich dem Producte der Sinus der nicht anliegenden Stücke. Um z. B. die Relation zwischen α, β und b zu erhalten, betrachten wir β als das gesuchte Stück, also α und b als die nicht anliegenden Stücke. Man erhält $\cos\beta = \sin(R - b)\sin\alpha$, wie oben.

3. Aus der ersten Gleichung (6) folgt, dass a und α stets gleich bezeichnet sind. Jede Kathete und ihr Gegenwinkel sind daher entweder gleichzeitig spitz- oder gleichzeitig stumpfwinklig; oder für $a \gtrless R$ ist entsprechend $\alpha \gtrless R$, und umgekehrt.

4. Aus den Gleichungen (3) folgt $\sin a < \sin c$. Die Hypotenuse liegt also ihrer Größe nach zwischen jeder Kathete und deren Supplemente, oder

$$a \gtrless c \gtrless 2R - a.$$

Wenn α schiefwinklig ist, kann c weder gleich a noch gleich $2R - a$ sein. Analoges gilt bezüglich der Kathete b.

5. Die Formeln für das Quadrantendreieck mit den Seiten a', b', R und den Winkeln α', β', γ' erhält man aus den obigen zehn Gleichungen durch die Substitutionen $a = 2R - \alpha'$, $b = 2R - \beta'$ u. s. w.

§ 285. Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke. Zur Bestimmung eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes bedarf man (außer dem rechten Winkel noch) zweier Umfangsstücke. Es ergeben sich demnach sechs verschiedene Auflösungsfälle, welche im Nachfolgenden in jener Ordnung angegeben werden, in welcher sie aus den Congruenzsätzen folgen.

1. Gegeben: Die beiden Katheten a und b.

Auflösung: $\cos c = \cos a \cos b$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$.

2. Gegeben: Eine Kathete und der anliegende schiefe Winkel z. B. a und β.

Auflösung: $\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos\beta}$, $\cos\alpha = \cos a \sin\beta$.

3. Gegeben: Eine Kathete und die Hypotenuse, z. B. a und c.

Auflösung: $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$, $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$, $\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$.

Wenn $a \gtrless c \gtrless 2R - a$ ist (§ 284, 4. Zusatz), so ist die Aufgabe eindeutig bestimmt. Denn die für $\cos b$, $\sin\alpha$ und $\cos\beta$ erhaltenen Quotienten sind dann ihrem absoluten Werte nach < 1, und α muss $\gtrless R$ genommen werden, je nachdem $a \gtrless R$ ist. Aus $c = a$ würde $\alpha = R$ folgen und daraus $a = c = R$, während b und β unbestimmt bleiben. Das gleiche Resultat ergibt sich aus der Annahme $c = 2R - a$, wenn das der Seite c anliegende Nebendreieck benützt wird.

4. Gegeben: Die Hypotenuse und ein (schiefer) Winkel, z. B. c und α.

Auflösung: $\sin a = \sin c \sin \alpha$, $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha$, $\operatorname{cotg} \beta = \cos c \operatorname{tg} \alpha$.

Für a ist der entprechende spitze oder stumpfe Winkel zu nehmen, je nachdem $\alpha < R$ oder $> R$ ist.

5. Gegeben: Eine Kathete und ihr Gegenwinkel z. B. b und β.

Auflösung. $\sin c = \frac{\sin b}{\sin \beta}$, $\sin a = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} \beta}$, $\sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos b}$.

Für $b = \beta$ erhält man aus diesen Gleichungen $c = R$, $a = R$, $\alpha = R$. (Dieses Resultat folgt auch direct aus den beiden für z aufgestellten Gleichungen in § 284 c und aus § 283.)

Sind b und β verschieden, so muss entweder $b < \beta < R$ oder $b > \beta > R$ sein, wenn ein Dreieck mit den gegebenen Umfangsstücken vorhanden sein soll; nur dann sind die rechts stehenden Quotienten in den obigen drei Gleichungen < 1. Man erhält in diesem Falle zwei Auflösungen, indem man etwa die beiden Werte von c aus der ersten Gleichung berechnet und hierauf nach dem dritten oder vierten Auflösungsfalle vorgeht.

6. Gegeben: Die beiden Winkel α und β.

Auflösung: $\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \cot \beta$, $\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$, $\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$.

Zusätze. 1. Beispiel zum dritten Auflösungsfalle: $c = 72^0\ 56'\ 30''$, $\alpha = 127^0\ 56'\ 36'' = 2R - 52^0\ 3'\ 24''$.

Num.	Log.	Num.	Log.	Num.	Log.
$\cos c$	$9{\cdot}46737_5$	$\sin \alpha$	$9{\cdot}89687$	$\operatorname{tg} \alpha$	$_n10{\cdot}10807_4$
$\cos \alpha$	$_n9{\cdot}78879_2$	$\sin c$	$9{\cdot}98046$	$\operatorname{tg} c$	$10{\cdot}51308_5$
$\cos b$	$_n9{\cdot}67858_3$	$\sin a$	$9{\cdot}91641$	$\cos \beta$	$_n9{\cdot}59498_9$

$b = 2R - 61^0\ 30'\ 20'' = 118^0\ 29'\ 40''$,
$a = 2R - 55^0\ 34'\ 46'' = 124^0\ 25'\ 14''$ (weil $\alpha > R$),
$\beta = 2R - 66^0\ 49'\ 30'' = 113^0\ 10'\ 30''$.

Controle: $\log \cos \beta = \log \cos b + \log \sin \alpha$.

2. Man beachte, dass für jedes gegebene Umfangsstück stets drei Logarithmen seiner Winkelfunctionen aufzuschlagen sind. In jenen Fällen, in welchen die Functionen stumpfer Winkel negativ werden, rechnet man nur mit dem absoluten Werte, d. h. man ersetzt den stumpfen Winkel durch sein Supplement, bezeichnet jedoch den entsprechenden Logarithmus durch ein vorgesetztes n. Nach der Regel für die Multiplication oder Division relativer Zahlen entscheidet man hierauf, ob das Product (oder der Quotient) einen positiven oder negativen Wert hat. Zur Controle der Rechnung benütze man die Gleichung zwischen den Functionen der drei gesuchten Umfangsstücke.

§ 286. Trigonometrische Lehrsätze für das schiefwinklige Dreieck.

a) Sinussatz: In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus zweier Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Beweis: In dem sphärischen Dreiecke ABC bezeichne man die Seiten mit a, b, c, ihre Gegenwinkel bezw. mit α, β, γ, die Höhe zur Seite c mit h und die Abschnitte, in welche c durch den Fußpunkt der Höhe zerlegt wird, mit p und q. Man erhält dann

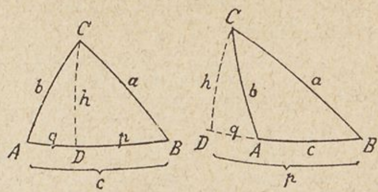


Fig. 224.

$$\sin h = \sin b \sin \alpha = \sin a \sin \beta,$$

also $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$.

Allgemein $\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.

b) Cosinussatz für eine Seite: In jedem sphärischen Dreiecke erhält man den Cosinus einer Seite, wenn man zum Producte aus den Cosinus der beiden anderen Seiten das Product aus deren Sinus und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels addiert.

Beweis: Aus dem links stehenden Dreiecke in Fig. 224 findet man

$$\cos a = \cos h \cos p = \cos h \cos (c - q) = \cos h \cos c \cos q + \cos h \sin c \sin q.$$

Nun ist $\cos h \cos q = \cos b$, ferner $\operatorname{tg} q = \operatorname{tg} b \cos \alpha$. Durch Multiplication dieser Gleichungen erhält man

$$\cos h \sin q = \sin b \cos \alpha.$$ Daher ist schließlich

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Analog wird der Beweis geführt, wenn h die Verlängerung von c trifft. Durch cyclische Vertauschung der Buchstaben erhält man aus der letzten Gleichung die Gleichungen für $\cos b$ und $\cos c$.

c) Cosinussatz für einen Winkel: In jedem sphärischen Dreiecke erhält man den Cosinus eines Winkels, indem man das Product aus den Cosinus der beiden anderen Winkel vom Producte aus deren Sinus und dem Cosinus der eingeschlossenen Seite subtrahiert.

Beweis. Man wende den Satz b) auf das Polardreieck zum gegebenen sphärischen Dreiecke an. Dann ist

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha',$$ daher

$$\cos(2R - \alpha) = \cos(2R - \beta) \cos(2R - \gamma) + \sin(2R - \beta) \sin(2R - \gamma) \cos(2R - a),$$

schließlich $$\cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

Analog lauten die Formeln für $\cos \beta$ und $\cos \gamma$.

Zusatz. Man überzeugt sich leicht, dass die Sätze a), b) und c) auch für das rechtwinklige und für das Quadrantendreieck giltig sind.

d) Halbwinkelsätze. Berechnet man $\cos \alpha$ aus der Gleichung $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$, so folgt

$$1 - \cos \alpha = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c},$$

$$1 + \cos \alpha = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c},$$

wenn $a + b + c = 2s$ gesetzt wird. Hieraus erhält man weiter

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}},\quad \cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \,.\, \sin(s-a)}},\quad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

Zusätze. 1. Da $\frac{1}{2}\alpha$ ein spitzer Winkel ist, so sind sämmtliche Functionen von $\frac{1}{2}\alpha$ positiv. Auch ist zu bemerken, dass jeder Factor unter der Wurzel positiv ist; denn es ist $2s < 4R$, also $s < 2R$, umsomehr auch $s-a < 2R$ und zugleich $s-a > 0$ u. s. w.

2. Die analogen Formeln für $\sin \frac{1}{2}\beta$, $\cos \frac{1}{2}\beta$ u. s. w. lassen sich durch Vertauschung der Buchstaben aus den obigen ohneweiters ableiten.

e) Halbseitensätze. Diese erhält man aus dem Cosinussatze für die Winkel in ähnlicher Weise, wie die Halbwinkelsätze aus dem Cosinussatze für die Seiten.

Noch einfacher ist es, die unter *d)* abgeleiteten Formeln auf das Polardreieck zu dem gegebenen Dreiecke anzuwenden. Dann wird $s = 3R - \sigma$, wenn man zur Abkürzung $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$ setzt, $s - a = R - (\sigma - \alpha)$ u. s. f. Es ist also

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}},\quad \sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos\sigma \cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}},\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}.$$

$\cos\sigma$ ist negativ, da $R < \sigma < 3R$ ist (§ 197 b). Alle anderen Factoren unter den Wurzelzeichen sind positiv, denn es ist z. B. $\cos(\sigma-\alpha) = \sin(s-a)$ u. s. f.

f) Gauß'sche Gleichungen. Substituiert man die in *d)* erhaltenen Werte von $\sin \frac{1}{2}\alpha$ u. s. w. in die Gleichung $\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta - \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta$, so erhält man nach einigen Reductionen:

$$\cos \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}} \cdot \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c}$$

$$= \sin \tfrac{1}{2}\gamma \, \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c};$$

daraus folgt $\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a+b)\sin \frac{1}{2}\gamma$,

und analog $\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a+b)\sin \frac{1}{2}\gamma$,

$\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a-b)\cos \frac{1}{2}\gamma$,

$\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a-b)\cos \frac{1}{2}\gamma$.

Zusätze. 1. Aus der ersten dieser Gleichungen folgt wegen $\cos \frac{1}{2}c > 0$ und $\sin \frac{1}{2}\gamma > 0$, dass $\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ mit $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ stets gleichbezeichnet ist. Je nachdem also $\alpha+\beta \gtreqless 2R$ ist, ist auch gleichzeitig $a+b \gtreqless 2R$ und umgekehrt.

2. Die obigen Gleichungen wurden zuerst von dem französischen Mathematiker Delambre mitgetheilt; sie werden jedoch, namentlich von deutschen Mathematikern, nach Gauß (geb. 1777 zu Braunschweig, gest. 1855 zu Göttingen) benannt, da dieser berühmte Mathematiker zuerst die große Bedeutung derselben für astronomische Rechnungen dargethan hat.

3. Um die Gauß'schen Gleichungen im Gedächtnisse zu behalten, beachte man, dass in jeder drei Sinus oder drei Cosinus nacheinanderfolgen; um ferner aus einer Gleichung, etwa aus der ersten, die übrigen abzuleiten, benütze man die Ziegler'sche Regel: Wenn (in einer Summe oder Differenz) ein Zeichen geändert wird, so muss für das andere Alphabet die Function durch ihre Cofunction ersetzt werden.

g) Die Napier'schen Analogien. Durch Division der Gauß'schen Gleichungen erhält man

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma;$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} c.$$

Diese Gleichungen wurden von Napier, dem Erfinder der natürlichen Logarithmen, im Jahre 1614 angegeben.

Anmerkung. Aus den vorausgehenden Entwickelungen ist ersichtlich, dass die meisten Sätze der sphärischen Trigonometrie sich in analoger Weise darstellen lassen, wie jene der ebenen Trigonometrie. Man kann übrigens die letzteren aus den ersteren als specielle Fälle ableiten, wenn man den Radius der Kugel, auf welcher sich das sphärische Dreieck befindet, unendlich zunehmen läst, während die Seiten des Dreieckes ihre Länge nicht ändern. Da hiebei die den Seiten entsprechenden Centriwinkel unendlich abnehmen, so kann man nach § 134 den Sinus dieser Winkel durch ihren arcus ersetzen. Ist also a_1 der dem Radius 1 und a_r der dem Radius r entsprechenden Bogen, welcher zum Centriwinkel a gehört, so folgt $\sin a = a_1$, ferner $a_r = a_1 . r$, also $\sin a = \frac{a_r}{r}$. Aus $\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} a$ (§ 131) ergibt sich weiter $\cos a = 1 - 2\left(\frac{a_r}{2r}\right)^2 = 1 - \frac{a_r^{\,2}}{2r^2}$. Analog lauten die entsprechenden Formeln für b und c. Durch Substitution dieser Werte in den Sinussatz erhält man $a_r : b_r : c_r = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$, wie in der ebenen Trigonometrie. Aus dem Cosinussatze erhält man

$$1 - \frac{a_r^{\,2}}{2r^2} = \left(1 - \frac{b_r^{\,2}}{2r^2}\right)\left(1 - \frac{c_r^{\,2}}{2r^2}\right) + \frac{b_r c_r}{r^2} \cos \alpha$$

und daraus $a_r^{\,2} = b_r^{\,2} + c_r^{\,2} - \frac{b_r^{\,2}}{2} \cdot \frac{c_r^{\,2}}{r^2} - 2 b_r c_r \cos \alpha$.

Wenn nun das dritte Glied auf der rechten Seite für ein unendlich zunehmendes r verschwindet, so ergibt sich der Cosinussatz der ebenen Trigonometrie.

§ 287. Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke.

I. Auflösungsfall. Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z. B. a, b und γ.

Auflösung. Hat man alle drei unbekannten Umfangsstücke zu berechnen, so benützt man am zweckmäßigsten die Gauß'schen Gleichungen in analoger Weise wie die Mollweide'schen Gleichungen in der ebenen Trigonometrie.

Beispiel. Gegeben: $a = 116^{0}\,44'\,48''$, $b = 50^{0}\,12'\,4''$, $\gamma = 120^{0}\,4'\,50''$.

1) $a + b$	$166^{0}\ 56'\ 52''$	18) $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$	$76^{0}\ 43'\ 47''$
2) $a - b$	66 32 44	20) $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$	17 39 22
3) $\frac{1}{2}(a + b)$	83 28 26	24) $\frac{1}{2}c$	64 35 51
4) $\frac{1}{2}(a - b)$	33 16 22	25) c	129 11 42
5) $\frac{1}{2}\gamma$	60 2 25	26) α	94 23 9
		27) β	59 4 25
Num.	Log.	Num.	Log.
6) $\cos\frac{1}{2}(a + b)$	$9{\cdot}05559_{3}$	8) $\cos\frac{1}{2}(a - b)$	$9{\cdot}92224$
7) $\sin\frac{1}{2}(a + b)$	$9{\cdot}99717_{4}$	9) $\sin\frac{1}{2}(a - b)$	$9{\cdot}73927_{9}$
10) $\sin\frac{1}{2}\gamma$	$9{\cdot}93770_{9}$	11) $\cos\frac{1}{2}\gamma$	$9{\cdot}69843_{9}$
12) $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c$	$8{\cdot}99330_{2}$	14) $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c$	$9{\cdot}62067_{9}$
13) $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c$	$9{\cdot}93488_{3}$	15) $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c$	$9{\cdot}43771_{8}$
16) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$	$0{\cdot}62737_{7}$	17) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$	$9{\cdot}50283_{5}$
19) $\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$	$9{\cdot}36086_{7}$	21) $\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$	$9{\cdot}48187_{6}$
22) $\cos\frac{1}{2}c$	$9{\cdot}63243_{5}$	23) $\sin\frac{1}{2}c$	$9{\cdot}95584_{2}$

Die Reihenfolge der Operationen ist mit 1), 2), 3), . . . bezeichnet. Eine Controle der Rechnung besteht darin, dass c auf zwei verschiedene Arten berechnet wurde.

Zusätze. 1. Will man nur die dritte Seite berechnen, so benützt man den Cosinussatz, welchen man dann meistens in folgender Art transformiert:

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \operatorname{tg} a \sin b \cos\gamma) = \cos a\,(\cos b + \operatorname{tg} m \sin b),$$

also $\cos c = \dfrac{\cos a \cos(b - m)}{\cos m}$, wo $\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} a \cos\gamma$ ist.

Man überzeugt sich leicht, dass die Hilfsgröße m den dem Winkel γ anliegenden Abschnitt der Seite b bedeutet, welcher durch die Höhe auf diese Seite gebildet wird.

2. Will man nur die Winkel α und β berechnen, so bedient man sich der ersten zwei Napier'schen Gleichungen.

II. Auflösungsfall. Gegeben zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite, z. B. α, β, c. Die Rechnung verläuft hier ganz analog wie im ersten Auflösungsfalle.

III. Auflösungsfall. Gegeben zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen, z. B. a, b, α.

Auflösung. Man berechnet β aus der Gleichung $\sin\beta = \dfrac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha$.

Der für $\sin\beta$ erhaltene Quotient muss offenbar positiv und $\leqq 1$ sein. Ist er $= 1$, so hat man $\beta = R$ zu setzen; ist er < 1, so erhält man für β zwei supplementäre Werte, welche jedoch in Bezug auf ihre Brauchbarkeit geprüft werden müssen. Dies geschieht mit Hilfe der Sätze: Je nachdem $a \gtrless b$ ist, muss auch $\alpha \gtrless \beta$ sein; und je nachdem $a + b \gtreqqless 2R$ ist, muss auch $\alpha + \beta \gtreqqless 2R$ sein. Die Aufgabe ist zweideutig bestimmt, wenn beide Werte von β diesen Bedingungen genügen, und eindeutig bestimmt, wenn dies nur für einen Wert der Fall ist. c und γ berechnet man hierauf mittels der Napier'schen Gleichungen und zwar auf zweifache Art, um eine Probe der Rechnung zu haben.

Beispiel: $a = 70^0\ 20'\ 50''$, $b = 51^0\ 41'\ 14''$, $\beta = 52^0\ 30'$. Man findet mittels des Sinussatzes $\alpha_1 = 72^0\ 12'\ 43''$ und $\alpha_2 = 2R - \alpha_1$. Wegen $a > b$ muss $\alpha > \beta$, und wegen $a + b < 2R$ muss $\alpha + \beta < 2R$ sein. Da beide Werte von α diesen Bedingungen entsprechen, so sind beide brauchbar. Die Aufgabe ist also zweideutig bestimmt. Die beiden Werte von c berechnet man aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c_1 = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a - b),$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a - b),$$

da $\frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta) = R - \frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta) = R - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)$ ist. Es ergibt sich

$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta) = 62^0\ 21'\ 21{\cdot}5''$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta) = 9^0\ 51'\ 21{\cdot}5''$

$\frac{1}{2}(a + b) = 61^0\ 1'\ 2''$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(a - b) = 9^0\ 19'\ 48''$.

Num.	Log.	Num.	Log.
1) $\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)$	$9{\cdot}66649_4$	2) $\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta)$	$9{\cdot}94736_1$
3) $\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta)$	$9{\cdot}99354_3$	4) $\sin\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta)$	$9{\cdot}23343_1$
5) Quot.	$9{\cdot}67295_1$	6) Quot.	$0{\cdot}71393$
7) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a + b)$	$0{\cdot}25656$	8) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a - b)$	$9{\cdot}21562_2$
9) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c_1$	$9{\cdot}92951_1$	10) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c_1$	$9{\cdot}92955_2$
11) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c_2$	$9{\cdot}54263$	12) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c_2$	$9{\cdot}54267_1$

Man erhält $c_1 = 80^0\ 44'\ 37''$ und $c_2 = 38^0\ 27'\ 48''$ als arithmetische Mittel aus den gefundenen Werten. Analog berechnet man γ_1 und γ_2 mittels der Napier'schen Gleichungen oder mittels des Sinussatzes.

Zusatz. Zum besseren Verständnisse der Möglichkeiten, welche sich in diesem „unbestimmten Falle" der sphärischen Trigonometrie darbieten, ziehe man, wenn wieder a, b, β gegeben sind, die Höhe CD zur Seite c (Fig. 224) und löse zunächst das durch a und β bestimmte rechtwinklige Dreieck BCD auf. Hierauf ist das rechtwinklige Dreieck ACD durch h und b bestimmt, jedoch nur dann, wenn $\sin h < \sin b$, also $\sin a \sin\beta < \sin b$ ist (§ 285, 3. Auflösungsfall).

Man erhält nun im allgemeinen zwei Auflösungen, da die beiden Dreiecke ACD und BCD auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von h liegen können.

Darauf beruht eine bequeme Berechnung von c durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} p = \operatorname{tg} a \cos\beta, \ \operatorname{tg} q = \operatorname{tg} b \cos\alpha \text{ und } c = p + q.$$

Im obigen Beispiele ist $\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$, daher $c_1 = p + q$ und $c_2 = p - q$.

Analog findet man auch γ, indem man die beiden Theile, in welche es durch h zerlegt wird, aus den rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD berechnet.

IV. Auflösungsfall. Gegeben zwei Winkel und die Gegenseite des einen, z. B. α, β, a. Die Auflösung ist jener im dritten Falle ganz analog.

V. Auflösungsfall. Gegeben die drei Seiten a, b, c.

Auflösung. Man berechnet die Winkel mittels der Halbwinkelsätze, am besten mittels der Formeln für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$. Wenn alle drei Winkel zu berechnen sind, so benützt man am besten die Gleichungen

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sin(s-a)\operatorname{cotg}\varrho,\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta = \sin(s-b)\operatorname{cotg}\varrho \text{ und}$$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma = \sin(s-c)\operatorname{cotg}\varrho, \text{ wo } \operatorname{cotg}\varrho = \sqrt{\frac{\sin s}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}} \text{ ist;}$$

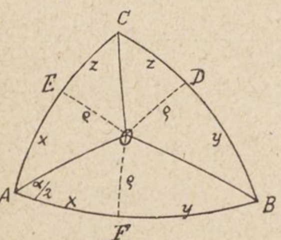


Fig. 225.

ϱ bedeutet den Radius des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises, wovon man sich in analoger Weise wie in § 140 überzeugt. Auch bezüglich des Rechnungsschemas kann auf das Beispiel in § 140 verwiesen werden. Probe mittels des Sinussatzes oder einer Gauß'schen Gleichung.

VI. Auflösungsfall. Gegeben die drei Winkel α, β, γ.

Auflösung. Man benütze die Halbseitensätze und zwar, wenn alle Seiten zu berechnen sind, in der Form

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = \cos(\sigma-\alpha)\operatorname{tg} r,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b = \cos(\sigma-\beta)\,.\operatorname{tg} r, \ldots\ldots,$$

$$\text{wo } \operatorname{tg} r = \sqrt{-\frac{\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}} \text{ ist.}$$

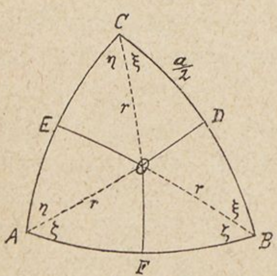


Fig. 226.

r bedeutet den Radius des umgeschriebenen Kreises, wovon man sich in folgender Art überzeugt. Ist O der Schnittpunkt der drei Seitensymmetralen, so ist er von allen Eckpunkten gleichweit entfernt, also der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises. Bezeichnet man nun die Theile, in welche die Winkel α, β, γ durch die Verbindungslinien AO, BO und CO zerfallen, in der aus der Figur ersichtlichen Weise, so ist $2\xi + 2\eta + 2\zeta = 2\sigma$ oder $\xi + \eta + \zeta = \sigma$.

Ferner ist $\eta + \zeta = \alpha$, also $\xi = \sigma - \alpha$ u. s. w. Man erhält dann aus dem rechtwinkligen Dreiecke COD

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a = \operatorname{tg} r \cos \xi = \operatorname{tg} r \cos (\sigma - \alpha), \text{ u. s. f.}$$

Dieselbe Formel für r erhält man entweder aus den Halbwinkelsätzen oder direct aus der Figur auch dann, wenn der Punkt O außerhalb des Dreieckes oder in einer Seite desselben liegt.

Probe mittels des Sinussatzes oder einer Gauß'schen Gleichung.

II. Abschnitt: Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.

§ 288. Flächeninhalt des sphärischen Dreieckes. Aufgabe: Den Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes zu berechnen, wenn die drei Seiten gegeben sind.

Nach § 208 ist $\varepsilon = \alpha + \beta - (2R - \gamma)$, also $\frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - (R - \frac{1}{2}\gamma)\}$. Daraus folgt nach § 133d und § 286f

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4} \varepsilon = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b) - \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2}(a + b) + \cos \frac{1}{2} c} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\gamma} =$$

$$\frac{\sin \frac{1}{4}(-a + b + c) \sin \frac{1}{4}(a - b + c)}{\cos \frac{1}{4}(a + b + c) \cos \frac{1}{4}(a + b - c)} \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma =$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(s - a) \sin \frac{1}{2}(s - b)}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2}(s - c)} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - c)}{\sin (s - a) \sin (s - b)}},$$

also schließlich $\operatorname{tg} \frac{1}{4} \varepsilon = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} s \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - c)}$.

Diese Formel rührt vom Mathematiker L'Huilier her und wird nach ihm benannt.

§ 289. Volumen eines Parallelepipedes. Aufgabe: Aus den drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten und den von ihnen gebildeten Winkeln das Volumen eines Parallelepipedes zu berechnen.

Auflösung. Es seien p, q, r die Maßzahlen der Kanten AB, AD, AE, ferner a, b, c die von ihnen gebildeten Winkel (siehe Fig. 227). Dann hat die Grundfläche die Maßzahl $pq \sin c$ und die Höhe IE die Maßzahl $r \sin h = r \sin b \sin \alpha = 2 r \sin b \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha =$

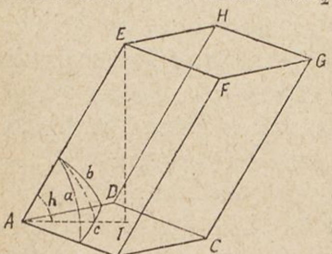


Fig. 227.

$$\frac{2r}{\sin c} \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)},$$

also ist

$$V = 2pqr \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}.$$

§ 290. Die regelmäßigen Polyeder. Aufgaben. Aus der Kantenlänge s eines regelmäßigen Polyeders a) einen Flächenwinkel, b) den Radius ϱ der eingeschriebenen Kugel, c) den Radius r der umgeschriebenen Kugel und d) das Volumen zu berechnen.

Auflösungen. $a)$ Jede Ecke des Polyeders ist ein regelmäßiges n-Kant, welches von n regelmäßigen m-Ecken gebildet wird. Im Bestimmungsdreikante des n-Kantes ist der in einer Seitenfläche liegende Kantenwinkel (eine Kathete des zugehörigen sphärischen Dreieckes) $a = R - \frac{2R}{m}$, der gegenüberliegende Winkel $\alpha = \frac{2R}{n}$, und der zweite schiefe Winkel gleich β, wenn mit 2β der gesuchte Flächenwinkel des Polyeders bezeichnet wird. Nun ist $\cos\alpha = \cos a \sin\beta$, also

$$\sin\beta = \cos\frac{2R}{n} : \sin\frac{2R}{m}.$$

$b)$ ϱ berechnet man aus dem rechtwinkligen Dreiecke EGO (Fig. 159) und findet

$$\varrho = EG \operatorname{tg}\beta = \frac{s}{2} \operatorname{cotg}\frac{2R}{m} \operatorname{tg}\beta.$$

$c)$ Verbindet man die Eckpunkte einer Polyederfläche mit dem Mittelpunkte des Polyeders, so erhält man eine regelmäßige Pyramide, deren Seitenkanten gleich r und deren Grundkanten gleich s sind. Aus einer Seitenfläche erhält man $r = \frac{1}{2} s : \cos (rs)$. Eine Ecke an der Grundfläche ist ein gleichschenkliges Dreikant mit den Seiten $2R - \frac{4R}{m}$, (rs), (rs) und den Winkeln $\frac{4R}{n}$, β, β. Es ist also

$$\cos (rs) = \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\frac{2R}{n}, \text{ somit } r = \frac{s}{2} \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\frac{2R}{n}.$$

$d)$ Das Volumen der unter $c)$ erwähnten Pyramide ist gleich $\frac{1}{3} \cdot \frac{ms^2}{4} \operatorname{cotg}\frac{2R}{m} \cdot \varrho$. Bezeichnet man also die Anzahl der Polyederflächen mit F (§ 178), so ist das Volumen des Polyeders

$$V = \frac{Fms^3}{24} \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{cotg}^2\frac{2R}{m}.$$

§ 291. Astronomische Aufgaben. $a)$ In Fig. 228 ist Z das Zenith des im Mittelpunkte der Himmelskugel befindlichen Beobachtungsortes, $NWSE$ der Horizont, P der Nordpol des Äquators $AWQE$, $PZQS$ der Meridian des Beobachtungsortes. Ist nun G irgend ein Gestirn, so ist $ZG = z$ die Zenithdistanz, der sphärische Abstand des Gestirnes vom Horizont die Höhe h, $PG = p$ die Poldistanz, $GB = \delta$ die Declination, $\sphericalangle SZG = a$ oder der entsprechende Bogen des Horizontes das Azimuth, $\sphericalangle QPB = t$ der Stundenwinkel. $PN = \varphi$ ist die Polhöhe und $SQ = R - \varphi$ die Äquatorhöhe des Beobachtungsortes.

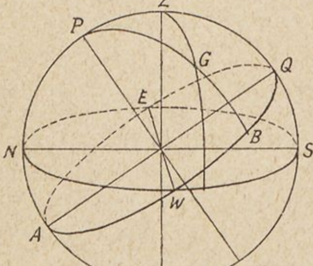


Fig. 228.

Das Azimuth und der Stundenwinkel werden vom Meridiane aus gegen Westen, also im Sinne der scheinbaren täglichen Bewegung, von 0^0 bis 360^0 gezählt. Die Höhe eines Gestirnes wird vom Horizonte aus von 0^0 bis 90^0 gezählt und ist positiv oder negativ, je nachdem sich das Gestirn für den Beobachter oberhalb oder unterhalb des Horizontes befindet. Analog wird die Declination vom Äquator aus von 0^0 bis 90^0 gezählt und ist positiv oder negativ, je nachdem sich das Gestirn auf der nördlichen oder auf der südlichen Seite des Äquators befindet.

b) Aufgabe. Aus der Polhöhe φ und den Horizontalcoordinaten h und a eines Gestirnes dessen Äquatorialcoordinaten δ und t zu berechnen.

Auflösung. Das Dreieck PZG ist durch die Seiten $PZ = R - \varphi$, $ZG = R - h$ und den Winkel $PZG = 2R - a$ bestimmt. Daraus berechnet man die Seite $PG = R - \delta$ und den Winkel $ZPG = t$ nach dem ersten Auflösungsfalle. Man findet

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos a$$

und kann, wenn δ bekannt ist, t mittels des Sinussatzes, oder, um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, mittels eines Halbwinkelsatzes berechnen.

Zusatz. Diese Formeln gelten für $a < 2R$; man leite die entsprechenden Formeln für $a = 2R$ und $a > 2R$ ab.

c) Aufgabe: Aus der Polhöhe eines Ortes und den Äquatorialcoordinaten eines Gestirnes dessen Horizontalcoordinaten zu berechnen.

Man findet $\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t$ und daraus a.

d) Aufgabe: Die Zeit t_0 des Auf-, bezw. Unterganges eines Gestirnes aus dessen Äquatorialcoordinaten und der Polhöhe des Beobachtungsortes zu bestimmen.

Im Augenblicke des Auf- oder Unterganges des Gestirnes ist $h = 0$. Man findet also t_0 mit Beachtung der vorausgehenden Aufgabe aus der Gleichung

$$\cos t_0 = - \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi.$$

Man pflegt den Stundenwinkel t auch von 0 bis 24 Stunden Sternzeit zu zählen. Da nun die Zeit, welche ein Gestirn über dem Horizonte verweilt, der Tagbogen (und seine Ergänzung zu 24 h sein Nachtbogen) heißt, so ist der kleinste positive Wert für t_0, welcher die vorausgehende Gleichung befriedigt, der halbe Tagbogen des Gestirnes. Der Tagbogen ist größer als 12 h oder $2R$, wenn $\delta > 0$ und $\varphi > 0$ ist; er ist stets gleich 12 h für $\varphi = 0$ u. s. w.

Ist das betrachtete Gestirn die Sonne, so gibt der Tagbogen zugleich die Dauer des Tages an, welcher einer bestimmten Declination der Sonne entspricht. Der längste, bezw. kürzeste Tag tritt ein, wenn sich die Sonne in einem Wendekreise befindet, wenn also ihre Declination $\pm e = \pm 23^0\ 27'\ 13''$ ist. (Dieser Wert von e gilt für das Jahr 1888 und wird jedes Jahr um 0·5″, genauer 0·4645″ kleiner.)

Anhang: Über Kartenprojectionen.

§ 292. **Einleitung.** Wenn man einen relativ kleinen Theil der Erdoberfläche auf einer Ebene abzubilden hat, so setzt man denselben als eben voraus, d. h. man sieht von der Krümmung der Erdoberfläche ab und denkt sich alle Punkte, welche aus der angenommenen Ebene heraustreten, wie z. B. Bergspitzen, auf dieselbe projiciert. Zu der so erhaltenen Figur construiert man dann eine ähnliche. Das Verhältnis irgend einer Strecke in dem „Bilde" zu der entsprechenden Strecke im „Originale" (z. B. 1 : 40000) wird als der „Maßstab" der Karte bezeichnet. Die wesentlichen Eigenschaften dieser Abbildung sind nach der Ähnlichkeitslehre folgende: 1. Alle Strecken des Originales sind jenen des Bildes proportional. 2. Alle Flächen des Originales sind jenen des Bildes proportional, u. zw. ist das Flächenverhältnis gleich dem Quadrate des Streckenverhältnisses. 3. Alle Winkel sind in ihrer wirklichen Größe abgebildet.

Hat man jedoch größere Theile einer Kugelfläche in der Ebene abzubilden, so kann das Bild dem Originale nicht vollkommen ähnlich werden. Dies ist nur auf einer zweiten Kugel (einem Globus) möglich. Man sucht daher in den ebenen Abbildungen größerer Gebiete die eine oder die andere von den oben angeführten drei Eigenschaften ähnlicher Figuren entweder durchwegs, oder doch an einzelnen Stellen beizubehalten.

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit verschiedenartiger Projectionsmethoden, von denen je nach dem Zwecke, welchem die Karte zu dienen hat, diese oder jene den Vorzug verdient. Im Folgenden wollen wir einige der wichtigsten Projectionsarten kurz besprechen und dabei zunächst die Construction und Beschaffenheit des Kartennetzes betrachten. Das letztere besteht aus der Abbildung der Meridiane und Parallelkreise und dient, ähnlich wie ein Coordinatensystem, zur Lagenbestimmung der abgebildeten Punkte.

I. Perspectivische Projectionen.

§ 293. **Erklärungen.** Es sei die Erde, welche wir der Einfachheit halber kugelförmig annehmen wollen, oder die scheinbare Himmelskugel u. s. f. in verkleinertem Maßstabe durch einen Globus dargestellt, und man projiciere die Oberfläche desselben oder einen Theil der Oberfläche von einem Punkte A aus auf eine Ebene ε. Da die Abbildung ihre Form beibehält und nur der Maßstab sich ändert, wenn man die Projectionsebene ε parallel zu sich selbst verschiebt, so genügt es, nur eine besondere Lage dieser Ebene in Betracht zu ziehen, am besten jene, in welcher sie die Kugel berührt. Je nachdem der Berührungspunkt B ein Pol, ein Punkt des Äquators oder ein anderer Punkt der Kugel ist, heißt die Projection eine Polar-, eine Äquatorial- oder eine Horizontalprojection. Die Projection heißt eine centrale oder gnomonische, wenn das Projectionscentrum A mit dem Kugelcentrum zusammenfällt; eine stereographische, wenn A der Gegenpunkt zu B ist; eine externe, wenn A außerhalb der Kugel, u. zw. in der Verlängerung des von B ausgehenden Durchmessers liegt, speciell eine orthographische, wenn AB unendlich groß ist, d. h. wenn die Projectionsstrahlen parallel und zur Ebene ε normal sind.

§ 294. Centrale Projection. Die Hauptkreise werden als Gerade und die Nebenkreise als Kegelschnittslinien abgebildet. Die Meridiane erscheinen somit stets als Gerade und die Parallelkreise *a*) bei der Polarprojection als concentrische Kreise, *b*) bei der Äquatorialprojection als Hyperbeln und *c*) bei der Horizontalprojection als Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln. Die centrale Projection eignet sich namentlich für Sternkarten, da sie die Sterne in derselben Weise darstellt, wie sie einem nach einem festen Punkte (dem Berührungspunkte B) schauenden Beobachter erscheinen. Die Orientierung wird dabei durch den Umstand erleichtert, dass sich die in einem Hauptkreise gesehenen Sterne in einer Geraden abbilden.

Auch für den Seefahrer dürfte diese Projectionsart wichtig werden, wenn die Schiffahrt im größten Kreise, als der kürzesten Verbindungslinie zweier Punkte der Erdoberfläche, allgemein eingeführt wird. (Über die übliche Projection der Seekarten sieh § 303.)

Abgesehen davon, dass die Construction der Parallelkreise als Kegelschnittslinien Schwierigkeiten bereitet, leidet die centrische Projection auch noch an dem wesentlichen Mangel, dass die Vergrößerung der Abstände und Flächen vom Mittelpunkte B gegen den Rand der Karte hin außerordentlich rasch zunimmt. Aus diesem Grunde pflegt man nur kleinere Theile der Kugelfläche auf einer Ebene abzubilden und verwendet für größere Theile mehrere Ebenen, z. B. die Flächen eines der Kugel umgeschriebenen regelmäßigen Polyeders. So hat J. G. Paradies im Jahre 1674 die ganze Himmelskugel auf den sechs Flächen eines Würfels abgebildet.

Die centrische Projection rührt von Hipparch (im 2. Jahrh. n. Chr.), vielleicht auch schon von Anaximander (im 6. Jahrh. v. Chr) her.

§ 295. Stereographische Projection. *a*) Jeder Kreis, dessen Ebene das Projectionscentrum A enthält, wird als Gerade und jeder andere Kreis wieder als Kreis abgebildet.

b) Je zwei Tangenten der Kugel, also auch zwei beliebige

Linien der Kugelfläche, schneiden sich unter demselben Winkel wie ihre Projectionen.

c) Die stereographische Abbildung ist conform, d. h. in ihren kleinsten Theilen dem Originale ähnlich.

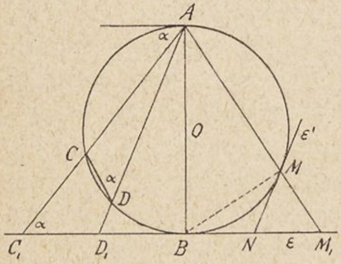


Fig. 229.

Beweise. *a*) Der erste Theil der Behauptung läßt sich ohneweiters als richtig erkennen, ebenso der zweite für jene Kreise, deren Ebenen zur Projectionsebene parallel sind. Für irgend einen anderen Kreis K mit dem Durchmesser CD (Figur 229) ergibt sich der Beweis aus § 281, Zusatz 3.

Die Ebene der Zeichnung ist hier so angenommen, dass sie den Mittelpunkt O der Kugel, den Mittelpunkt des Kreises K und den Punkt A enthält. Sie ist also zur Ebene des Kreises K normal und enthält daher den Achsenschnitt des schiefen Kegels mit der Grundfläche K und der Spitze A.

b) Es sei M der Scheitel des betrachteten Winkels und ε' die durch denselben gelegte Tangentialebene der Kugel. Da die Ebene der Zeichnung die Normalen BO und MO der Ebenen ε und ε' enthält, so ist sie zu der durch N gehenden Schnittlinie $\varepsilon\varepsilon'$ normal. Nun findet man $\sphericalangle BMM_1 = 90^0$, $\sphericalangle NBM = BMN$, also $\sphericalangle NMM_1 = NM_1M$ und $NM = NM_1$. Hieraus folgt nach § 153 b) $PM = PM_1$ und $QM = QM_1$, wo P und Q zwei beliebige Punkte der Geraden $\varepsilon\varepsilon'$ bedeuten. Daher ist $\triangle PQM \cong PQM_1$ und $\sphericalangle PMQ = PM_1Q$.

c) Es sei MRS ein sphärisches Dreieck auf der betrachteten Kugel und $M_1R_1S_1$ seine Abbildung. Liegen die Punkte M, R und S so nahe aneinander, dass die Seiten der Dreiecke MRS und $M_1R_1S_1$ als geradlinig gelten können, so sind die beiden Dreiecke ähnlich, da sie in den Winkeln übereinstimmen. Hieraus schließt man weiter, dass jedes kleine Polygon auf der Kugel und überhaupt jede kleine Figur auf derselben der entsprechenden Abbildung umso ähnlicher ist, je kleiner sie ist.

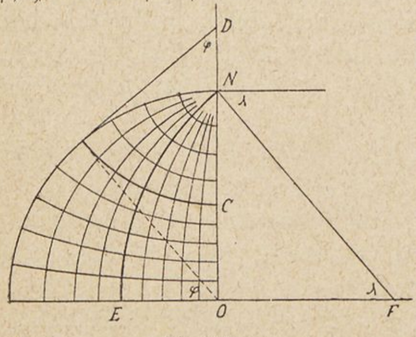


Fig. 230.

Die stereographische Polarprojection ist der centralen ganz analog; nur nehmen die Abstände der Parallelkreise bei der ersteren nach einem anderen Gesetze, u. zw. langsamer zu als bei der letzteren. (S. die Tabelle im § 296.) Verlegt man bei der stereographischen Äquatorialprojection den Berührungspunkt B in den Schnittpunkt des Äquators mit dem ersten Meridian (von der Länge 0^0), so bilden sich diese beiden Kreise als zueinander normale Durchmesser jenes Kreises ab, welcher dem Meridiane von 90° als Bild entspricht. Irgend ein anderer Meridian von der Länge λ wird als ein Kreis abgebildet, welcher durch die Projectionen N und S der Pole geht und im Punkte N mit der Geraden $O\,N$ den Winkel λ einschließt. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt also in der Projection des Äquators, und der Winkel OFN ist $= \lambda$.

Der Parallelkreis von der Breite φ wird als ein Kreis abgebildet, welche $O\,N$ und den Randkreis normal durchschneidet. Der Mittelpunkt D dieses Kreises liegt also in der Verlängerung, von $O\,N$, und der Centriwinkel bei D ist $= \varphi$.

Auf die stereographische Horizontalprojection soll hier nicht näher eingegangen werden.

Die stereographische Projection wird namentlich zur Darstellung der Halbkugeln (Erd- und Himmels-Hemisphären) benützt. Sie zeichnet sich durch die einfache Construction der Meridiane und Parallelkreise, ferner durch den Umstand aus, dass die Abbildung dem Originale in den kleinsten Theilen ähnlich ist. Hingegen leidet sie an dem Mangel, dass die Vergrößerung der Abstände und Flächen vom Mittelpunkte gegen den Kartenrand erheblich zunimmt.

Auch diese Projectionsart soll von Hipparch herrühren. Jedenfalls war sie dem berühmten Astronomen Ptolemäus von Alexandrien (im 2. Jahrh. n. Chr.) bekannt.

§ 296. Externe und orthographische Projection. Da diese beiden Projectionsarten von geringerer Bedeutung sind, so genüge es, die Folgen einer Verschiebung des Projectionscentrums aus der Kugel in einem einfachen Falle näher zu beleuchten. Zu diesem Zwecke vergleichen wir in der nachfolgenden Tabelle die Projectionen der Meridianbogen, welche vom Pole bis zur Breite von 80°, von dieser bis zur Breite von 70° u. s. f. reichen, in der centralen, stereographischen, externen und orthographischen Polarprojection. Der Kugelradius ist $= 1$ angenommen, so dass der Meridianbogen, welcher nach dem Gradmaße 10° beträgt, die Länge 0·175 hat. Der Abstand des Projectionscentrums A von der Projectionsebene ist mit AB bezeichnet.

Meridianbogen	Länge seiner Projection für			
	$AB = 1$	$AB = 2$	$AB = 2{\cdot}7$	$AB = \infty$
von 80° bis 90°	0·176	0·175	0·175	0·174
„ 70° „ 80°	0·188	0·178	0·175	0·168
„ 60° „ 70°	0·213	0·183	0·176	0·158
„ 50° „ 60°	0·262	0 192	0·178	0·143
„ 40° „ 50°	0·353	0·205	0·179	0·123
„ 30° „ 40°	0·540	0·222	0·180	0·100
„ 20° „ 30°	1·015	0·246	0·180	0·074
„ 10° „ 20°	2·924	0·278	0·177	0·045
„ 0° „ 10°	∞	0·322	0·169	0·015

Man sieht also, dass die hier betrachtete externe Projection die Abstände in der Richtung vom Mittelpunkte der Karte gegen den Rand hin nur sehr wenig verändert. Ungünstiger verhält es sich, wie man sich leicht überzeugt, in der dazu normalen Richtung, so dass die Figuren in einiger Entfernung vom Mittelpunkte ebenfalls verzerrt erscheinen. Weil außerdem das Kartennetz für die externe Äquatorial- oder Horizontalprojection nicht einfach construierbar ist, so wird diese Projectionsmethode nur selten benützt. Außer dem obigen Werte von AB hat man auch andere, z. B. 2·5, als besonders günstig gefunden.

Durch die orthographischen Projectionen werden die Kreise als Ellipsen, in speciellen Fällen als gleich große Kreise oder als Strecken abgebildet. Die Abstände werden in radialer Richtung am Rande stark verkleinert (s. Tabelle), in der dazu normalen Richtung jedoch in ihrer wahren Größe abgebildet.

Dadurch wird eine bedeutende Verzerrung jener Figuren bewirkt, welche sich in größerer Entfernung vom Kartenmittelpunkte befinden. Diese von Hipparch herrührende Projectionsart eignet sich hauptsächlich zur Abbildung von Himmelskörpern, z. B. des Mondes, da sie die Kugel so darstellt, wie sie, aus großer Entfernung betrachtet, wirklich erscheint.

II. Kegelprojectionen.

§ 297. **Ptolemäische Kegelprojection.** Um eine schmale (von zwei Parallelkreisen begrenzte) Erdzone abzubilden, überträgt man dieselbe zunächst auf eine Kegelfläche, welche die Zone längs des mittleren Parallelkreises berührt. Hierauf denkt man sich die Kegelfläche längs einer Seitenlinie aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet. Die Meridiane werden durch Erweiterung ihrer Ebenen bis zum Durchschnitte mit der Kegelfläche abgebildet und erscheinen daher in der ausgebreiteten Kegelfläche als Gerade, welche sich in einem Punkte, dem Scheitel der Kegelfläche, schneiden. Auf diesen werden die Breitengrade in ihrer wirklichen Größe vom mittleren Parallelkreise nach beiden Seiten aufgetragen, so dass sich alle Parallelkreise als concentrische Kreise abbilden. Figur 231 stellt das nach dieser Methode entworfene Netz einer Karte von Österreich dar. Darin ist der Parallelkreis von 47° n. Br. als der Berührungskreis angenommen; die Länge eines Meridiangrades beträgt 3·5 *mm*. Diese Projectionsart rührt von Ptolemaeus her und zeichnet sich dadurch aus, dass das Kartennetz einfach construierbar ist, dass die Meridiane die Parallelkreise auch in der Abbildung rechtwinklig durch-

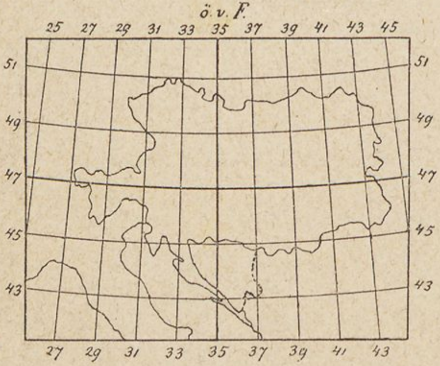


Fig. 231.

schneiden, und dass das Kartenbild längs des ganzen mittleren Parallelkreises dem Originale ähnlich ist. Hingegen sind die Längengrade auf allen Parallelkreisen, mit Ausnahme des mittleren, zu groß abgebildet u. zw. um so größer, je weiter der entsprechende Parallelkreis vom mittleren entfernt ist. Aus diesem Grunde ist die Ptolemäische Kegelprojection nur für schmale Kugelzonen gut brauchbar.

§ 298. **Mercators Kegelprojection.** Zur Darstellung breiterer Zonen ist die Ptolemäische Projectionsart so abgeändert worden, dass die Längengrade auf zwei verschiedenen Parallelkreisen (z. B. in $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ der Zonenbreite) zu den Breitegraden im richtigen Verhältnisse stehen. Aus den bekannten Längen je eines Grades der gewählten zwei Parallelkreise und aus dem bekannten Abstande der letzteren lassen sich alle übrigen Bestimmungsstücke des Kartennetzes leicht berechnen. Diese sehr häufig benützte Projectionsart kam zuerst auf der von Gerhard Mercator (geb. 1512 zu Rupelmonde in Flandern) im Jahre 1554 herausgegebenen Karte von Europa zur Anwendung und heißt daher die Mercator'sche Kegelprojection. Manchmal wird sie auch nach dem Astronomen De l'Isle benannt, welcher sie im Jahre 1745 zur Anfertigung einer Karte von Russland benützt hat.

§ 299. **Mercators äquivalente Projection.** Man construiert die Parallelkreise, den mittleren Meridian und die Längengrade auf dem mittleren Parallelkreise wie im § 297. Hierauf trägt man auf allen übrigen Parallelkreisen die ihnen nach dem Maßstabe entsprechenden Längengrade auf und erhält so für jeden weiteren Meridian eine Reihe von Punkten, welche durch eine aus freier Hand gezogene Curve (manchmal auch durch eine gebrochene Linie) verbunden werden.

Fig. 232.

Fig. 232 stellt das nach dieser Methode construierte Kartennetz von Europa dar. Als mittlerer Parallelkreis ist jener von 50° angenommen; die Länge eines Meridiangrades beträgt 0·7 *mm*.

Äquivalent heißt eine Projection, wenn jede Figur auf der Karte mit der entsprechenden auf der abgebildeten Kugel (dem Globus) flächengleich ist, oder mit anderen Worten, wenn alle Figuren auf der Erdoberfläche (der Himmelskugel u. s. f.) den entsprechenden Figuren auf der Karte (in Bezug auf den Flächeninhalt) proportional sind.

Um diese Eigenschaft für die eben beschriebene Projectionsmethode nachzuweisen, denken wir uns die Meridiane und Parallelkreise für so kleine Längen- und Breitenunterschiede (etwa von Secunde zu Secunde) construiert, dass die kleinen Netzmaschen auf dem Globus und auf der Karte als (geradlinig begrenzte) Trapeze gelten können. Da nun zwei einander entsprechende Trapeze in den Parallelseiten und der Höhe übereinstimmen, so sind sie flächengleich. Dasselbe gilt von zwei beliebigen einander entsprechenden Figuren, da sie durch ein sehr dichtes Kartennetz in einander entsprechende Elementartrapeze zerlegbar sind.

Äquivalente Projectionen benützt man namentlich bei der Herstellung solcher Karten, auf welchen die Verbreitung von Nationalitäten, Religionsbekenntnissen, gewisser Thier- oder Pflanzengattungen u. s. f. ersichtlich gemacht wird.

Die oben besprochene äquivalente Projection von Mercator wird häufig (u. zw. mit Unrecht) nach dem französischen Geographen Bonne benannt, welcher im Jahre 1752 ihre bedeutenden Vorzüge (Einfache Construction des Kartennetzes, Äquivalenz der Strecken in der Richtung der Meridiane und Parallelkreise, Äquivalenz der Flächen) hervorgehoben hat. Sie wird häufig auch zur Darstellung größerer Ländercomplexe oder ganzer Welttheile (z. B. von Asien) benützt.

III. Cylinderprojectionen, Plattkarten.

§ 300. **Quadratische Plattkarten.** Um eine Zone abzubilden, welche sich nach beiden Seiten des Äquators gleich weit erstreckt, überträgt man dieselbe zunächst auf eine Cylinderfläche, welche die Zone längs des Äquators berührt. Zu diesem Zwecke erweitert man die Meridianebenen bis zum Durchschnitte mit der Cylinderfläche und denkt sich auf den so erhaltenen Abbildungen der Meridiane die Breitegrade in der entsprechenden Größe vom Äquator aus aufgetragen. Wird nun die Cylinderfläche in die Ebene ausgebreitet, so erhält man ein Kartennetz, bestehend aus zwei Systemen einander rechtwinklig durchschneidender Geraden. Man nennt solche Karten Plattkarten und zwar quadratische mit Rücksicht auf die Form der Netzmaschen.

Diese Projectionsart kann nur für schmale Zonen angewendet werden, da sie auf die Abnahme der Längengrade mit wachsender Breite keine Rücksicht nimmt.

§ 301. **Die rechteckigen Plattkarten** unterscheiden sich von den quadratischen nur dadurch, dass die Längengrade kleiner angenommen werden als die Breitengrade. In diesem Falle ist der Umfang des Cylinders nicht gleich dem Äquator, sondern einem anderen zweckmäßig gewählten Parallelkreise der Kugel.

Die quadratischen und die rechteckigen Plattkarten waren im Alterthume vielfach im Gebrauch und sollen von Anaximander herrühren. Auch Ptolemäus bediente sich derselben.

§ 302. **Sansonsche Projection.** Wendet man Mercators äquivalente Projection für den Fall an, dass der Äquator der mittlere Parallelkreis der abzubildenden Zone ist, so erhält man die nach Sanson (1650), hie und da nach Flamsteed (1729) benannte Projection. Die Parallelkreise erscheinen als äquidistante parallele Gerade, auf welchen die Längengrade vom mittleren Meridian aus in der dem Maßstabe entsprechenden Größe aufgetragen sind. Alle Meridiane, mit Ausnahme des mittleren, welcher als eine Gerade abgebildet wird, erscheinen als krumme Linien. Diese Projection ist ebenfalls äquivalent und wird meistens zur Darstellung von Afrika, Südamerika u. s. f. benützt.

§ 303. Mercators Platt- oder Seekartenprojection. Auf den unter *a*) und *b*) besprochenen Plattkarten hat ein Längengrad für alle Breiten dieselbe Größe. Daher bleibt das Verhältnis eines Längengrades zu einem Breitengrade an allen Stellen der Karte dasselbe, während es auf der Kugel mit wachsender Breite abnimmt. Um die dadurch bewirkte Verzerrung der Formen auf einer Plattkarte möglichst zu beseitigen, vergrößert man nach Mercator das Bild $A_1 C_1$ eines Meridiantheilchens AC in demselben Verhältnisse $(\cos \varphi : 1)$, in welchem ein Theilchen AB des zur Breite φ gehörigen Parallelkreises durch das Bild $A_1 B_1$ vergrößert ist. Hieraus kann zunächst gefolgert werden, dass diese Projection conform ist. Ferner erhält man $\sphericalangle\, ACB = A_1 C_1 B_1$, d. h. jede Curve auf der Kugel durchschneidet die Meridiane unter denselben Winkeln, wie das Bild der Curve die Meridiane auf der Karte. Auf dieser Eigenschaft beruht die große Bedeutung der Mercator'schen Plattkarten für den Seefahrer. Für diesen ist es nämlich in der Regel am einfachsten und bequemsten, das Schiff so zu steuern, dass die Längenachse desselben mit dem durch den Compass bestimmten Meridiane stets denselben Winkel einschließt. Dabei beschreibt das Schiff eine Linie, Loxodrome genannt, welche alle Meridiane unter demselben Winkel durchschneidet. Da nach dem Vorigen auch das Bild der Loxodrome auf der Mercator'schen Plattkarte dieselbe Eigenschaft besitzt, so muss es eine Gerade sein. Hieraus ergibt sich von selbst, wie der Seefahrer mit Hilfe der Karte den Curs des Schiffes zu bestimmen hat, um von einem Orte A zu einem anderen Orte B zu gelangen.

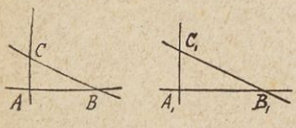


Fig. 233.

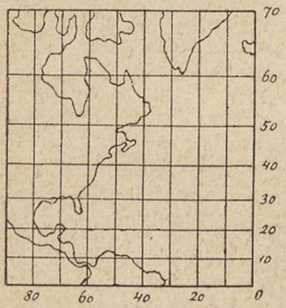


Fig. 234.

Fig. 234 stellt einen Theil des atlantischen Oceans in Mercator's (Seekarten-) Projection dar. Die Construction des Netzes erfolgt nach der Formel

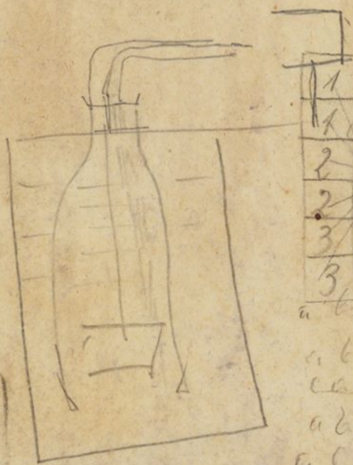
$$y = \frac{180\, a}{\pi}\, l \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right),$$

in welcher a die Länge eines Äquatorgrades, y die Entfernung des Parallelkreises von der Breite φ vom Äquator und l den natürlichen Logarithmus bedeutet. Die Ableitung dieser Formel muss an dieser Stelle übergangen werden.

Diese sehr wichtige Projection (häufig nur „Mercator's Projection" genannt) wird hauptsächlich zur Anfertigung von Seekarten und manchmal auch zur zusammenhängenden Darstellung der Erdoberfläche benützt. Sie hat die Unvollkommenheit, dass sie die vom Äquator weiter entfernten Gegenden allzusehr vergrößert und die Pole mit ihren Umgebungen überhaupt nicht darstellen kann.

Inhalt.

(Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)



1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

a b c
c a b

a b c
a c b
b a c
b c a
c a b
c b a