# PRESEK

**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 6
Strani 324–331, XXI

Marija Vencelj:

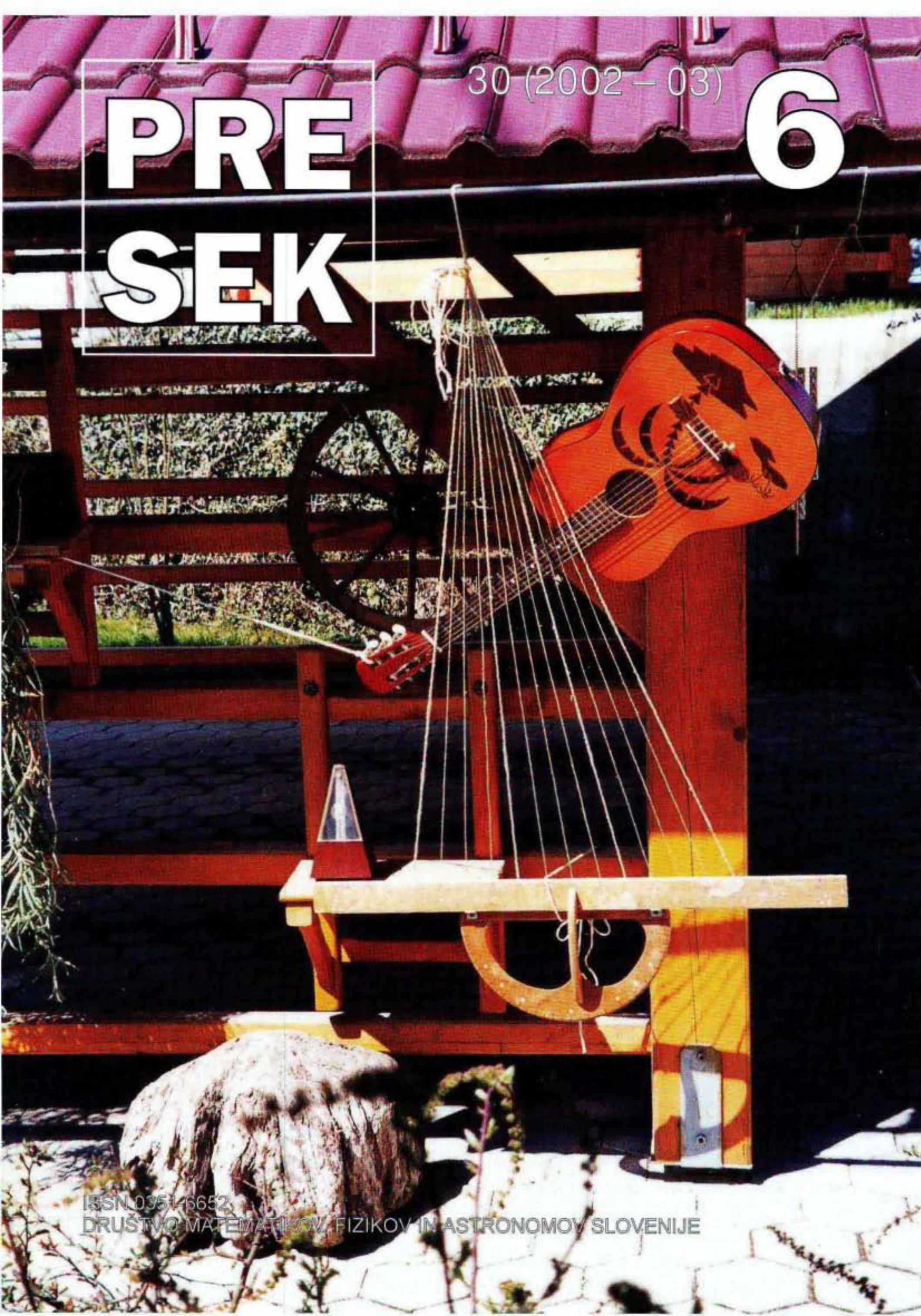
# GLASBA IN MATEMATIKA – 2. del, temperirana uglasitev in prijemi pri kitari

Ključne besede: matematika, nihanje, zvok, ton, glasba, tonska lestvica, enakomerni tonski sistem.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/30/1531-Vencelj.pdf

# PRESEK

30 (2002 – 03) 6

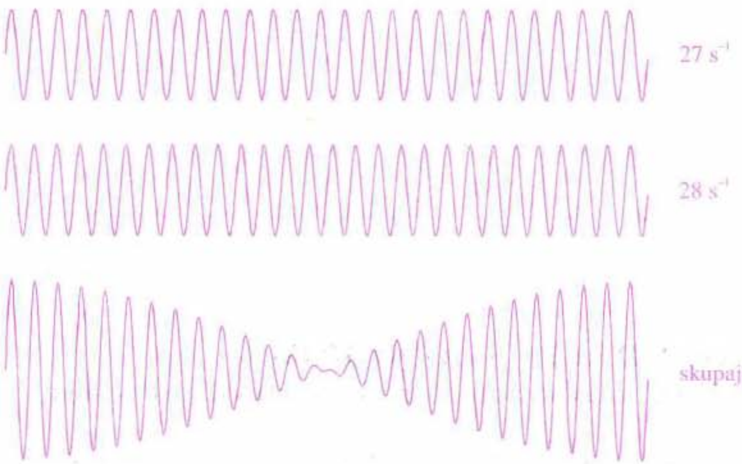


ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

# GLASBA IN MATEMATIKA – 2. del
# Temperirana uglasitev in prijemi pri kitari

## Temperirana uglasitev

V prvem delu prispevka Glasba in matematika, ki je izšel v prejšnji številki Preseka, smo se ustavili ob pojavu pitagorejske ali ditonične kome. To je nekaj manj kot 1,4 % velika napaka, ki nastane pri oktavnem intervalu, če gradimo kromatično lestvico tako, da napredujemo navzgor po kvintah in se nato po oktavah spustimo v območje začetne oktave. Podobne napake nastanejo tudi pri drugih intervalih z izjemo velike sekunde in čiste kvinte. Napaka je videti majhna, a je v glasbi lahko hudo moteča. Če namreč kombiniramo dva tona z rahlo različnima frekvencama, nastopajo trenutki, ko se tona medsebojno ojačita, kar zveni našemu ušesu precej neprijetno (slika 1). Podobno velja za sestavljanje pripadajočih alikvotnih tonov. Problem se najbolj odraža pri instrumentih s fiksnimi toni, kot sta npr. klavir in kitara.




Slika 1.

Matematično lahko pojav pitagorejske kome preprosto razložimo. Od tonike, to je osnovnega tona s frekvenco $f$, smo se dvignili za 12 kvint, kar pomeni spremembo frekvence od $f$ na

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot f = \frac{531441}{4096} \cdot f \approx 129{,}7463 \cdot f\,.$$

To naj bi dalo novo kopijo tonike, toda sedem oktav više, torej ton s frekvenco $2^7 \cdot f = 128 \cdot f$. Ali bi lahko z dvigom za večje število kvint toniko natančno ponovili, torej oktavo natančno zadeli? To bi pomenilo, da obstajata taki naravni števili $m$ in $n$, da velja $(\frac{3}{2})^n = 2^m$ oziroma da je

$$2^{m+n} = 3^n \,.$$

To pa ni možno, saj imamo za vsak par $m$, $n \in \mathbb{N}$ na levi sodo in na desni liho število.

Podobno velja tudi za napake pri drugih intervalih. Torej se bo treba zadovoljiti z bolj ali manj dobrimi približnimi vrednostmi. Nastopi vprašanje, kje skoncentrirati napako. Eden od načinov je uglasiti instrument tako, da imajo nekatere tonalitete le majhne težave, pri drugih pa se zato pojavijo precejšnja odstopanja, kar med drugim onemogoča prenos melodij med tonalitetami.

Sodobna zahodna glasba je posvojila **enakorazmerni tonski sistem**, znan pod imenom **temperirana uglasitev**. Pri njem je razmerje med frekvencama poljubnih dveh zaporednih tonov v kromatični lestvici konstantno, pri čemer je oktava edini interval, ki je akustično natančen (glej članka Glasbena lestvica I in II, Presek **16**, str. 12 in str. 66). V splošnem ni jasno, kje, kdaj in kdo je prvi začel uporabljati temperirano uglasitev. Zagotovo pa je Johann Sebastian Bach ogromno prispeval k njeni populariziraciji s tem, da je napisal 36 preludijev in fug, za vsako od dvanajstih durovih in dvanajstih molovih tonalitet vsaj po eno. Znane so pod imenom Das Wohltemperierte Klavier (prav ubrani klavir). Če pianino, klavir ali čembalo niso temperirano uglašeni, nekatera teh del na njih zelo grdo zvenijo. Zato nekateri glasbeni zgodovinarji štejejo, da je Bach dejansko uvedel temperirano uglasitev. Kakorkoli že, res pa je tudi, da so kitare enakorazmerno uglaševali že konec 16. stoletja, davno pred Bachovim rojstvom.

Enakorazmerna uglasitev razprši napako v dveh smereh:

1. V posamezni tonaliteti (durovi ali molovi lestvici) so napake v velikosti posameznih intervalov bolj ali manj enakomerno porazdeljene.
2. Nobena tonaliteta ni na boljšem kot ostale.

Zahodna glasba temelji na kromatični lestvici, sestavljeni iz dvanajstih poltonov v eni oktavi. Razmerja frekvenc njenih tonov napram toniki tvorijo geometrijsko zaporedje

$$1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ \ldots,\ r^{12} = 2\,.$$

Za konstantno razmerje med frekvencama poljubnih dveh zaporednih tonov torej velja

$$r = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059463\,. \tag{1}$$

Ker je $r$ iracionalno število in ker se harmonični intervali izražajo z racionalnimi števili, ne more biti v temperirani uglasitvi natančen noben harmonični interval. Izjema je seveda oktava, iz natančnosti katere smo v enačbi $r^{12} = 2$ izhajali.

Zakaj torej prav dvanajst tonov v eni oktavi? Ali bi bilo kaj drugače, če bi imela glasbena lestvica drugačno število tonov?

Odgovor je večplasten.

Po eni strani je zahodna glasba kot osnovne privzela določene (harmonične) intervale, ki smo jih zasledili že pri Pitagorejcih in ki se izražajo z racionalnimi razmerji. Kaže, da je taka izbira v evropski kulturi naravnejša kot druge. Dejstvo, da npr. človeškemu ušesu čista kvinta lepo zveni, potrjujejo tudi analize narodne glasbe. To je eden od intervalov, ki najpogosteje nastopajo v narodni glasbi večine evropskih narodov.

Po drugi strani nobena skala končne dolžine in s konstantnim racionalnim razmerjem med toni ne more doseči natančne oktave. Enačba $r^n = 2$ namreč nima racionalne rešitve za noben od 1 različen naraven $n$.[1] Pri $n = 1$ pa bi lestvico sestavljal samo oktavni interval, kar bi dalo hudo revno glasbo.

Izkaže pa se, da so prav v dvanajsttonski temperirani uglasitvi harmonični intervali dokaj dobro aproksimirani. Presenetljivo je, da to ne velja le za čisto kvinto, na katero je bila pozornost posebej osredotočena, ampak tudi za druge intervale. Še najslabša je velika terca, sicer pomemben interval, ki je v prvi oktavi aproksimiran z natančnostjo $2{,}5\,\mathrm{Hz}$. Ta enakomerna porazdelitev napake po vseh intervalih krepko odtehta sámo nečistost posameznih intervalov.

Z matematičnega vidika je presenetljivo še nekaj. Denimo, da želimo poiskati tako število $n$, da bi bila v enakorazmerni skali z $n$ toni v eni oktavi čista kvinta čimbolje aproksimirana. Ker ustreza čisti kvinti razmerje $\frac{3}{2}$, moramo najti tak $n$, da bo v zaporedju

$$1,\ \sqrt[n]{2},\ \sqrt[n]{2^2},\ \sqrt[n]{2^3},\ \ldots,\ \sqrt[n]{2^{n-1}},\ \sqrt[n]{2^n} = 2$$

[1] Iz $r = \frac{p}{q}$, kjer je $\frac{p}{q}$ okrajšan ulomek, sledi $p^n = 2q^n$. Zaradi enoličnega razcepa naravnih števil na praštevila je edina možna rešitev $n = q = 1$ in $p = 2$.

tudi člen, ki bo dober približek za $\frac{3}{2}$. Če pogoj $\sqrt[n]{2^m} \approx \frac{3}{2}$ malo preuredimo in logaritmiramo z osnovo 2, preide v

$$\frac{m+n}{n} \approx \log_2 3\,.$$

Iščemo torej dober racionalni približek iracionalnega števila $\log_2 3$. V principu lahko nalogo rešimo s poljubno natančnostjo. Vendar se moramo zavedati, da imenovalec $n$ okrajšanega ulomka racionalnega približka ne sme biti velik, saj bi to vodilo k lestvici z veliko toni. To bi bilo brez smisla, saj naše uho ni sposobno razlikovati med toni, ki so si zelo blizu, pa tudi ustrezni glasbeni instrumenti bi bili zaradi fizikalnih omejitev nepraktični (predstavljajte si klavir, ki ima 100 tipk v eni oktavi).

Dobro sredstvo za aproksimacijo iracionalnih števil z racionalnimi števili so verižni ulomki. O njih je Presek že večkrat pisal. Za naš primer lahko najdete ustrezno izpeljavo verižnega ulomka v Preseku **16**, str. 69. Številu $\log_2 3$ pripadajoči verižni ulomek je

$$[1; 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ 2,\ 23,\ 2,\ 2,\ 1,\ \ldots]$$

z nekaj prvimi konvergenti (to je delnimi ulomki)

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{19}{12},\ \frac{65}{41},\ \frac{84}{53},\ \frac{485}{306}\,.$$

Peti približek je $\frac{19}{12}$, čemur ustreza $n = 12$ in $m = 7$. Torej je oktava enakorazmerno razdeljena na dvanajst osnovnih intervalov, kvinto pa sestavlja sedem takih intervalov. Znano je, da daje posamezni konvergent verižnega ulomka realnega števila najboljšo racionalno aproksimacijo tega števila med vsemi okrajšanimi ulomki, ki imajo enak ali manjši imenovalec kot konvergent. To pomeni, da z nobeno enakorazmerno lestvico, ki bi imela manj kot dvanajst tonov v oktavi, ne bi mogli kvinte bolje aproksimirati. Torej je zahodna glasba, kar je presenetljivo in verjetno povsem slučajno, s temperirano uglasitvijo privzela najboljši približek k pitagorejski skali, zgrajeni s kvintami in oktavami.

Tipična kitajska lestvica ima pet tonov v oktavi. To ustreza četrtemu konvergentu razvoja števila $\log_2 3$ v verižni ulomek. Zanimivo je, da sta v njej čista kvinta in čista kvarta še kar dobro aproksimirani (napake je za dobri dve pitagorejski komi), velike in male terce pa praktično ni.

Šesti konvergent $\frac{65}{41}$ daje pričakovano zelo dobre približke za vse harmonične intervale. Vendar zahteva že 41 intervalov v eni oktavi, pri čemer je posamezni osnovni interval vreden le malo več kot pitagorejska koma. Le redki bi lahko ločili med zaporednimi toni take lestvice.

Kot zanimivost povejmo še, da je okoli leta 40 pred našim štetjem kitajski kralj Fang odkril sedmi zgornji približek. Seveda tega ni naredil z verižnimi ulomki, zato je njegov dosežek toliko bolj presenetljiv. V posebnem je odkril, da je 53 čistih kvint zelo blizu vrednosti 31 oktav.

## Kje so prijemi pri kitari?

Kitaro, brenkalo s ploskim trupom v obliki osmice, z okroglo zvočnico in dolgim vratom s številnimi prečkami (prijemi), ki se proti zvočnici čedalje bolj gostijo, gotovo poznate. Sprva so imele kitare po štiri, nato pet dvojnih strun, od 18. stoletja dalje pa imajo večinoma po šest enojnih strun z uglasitvami E, A, d, g, h in $e_1$. Na posamezni struni lahko poleg osnovnega tona zaigramo tudi višje tone, kar dosežemo tako, da s prstom med dvema prečkama pritisnemo na struno. Če sledimo prijemom od vrha vratu proti zvočnici, naraščajo toni enakorazmerno po poltonih navzgor. Pri izdelavi kitare je torej očitno posebnega pomena natančna postavitev prečk. Kje naj leže?

Oglejmo si zvezo med prijemom in višino tona nekoliko podrobneje. Višino tona oziroma osnovno frekvenco $f$, s katero struna niha, podaja formula $f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{S\rho}}$. Pri tem je $l$ dolžina strune, $S\rho$ masa strune na dolžinsko enoto in $F$ velikost sile, s katero je struna napeta. Ko je dana struna uglašena (napeta), odloča o višini tona le še dolžina strune; natančneje velja $f = k \cdot \frac{1}{l}$, kjer je $k$ konstanta. Ko s prstom pritisnemo na struno, le-ta sede na prečko, prvo ob prstu v smeri proti zvočnici, zato niha le del strune med to prečko in mestom pritrditve na trupu. Bliže zvočnici je prečka, krajši del strune niha, višji je ton. Ker toni, zaigrani na isti struni, naraščajo po poltonih navzgor, so razmerja njihovih frekvenc glede na osnovno frekvenco strune enaka

$$1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ \ldots,$$

kjer je $r = \sqrt[12]{2}$. Prvi prijem od vrha vratu leži torej na mestu, ki dopušča nihanje $\frac{1}{r}$-tine strune. Razdalja od začetka strune do prvega prijema je torej enaka $d = (1 - \frac{1}{r})l$, kjer je $l$ celotna dolžina strune. Do bi dobili lego naslednjega prijema, moramo vse iz premisleka za prvi prijem pomnožiti z $\frac{1}{r}$, od koder sledi, da so razdalje med zaporednimi prijemi (slika 2)

$$d,\ \frac{d}{r},\ \frac{d}{r^2},\ \frac{d}{r^3},\ \frac{d}{r^4},\ldots$$

Ker je $r > 1$, se prijemi v smeri proti zvočnici čedalje bolj gostijo. To lahko igralce z debelejšimi prsti ovira pri igranju visokih tonov.

Števila $r = \sqrt[12]{2}$ iz enote, ki je v našem primeru dolžina strune, ne moremo konstruirati le z uporabo neoznačenega ravnila in šestila. Problem je tako rekoč kopija nerešljivega problema o podvojitvi kocke, to je risanja števila $\sqrt[3]{2}$, saj je $\sqrt[12]{2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$, kvadratne korene pa s šestilom in ravnilom lahko narišemo.

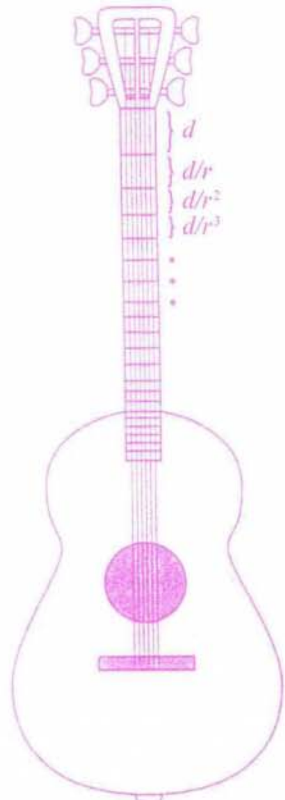
Zgodovina iskanja geometrijskih metod za umestitev prečk pri kitari je izredno zanimiva. Poiskati je bilo treba čimboljšo, pa dovolj preprosto približno konstrukcijo.

Leta 1581 je Vincenzo Galilei, oče velikega Galilea Galilea, našel za $\sqrt[12]{2}$ približek (primerjajte z (1))

$$\frac{18}{17} = 1{,}05882\ldots,$$

ki sicer ni bil najboljši, a je bil preprosto uporabljiv in zato v rabi več stoletij.

Leta 1636 je pater Marin Mersenne aproksimiral interval iz štirih poltonov s kvocientom $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$, kar da za polton odličen približek

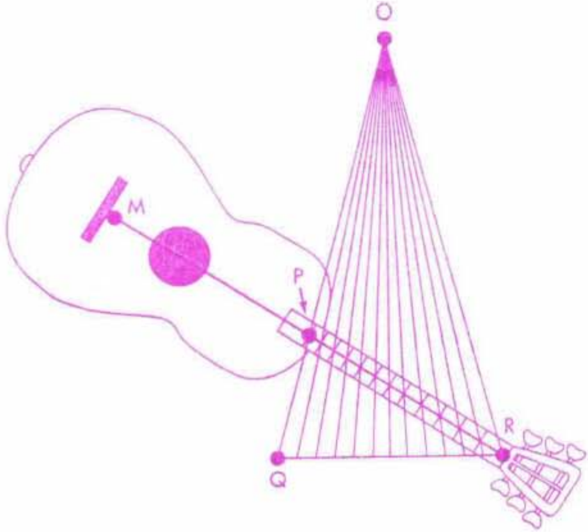



Slika 2.

$$\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}} = 1{,}05973\ldots$$

Ker vsebuje izraz le kvadratne korene, ga lahko geometrijsko konstruiramo. V praksi pa približek ni najbolj uporaben, ker moramo konstruirati kar tri kvadratne korene, kar pomeni kopičenje risarskih napak.

Potrebna je bila torej metoda, natančnejša od Galilejeve in uporabnejša od Mersennove. Leta 1743 je praktik Daniel Strähle, mož brez matematične izobrazbe, v članku, ki ga je objavila švedska akademija, predložil preprosto in praktično konstrukcijo prijemov pri kitari, ki jo prikazuje slika 3.



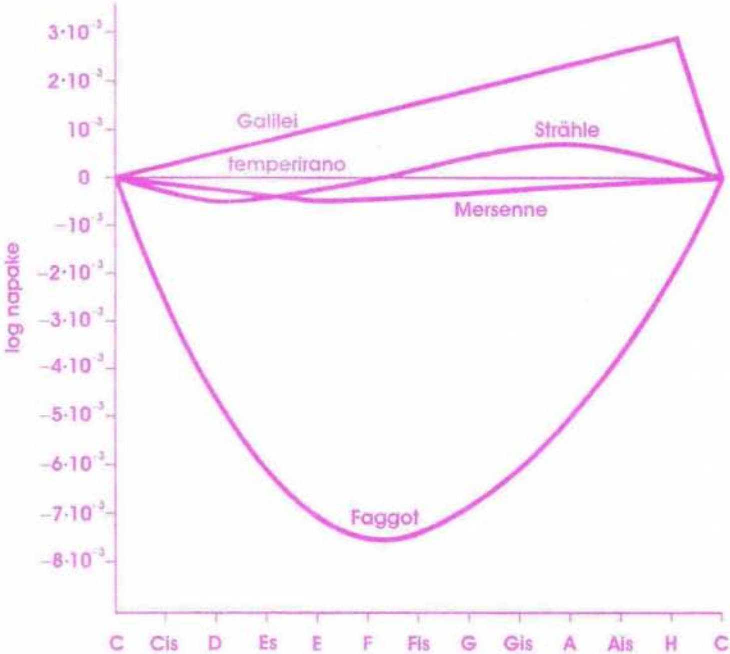

Slika 3. Strählejeva konstrukcija. Konstruiramo enakokraki trikotnik $QRO$, v katerem meri osnovnica $QR$ 12 enot in kraka $OQ = OR$ po 24 enot. Osnovnico razdelimo na dvanajst enakih delov in delilne točke povežemo z $O$. Na $OQ$ izberemo točko $P$, ki je sedem enot oddaljena od $Q$. Kitaro položimo z vratom vzdolž daljice $RP$ kot na sliki. Če pade točka $P$ v razpolovišče strune $RM$, nam spojnice točke $O$ z delilnimi točkami na osnovnici trikotnika $QRO$ že določajo mesta prvih enajstih prijemov na kitari. Sicer moramo kitaro najprej vzporedno premakniti tako, da pritrdišče strune na vratu kitare drsi po kraku $RO$, dokler razpolovišče strune ne pristane na kraku $QO$, in šele nato odčitamo prijeme.

Konstrukcija je doživela prav neverjetno usodo. Da je izjemno uporabna, je bilo sicer očitno na prvi pogled. Kaj pa natančnost? Ekonomist in geometer Jacob Faggot je opravil ustrezne račune z uporabo trigonometrije in ugotovil, da doseže konstrukcija na najslabšem mestu napako 1,7 %, kar je petkrat več, kot bi bili muziki pripravljeni sprejeti. Izračune je priložil k Strählejevemu članku in konstrukciji zapečatil usodo. Faggot je bil namreč eden od ustanovnih članov švedske akademije, tri leta njen tajnik in rangiran na četrto mesto v akademiji, pri kateri je bil njegov slavni sodobnik, botanik Linné, na drugem mestu. Če je torej Faggot izjavil, da je metoda slaba, potem je bila slaba, pa naj je Strähleju njegova kitara še tako lepo zvenela.

Faggotova ocena je obveljala za več kot 200 let, vse do leta 1957, ko je matematik J. M. Barbour z michiganske državne univerze odkril, da se je Faggot v računih zmotil. Usodno napako je zagrešil pri izračunu kota $\sphericalangle PRQ$, ko je namesto pravilnih $33°32'$ naračunal $49°14'$, kar se je odražalo na vseh nadaljnjih rezultatih. Pri popravljenih računih se je največje odstopanje z 1,7 % zmanjšalo na vsega 0,15 %.

Barbour pa se ni zadovoljil le s popravkom Faggotovih računov, zanimalo ga je tudi, ali se za veliko natančnostjo Strählejeve metode ne skriva kakšen matematični razlog. Res ga je našel. Njegova razlaga je nekoliko daljša in delno tudi presega Presekov okvir. Povejmo le, da Strählejeva metoda skriva v sebi dobro aproksimacijo funkcije $y = \sqrt[x]{2}$ s funkcijo oblike $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ na intervalu $[0, 1]$ in da so spet vpleteni verižni ulomki. Ker je Strähleja pri konstrukciji vodila zgolj izjemno dobra intuicija, se lahko samo vprašamo: "Kako mu je to sploh padlo na pamet?"

Za konec poglejmo na sliki 4 še napake posameznih konstrukcij in Faggotovega napačnega izračuna. Najhuje ga je polomil prav Faggot.




Slika 4. Graf prikazuje desetiški logaritem kvocienta približne vrednosti in prave vrednosti za tone ene oktave. Zaradi boljše preglednosti so točke povezane.

*Marija Vencelj*