

Nalogi

↓↓↓

MARKO RAZPET

→

1. naloga. Poišči funkcijo f , ki za vsak realen x zadošča funkcijski enačbi

$$\blacksquare x(x+1)f(x) + f(1-x) = x(x^3-1). \quad (1)$$

Rešitev 1. naloge. V dano enačbo

$$\blacksquare x(x+1)f(x) + f(1-x) = x(x^3-1) \quad (2)$$

vstavimo $1-x$ namesto x in dobimo najprej

$$\blacksquare (1-x)(2-x)f(1-x) + f(x) = (1-x)((1-x)^3-1)$$

in po preureditvi

$$\blacksquare f(x) + (x-1)(x-2)f(1-x) = x(x-1)(x^2-3x+3). \quad (3)$$

Sedaj enačbi (2) in (3) obravnavamo kot sistem dveh enačb z neznankama $f(x)$ in $f(1-x)$. Sistem npr. rešimo tako, da iz (2) izrazimo

$$\blacksquare f(1-x) = x(x^3-1) - x(x+1)f(x)$$

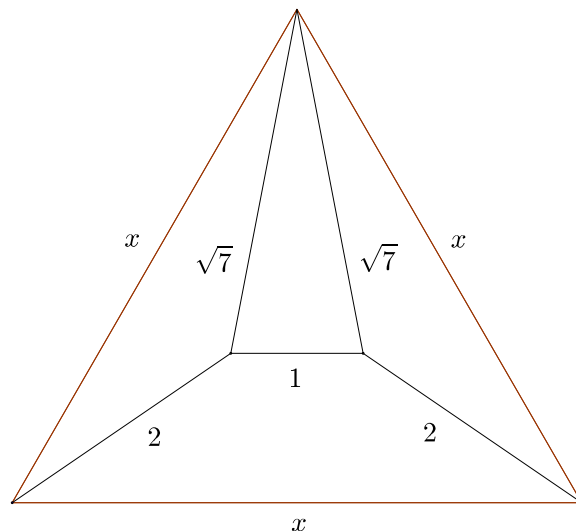
in to vstavimo v (3). Po preureditvi dobimo

$$\blacksquare f(x)(x^4-2x^3-x^2+2x-1) = x(x-1)(x^4-2x^3-x^2+2x-1).$$

Nazadnje je pred nami rezultat: $f(x) = x(x-1)$.

2. naloga. Na sliki 1 je enakostranični trikotnik s stranico x , ki je razdeljen na dva skladna raznostranična trikotnika, enakokraki trapez in enakokraki trikotnik z znanimi podatki. Izračunaj stranico x .

Rešitev 2. naloge. Višina enakostraničnega trikotnika je $v = x\sqrt{3}/2$, višina enakokrakega trikotnika pa po Pitagorovem izreku $v_1 = \sqrt{7 - (1/2)^2} = \sqrt{27/4} = 3\sqrt{3}/2$. Višino v_2 enakokrakega trapeza prav tako dobimo s Pitagorovim izrekom, če prej od



SLIKA 1.

Enakostranični trikotnik s podatki

desnega zgornjega oglišča do spodnje stranice potegnemo levemu kraku vzporedno daljico. Tako dobimo enakokraki trikotnik s krakoma dolžine 2 in osnovnico dolžine $x-1$. Potem je $v_2 = \sqrt{4 - (x-1)^2/4}$. Ker je $v = v_1 + v_2$, imamo enačbo za x :

$$\blacksquare x\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}/2 + \sqrt{4 - (x-1)^2/4}.$$

Pomnožimo jo z 2 in preuredimo:

$$\blacksquare (x-3)\sqrt{3} = \sqrt{16 - (x-1)^2}.$$

Kvadriramo in dobljeno enačbo uredimo v kvadratno enačbo

$$\blacksquare x^2 - 5x + 3 = 0,$$

ki ima pozitivno rešitev

$$\blacksquare x = (5 + \sqrt{13})/2.$$

× × ×