Preprosti številski trikotniki

Marko Razpet

Razvrstimo po vrsti vsa liha števila v trikotnik tako, da bo v prvi vrstici eno število, v drugi dve števili, v tretji tri števila in tako dalje (številski trikotnik (1)). Zapišemo lahko seveda le nekaj vrstic, sicer pa je številski trikotnik neomejen.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & \\ 3 & 5 & & & & & \\ 7 & 9 & 11 & & & & \\ 13 & 15 & 17 & 19 & & & \\ 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & & \\ 31 & 33 & 35 & 37 & 39 & 41 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \tag{1}$$

Seštejmo v vsaki vrstici vsa števila. Takoj opazimo, da dobimo po vrsti kube naravnih števil: $1 = 1^3, 3 + 5 = 8 = 2^3, 7 + 9 + 11 = 27 = 3^3, \ldots$. Ali to pravilo drži za vsako vrstico?

Za odgovor na zgornje vprašanje nam bo v veliko pomoč trikotna razdelitev vseh naravnih števil (številski trikotnik (2)).

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & \\ 2 & 3 & & & & & \\ 4 & 5 & 6 & & & & \\ 7 & 8 & 9 & 10 & & & \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & & \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \tag{2}$$

V prvo vrstico postavimo eno število, v drugo dve števili, v tretjo tri števila in tako dalje. Zadnje, skrajno desno število v n-ti vrstici je ravno vsota prvih n zaporednih naravnih števil. Rezultat nam je znan:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vidimo, da je T_n ravno n-to trikotniško število. Trikotniška sestavljajo zaporedje $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$.

Liha števila prav tako sestavljajo zaporedje: $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$. Označimo k-to liho število z $\ell(k)$. Očitno je $\ell(k) = 2k - 1$. Podobno soda števila sestavljajo zaporedje $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$. Z $s(k)$ označimo k-to sodo število. Očitno je $s(k) = 2k$. Pri tem je k poljubno naravno število. Zaporedji lihih in sodih števil sta aritmetični z razliko 2. Zaporedje trikotniških števil pa ni aritmetično, ker razlika $T_{n+1} - T_n = n + 1$ ni stalna, pač pa je zaporedje teh razlik aritmetično.

Podobno kot liha števila razvrstimo v trikotnik tudi vsa soda števila (številski trikotnik (3)).

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & & & & & & \\ 4 & 6 & & & & & \\ 8 & 10 & 12 & & & & \\ 14 & 16 & 18 & 20 & & & \\ 22 & 24 & 26 & 28 & 30 & & \\ 32 & 34 & 36 & 38 & 40 & 42 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \tag{3}$$

Trikotnik naravnih števil (2) je v preprosti zvezi s trikotnikoma lihih in sodih števil. Funkcija $k \mapsto \ell(k)$ ga povratno enolično preslika na trikotnik lihih števil (1), funkcija $k \mapsto s(k)$ pa na trikotnik sodih števil (3). Pri tem se ohranja urejenost številskih trikotnikov.

V n-ti vrstici trikotnika (1) je n lihih števil. Zadnje je T_n-to liho število, to se pravi $\ell(T_n) = 2T_n - 1 = n(n+1) - 1 = n^2 + n - 1$. V $(n-1)$-ti vrstici je za $n > 1$ zadnje število T_{n-1}-to liho število. Zato se n-ta vrstica v trikotniku (1) prične z $\ell(T_{n-1}) + 2 = 2T_{n-1} - 1 + 2 = n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$. Vsota L_n vseh števil v n-ti vrstici je enaka vsoti n členov aritmetičnega zaporedja, kar lahko izrazimo kot produkt aritmetične sredine prvega in zadnjega člena s številom členov:

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2} \cdot n \\ &= \frac{2n^2}{2} \cdot n = n^3. \end{aligned}$$

Torej je v n-ti vrstici številskega trikotnika, ki ga sestavljajo liha števila, vsota L_n enaka n^3.

Prav tako je v n-ti vrstici trikotnika (3) n sodih števil. Zadnje je T_n-to sodo število, to se pravi $s(T_n) = 2T_n = n(n+1) = n^2 + n$. V $(n-1)$-ti vrstici je za $n > 1$ zadnje število T_{n-1}-to sodo število. Zato se n-ta vrstica trikotnika (3) prične s $s(T_{n-1}) + 2 = 2T_{n-1} + 2 = (n-1)n + 2 = n^2 - n + 2$. Vsota S_n vseh števil v n-ti vrstici je enaka vsoti n členov aritmetičnega zaporedja, kar spet lahko izrazimo kot produkt aritmetične sredine prvega in zadnjega člena s številom členov:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(n^2 - n + 2) + (n^2 + n)}{2} \cdot n \\ &= \frac{2n^2 + 2}{2} \cdot n = n^3 + n. \end{aligned}$$

Torej je v n-ti vrstici številskega trikotnika, ki ga sestavljajo soda števila, vsota S_n enaka $n^3 + n$.

Posledično je v n-ti vrstici številskega trikotnika (2), ki ga sestavljajo vsa naravna števila, vsota enaka $(n^3 + n)/2$.

Kako bi ugotovili, kje v številskih trikotnikih (1) oziroma (3) je izbrano liho oziroma sodo naravno število m? Najprej je treba poiskati tako naravno število k, za katero je $m = \ell(k)$ ($m = s(k)$). Nato določimo, kje v trikotniku naravnih števil je ta k. Vemo, da je treba poiskati tako naravno število n, za katero je $T_{n-1} + 1 \le k \le T_n$ oziroma $n^2 - n + 2 \le 2k \le n^2 + n$. Izkaže se, da je n celi del pozitivne rešitve kvadratne enačbe $x^2 - x + 2 - 2k = 0$:

$$n = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8k - 7}}{2} \right\rfloor.$$

Celi del realnega števila ξ je največje celo število, ki ne presega ξ. To število označimo z $\lfloor \xi \rfloor$. Razlika $d = k - T_{n-1}$ pa pove, kateri po vrsti je k v n-ti vrstici trikotnika naravnih števil in s tem tudi, kje je m v n-ti vrstici trikotnika lihih oz. sodih števil.

Primer. Kje ima v trikotniku lihih števil svoje mesto število $m = 25$? Hitro ugotovimo, da je tedaj $k = 13$, $n = 5$ in $T_{n-1} = T_4 = 10$. S tem imamo še $d = 13 - 10 = 3$. Število 25 je zato tretje v peti vrsti trikotnika lihih števil.

Naloga. Poišči vsote po vrsticah v številskem trikotniku (4) za 2 zmanjšanih trikratnikov naravnih števil in poišči formulo za vsote števil po vrsticah. Na katerem mestu v trikotniku je število 2020?

$$\begin{array}{cccccccc} 1 \\ 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 \\ 19 & 22 & 25 & 28 \\ 31 & 34 & 37 & 40 & 43 \\ 46 & 49 & 52 & 55 & 58 & 61 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \tag{4}$$

×××

SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.

×××