PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 5
Strani 282–286

Ivan Vidav:

KAKO RAZREŽEMO KVADRAT NA TRIKOTNIKE Z RACIONALNIMI STRANICAMI

Ključne besede: matematika, ravninska geometrija, kvadrati, trikotniki, racionalna števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1232-Vidav.pdf

KAKO RAZREŽEMO KVADRAT NA TRIKOTNIKE Z RACIONALNIMI STRANICAMI

Kvadrat s stranico a ima diagonalo $d = a\sqrt{2}$. Ker je $\sqrt{2}$ iracionalno število, je razmerje med diagonalo in stranico kvadrata iracionalno. Če se torej stranica a izraža z racionalnim številom, se diagonala d z iracionalnim in obratno, pri racionalnem d je a iracionalen.

Diagonala razdeli kvadrat na dva enaka trikotnika. Po pravkar povedanem ta dva trikotnika nimata nikoli vseh stranic racionalnih. Ali se da morda kvadrat razrezati na več trikotnikov, ki imajo vsi same racionalne stranice? Denimo, da smo neki kvadrat tako razrezali. Njegova stranica je v tem primeru racionalna, ker je vsota nekaterih stranic trikotnikov, ki sestavljajo kvadrat, namreč tistih, ki leže na stranici kvadrata. Zaznamujmo z v najmanjši skupni imenovalec vseh ulomkov, s katerimi se izražajo dolžine stranic teh trikotnikov. Če pomnožimo stranico kvadrata in stranice vseh trikotnikov z v, dobimo večji kvadrat, ki je razrezan na trikotnike, podobne trikotnikom, s katerimi smo razrezali prvotni kvadrat. Vse stranice so zdaj cela števila. Če pa delimo vse stranice trikotnikov z dolžino stranice kvadrata, dobimo kvadrat s stranico $a = 1$, ki je spet na podoben način razrezan na trikotnike, toda le-ti nimajo več celih temveč le racionalne stranice. Iz tega izhaja, da je naloga, razrezati kvadrat s stranico $a = 1$ na trikotnike z racionalnimi stranicami, enakovredna nalogi, poiskati kak kvadrat, ki se da razrezati na trikotnike s celimi stranicami.

Brez dokaza povejmo, da kvadrata ni mogoče razrezati na tri trikotnike z racionalnimi stranicami. Zato bi zaman iskali na osnovnici AB kvadrata s stranico $a = 1$ tako točko E, da bi bili razdalji te točke od oglišč C in D racionalni števili. Denimo namreč, da smo tako točko E našli (slika 1). Zaznamujmo $\overline{AE} = x$, tako da je $\overline{EB} = 1 - x$ (zaradi $\overline{AB} = a = 1$), nadalje $\overline{ED} = u$ in $\overline{EC} = v$. Iz pravokotnih trikotnikov AED in EBC dobimo po Pitagorovem izreku enačbi

$$1 + x^2 = u^2, \quad 1 + (1-x)^2 = v^2.$$

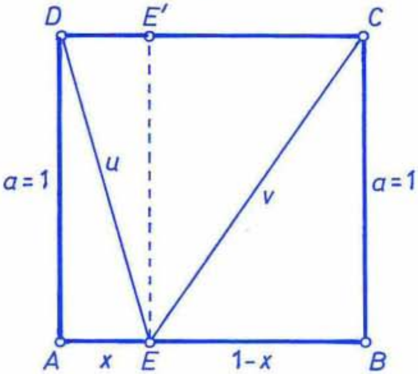
Če odštejemo drugo od prve, imamo

$$2x - 1 = u^2 - v^2,$$

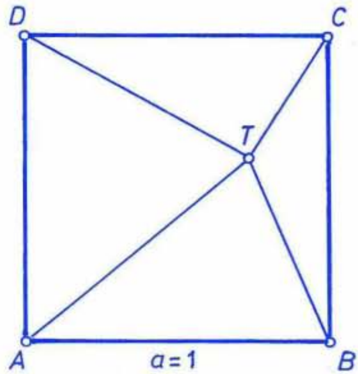
torej

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2 + 1).$$

Vidimo, da je pri racionalnih u in v tudi x racionalen. Kvadrat $ABCD$ razpade na tri trikotnike AED, EBC in ECD s samimi racionalnimi stranicami. Povedali pa smo, da kvadrata ni mogoče tako razrezati. Zato točke E z omenjeno lastnostjo na stranici AB ni. To dejstvo lahko izrazimo tudi takole: Kvadrat z racionalno stranico se ne dá razrezati na dva pravokotnika tako, da bi bile vse diagonale teh pravokotnikov racionalne. Če namreč razdelimo kvadrat $ABCD$ na pravokotnik $AEE'D$ z diagonalo u in pravokotnik $EBCE'$ z diagnoalo v (slika 1), sta u in v razdalji točke E od oglišč D in C. Ti razdalji pa nista nikoli obe racionalni.



Slika 1.



Slika 2.

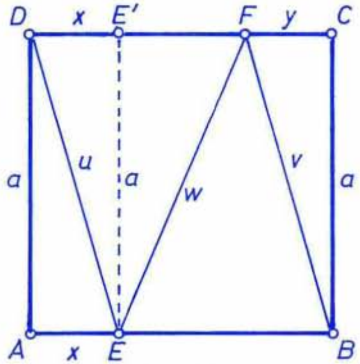
Poskušajmo zdaj rešiti nalogo s štirimi trikotniki. Imejmo spet kvadrat s stranico $a = 1$ in oglišči A, B, C, D. Če bi se nam posrečilo najti v njegovi notranjosti tako točko T, da bi bile razdalje te točke od vseh štirih oglišč racionalne, bi nalogo rešili: Trikotniki ABT, BCT, CDT in DAT z racionalnimi stranicami sestavljajo kvadrat $ABCD$ (slika 2). Žal ni znano, ali obstaja v ravnini kvadrata točka T, za katero so vse razdalje od oglišč racionalne. Po tej poti torej najbrž ne bomo uspeli.

Razrežimo zdaj kvadrat na štiri trikotnike, kakor kaže slika 3. Tu je spet E točka na osnovnici AB, F pa na nasprotni stranici CD. Kvadrat razpade na trikotnike AED, EBF, BCF in EFD. Morda lahko E in F izberemo tako, da se daljice $\overline{AE}, \overline{CF}, \overline{ED}, \overline{BF}$ in $\overline{EF}$ izražajo z racionalnimi števili? (Pri tem seveda privzamemo, da je stranica kvadrata $\overline{AB} = a$ racionalna.) V tem primeru imajo imenovani trikotniki vse stranice racionalne. Denimo, da se nam je to posrečilo. Kot smo omenili na začetku, lahko kvadrat primerno povečamo in s tem dosežemo, da se izražajo vse naštete daljice s celimi števili.

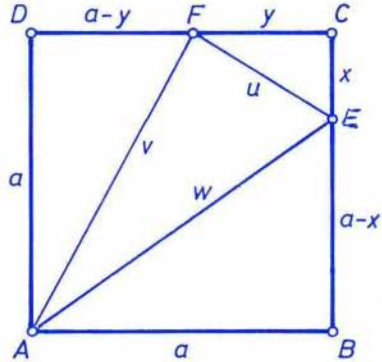
Zaznamujmo njihove dolžine takole:

$$\overline{AB} = a,\ \overline{AE} = x,\ \overline{CF} = y,\ \overline{ED} = u,\ \overline{BF} = v,\ \overline{EF} = w.$$

Ker leži E na daljici AB in F na CD, mora biti $x < a$ in $y < a$. Naj bo E' točka na stranici CD z lastnostjo, da je zveznica EE' vzporedna s stranico AD.



Slika 3.



Slika 4.

Iz pravokotnih trikotnikov AED, BCF in EFE' dobimo po Pitagorovem izreku enačbe

$$a^2 + x^2 = u^2,\ a^2 + y^2 = v^2,\ a^2 + (a - x - y)^2 = w^2. \tag{1}$$

(Kateta $E'F$ v trikotniku EFE' je enaka $|a - x - y|$.) Če nam uspe najti rešitev tega sistema enačb v naravnih številih a, x, y, u, v, w, pri kateri je $x < a$ in $y < a$, smo razrezali kvadrat s stranico a na štiri trikotnike s celimi stranicami, kakor kaže slika 3.

Sistem (1) sestavljajo tri enačbe, v njih pa nastopa kar šest neznank, torej več, kakor je enačb. Če ne postavimo nobenih pogojev glede narave neznank, zlahka dobimo nešteto rešitev: Za a, x in y izberemo poljubna števila in potem iz enačb (1) izračunamo u, v, w. Toda dobljeni u, v, w v splošnem ne bodo cela števila, tudi tedaj ne, kadar so a, x, y cela. Vzemimo npr. $a = 4$, $x = y = 3$. Iz (1) dobimo $u^2 = v^2 = 25$ in $w^2 = 20$, torej $u = v = 5$ in $w = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Števili u in v sta sicer celi, toda w je iracionalen. Vendar rešitve sistema (1) v naravnih številih obstajajo. Ena je npr.

$$a = 24,\ x = y = 7,\ u = v = 25,\ w = 26. \tag{a}$$

Ker je tu $x < a$ in prav tako $y < a$, določa ta rešitev razrez kvadrata s stranico $a = 24$ na štiri trikotnike s samimi celimi stranicami. Zaradi $x = y$ sta dva trikotnika tega razreza enaka, namreč AED in BCF, pa seveda tudi ostala dva. Podobna reštitev

$$a = 24,\ x = 7,\ y = 10,\ u = 25, v = 26,\ w = 25$$

pa nam dá razrez, pri katerem trikotnika AED in BCF nista enaka.

Če pomnožimo vsa števila a, x, y, u, v, w v kakšni celoštevilski rešitvi sistema (1) z istim naravnim številom, dobimo spet celoštevilsko rešitev tega sistema in z njo razrez kvadrata. Vendar ta razrez ni v bistvu nov, saj smo le kvadrat in trikotnike prejšnjega razreza podobno povečali. Brez dokaza povejmo, da premore sistem (1) nešteto rešitev v naravnih številih, kjer so a, x in y brez skupnega faktorja. Torej obstaja nešteto bistveno različnih razrezov kvadrata na trikotnike s celimi stranicami v smislu slike 3. Navedimo še eno rešitev. Precej velika je

$$a = 2280,\ x = 117,\ y = 1078,\ u = 2283,\ v = 2522,\ w = 2525. \qquad \text{(b)}$$

Poskušajmo rešiti nalogo še nekoliko drugače, in sicer tako, kakor kaže slika 4. Točki E in F izberemo zdaj na sosednjih stranicah BC in CD. Kvadrat potem razrežemo na štiri trikotnike ABE, ECF, AFD in AEF. Zaznamujmo

$$\overline{EC} = x,\ \overline{CF} = y,\ \overline{EF} = u,\ \overline{AF} = v,\ \overline{AE} = w.$$

Ker so ABE, ECF in AFD pravokotni trikotniki, veljajo enačbe

$$x^2 + y^2 = u^2,\ a^2 + (a - x)^2 = w^2,\ a^2 + (a - y)^2 = v^2. \qquad (2)$$

Spet iščemo rešitev tega sistema v naravnih številih a, x, y, u, v, w. Ker leži točka E na stranici BC in F na stranici CD, mora seveda biti $x < a$ in $y < a$.

Celoštevilska rešitev sistema (2) z razmeroma majhnimi števili je

$$a = 12,\ x = 21,\ y = 28,\ u = 35,\ v = 20,\ w = 15.$$

Žal za naš namen ni dobra, ker v njej nista x in y manjša od a. Pač pa rešitev

$$a = 960,\ x = 240,\ y = 161,\ u = 289,\ v = 1249,\ w = 1200 \qquad \text{(c)}$$

zadošča vsem pogojem in zato dá razrez kvadrata na štiri trikotnike s celimi stranicami v smislu slike 4.

Najmanjši pravokotni trikotnik s celimi stranicami ima kateti 3 in 4 ter hipotenuzo 5. Pri rešitvi (c) sta v trikotniku ABE kateti $\overline{BE}$ in $\overline{AB}$ v razmerju $720 : 960 = 3 : 4$ in je zato ta trikotnik podoben trikotniku s stranicami 3, 4, 5. Ali obstajajo rešitve, pri katerih je v trikotniku ECF razmerje katet $\overline{EC} : \overline{CF} = 3 : 4$? Obstajajo. Ena takih rešitev je

$$\begin{gathered} a = 11641212,\ x = 201621 = 3 \times 67207,\ y = 268828 = 4 \times 67207, \\ u = 336035,\ v = 16274180,\ w = 16321215. \end{gathered} \tag{d}$$

Piscu ni znano, ali je to najmanjša rešitev z omenjeno lastnostjo.

Kako pridemo do celoštevilskih rešitev sistemov (1) in (2)? S poskušanjem in nekoliko sreče bi verjetno kaj kmalu našli rešitev (a), s pomočjo žepnega računalnika morda tudi rešitev (b). Potrebovali pa bi izredno zmogljiv računalnik, da bi dobili s poskušanjem rešitev (d) sistema (2). Tu ne bomo opisali metod, ki nas privedejo do rešitev. Povejmo le tole: Pri obravnavanju sistemov (1) in (2) smemo privzeti, da je $a = 1$ in iščemo potem rešitve v racionalnih številih x, y, u, v, w. Tako sistem (1) kakor sistem (2) lahko prevedemo na eno samo enačbo. Ta enačba pa je taka, da zanjo obstajajo metode, ki omogočajo priti iz dane racionalne rešitve do nove racionalne rešitve. Če izhajamo iz neke začetne rešitve, ki jo po navadi uganemo, dobimo neskončno zaporedje različnih racionalnih rešitev.

Naloge.

1. V sistem (1) vstavimo $a = 7800, x = y = 2921$. Kakšni so pripadajoči u, v, w?
2. Razreži kvadrat na tri pravokotnike z racionalnimi stranicami in racionalnimi diagonalami!
3. Naj bodo naravna števila p, q, r pitagorejska trojica, se pravi, da je med njimi zveza $p^2 + q^2 = r^2$. Postavimo

$$a = pq,\ x = p(p + q),\ y = q(p + q).$$

Dokaži, da tako izbrani a, x in y določajo rešitev sistema (2) v naravnih številih. Kako se izražajo u, v, w? Ali dá ta rešitev razrez kvadrata v smislu slike 4?

Ivan Vidav