Geometrija

za učiteljišča.

Sestavil

L. Lavtar,
c. kr. profesor v Mariboru.

Drugi prenarejeni natis.

Cena trdo vezani knjigi 2 K 40 h, mehko vezani 2 K.

V Ljubljani.

Tiskala in založila Ig. pl. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

1894.

Uvod.

Telo, ploskev, črta in točka.

§ 1. Vsak na vse strani omejen del prostora imenujemo **telo.** Meje telesa imenujemo **ploskve**, vse ploskve skupaj pa njegovo **površje.** Meje ploskve imenujemo **črte**, vse črte skupaj pa njen **obseg.**

Ploskve so **ravne** ali **sloke**; prve imenujemo kratko **ravnine.**

Telo, katero je od samih ravnin omejeno, imenujemo **ravnoplosko**, vsako drugo pa **slokoplosko.** Ravnine si mislimo navadno brezkončne, če ne omenjamo izrekoma nasprotnega.

Vsako na vse strani od črt omejeno ploskev imenujemo **lik** (figuro). Črte lika imenujemo njegove **stranice.** Po številu stranic so liki tri-, četvero-, peterostranični i. t. d.

Črte so **preme** ali **sloke**; prve imenujemo kratko **preme.**

Lik je **premočrten** ali **slokočrten**; prvemu so meje preme črte, drugemu sloke.

Meji črte imenujemo **točki.**

Telesa, ploskve, črte in točke imenujemo **osnovne tvore** prostora.

Katera telesa vidiš tu*? — Katera telesa vidiš v sobi? — Ali je oblika prostora, v katerem se nahajajo, različna od oblike teh teles? — Ali je ta prostor iz kake snovi, ali ima barvo, ali je luknjičav i. t. d.?

Preštej ploskve kocke, prizme, piramide i. t. d. in pokaži površje teh teles. — Ali moreš ločiti ploskev od telesa?

Preštej črte vsake ploskve pri kocki, prizmi i. t. d. in pokaži obseg ploskve. — Ali moreš črte ločiti od ploskev?

Primerjaj ploskve kocke, prizme, piramide s ploskvami cilindra, stožca in krogle.

Koliko likov nahajaš na kocki, prizmi in piramidi? — Kakšne like nahajaš na vsakem teh teles z ozirom na število stranic?

Primerjaj robove kocke, prizme in piramide z robovi cilindra in stožca. Kje in kako postajejo robovi teh teles? — Kakšen osnoven tvor je rob?

Kakšne like nahajaš pri prizmi in piramidi, pri cilindru in stožci?

Kje in kako postajejo ogli pri kocki, prizmi in piramidi?

---

* Učitelj ima n. pr. na mizi pred seboj kocko, pokončen četverostran paralelepiped, pokončno šesterostrano piramido, pokončen cilinder, pokončen stožec in kroglo. — Ta telesa poznajo že učenci, če ne, naj jim pa učitelj pové njihova imena.

§ 2. Vsako telo ima troj obmer, ono je **dolgo, široko** in **visoko** (globoko, debelo); ploskev ima dvoj obmer, ona je **dolga** in **široka**; črta ima samo jeden obmer, ona je **dolga**.

Telesa, ploskve in črte imenujemo **prostorne količine**, ker se razprostirajo.

Točka se ne razprostira, torej tudi ni prostorna količina.

Znanstvo, katero se peča s prostornimi tvori oziraje se na njihove prostorne lastnosti, imenujemo **geometrijo**. Delimo jo v dva glavna dela: **planimetrijo** in **stereometrijo**.

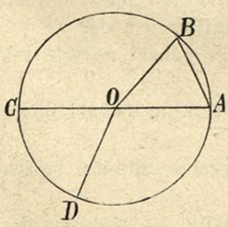
Geometrijo **tvorov v jedni in isti ravnini** ležečih imenujemo **planimetrijo**; geometrijo pa, ki se peča s prostornimi tvori, kateri **ne ležé samo v jedni jedini ravnini**, nego se še zunaj nje v prostoru raztezajo, **stereometrijo**.

§ 3. Osnovne tvore prostora moremo si tudi po premikanji stvorjene misliti.

Pot, katero premikajoča se točka za seboj pušča, je črta. Premikajoča se črta, pa ne v sebi sami, napisuje ploskev. S premikanjem ploskve, pa ne v sebi sami, postaje telo. Kedar se premika točka zmerom v isti, neizpremenjeni meri proti drugi točki, postaje prema. Mer premikanja imenujemo **mer** postale preme. Sloka črta pa postaje, ako premikajoča se točka vsak trenotek svojo mer izpreminja.

Kakšno črto napiše krogla, ako jo *a)* izpustimo na tla, *b)* ako jo vržemo napošev kvišku?

Slika 1.



§ 4. Kedar se točka A (slika 1.) tako premika v ravnini naprej, da ostane ves čas jednako oddaljena od nepremične točke O, dokler se ne povrne v svojo prvo lego, napisuje sloko črto, katero imenujemo **črto krožnico**. Ploskev omejeno od krožnice imenujemo **krožnino**. Za krožnico in krožnino rabimo mnogokrat besedo **krog**. Nepremično točko O imenujemo **središče** ali **centrum** in vsako premo od središča do katerekoli točke krožnice, kakor n. pr. OA, OB, **polumer** (radij) kroga. Premo, katera veže dve točki krožnice, imenujemo **tetivo**, n. pr. AB. Tetivo, katera gre skoz središče, kakor AC, imenujemo **premer** kroga.

Vsak del krožnice, kakor AB, imenujemo **lok**, in dolžino cele krožnice **obod** ali **periferijo** kroga. Polovico oboda imenujemo polukrog, četrti del pa **kvadrant**.

Iz povedanega sledi:

a) Vsi polumeri kroga so jednaki;

b) vsak premer kroga je dvakrat daljši od polumera;

c) vsi premeri kroga so jednaki.

Opomnja. Ako vse točke kakega tvora istemu pogoju zadostujejo, imenujemo ga **geometrijsko mesto** teh toček. Krožnica je torej geometrijsko mesto vseh toček iste ravnine, katere so od nepremične točke jednako oddaljene.

Kaj napiše končna točka kazala na uri, ko pride od dvanajstih *a)* do dvanajstih, *b)* do dveh, *c)* do šestih in *d)* do treh? Kaj napiše točka leče pri nihalu ure? — Napiši krožnico s polumerom *a)* 3 *cm*, *b)* 4 *cm*, *c)* 5 *cm* 5 *mm*!

§ 5. Toček in črt v resnici risati ne moremo; to, kar je na papirji narisano, so le znaki toček ali črt.

Prvi del.

Planimetrija.

Prvi oddelek.

Preme in koti.

1. Preme.

§ 6. Skoz jedno točko moremo načrtati brezkončno mnogo prem na vse strani, skoz dve točki jedno samo. **Dve točki določujeta popolnoma mer preme.**

Premi, kateri imata dve točki skupni, padeta skupaj in tvorita jedno samo. Premi, različni po meri, moreta imeti le jedno samo točko skupno. Pravimo: **sečeta** se v tej točki, in to skupno točko imenujemo **presečišče**.

Načrtaj točko in skoz to toliko prem, kolikor jih le hočeš. — Načrtaj dve točki in skozi nji toliko prem, kolikor jih moreš.

§ 7. Neomejeno premo imenujemo **trak**. Vsaka točka traka deli ga v dva **polutraka**; polutrak je torej na jedni strani omejena prema. Na obeh straneh omejeno premo imenujemo **daljico**, mejišči daljice pa njijini **krajišči**. Daljica med dvema točkama določuje **razdaljo** teh toček.

Vse trakove skupaj, katere načrtamo skoz isto točko, imenujemo **trakovje** (kito), skupno presečišče pa **tračišče**.

Točko zaznamenujemo s črko.

Trak zaznačujemo z dvema v njem ležečima točkama, polutrak z mejiščem in s točko v njem ležečo, daljico s krajiščema.

§ 8. Trakove in polutrakove moremo le primerjati z ozirom na njihovo mer, daljice pa z ozirom na njihovo mer in dolžino.

Premo, katera leži v meri prosto padajočega telesa, imenujemo **navpično** (vertikalno); premo ležečo v meri površja mirne vode imenujemo **vodoravno** (horicontalno). Premi, kateri ležita v isti ravnini in se ne sečeta v nobeni točki, ako ji še toliko podaljšamo, imenujemo **vzporedni.** Vzporedni premi imata obe isto mer; nevzporednici imata različno mer, ter se zadosti podaljšani sečeta. Ravnino med vzporednicama imenujemo **progo.** Da je prema AB vzporedna s premo CD, zapišemo kratko $AB \parallel CD$.

Dve daljici sta jednako dolgi, ako ji moremo tako drugo na drugo položeni misliti, da se popolnoma krijeta; drugače sta nejednaki, in sicer je ona daljša, katera na jedni strani sega čez krajišče druge, ako se stikata krajišči na drugi strani.

Načrtaj po meri na oko: *a)* navpično, *b)* vodoravno premo, *c)* dve vzporedni, *d)* dve nevzporedni premi. Načrtaj *a)* dve jednaki, *b)* dve nejednaki daljici.

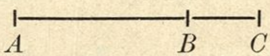
§ 9. Za primerjanje črt jemljemo jedno, n. pr. meter, s katero merimo druge; imenujemo jo **mero** ali **mersko jednoto, dolgostno jednoto.** Število, katero pové, koliko merskih jednot ima črta, imenujemo njeno **mersko število.**

Katere dolgostne jednote poznaš? — Načrtaj daljice: *a)* 2 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* 1 *dm*, *d)* 1 *dm* 5 *cm* dolge po meri na oko in z merilom.

Osnovni računi z daljicami.

§ 10. *a)* Seštevanje. Daljici AB in BC seštevati se pravi, iskati črto, katera je tako dolga, kakor obe daljici skupaj. To črto dobimo, ako podaljšamo daljico AB za daljico BC. Tedaj je

Slika 2.



$$AB + BC = AC.$$

b) Odštevanje. Daljico BC od daljice AC odštevati se pravi, iskati daljico, katera dá k BC prišteta daljico AC. To daljico dobimo, ako AC za BC skrajšamo, t. j. točko C za daljico BC proti A nazaj premaknemo. To je

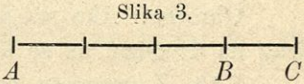
$$AC - BC = AB.$$

c) Množenje. Črto BC s številom množiti se pravi, to črto tolikokrat za sumand postaviti, kolikorkrat kaže to število. Tako je n. pr. v sliki 3.

$$4 . BC = AC.$$

d) Merjenje. Ako preiskujemo, kolikokrat je BC v AC (slika 3.), merimo AC z BC. Tako je n. pr.

Slika 3.



$$AC : BC = 4.$$

e) Deljenje. Daljico AC s številom deliti se pravi, iskati daljico, katera dá množena s tem številom daljico AC. Tako je n. pr. po prejšnjem BC četrti del od AC, t. j.

$$AC : 4 = BC.$$

Načrtaj *a)* dve daljici, *b)* tri daljice in poišči njihovo vsoto; *a)* po meri na oko, *b)* s pomočjo šestila.

Načrtaj dve daljici in poišči njihovo diferenco *a)* po meri na oko, *b)* s pomočjo šestila.

Poišči daljico, katera je 2-, 3-, 4krat tolika, kakor dana daljica.

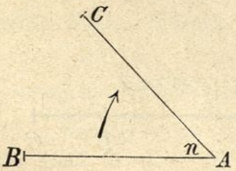
Dani sta daljša in krajša daljica, poišči *a)* na oko, *b)* s šestilom kolikokrat je druga v prvi.

Razdeli dano daljico na 2, 3, 4 jednake dele *a)* na oko, *b)* poskusoma s šestilom.

2. Koti.

§ 11. Premi AB in AC, kateri se stikata v točki A, tvorita **kot**. A imenujemo **vrh**, BA in CA **kraka** kota in ploskev med krakoma **kotno ploskev** ali **kotnino**. Kot zaznamenujemo ali z jedno samo črko, katero zapišemo v kotnino k vrhu, ali s črko pri vrhu, ali pa s tremi črkami tako, da denemo črko pri vrhu v sredo med črki pri krakih. Kot v sliki 4. imenujemo kot n, ali kot pri A ali kot CAB ali BAC.

Slika 4.



Jeden krak, tukaj n. pr. krak AB, si hočemo misliti nepremakljiv, drugi krak AC pa vrtljiv okoli nepremakljivega vrha. Ako potem zavrtimo krak AC iz lege AB v lego AC, postane kot n. Čim večja je ta vrtnja, tem večji je kot. Kolikost te vrtnje ne pa dolžina krakov določuje kolikost kota.

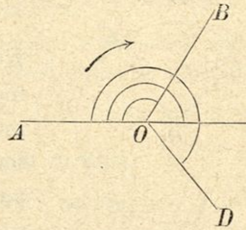
Primerjanje kotov.

§ 12. Dva kota primerjamo z ozirom na njijino kolikost, ako ja polagamo tako drug na drugega, da se krijeta nepremakljiva kraka in vrha. Ako se krijeta tudi premakljiva kraka, sta kota **jednaka**, ako pa ne, sta **nejednaka**, in sicer je oni kot manjši, čegar premakljivi krak med krakoma drugega kota leži.

Obratno: Ako sta dva kota jednaka, moremo ja tako položiti drug na drugega, da se kotnini krijeta popolnoma.

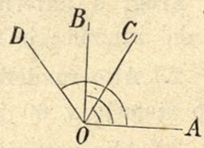
§ 13. Z vrtenjem premakljivega kraka okrog vrha dobivamo zmerom večje kote; ako zavrtimo krak toliko, da ležita oba kraka v jedni premi, pa vsak na nasprotni strani od drugega, t. j., ako je kolikost vrtnje s polukrogom zaznamenovana, tvorita **iztegnen** kot, n. pr. $\sphericalangle AOC$ (slika 5.). In ako vrtimo še dalje, da napiše točka A premakljivega kraka cel krog, padeta oba kraka skupaj v jedno premo na isto stran in tvorita **poln** kot. Polutraka istega traka tvorita torej iztegnen kot, in poln kot je dvojen iztegnen kot.

Slika 5.



Kot, ki je manjši od iztegnenega, imenujemo **otel** n. pr. $\sphericalangle AOB$ (slika 5.), večji kot od iztegnenega pa izbočen kot n. pr. $\sphericalangle AOD$ (slika 5.). Polovico iztegnenega kota imenujemo **prav** kot,* manjši kot od pravega je **oster**, večji od pravega in manjši od iztegnenega pa **top** kot. V sliki 6. je $\sphericalangle AOB$ prav, $\sphericalangle AOC$ **oster** in $\sphericalangle AOD$ top.

Slika 6.



Iz povedanega sledi:

a) Iztegnen kot je jednak 2 pravima;

b) poln kot je jednak 4 pravim;

c) oster kot je manjši od pravega in top večji od pravega, pa manjši od iztegnenega.

Kakšne kote nahajaš na kocki, paralelepipedu, 3-, 4-, 6stranični pokončni piramidi i. t. d.?

§ 14. Količine moremo le z istovrstnimi količinami meriti, torej kote le s koti. 90. del pravega kota imenujemo **stopnjo** (^{0}); 60. del stopnje **minuto** ($'$) in 60. del minute **sekundo** ($''$). Stopnja, minuta in sekunda so koti, s katerimi merimo druge, torej so jednote kotov. Število, katero pové, kolikokrat je kotna jednota v danem kotu, imenujemo **mersko število** kota.

Najpriprosteje sredstvo za merjenje kotov je krožnica.

Koliko stopenj ima *a)* prav, *b)* iztegnen, *c)* vzvišen, *d)* poln, *e)* oster, *f)* top kot?

§ 15. Kot, kateri ima svoj vrh v središči kroga, imenujemo **središčen kot.**

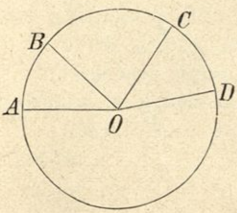
Izrek. **Pri jednakih središčnih kotih istega kroga so loki jednaki.**

---

* Prav kot hočemo zmerom kratko zaznamenovati s črko R.

Opomnja. Geometrijsk izrek imenujemo vsako geometrijsko resnico, katero še le dokazati moramo. Resnice pa, katere so same ob sebi razumljive, imenujemo **osnovne resnice**, **načela**, **aksiome** (glej aritm. str. 2). Vsak geometrijsk izrek ima dva stavka, 1. **pogoj**, 2. **trditev**. Trditev moramo dokazati, t. j. mi moramo pokazati, da je trditev neizogibno resnična, ako le velja izrečeni pogoj.

Slika 7.



Pogoj. O je središče kroga in $\sphericalangle DOC = \sphericalangle BOA$ (slika 7.).

Dokaz. Ako položimo kot DOC na kot BOA takó, da se krijeta popolnoma, kar je mogoče, ker sta ta kota po pogoji jednaka, mora tudi zarad jednakih polumerov točka D točko B in točka C točko A kriti. Ker se pa krijeta konca lokov, morata se kriti tudi loka sama, kajti drugače bi ne bile vse njijine točke od središča jednako oddaljene.

Izvodi. 1.) **Ako razdelimo poln kot v 360 stopenj, razdelimo tudi krog, s katerim načrtamo vrtenje, v 360 jednakih delov.** 360. del krožnice imenujemo **ločno stopnjo.**

2.) **Ako razdelimo kotno stopnjo v 60 minut, razdelímo tudi ločno stopnjo v 60 jednakih delov.**

3.) **Ako razdelimo kotno minuto v 60 sekund, razdelimo tudi ločno minuto v 60 jednakih delov.** 60. del ločne minute imenujemo **ločno sekundo.**

Opomnja. Vsako resnico, katera sledi neposredno ali s prav priprostim umovanjem iz danih pojmov ali iz prejšnjega izreka, imenujemo **izvod.**

§ 16. Kote moremo tudi meriti z ločnimi stopnjami, z ločnimi minutami in z ločnimi sekundami, ker je število ločnih stopenj, ločnih minut in ločnih sekund jednako številu kotnih stopenj, kotnih minut in kotnih sekund (§ 15.).

Na merjenje kotov z loki opira se raba transportérja.

Loki jednakih središčinih kotov so pa le za isti krog jednako dolgi (§ 15.), za kroge z različnimi polumeri so pa različni.

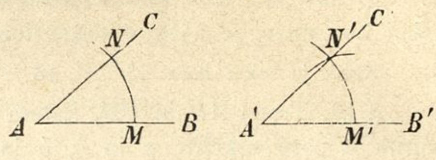
Loke istega kroga ali z jednakim polumerom imenujemo **istovrstne.**

Nariši oster, top kot in izmeri ga s transportérjem. — Načrtaj s transportérjem kot, ki ima 56^0.

Načrtaj v točki A' na premo $A'B'$ kot, ki je jednak danemu kotu BAC.

Rešitev. Napiši iz točke A s poljubnim polumerom lok MN, kateri seče kraka danega kota v točkah M in N. Z istim polumerom napiši iz A' lok $M'N'$, kateri seče $A'B'$ v točki M'; dalje napiši z razdaljo toček M in N iz M' lok, kateri seče lok $M'N'$ v točki N'. Ako potegnemo skoz točki A' in N' premo $A'C'$, je $B'A'C'$ zahtevani kot.

Slika 8.



Opomnja. Iz zadnje vaje spoznamo, da nahajamo v geometriji naloge, katere zahtevajo risanje geometrijskih tvorov po danih pogojih. Imenujemo je **naloge za načrtovanje** (konstrukcijske naloge).

Osnovni računi z istovrstnimi loki in koti.

§ 17. Osnovne račune z istovrstnimi loki izvršujemo takisto, kakor osnovne račune z daljicami, samo da nam pri računjenji z loki krog določuje mer, v kateri zdaljšujemo ali skrajšujemo lok.

Osnovni računi s koti se opirajo na osnovne račune z istovrstnimi loki, ker prve merimo tudi z drugimi.

Ako je vsota dveh kotov jednaka 2 pravima, imenujemo ja **suplementarna** kota; ako je pa vsota dveh kotov jednaka 1 pravemu, imenujemo ja **komplementarna** kota.

Dana sta dva istovrstna loka; poišči njijino *a)* vsoto, *b)* diferenco. — Dan je lok; poišči lok, ki je 2-, 3-, 4krat tolik. — Razdeli dan lok na 2, 3, 4 jednake dele *a)* na oko, *b)* poskusoma s šestilom. — Poskušaj s šestilom, kolikokrat je dan lok v danem večjem loku.

Načrtaj dva kota in ja *a)* seštej, *b)* odštej.

Rešitev. Izmeri kota z istovrstnima lokoma, seštej loka i. t. d.

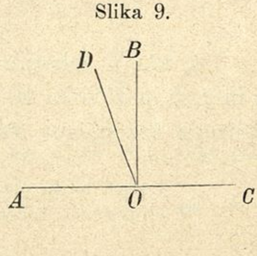
Seštej 3, 4, 5 danih kotov. — Načrtaj kot, ki je 2-, 3-, 4krat večji od danega *a)* ostrega, *b)* topega kota. Načrtaj kot in razdeli ga na 2, 3, 4 jednake dele *a)* na oko, *b)* poskusoma s šestilom. — Poskušaj s šestilom, kolikokrat je dan kot v večjem danem kotu.

Izračunaj kot, ki je 1. suplementaren, 2. komplementaren s kotom *a)* 65^0, *b)* $78^0\ 12'\ 34''$.

O sokotih.

§ 18. Polutrak OB ali tudi polutrak OD deli iztegneni kot COA na dva kota COB in BOA ali COD in DOA, katera imenujemo **sokota**. Sokota imata skupen vrh, jeden skupen krak, druga dva kraka sta pa polutraka istega traka.

Slika 9.



Iz pojma sokotov sledita ta-le izvoda:

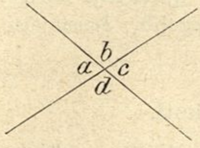
a) **Dva sokota sta suplementarna kota;**

b) **ako sta dva sokota jednaka, je vsak prav kot; ako je jeden kot oster, je njegov sokot top.**

Kolik je sokot kota $73^0\, 8'\, 43''$?

§ 19. Traka *AB* in *CD*, katera se sečeta v točki *O* (slika 10.), tvorita 4 pare sokotov *a* in *b*, *b* in *c*, *c* in *d*, *d* in *a*. Ta tvor hočemo imenovati **sokotje.**

Slika 10.



Izrek. **Dve sokotji, kateri imata jeden kot paroma jednak, imata tudi vse druge kote v istem redu paroma jednake.**

Dokaz. Vzemimo da sta *O* in *O'* sokotji in *a, b, c, d*, oziroma *a', b', c', d'*, njijini koti, in da je $\sphericalangle a = \sphericalangle a'$. Potem moremo sokotje *O'* na sokotje *O* tako položiti, da se krijeta vrha in jednaka kota, potem se pa krijeta tudi paroma podaljška krakov čez vrh teh kotov. Tedaj je

$$\sphericalangle b = \sphericalangle b', \sphericalangle c = \sphericalangle c' \text{ in } \sphericalangle d = \sphericalangle d'.*$$

§ 20. Ako tvori prema *OB* s premo *AC* dva prava kota, pravimo, da stoji *OB* **pravokotno**** (normalno) na *AC* (slika 9.), kar pišemo kratko: $OB \perp AC$. Vsaka druga prema, n. pr. *OD*, stoji **pošev** na *AC*. Točko *O* imenujemo **podnožišče** pravokotnice *OB* in poševnice *OD* z ozirom na premo *AC*.

Pravokotnice načrtujemo s pravokotnim trikotnikom iz lesa ali medi. Načrtaj na dano premo pravokotnico s pomočjo pravokotnega trikotnika *a)* v točki preme, *b)* od točke zunaj preme ležeče.

§ 21. *a)* Ako si načrtamo iz vrha iztegnenega kota več polutrakov, postane več kotov, katere imenujemo **kote nad premo.**

Izvod. **Vsota vsem kotom nad premo sta dva prava kota.**

b) Polutraki v isti ravnini in istega tračišča tvorijo več kotov, katere imenujemo **kote krog točke.**

Izvod. **Vsota vsem kotom krog točke so 4 *R*.**

Kajti vsi skupaj so jednaki polnemu kotu.

O sovršnih kotih.

§ 22. V sokotjih nahajamo pare kotov, ki niso sokoti, n. pr. *a* in *c*, *b* in *d* (slika 10.); kraka jednega kota sta le podaljška krakov druzega čez njegov vrh. Take pare kotov imenujemo **sovršne kote.**

---

* Pokaži to na obrazcih iz žice.

** «Navpično» hočemo le v pomenu «vertikalno» rabiti.

Izrek: **Sovršna kota sta jednaka.**

Pogoj: a in c sta sovršna kota.

Trditev: $a = c$.

Dokaz: $a + b = 2\,R$, ker sta sokota,
$b + c = 2\,R$, » » » ; torej (glej aritm. str. 2, IV.)

$a + b = b + c$, in ako na vsaki strani b odvzamemo (glej aritm. str. 2, VII) $a = c$.

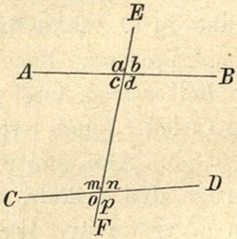
Takisto dokažemo, da je $b = d$.

Ali moreš ta izrek dokazati s pomočjo vrtenj pri postajanji sovršnih kotov?

O vzporednicah.

§ 23. Prema EF (slika 11.), katera seče premi AB in CD tvori z njima dve sokotji ter osem kotov. EF imenujemo **prečnico** (transversalo) presekanih prem AB in CD, kote c, d, m, n **notranje**, a, b, o, p pa **vnanje** kote.

Slika 11.

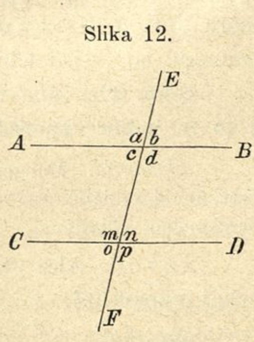


Dva notranja ali pa dva vnanja kota, ležeča na isti strani prečnice, imenujemo **prikota**, kakor c in m, d in n, a in o, b in p.

Dva notranja ali pa dva vnanja kota, ležeča na raznih stranéh prečnice in pri različnih vrhih, imenujemo **izmenična kota**, kakor c in n, d in m, a in p, b in o.

Jeden notranji in jeden vnanji kot, ležeča na isti strani prečnice pri raznih vrhih, imenujemo **protikota**, kakor a in m, b in n, c in o, d in p.

Slika 12.



§ 24. Izreki. 1.) **Ako sta dva protikota jednaka, sta** *a)* **tudi vsaka druga protikota jednaka,** *b)* **vsaka dva izmenična kota jednaka in** *c)* **vsaka dva prikota suplementarna kota** (slika 12.).*

---

* Dokaži ta izrek tako, da premakneš kot m na kot a, ne da bi krak EF spremenil svojo lego.

Pogoj. $a = m$.

1. trditev. $b = n$, $c = o$, $d = p$.

2. » $a = p$, $b = o$, $c = n$, $d = m$.

3. » $a + o = 2\,R$, $b + p = 2\,R$.

$c + m = 2\,R$, $d + n = 2\,R$.

Dokaz. 1. trditev sledi iz § 19.

2. $a = m$, po pogoji.

$p = m$, ker sta sovršna kota, torej

$$\frac{\begin{array}{l} a = m \\ p = m \end{array}}{a = p.}$$

Takisto dokažeš, da je $b = o$, $c = n$, $d = m$.

3. $a + c = 2\,R$, ker sta sokota.

$c = o$, kar smo že dokazali, torej

$a + o = 2\,R$.

Takisto dokažeš, da je $b + p = 2\,R$, $c + m = 2\,R$, in $d + n = 2\,R$.

2.) **Ako sta dva izmenična kota jednaka, sta** *a)* **tudi vsaka druga dva izmenična kota jednaka,** *b)* **vsaka dva protikota jednaka in** *c)* **vsaka dva prikota suplementarna.**

Dokaz. Recimo, da je $c = n$. Ker sta c in b sovršna kota, je tudi $c = b$, torej tudi $b = n$. Ako sta pa dva protikota jednaka, so (vsled 1.) tudi vse druge trditve tega izreka resnične.

3.) **Ako sta dva prikota suplementarna, sta** *a)* **tudi vsaka druga dva prikota suplementarna,** *b)* **vsaka dva protikota jednaka in** *c)* **vsaka dva izmenična kota jednaka.**

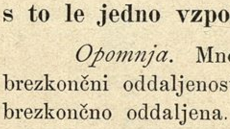
Dokaz. Vzemimo, da je $a + o = 2\,R$. Ker je tudi $a + c = 2\,R$, mora biti $a + c = a + o$, torej $c = o$. Ako sta pa dva protikota jednaka, so (vsled 1.) tudi vse druge trditve tega izreka resnične.

§ 25. Osnovna resnica. **Skoz točko zunaj preme ležečo moremo s to le jedno vzporednico potegniti.**

Opomnja. Mnogokrat pravimo: «Vzporednica CD seče premo AB v brezkončni oddaljenosti.» Po tem merite vzporednici proti isti točki, ki je brezkončno oddaljena.

Izvod. **Ako sta dve premi s tretjo vzporedni, sta tudi med seboj vzporedni.**

Slika 13.



Ako je (slika 13.) $AB \parallel MN$ in $CD \parallel MN$, je tudi $AB \parallel CD$.

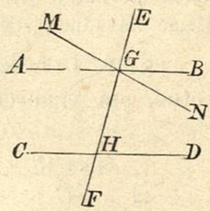
Kajti ko bi AB ne bila vzporedna s CD, bi ona zadosti podaljšana morala to sekati;

potem bi pa šle skoz isto presečišče dve vzporednici z MN, kar pa prejšnji osnovni resnici nasprotuje.

§ 26. Izreka: 1.) **Dve premi, kateri tretja seče, sta vzporedni, ako sta dva protikota, ali dva izmenična kota jednaka ali dva prikota suplementarna.**

Mislimo si v sokotjih G in H (slika 14.) traka AB in CD vrtljiva okrog vrhov G in H.

Slika 14.



Ako sta torej protikota BGE in DHE jednaka, sta kraka GB in HD za jednako zavrtena iz nepremične preme EF, torej imata isto mer ali $AB \parallel CD$.

Ker sta dva protikota tudi jednaka, ako sta dva izmenična kota jednaka ali pa dva prikota suplementarna, je gornji izrek popolnoma dokazan.

2.) **Ako seče katerakoli prema dve vzporednici, sta** *a)* **vsaka dva protikota jednaka,** *b)* **vsaka dva izmenična kota jednaka in** *c)* **vsaka dva prikota suplementarna.** (Obrat izreka 1.)

Ako le dokažemo, da sta vsled danega pogoja dva protikota jednaka, smo že dokazali celo trditev (§ 24.).

Ker sta premi AB in CD (slika 14.) vzporedni, imata isto mer, ali oni sta za jednako zavrteni od nepremične EF; torej sta protikota BGE in DHE jednaka.

Opomnja. **Obrat** izreka imenujemo izrek, v katerem je pogoj prvega trditev in trditev prvega pogoj. Ako je izrek resničen, ni zmerom njegov obrat resničen; obrat moramo za sé dokazati. N. pr. izrek § 22. je resničen, njegov obrat: «Jednaka kota sta sovršna» pa ni vsakikrat.

Prema EF seče vzporednici AB in CD v točkah G in H tako, da je $\sphericalangle AGE$ *a)* 57^0, *b)* $81^0\,49'$, *c)* $123^0\,8'\,36''$; kolik je vsak drug kot, ki postane v presečiščih?

§ 27. Dve nevzporedni premi v isti ravnini imenujemo na oni strani, kjer se sečeta, **primični** (konvergentni), na drugi strani pa **odmični** (divergentni).

Izrek. **Ako je vsota dveh notranjih prikotov na jedni strani prečnice manjša od 2** R, **sta presekani premi na tej strani primični** (slika 14.).

Pogoj. $\sphericalangle NGH + \sphericalangle GHD < 2\,R$.

Trditev. Premi MN in CD sta na desno primični.

Dokaz. Načrtajmo skoz točko G premo $AB \parallel CD$;

potem je $\sphericalangle BGH + \sphericalangle GHD = 2R$ (§ 26.) in

ker je po pogoji $\sphericalangle NGH + \sphericalangle GHD < 2R$, je tudi

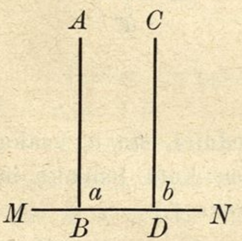
$$\sphericalangle BGH > \sphericalangle NGH$$

GN leži torej med GH in HD ali MN in CD sta na desno primični.

Opomnja. Vsako premo, katero potegnemo, da nam pomaga izvrševati dokaz ali načrtovati zahtevan tvor, imenujemo **pomočno črto**. Pomočne črte rišemo navadno črtičaste ali pikičaste.

§ 28. Izreki. 1.) **Dve premi, kateri stojita na tretji pravokotno, sta vzporedni.**

Slika 15.



Pogoj. $AB \perp MN$ in $CD \perp MN$.

Trditev. $AB \parallel CD$.

Dokaz. Ker je $AB \perp MN$, je $a = R$, in ker je $CD \perp MN$, je tudi $b = R$; torej je $a = b$ in $AB \parallel CD$. (§ 26.)

2.) **Ako stoji jedna izmed dveh vzporednic pravokotno na premi, stoji tudi druga na nji pravokotno.**

Pogoj. $AB \parallel CD$, in $AB \perp MN$.

Trditev. $CD \perp MN$.

Dokaz. Ker je $AB \parallel CD$, je $a = b$ (§ 26, 2); in ker je $AB \perp MN$, je $a = R$, torej tudi $b = R$, t. j. $CD \perp MN$.

3.) **Iz točke zunaj preme moremo na to le jedno pravokotnico izpustiti.**

Indirekten dokaz. Ako bi bilo mogoče, da z dane točke spustimo več pravokotnic na dano premo, bi morale te pravokotnice biti vzporednice (1.), kar pa je nemogoče, ker bi imele skupno točko.

Opomnja. Dokaze, s katerimi dokazujemo, da je nasprotje trditve nemogoče in torej trditev resnična, imenujemo **indirektne**.

4.) **V točki preme moremo na to le jedno pravokotnico postaviti.**

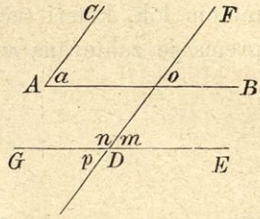
Dokaz indirekten.

§ 29. Ako merita vzporednici obe na isto stran ali pa jedna na jedno, druga na drugo stran, pravimo, da sta v istem smislu ali v nasprotnem smislu vzporedni.

Izreka. 1.) **Kota, katerih kraki so paroma v istem ali nasprotnem smislu vzporedni, sta jednaka; kota pa, v katerih sta dva kraka v istem, druga dva kraka pa v nasprotnem smislu vzporedna, sta suplementarna.**

Dokaz. Recimo, da je (slika 16.) $GE \parallel AB$ in $DF \parallel AC$; potem so kraki kotov a in m paroma v istem smislu in kotov a in p v nasprotnem smislu vzporedni. Kraki kotov a in n so tudi paroma vzporedni, vendar sta dva kraka v istem, druga dva pa v nasprotnem smislu vzporedna.

Slika 16.



Ker je $a = o$ in $m = o$, je tudi $a = m$.

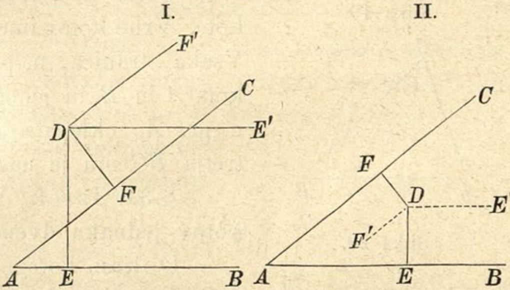
Ker je vsled dokaza $a = m$, in $p = m$, je tudi $a = p$.

Nadalje je $n + m = 2\,R$, torej tudi $n + a = 2\,R$.

2.) **Ako stojé kraki dveh kotov paroma pravokotno drug na drugem, sta kota jednaka ali suplementarna.**

Dokaz. Vzemimo, da je $DE \perp AB$ in $DF \perp AC$ (slika 17.). Zavrtimo kot EDF za 90^0 okoli nepremične točke D, da prideta DE in DF v lego DE' in DF'.

Slika 17.



V I. so potem kraki kotov BAC in $E'DF'$ paroma v istem smislu vzporedni, torej je $\sphericalangle E'DF' = \sphericalangle BAC$ ter tudi $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC$.

V II. so kraki kotov BAC in $E'DF'$ tudi paroma vzporedni, vendar sta dva kraka v istem, druga dva pa v nasprotnem smislu vzporedna. Torej je

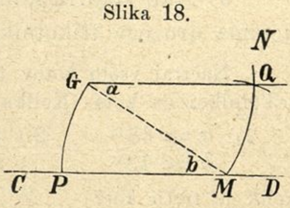
$\sphericalangle E'DF' + \sphericalangle BAC = 2\,R$, in zato tudi $\sphericalangle EDF + \sphericalangle BAC = 2\,R$.

Naloga za načrtovanje.

Načrtaj skoz dano točko *G* zunaj dane preme *CD* s to vzporednico.

Rešitev. 1. Potegni skoz točko G (slika 14.) premo, katera seče CD v točki H; potem načrtaj v točki G na GH $\sphericalangle HGB = \sphericalangle FHD$; krak GB je zahtevana vzporednica (§ 26., 1.).

Slika 18.



Rešitev. 2. Napiši iz G z dosti velikim polumerom lok MN, potem iz M

z istim polumerom lok GP in slednjič iz M s tetivo GP kot polumerom lok, kateri seče lok MN v Q; skoz točki G in Q potegnena prema je zahtevana vzporednica (§ 26., 1.).

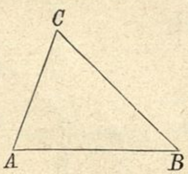
Drugi oddelek.

O premočrtnih likih v obče.

1. Trikotnik.

§ 30. Raven premočrten lik, kateri je omejen od treh daljic, imenujemo **trikotnik**.

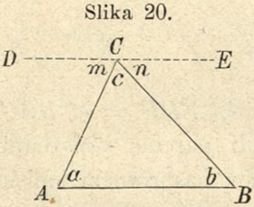
Slika 19.



Vsak trikotnik ima tri stranice in tri kote. Vrhe kotov imenujemo **oglišča** trikotnika. Vsaka stranica, n. pr. AB, ima dva priležna kota A in B in jeden nasproten C. Vsak kot, n. pr. A, oklepata dve stranici AB in AC, tretja BC mu je nasprotna.

§ 31. Izrek. **V trikotniku je vsota vseh kotov jednaka dvema pravima.**

Slika 20.



Dokaz. Potegnimo skoz točko C (slika 20.) $DE \parallel AB$, potem je

$$\left.\begin{array}{l} a = m, \\ b = n, \end{array}\right\} \text{ po § 26., 2;}$$
$$c = c.$$

$$\text{torej } a + b + c = m + n + c;$$

ker je pa $m + n + c = 2\,R$ (§ 21., a), je tudi $a + b + c = 2\,R$.

Izvoda.

a) Vsota dveh kotov trikotnika je manjša od dveh pravih; v trikotniku more torej le jeden prav in le jeden top kot biti, druga dva kota morata biti ostra.

b) Ako sta dva kota jednega trikotnika paroma jednaka dvema kotoma druzega trikotnika, morata biti tudi tretja kota obeh jednaka.

Načrtaj vsoto kotov trikotnika *a)* posebej na strani, *b)* zraven jednega trikotnikovega kota. Kolika je vsota vsem? V trikotniku sta dva kota

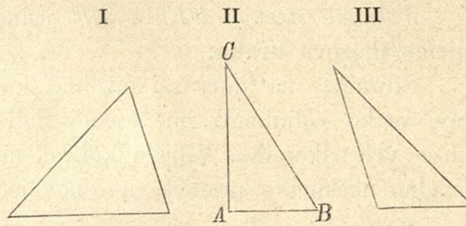
1.) $a = 68^0$	2.) $a = 35^0\ 57'$	3.) $a = 55^0\ 39'\ 25''$
$b = 73^0$	$b = 102^0\ 18'$	$b = 81^0\ 17'\ 46''$

kolik je tretji kot?

§ 32. Trikotnike delimo z ozirom na kote v **ostrokotne, pravokotne** in **topokotne.**

Trikotnik je **ostrokoten,** ako so vsi trije koti ostri; **pravokoten,** ako ima prav, **topokoten,** ako ima top kot. V sliki 21. je I ostrokoten, II pravokoten in III topokoten trikotnik.

Slika 21.

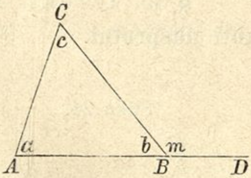


V pravokotnem trikotniku imenujemo stranico, katera je pravemu kotu nasprotna, **hipotenuzo;** stranici pa, kateri pravi kot oklepata, **kateti.** Ostrokotne in pravokotne trikotnike imenujemo sè skupnim imenom **poševnokotne** trikotnike.

§ 33. Ako podaljšamo v trikotniku jedno stranico, tvori podaljšek sè stično stranico kot, katerega imenujemo **vnanji kot** trikotnika. Kot *CBD* (slika 22.) je n. pr. vnanji kot trikotnika *ABC.*

I z r e k. **Vsak vnanji kot trikotnika je jednak vsoti notranjih njemu nasprotnih kotov.**

Slika 22.



D o k a z. Ker je $m + b = 2R$ in $a + b + c = 2R$, je tudi $m + b = a + b + c$, ali, ako odvzamemo kot b na obeh stranéh, $m = a + c$.

I z v o d. Vsak vnanji kot trikotnika je večji od notranjega, njemu nasprotnega.

V trikotniku sta dva notranja kota

a) 43^0 in 71^0, *b)* $59^0\,27'\,45''$ in $102^0\,8'\,52''$;

kolik je nasprotni vnanji kot?

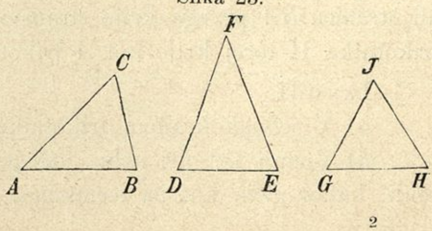
V pravokotnem trikotniku je jeden vnanji kot na hipotenuzi

a) 98^0, *b)* $145^0\,28'\,50''$;

kolik je drugi vnanji kot na hipotenuzi?

§ 34. Oziraje se na stranice delimo trikotnike v **raznostranične, jednakokrake** in **jednakostranične** (slika 23.).

Slika 23.



Trikotnik, v katerem ni nobedna stranica nobedni drugi jednaka, imenujemo

raznostraničen, kakor ABC; trikotnik, v katerem sta dve stranici jednaki, imenujemo **jednakokrak**, kakor DEF; trikotnik pa, v katerem so vse stranice jednake, imenujemo **jednakostraničen**, kakor GHJ. Jednaki stranici DF in EF jednakokrakega trikotnika imenujemo njegova **kraka**.

Stranico, na katero si mislimo katerikoli trikotnik postavljen (torej vsako poljubno), imenujemo tudi **osnovnico** in tej nasprotno oglišče **vrh** trikotnika. V jednakokrakem trikotniku jemljemo vender navadno nejednako stranico za osnovnico.

Načrtaj sè šestilom

a) raznostraničen trikotnik, v katerem je $AB = 4$ *cm*, $AC = 3$ *cm*, $BC = 2$ *cm*. — V kakšni črti ležé točke, katere so od krajišč stranice AB 3 *cm* in točke, katere so od onih krajišč 2 *cm* oddaljene?

Kje leži torej vrh C?

b) jednakokrak trikotnik, v katerem je

$$DE = 5 \text{ cm}, \quad DF = 4 \text{ cm};$$

c) jednakostraničen trikotnik, v katerem je $GH = 4{\cdot}5$ *cm*.

Na katerem telesu nahajaš jednakokrake, na katerem jednakostranične trikotnike?

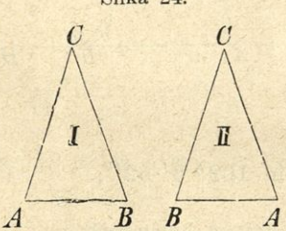
Zavisnost stranic trikotnika od nasprotnih kotov in obratno.

§ 35. Izreki. 1.) **Jednakim stranicam trikotnika so jednaki koti nasprotni.**

Pogoj. $AB = BC$.

Trditev. $\sphericalangle B = \sphericalangle A$.

Slika 24.



Dokaz. Trikotnik ima zgornjo (sprednjo) in spodnjo (zadnjo) stran. Mislimo si trikotnik I obrnen, da postane spodnja stran zgornja (glej II), in položimo trikotnik II na trikotnik I tako, da krije točka C točko C, kot C pa kot C, kar je mogoče, ker sta kota isti kot trikotnika ABC; potem padeta stranici CB in CA trikotnika II na stranici CA in CB trikotnika I, in ker je $AC = BC$, krijeta točki B in A trikotnika II točki A in B trikotnika I, ali stranica BA prvega krije stranico AB druzega trikotnika. Kot B trikotnika II torej krije kot A trikotnika I, tedaj je $\sphericalangle B = \sphericalangle A$.

Izvodi.

a) V jednakokrakem trikotniku sta kota na osnovnici jednaka.

b) Vnanji kot pri vrhu jednakokrakega trikotnika je dvakrat tolik, kakor vsak kot na osnovnici.

c) V jednakostraničnem trikotniku so vsi trije koti jednaki in vsak ima 60^0.

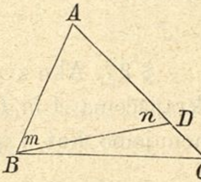
2.) **V vsakem trikotniku je večji stranici večji kot nasproten** (slika 25.).

Pogoj. $AC > AB$.

Trditev. $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$.

Dokaz. Naredi $AD = AB$ in zveži B in D z daljico BD. Potem je v jednakokrakem trikotniku ABD $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ADB$. Ker je pa $\sphericalangle CBA > \sphericalangle DBA$, je tudi $\sphericalangle CBA > \sphericalangle BDA$. Dalje je $\sphericalangle BDA > \sphericalangle BCA$ (§ 33. izv.), torej tembolj $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$.

Slika 25.



3.) **V vsakem trikotniku so jednakim kotom jednake stranice nasprotne.**

Pogoj. $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

Trditev. $BC = AC$.

Indirekten dokaz. Ako bi ne bila $BC = AC$, morala bi biti $BC \gtrless AC$ in $\sphericalangle A \gtrless B$ (2), kar pa pogoju nasprotuje. Torej mora biti $BC = AC$.

4.) **V vsakem trikotniku je večjemu kotu večja stranica nasprotna.**

Dokaz indirekten kakor pri 3.

Izvodi.

a) V pravokotnem trikotniku je hipotenuza večja od vsake katete.

b) V topokotnem trikotniku je topemu kotu nasprotna stranica največja.

c) Izmed vseh daljic, katere potegnemo od dane točke zunaj dane preme do te, je pravokotnica najkrajša.

Kajti vsaka druga daljica je hipotenuza pravokotnega trikotnika, pravokotnica pa kateta.

Pravokotnico, katero spustimo iz točke zunaj preme na to, imenujemo **razdaljo** ali **razstoj** točke od preme.

V jednakokrakem trikotniku je kot pri vrhu $c = 62^0\ 3'\ 54''$; kolik je vsak kot na osnovnici?

Kot na osnovnici jednakokrakega trikotnika je $a = 34^0\ 15'\ 6''$; kolik je *a)* kot pri vrhu, *b)* vnanji kot pri vrhu?

Kolik je vsak kot jednakokrakega pravokotnega trikotnika?

Kolik je vsak kot jednakokrakega trikotnika, ako je kot pri vrhu *a)* ravnotolik, *b)* dvakrat tolik, *c)* polovica od kota na osnovnici?

§ 36. Ako spustimo v trikotniku ABC (slika 27.) od vrha C na osnovnico AB pravokotnico CD, imenujemo to premo **višino** trikotnika.

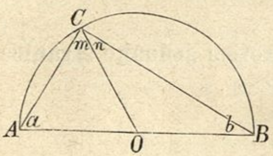
Lega višine zavisi od kakovosti kotov na osnovnici.

Kedaj pade višina trikotnika *a)* med stranici, *b)* v stranico, *c)* zunaj trikotnika?

Kot v polukrogu.

§ 37. Ako zvežemo kako točko polukrožnice, n. pr. C (slika 26.), s krajiščema A in B njijinega premera, dobimo kot ACB, katerega imenujemo **kot v polukrogu.**

Slika 26.



Izrek. **Kot v polukrogu je prav kot.**

Pogoj. Vzemimo, da je $\sphericalangle ACB$ (slika 26.) kot v polukrogu.

Trditev. $\sphericalangle ACB = R$.

Dokaz. Načrtaj OC; potem je $OA = OB = OC$, ker so polumeri, in v jednakokrakih trikotnikih AOC in BOC je $\sphericalangle m = \sphericalangle A$ in $\sphericalangle n = \sphericalangle B$, torej $\sphericalangle m + \sphericalangle n = \sphericalangle A + \sphericalangle B$ ali $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

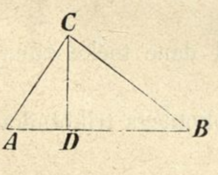
Iz tega sledi:

$2. \sphericalangle ACB = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle ACB = 2R$ in $\sphericalangle ACB = R$.

Medsebojna zavisnost stranic trikotnika.

§ 38. Izreka. 1.) **V vsakem trikotniku je vsota dveh stranic večja od tretje.**

Slika 27.



Dokaz. Vzemimo, da je v trikotniku ABC (slika 27.) AB največja stranica in $CD \perp AB$, potem je (§ 35., 4, izv. *a)*

$AC > AD$, in

$BC > BD$, torej

$AC + BC > AD + BD$ (aritm. str. 20, 6) ali $AC + BC > AB$.

Tem bolj pa je $AB + BC > AC$ in $AB + AC > BC$.

2.) **V vsakem trikotniku je diferenca dveh stranic manjša od tretje.**

Ker je $AB < AC + BC$ in $BC < AB + AC$, je tudi (aritm. str. 24, 5) $AB - AC < BC$, $AB - BC < AC$ in $BC - AC < AB$.

Načrtaj trikotnik, v katerem je

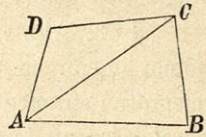
a) $AB = 6$ *cm*, $AC = 4$ *cm*, $BC = 3{\cdot}6$ *cm*, *b)* $AB = 7$ *cm*, $AC = 2$ *cm*, $BC = 4$ *cm*.

2. Četverokotnik.

§ 39. Raven lik, omejen od štirih daljic, imenujemo **četverokotnik.** Daljico med dvema nasprotnima ogliščema kakor AC (slika 28.) imenujemo **diagonalo** (prekotnico).

Četverokotnik ima štiri stranice, štiri kote in dve diagonali.

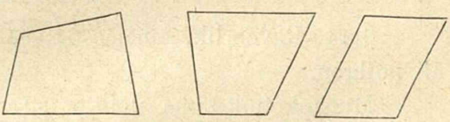
Slika 28.



§ 40. Oziraje se na medsebojno lego stranic delimo četverokotnike v **trapecoide, trapece** in **paralelograme** (slika 29.).

Slika 29.

I II III



Četverokotnik, v katerem ni nobedna stranica z drugo vzporedna, imenujemo **trapecoid**, kakor I. Četverokotnik, v katerem sta le dve nasprotni stranici vzporedni, drugi dve pa ne, imenujemo **trapec**, kakor II; četverokotnik pa, v katerem sta po dve nasprotni stranici vzporedni, **paralelogram** (vzporednik) kakor III.

Načrtaj *a)* paralelogram, *b)* trapec po meri na oko.
Na katerih telesih nahajaš *a)* paralelograme, *b)* trapece?

§ 41. Izrek. **V četverokotniku je vsota vseh kotov jednaka štirim pravim.**

Dokaz. Diagonala deli četverokotnik (slika 28.) v dva trikotnika. Vsota vseh kotov v jednem trikotniku je $2R$, torej v obeh trikotnikih, t. j. v četverokotniku $4R$.

Načrtaj vsoto vseh četverokotnikovih kotov *a)* posebej na strani, *b)* zraven jednega četverokotnikovega kota, n. pr. zraven kota B (slika 28.). Kolika je vsota vsem?

§ 42. Izrek. **V paralelogramu sta vsaka dva nasprotna kota jednaka.**

Dokaz. Po dva isti stranici priležna kota sta po § 26., 2, jednaka dvema pravima, torej tudi po dva nasprotna kota jednaka.

Izvoda.

a) Ako je v paralelogramu jeden kot prav, so tudi vsi drugi.

b) Ako je v paralelogramu jeden kot poševen, so tudi vsi drugi.

Paralelogrami so torej ali **pravokotni** ali **poševnokotni.**

Kako ležita v paralelogramu kraka jednega kota oziraje se na kraka nasprotnega kota? — Kaj sklepaš iz te lege?

V paralelogramu ima jeden kot *a)* $90^0\ 18'\ 45''$; kolik je vsak drugih treh kotov?

§ 43. Ako vzamemo jedno stranico paralelograma za osnovnico, potem imenujemo pravokotnico, katero spustimo iz katerekoli točke nasprotne stranice na osnovnico, **višino** paralelograma. V pravokotnem paralelogramu jemljemo jedno od dveh stikajočih se stranic za osnovnico, drugo za višino.

Višino trapeca imenujemo pravokotnico od točke jedne vzporednice do druge.

Načrtaj s trikotnikom iz lesa višino *a)* paralelograma, *b)* trapeca.

3. Mnogokotnik.

§ 44. Raven lik, omejen od več daljic, imenujemo **mnogokotnik** ali **poligon**.

Mnogokotnik ima toliko stranic, kolikor kotov in kolikor oglišč. Koti morejo biti otli in vzvišeni.

Dve oglišči mnogokotnika, kateri nista zvezani sè stranico, imenujemo nasprotni; vsako daljico med dvema nasprotnima ogliščema pa **diagonalo** (prekotnico) mnogokotnika.

Število diagonal, katere moremo potegniti iz jednega oglišča mnogokotnika, je za tri manjše od števila stranic. Te diagonale razdelé mnogokotnik v trikotnike, katerih je za dve menj kakor stranic.

Potegni v petero-, šestero-, sedmero-kotniku od jednega oglišča vse mogoče diagonale in primerjaj število *a)* diagonal, *b)* trikotnikov sè številom stranic mnogokotnika.

§ 45. Oziraje se na število stranic razlikujemo tristranične mnogokotnike ali **trikotnike**, četverostranične ali **četverokotnike**, peterostranične ali **peterokotnike**, ... *n*terostranične ali *n* **terokotnike**.

Oziraje se na kolikost stranic in kotov razlikujemo **jednakostranične** in **raznostranične**, **jednakokotne** in **raznokotne** mnogokotnike.

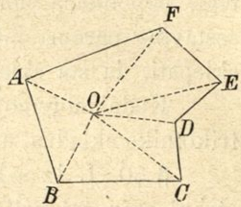
Jednakostraničen in jednakokoten mnogokotnik imenujemo **pravilen**; vsak drug mnogokotnik je **nepravilen**.

Na katerih telesih nahajaš pravilne mnogokotnike?

§ 46. Izrek. **Vsota vseh kotov v mnogokotniku znaša dvakrat toliko pravih, kolikor ima mnogokotnik stranic, menj štiri prave.**

Dokaz. Recimo, da ima mnogokotnik $ABCD \ldots$ n stranic. Ako potegnemo iz točke O, ležeče v mnogokotniku, do vseh oglišč daljice OA, OB, ..., ga razdelimo na n trikotnikov; vsota kotov teh trikotnikov znaša $2nR$, vsota kotov okoli točke O $4R$, torej vsota vseh kotov mnogokotnika $2nR - 4R$.

Slika 30.



Iz tega sledi:

a) Vsota kotov
trikotnika je $2R = 180^0$,
četverokotnika je $4R = 360^0$,
peterokotnika je $6R = 540^0$,
šesterokotnika je $8R = 720^0$ i. t. d.

b) Vsak kot pravilnega n tero kotnika znaša $2R - \frac{4R}{n}$; tedaj

kot pravilnega trikotnika $180^0 - \frac{360^0}{3} = 60^0$
» » četverokotnika $180^0 - \frac{360^0}{4} = 90^0$
» » peterokotnika $180^0 - \frac{360^0}{5} = 108^0$
» » šesterokotnika $180^0 - \frac{360^0}{6} = 120^0$ i. t. d.

Tretji oddelek.

Skladnost premočrtnih likov.

§ 47. Dva prostorna tvora, katera si moremo tako drug na drugega položena misliti, da se krijeta popolnoma, imenujemo **skladna** (kongruentna). Skladna prostorna tvora se ne razlikujeta čisto nič, nahajata se samo na različnih mestih.

Znak skladnosti je $\cong$.

1. Skladnost trikotnikov.

§ 48. Dva trikotnika, katera se krijeta popolnoma, torej skladna trikotnika, imata vse tri kote in vse tri stranice paroma jednake.

Iz tega sledi:

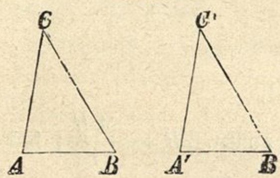
V skladnih trikotnikih so jednakim kotom jednake stranice nasprotne in jednakim stranicam so jednaki koti nasprotni.

§ 49. Navadno zadostujejo tri sestavine trikotnika, da nam tega popolnoma določujejo; ako imata torej dva trikotnika le tri sestavine paroma jednake, moremo v obče, vender ne zmerom, tudi sklepati, da sta skladna.

Kedaj moremo iz treh paroma jednakih sestavin sklepati, da sta dva trikotnika skladna, nam povedó ti-le štirje izreki o skladnosti trikotnikov.

§ 50. I. izrek. **Dva trikotnika sta skladna, ako imata jedno stranico in tej priležna kota paroma jednaka.**

Slika 31.



Pogoj. $AB = A'B'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$.

Trditev. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Položimo v mislih $\triangle A'B'C'$ tako na $\triangle ABC$, da padeta točki A' in B' na točki A in B, kar je mogoče, ker je $AB = A'B'$. Potem pa krijeta kota A' in B' kota A in B, ker sta s tema paroma jednaka, in stranica $A'C'$ mora v mer stranice AC, stranica $B'C'$ pa v mer stranice BC pasti. Stranici $A'C'$ in $B'C'$ se morata torej na istem mestu sekati kakor stranici AC in BC, ali presečišče C' prvih dveh mora pasti na presečišče C zadnjih dveh. Trikotnika se torej krijeta popolnoma, ona sta skladna.

Izvod. Dva trikotnika sta skladna, ako imata jedno stranico, jeden tej priležen in nasproten kot paroma jednake.

Kajti potem imata tudi drugi priležni kot paroma jednak.

Kedaj sta po tem izreku dva jednakokraka trikotnika skladna? Kedaj dva pravokotna?

§ 51. II. izrek. **Dva trikotnika sta skladna, ako imata dve stranici in kot, katerega te dve stranici oklepata, paroma jednake** (slika 31.).

Pogoj. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ in $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

Trditev. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Položimo v mislih trikotnik $A'B'C'$ na $\triangle ABC$ tako, da krije kot A' kot A, kar je mogoče, ker sta jednaka. Potem pa padeta $A'C'$ in $A'B'$ v mer AC in AB in točka C' na točko C, točka B' na točko B, ker je $AC = A'C'$ in $AB = A'B'$. Trikotnika se torej krijeta popolnoma ter sta skladna.

Izvod. Dva pravokotna trikotnika sta skladna, ako imata obe kateti paroma jednaki.

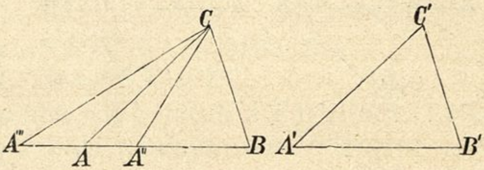
Kedaj sta po tem izreku dva jednakokraka trikotnika skladna?

§ 52. III. izrek. **Dva trikotnika sta skladna, ako imata dve stranici in kot, kateri je večji teh stranic nasproten, paroma jednake** (slika 32.).

Pogoj. $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $AC > BC$, tedaj tudi $B'C' > A'C'$, in $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$.

Trditev. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Slika 32.

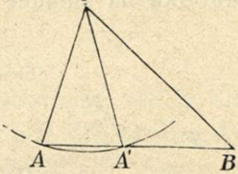


Dokaz. Položimo v mislih trikotnik $A'B'C'$ tako na $\triangle ABC$, da krije kot B' kot B, kar je mogoče, ker sta jednaka; potem krije stranica $B'C'$ stranico BC in točka C' točko C, ker je $BC = B'C'$, in stranica $B'A'$ pade v mer stranice BA. Točka A' pa mora tudi pasti na točko A; kajti drugače bi morala ali v stranici AB, n. pr. na točki A'', ali v podaljšku te stranice, n. pr. na točki A''', ležati. Ako, bi točka A' ležala na točki A'', bi bil $\triangle A''CB \cong \triangle A'B'C'$, torej $A''C = A'C' = AC$ ali trikotnik $AA''C$ bi bil jednakokrak in kota $AA''C$ in CAA'' ostra; potem bi pa bil kot $BA''C$ top kot in $BC > A''C$ (§ 35., 4), torej tudi $BC > AC$, kar pa pogoju nasprotuje. Takisto dokažemo, da točka A' ne more pasti na točko A''', da torej na vsak način točko A kriti mora. Potem se pa krijeta trikotnika popolnoma ali $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Izvod. Dva pravokotna trikotnika sta skladna, ako imata hipotenuzo in jedno kateto paroma jednaki.

Dostavek. Umovanje prejšnjega dokaza opira se na pogoj, da je jednak kot večji od paroma jednakih stranic nasproten. Brez tega pogoja ne velja ono umovanje.

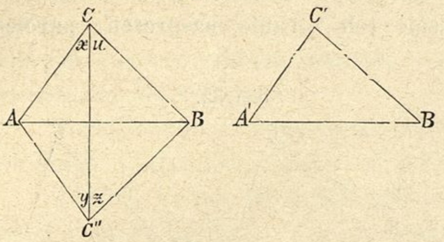
Slika 33.



Ako imata tedaj dva trikotnika **dve stranici in manjši teh stranic nasproten kot paroma jednake**, ne smemo sklepati, da sta trikotnika skladna. Res je v trikotnikih ABC in $A'BC$ (slika 33.) $AC = A'C$, $BC = BC$, kjer je $AC = A'C < BC$ in $\sphericalangle B = \sphericalangle B$, in vender trikotnika nista skladna, ker je $\triangle A'BC$ le del $\triangle ABC$.

§ 53. IV. izrek. **Dva trikotnika sta skladna, ako imata vse tri stranice paroma jednake** (slika 34.).

Slika 34.



Pogoj. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

Trditev. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Položimo v mislih trikotnik $A'B'C'$ tako k trikotniku ABC, da se največi stranici krijeta popolnoma, da leži točka A' na točki A in točka B' na točki B in da pade C' na nasprotno stran stranice AB, na točko C''. Potem sta trikotnika ACC'' in BCC'' jednakokraka po pogoji, torej $x = y$ in $u = z$, ali $x + u = y + z$, ali $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC''B = \sphericalangle A'C'B'$.

Ker je pa $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$, je $\triangle ACB \cong \triangle A'C'B'$ (II. izrek).

§ 54. Iz izrekov o skladnosti trikotnikov sledi, da trikotnik popolnoma določujejo:

1.) Jedna stranica s priležnima kotoma;

2.) dve stranici s kotom, katerega oklepata;

3.) dve stranici s kotom, kateri je večji teh stranic nasproten;

4.) tri stranice.

Kajti skladni trikotniki so le ponavljani isti trikotnik.

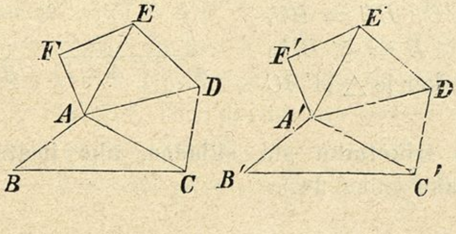
Med sestavinami, ki določujejo trikotnik popolnoma, mora vsaj jedna stranica biti.

2. Skladnost mnogokotnikov.

§ 55. Da sta dva mnogokotnika skladna, t. j. da se krijeta popolnoma, morata imeti vse stranice in vse kote v istem redu jednake.

Izreka. 1.) **Istoležne diagonale razdelé dva skladna mnogokotnika na skladne trikotnike.**

Slika 35.



Vzemimo, da je (slika 35.) $ABCD \ldots \cong A'B'C'D' \ldots$; potem moremo v mislih mnogokotnik $A'B'C'D' \ldots$ tako na mnogokotnik $ABCD \ldots$ položiti, da se krijeta popolnoma, da torej pade A' na A, B' na B, C' na C, D' na D i. t. d.

ali da se krijejo istoležne diagonale, torej tudi trikotniki; ti so tedaj skladni.

2.) **Dva mnogokotnika sta skladna, ako sta v istem redu sestavljena iz jednako mnogo skladnih trikotnikov.**

Pogoj. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD = \cong \triangle A'C'D'$, $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$ i. t. d. (slika 35.).

Trditev. $ABCDE \ldots \cong A'B'C'D'E' \ldots$

Dokaz. Položimo v mislih mnogokotnik $A'B'C'D'E' \ldots$ tako na mnogokotnik $ABCDE \ldots$, da trikotnik $A'B'C'$ krije ž njim skladni trikotnik ABC; potem se pa tudi krijeta trikotnika $A'C'D'$ in ACD, $A'D'E'$ in ADE i. t. d. Krijeta se torej tudi mnogokotnika popolnoma ali $ABCD \ldots \cong A'B'C'D' \ldots$

Načrtaj mnogokotnik, ki je skladen z danim.

Rešitev. Načrtaj stranico $A'B' = AB$ (slika 35.) in $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$, $B'C' = BC$ in $\sphericalangle C' = \sphericalangle C$ i. t. d.

Kedaj sta dva pravilna mnogokotnika skladna? — Kedaj dva paralelograma?

Ali nahajaš na kocki, prizmi, piramidi tudi skladne mnogokotnike?

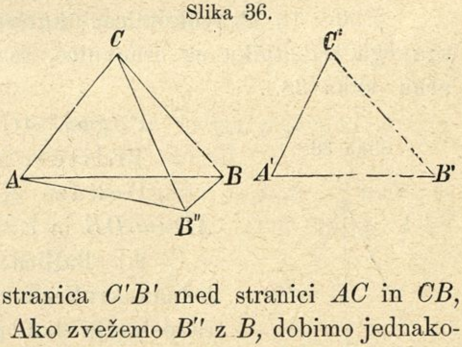
3. Uporaba izrekov o skladnosti.

Izreki o trikotnikih.

§ 56. **V dveh trikotnikih, katera imata dve stranici paroma jednaki, od njiju oklepana kota pa nejednaka, je manjšemu kotu manjša stranica nasprotna** (slika 36.).

Pogoj. $A'C' = AC$, $B'C' = BC$ in $\sphericalangle A'C'B' < \sphericalangle ACB$.

Slika 36.



Trditev. $A'B' < AB$.

Dokaz. Položimo v mislih trikotnik $A'B'C'$ tako na trikotnik ABC, da pade točka C' na točko C in A' na A, kar je mogoče, ker je $AC = A'C'$. Potem pa pade stranica $C'B'$ med stranici AC in CB, in sicer točka B' na točko B''. Ako zvežemo B'' z B, dobimo jednakokrak trikotnik $CB''B$; v tem je $\sphericalangle CBB'' = \sphericalangle CB''B$. Ker je pa $\sphericalangle ABB'' < \sphericalangle CBB''$, je tudi $\sphericalangle ABB'' < \sphericalangle CB''B$, in ker je $\sphericalangle CB''B < \sphericalangle AB''B$, je tem bolj $\sphericalangle ABB'' < \sphericalangle AB''B$; potem je pa $AB'' < A'B$ (§ 35., 4) ali $A'B' < AB$.

Kakšen je dokaz, ako pade točka B'' v stranico AB ali znotraj trikotnika ABC?

§ 57. **V dveh trikotnikih, katera imata dve stranici paroma jednaki, tretji pa nejednaki, je manjši teh nejednakih stranic manjši kot nasproten.**

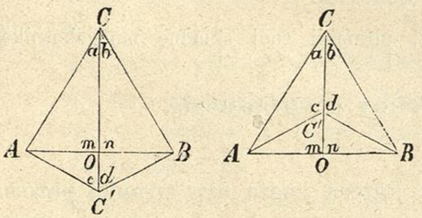
Pogoj. $AC = A'C'$ (slika 36.), $BC = B'C'$ in $A'B' < AB$.

Trditev. $\sphericalangle A'C'B' < \sphericalangle ACB$.

Indirekten dokaz. Ako bi ne bil $\sphericalangle A'C'B' < \sphericalangle ACB$, bi moral $\sphericalangle A'C'B' \geqq \sphericalangle ACB$, torej $AB \geqq AB$ biti (§ 51. in 56.), kar pa je proti pogoju.

§ 58. **Ako potegnemo skoz vrha dveh jednakokrakih trikotnikov, katera imata skupno osnovnico, premo, razpolavlja ona 1.) kota pri vrhih, 2.) skupno osnovnico in 3.) stoji pravokotno na osnovnici** (slika 37.).

Slika 37.



Pogoj. $AC = BC$, $AC' = BC'$.

Trditev. 1.) $a = b$, $c = d$.

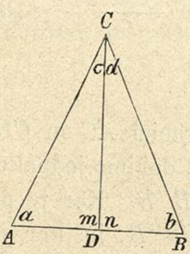
2.) in 3.) $AO = OB$ in $CO \perp AB$.

Dokaz. 1.) $\triangle ACC' \cong BCC'$ (§ 53), torej $a = b$, $c = d$.

Dokaz. 2.) in 3.) $\triangle AOC \cong BOC$ (§ 51.); torej $AO = BO$ in $m = n = R$ ali $CO \perp AB$.

§ 59. 1.) **Pravokotnica, katero spustimo z vrha jednakokrakega trikotnika na osnovnico, razpolavlja osnovnico in kot pri vrhu** (slika 38.).

Slika 38.



Pogoj. $AC = BC$, $CD \perp AB$ ali $m = n$.

Trditev. $AD = DB$, $c = d$.

Dokaz. $\triangle ACD \cong BCD$ (§ 52.), torej $AD = DB$ in $c = d$.

2.) **Daljica, katero potegnemo od vrha jednakokrakega trikotnika do srede osnovnice, razpolavlja kot pri vrhu in stoji pravokotno na osnovnici.** Dokaz takisto kakor 1.

3.) **Prema, katera razpolavlja kot pri vrhu jednakokrakega trikotnika, razpolavlja tudi osnovnico in stoji pravokotno na tej.** Dokaz takisto kakor 1.

4.) **Prema, katero postavimo pravokotno v sredi osnovnice jednakokrakega trikotnika, gre skoz vrh trikotnika.**

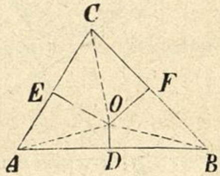
Dokaz indirekten, s katerim prideš do protivorečja, da bi v točki preme stali dve pravokotnici.

5.) **Ako gre v trikotniku pravokotnica, katero v sredi stranice postavimo, skoz njegov vrh, je trikotnik jednakokrak.**

Dokaz indirekten.

§ 60. 1.) **Pravokotnice v sredi trikotnikovih stranic na te postavljene, se sečejo v jedni sami točki, katera je od vsakega oglišča jednako oddaljena.**

Slika 39.



Pogoj. $AD = DB$, $BF = FC$, $CE = EA$. $DO \perp AB$, $FO \perp BC$ (slika 39.).

Trditev. Skoz točko O, v kateri se sečeta DO in FO, gre tudi tretja pravokotnica EO; in $AO = BO = CO$.

Dokaz. Premi DO in FO se morata sekati v jedni točki O (§ 27.). In ker sta trikotnika AOB in BOC jednakokraka (§ 59., 5), je $AO = OB = OC$. Točka O je torej od vseh oglišč jednako oddaljena. Nadalje gre pravokotnica, katero izpustimo iz točke O v jednakokrakem trikotniku AOC na AC, skoz sredo te stranice (§ 59., 1); tretja pravokotnica EO gre torej tudi skoz točko O.

Točka O je **prva znamenita točka** v trikotniku.

Dostavek. Točka O leži znotraj, v obsegu ali zunaj trikotnika, ako je ta ostro-, pravo-, ali topokoten.

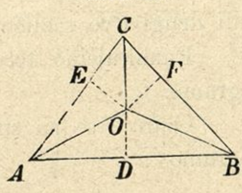
2.) **Polovnice trikotnikovih kotov se sečejo v jedni sami točki, katera je od vseh stranic jednako oddaljena.**

Pogoj. $\sphericalangle CAO = \sphericalangle BAO$, $\sphericalangle ABO = \sphericalangle CBO$, $OD \perp AB$, $OF \perp BC$, $OE \perp AC$ (slika 40.).

Trditev. Skoz točko O, v kateri se sečeta polovnici AO in BO, gré tudi polovnica CO; in $OD = OF = OE$.

Dokaz. Polovnici AO in BO se morata sekati v točki O (§ 27.). In ker je $\triangle BOD \cong \triangle BOF$ in $\triangle AOD \cong \triangle AOE$ (§ 50., izv.), je $OD = OF = OE$. Točka O je torej od vseh treh stranic jednako oddaljena. Ona je pa tudi skupno presečišče polovnic kotov; kajti $\triangle CEO \cong \triangle CFO$ (§ 52.) in $\sphericalangle ECO = FCO$, torej CO tretja polovnica, katera gre skoz presečišče prvih dveh.

Slika 40.

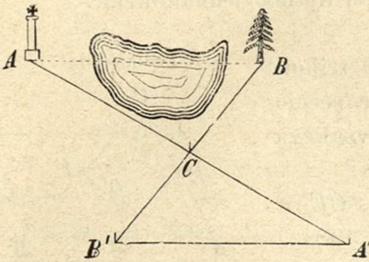


To točko O imenujemo **drugo znamenito točko** v trikotniku.

Načrtaj prvo znamenito točko v *a)* ostro-, *b)* pravo-, *c)* topokotnem trikotniku.

Primer praktične uporabe izrekov o skladnosti.

Slika 41.



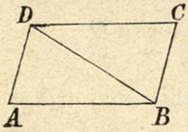
Določi oddaljenost dveh toček na polji, med katerima se nahajajo zapreke, da med njima ne moreš meriti.

Recimo, da je med točkama A in B (slika 41.) ribnik in C točka na polji, od katere moremo do A in B meriti. Ako izmerimo AC in BC, ji čez vrh C podaljšamo in naredimo podaljšek $A'C = AC$ in $B'C = BC$, je $\triangle B'CA' \cong \triangle ABC$ in $A'B' = AB$, katero lahko izmerimo.

Izreki o paralelogramih.

§ 61. **V paralelogramu sta vsaki dve nasprotni stranici jednaki** (slika 42.).

Slika 42.



Pogoj. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Trditev. $AB = CD$, $AD = BC$.

Dokaz. Ako potegnemo diagonalo BD, je $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ (§ 26., 2, § 50.), torej $AB = CD$, $AD = BC$.

Ta izrek izražujemo tudi tako: **Vzporednice med dvema vzporednicama so jednake.**

Izvodi.

a) Pravokotnice med dvema vzporednicama so jednake (§ 28., 1).

b) **Ako sta dve premi vzporedni, so vse točke jedne preme od druge preme jednako oddaljene.**

Kajti oddaljenost točk jedne vzporednice od druge merimo s pravokotnicami in te so jednake.

c) Ako sta dve stikajoči se stranici paralelograma jednaki, so vse stranice jednake.

d) Ako sta dve stikajoči se stranici paralelograma različni, sta tudi drugi dve različni.

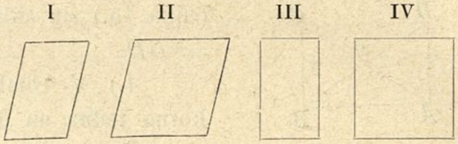
Razlikujemo torej **jednakostranične** in **raznostranične** paralelograme.

Oziraje se na stranice in kote razlikujemo štiri vrste paralelogramov:

1.) Poševnokotni in raznostranični paralelogram ali **romboid** (slika 43., I);

2.) poševnokotni in jednakostranični paralelogram ali **romb** (slika 43., II);

Slika 43.



3.) pravokotni in raznostranični paralelogram ali **pravokotnik** (slika 43., III);

4.) pravokotni in jednakostranični paralelogram ali **kvadrat** (slika 43., IV).

§ 62. Obrat izreka v § 61.

1.) **Četverokotnik, v katerem sta vsaki dve nasprotni stranici jednaki, je paralelogram.**

Pogoj. $AB = CD$, $AD = BC$ (slika 42.).

Trditev. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Dokaz. $\triangle ABD \cong \triangle DBC$ (§ 53.), torej sta izmenična kota ABD in BDC, takisto ADB in DBC jednaka, iz česar sledi, da je $AB \parallel CD$ in $AD \parallel BC$.

Načrtaj po tem izreku paralelogram.

2.) **Četverokotnik, v katerem sta dve nasprotni stranici jednaki in vzporedni, je paralelogram.**

Pogoj. $AB = DC$, $AB \parallel DC$ (slika 42.).

Trditev. $AD \parallel BC$.

Dokaz. $\triangle ABD \cong \triangle BDC$ (§ 51.) torej sta izmenična kota ADB in DBC jednaka, iz česar sledi $AD \parallel BC$.

Izvod. Ako sta dve točki jedne preme od druge preme na isti strani jednako oddaljeni, sta premi vzporedni.

§ 63. Izreki o diagonalah paralelogramov.

1.) **Vsaka diagonala deli paralelogram v dva skladna trikotnika.** (Dokaz § 61.)

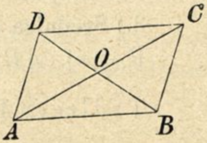
2.) **Diagonali paralelograma se razpolavljata** (slika 44.).

Pogoj. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Trditev. $AO = OC$, $BO = OD$.

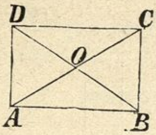
Dokaz. $\triangle ABO \cong DOC$ (§ 50.), torej je $AO = OC$, $BO = OD$.

Slika 44.



3.) **Diagonali pravokotnika sta jednaki.**

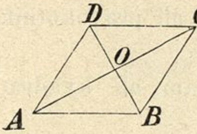
Slika 45.



Pravokotna trikotnika ABC in ABD (slika 45.) sta skladna (§ 51.), torej je $AB = BD$.

4.) **V rombu stojita diagonali pravokotno jedna na drugi.**

Slika 46.



Kajti trikotnika DBC in ABD (slika 46.) sta jednakokraka in torej $AC \perp DB$ (§ 58.).

5.) **Diagonali kvadrata sta jednaki in stojita pravokotno jedna na drugi.**

Sledi iz 3 in 4.

Dostavek. Obrati izrekov 2, 3, 4 in 5 so tudi resnični. Kako se glasé ti obrati?

Izreki o trapecih.

§ 65. 1.) **Ako sta kota na jedni vzporednici trapeca jednaka, sta nevzporednici tudi jednaki.**

Pogoj. Recimo, da je $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $MN \parallel AB$ (slika 47.).

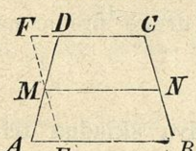
Trditev. Potem je $AM = NB$.

Dokaz. Ako potegnemo $ME \parallel NB$, je $\sphericalangle AEM = \sphericalangle B$ (§ 26., 2), torej tudi $\sphericalangle AEM = \sphericalangle A$ in $AM = ME = NB$.

Trapec, v katerem sta nevzporednici jednaki, imenujemo **jednakokrak** (antiparalelogram).

2.) **Prema, katero potegnemo v trapecu skoz polovišče jedne nevzporednice vzporedno z vzporednicama, razpolavlja drugo nevzporednico** (slika 47.).

Slika 47.



Pogoj. $DC \parallel AB$, $AM = MD$, $MN \parallel AB \parallel CD$.

Trditev. $BN = NC$.

Dokaz. Ako potegnemo skoz M $EF \parallel BC$, in ako podaljšamo CD do točke F, potem je $\triangle AEM \cong \triangle DFM$ (§ 50.), torej $EM = FM$; pa $EM = BN$ in $FM = CN$, tedaj tudi $BN = NC$.

Dostavek. Obrat tega izreka je tudi veljaven. Dokaz indirekten. Daljico MN imenujemo (črto) **srednico.**

3.) **Srednica trapeca je jednaka polovici vsote obeh vzporednic.**

Pogoj. $AB \parallel CD$ (slika 47.), $AM = DM$ in $MN \parallel AB$.

Trditev. $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

Dokaz. Ako potegnemo skoz M $EF \parallel BC$ in podaljšamo CD do F, je $\triangle AEM \cong \triangle DFM$, torej $AE = DF$. Nadalje je $MN = BE = AB - AE$ in $MN = FC = CD + DF$, torej $2MN = AB + CD$ in $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

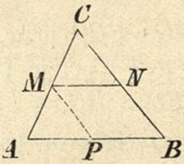
Izreki o vzporednicah v trikotniku.

§ 65. 1.) **Prema, katero potegnemo skoz polovišče jedne trikotnikove stranice vzporedno z drugo stranico, razpolavlja tretjo stranico** (slika 48.).

Pogoj. $AM = CM$, $MN \parallel AB$.

Trditev. $BN = NC$.

Slika 48.



Dokaz. Ako načrtamo $MP \parallel BC$, je $\triangle AMP \cong \triangle MNC$ (§ 50.), torej $MP = CN$; ker je pa $MP = BN$, je $BN = NC$.

2.) **Prema, katero potegnemo skoz polovišči dveh trikotnikovih stranic, je vzporedna s tretjo.**

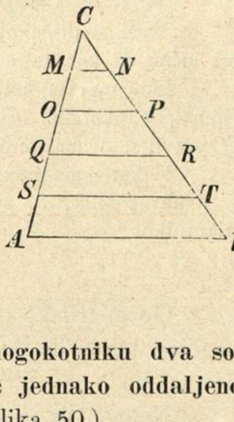
Pogoj. $AM = MC$, $BN = NC$ (slika 48.).

Trditev. $MN \parallel AB$.

Dokaz. Ako bi ne bila $MN \parallel AB$, bi bila druga, n. pr. MN'; potem pa mora N' stranico BC razpolavljati (1.) ali s točko N identična biti. Torej je $MN \parallel AB$.

3.) **Ako razdelimo jedno stranico trikotnika na jednake dele in načrtamo od teh razdelišč vzporednice z drugo stranico, razdelimo s tem tretjo stranico na isto toliko jednakih delov** (slika 49.).

Slika 49.



Pogoj. $CM = MO = OQ =$ i. t. d. in $MN \parallel OP \parallel QR \parallel \ldots \parallel AB$.

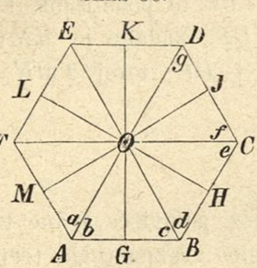
Trditev. $CN = NP = PR = \ldots$ i. t. d.

Dokaz. $CN = NP$ (1.) in $NP = PR = RF$ i. t. d. (§ 64., 2.).

Izreka o pravilnih mnogokotnikih.

§ 66. **Ako razpolovimo v pravilnem mnogokotniku dva sosedna kota, je presečišče teh dveh polovnic jednako oddaljeno** *a)* **od vsakega oglišča,** *b)* **od vsake stranice** (slika 50.).

Slika 50.



Pogoj. $AB = BC = CD = \ldots$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \ldots$, $\sphericalangle a = \sphericalangle b$, $\sphericalangle c = \sphericalangle d$; $OG \perp AB$, $OH \perp BC$, $OJ \perp CD$ i. t. d.

Trditev.

a) $AO = BO = CO = DO = \ldots$

b) $OG = OH = OJ = OK = \ldots$

Dokaz.

a) $\triangle AOB \cong \triangle BOC$ (§ 51.), tedaj $AO = OC$ in $b = e$. Zarad $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ in $b = \frac{A}{2}$ je tedaj tudi $e = \frac{C}{2} = f$, torej $\triangle BOC \cong \triangle COD$ (§ 51.) in $BO = CO$ in $d = g$. Takisto dokažemo, da je $CO = EO$ i. t. d. Ker je $b = c$, je $BO = AO$, torej po vsem prejšnjem $AO = BO = CO = DO = \ldots$

b) Ker sta trikotnika AOB in BOC jednakokraka, je (§ 59., 1.) $BG = \frac{AB}{2}$ in $BH = \frac{BC}{2}$, torej $BG = BH$ in $\triangle BGO \cong \triangle BHO$ (§ 51.); tedaj $OG = OH$. Takisto moremo dokazati, da je $OH = OJ = OK = \ldots$

Točko O imenujemo **središče** pravilnega mnogokotnika.

Izvod. **Ako zvežemo središče pravilnega mnogokotnika z vsemi oglišči, razpolovimo vsak njegov kot, mnogokotnik pa razdelimo na isto toliko jednakokrakih skladnih trikotnikov, kolikor ima stranic.**

Zveži središče pravilnega $n$terokotnika z vsemi oglišči; kolik je *a)* kot pri vrhu, *b)* kot na osnovnici vsakega jednakokrakega trikotnika?

Izračunaj te kote za *a)* jednakostraničen trikotnik, *b)* kvadrat, *c)* pravilen peterokotnik, *d)* pravilen šesterokotnik, *e)* pravilen deseterokotnik, *f)* pravilen dvanajsterokotnik.

V katerem pravilnem mnogokotniku je kot pri vrhu *a)* isto tolik, *b)* dvakrat tolik, *c)* polovica od vsacega kota na osnovnici jednakokrakih trikotnikov?

Naloge za načrtovanje.

Geometrijske naloge so **nedoločene**, ako je dano premalo pogojev tako, da je število likov, kateri tem pogojem zadostujejo, neomejeno.

Naloga pa je **določena**, ako je število likov, kateri danim pogojem zadostujejo, omejeno.

Opomnja. Za rešitev geometrijskih nalog je navadno prav uspešno, ako si mislimo nalogo rešeno, t. j. ako si načrtamo lik, v katerem si mislimo ono izvršeno, kar hočemo z rešitvijo naloge doseči. Na takem liku iščemo potem zvezo med danimi in zahtevanimi sestavinami. Iz spoznanja te zveze pa sledi rešitev.

Tako postopanje imenujemo **analizo** (razklad) naloge.

Pri priprostih nalogah naredimo analizo na pamet tako hitro, da se je skoro ne zavemo.

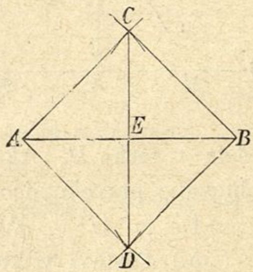
Vsako rešitev pa moramo še **dokazati**, da je resnična.

Dokaz vender že sledi navadno iz analize.

Mnogokrat je treba tudi preiskavati, koliko rešitev ima naloga in ali je sploh njena rešitev mogoča. Tako preiskavanje imenujemo **determinacijo** naloge.

Pri rešitvi geometrijskih nalog je torej v obče paziti na: analizo, konstrukcijo, dokaz in determinacijo.

Slika 51.



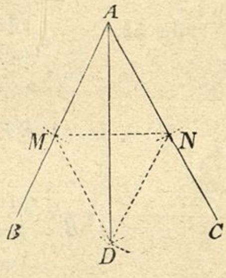
1.) **Razpolovi dano daljico** AB (slika 51.).

Analiza. Po pogoji § 58. leži polovišče daljice v (črti) zveznici vrhov jednakokrakih trikotnikov, načrtanih nad to daljico.

Načrtovanje. Napiši iz krajišč A in B nad in pod daljico, z istim polumerom loka, katera se sečeta v točkah C in D. Skoz te točki potegni premo in ta razpolavlja daljico AB v točki E.

Dokaz sledi neposredno iz § 58.

Slika 52.



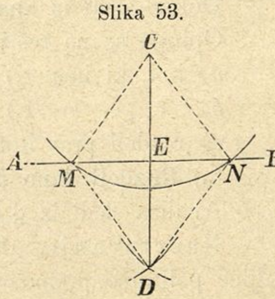
2.) **Razpolovi dan kot** BAC (slika 52.).

Analiza. Vzemimo, da je AD polovnica kota BAC. Ako je $AM = AN$, in ako zvežeš poljubno točko D polovnice s točkama M in N, je $\triangle\ AMD \cong \triangle\ AND$, tedaj $DM = DN$.

Načrtovanje. Naredi $AM = AN$ in napiši iz toček M in N loka, katera se sečeta v točki D; prema, katero potegneš skoz točki A in D, razpolavlja kot ABC.

Dokaz sledi iz analize.

Slika 53.



3.) **Spusti iz točke** C (slika 53.) **zunaj preme** AB **pravokotnico na to.**

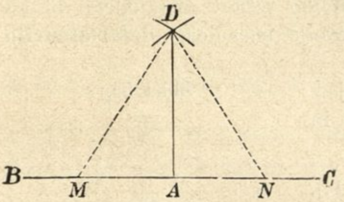
Analiza se opira kakor pri 1. in 2. na § 58.

Načrtovanje. Napiši iz točke C lok, kateri seče premo AB v točkah M in N; iz teh toček napiši zopet z istim polumerom loka, katera se sečeta v točki D; ako zvežeš točki C in D s premo, je ta zahtevana pravokotnica.

Dokaz sledi iz § 58.

4.) **Postavi v dani točki** A (slika 54.) **preme** BC **pravokotnico na to.**

Slika 54.



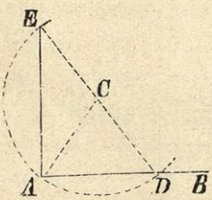
Analiza. Ako je AD iskana pravokotnica, moremo si jo misliti spuščeno z vrha D jednakokrakega trikotnika MND pravokotno na osnovnico MN; potem je pa $AM = AN$.

Načrtovanje. Naredi $AM = AN$ in napiši iz toček M in N z istim polumerom loka, katera se sečeta v točki D. Ako zvežeš točki A in D z daljico, postavil si zahtevano pravokotnico na BC.

Da je $AD \perp MN$, sledi iz analize.

5.) **Postavi v krajišči** A (slika 55.) **preme** AB **pravokotnico na to.**

Slika 55.



Analiza. Ako je $AE \perp AB$, je kot $DAE = R$, in moremo si misliti, da je kot v polukrogu. Točka E, skoz katero gre pravokotnica EA, je torej krajišče premera v krogu, katerega napišemo iz točke C s polumerom AC.

Načrtovanje. Napiši iz točke C zunaj preme AB krog, kateri gre skoz točko A in premo AB v točki D seče; načrtaj potem premer DE. Prema AE je zahtevana pravokotnica.

Dokaz sledi iz analize.

Opiraje se na rešitev zadnjih treh nalog načrtaj

a) kot, ki ima 1.) 90^0, 2.) 45^0;

b) » » » 1.) 60^0, 2.) 30^0, 3.) 15^0 (slika 55.);

c) razdeli prav kot na tri jednake dele.

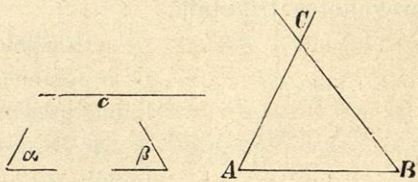
6.) **Razdeli dano daljico na več jednakih delov.**

Analiza sledi iz § 65., 3.

Načrtovanje. Potegni (slika 49.) skozi jedno krajišče dane daljice poljubno premo, vnesi na to toliko med seboj jednakih, sicer pa poljubnih delov, kolikor jih je zahtevanih. Zadnje razdelišče zveži z drugim krajiščem dane daljice s premo, skoz druga razdelišča pa potegni s to vzporednice. Na ta način si razdelil dano daljico na toliko jednakih delov, kolikor se jih je zahtevalo (§ 65., 3.).

7.) **Načrtaj trikotnik, ako sta dani jedna stranica** c **in tej priležna kota** α **in** β (slika 56.).

Analiza. Vzemimo, da je ABC iskani trikotnik, $AB = c$ dana stranica, $A = \alpha$ in $B = \beta$ pa dana kota. Iz lika spoznamo, da sta mesti oglišč A in B že znani, oglišče C pa leži v presečišči krakov AC in BC danih kotov.



Slika 56.

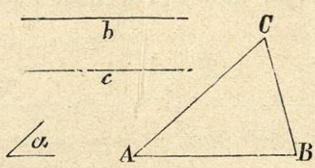
Načrtovanje. Načrtaj $AB = c$ in v točkah A in B dana kota α in β; presečišče krakov teh kotov je tretje oglišče C.

Kedaj je rešitev te naloge mogoča? (§ 31., a).

8.) **Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici** b **in** c **in kot** α, **katerega oklepata** (slika 57.).

Analiza je podobna oni v prejšnji nalogi.

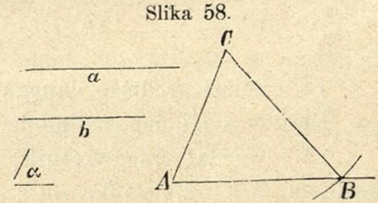
Načrtovanje. Načrtaj v A kot, kateri je jednak danemu kotu α, naredi $AB = b$ in $AC = c$ in potegni daljico AC.



Slika 57.

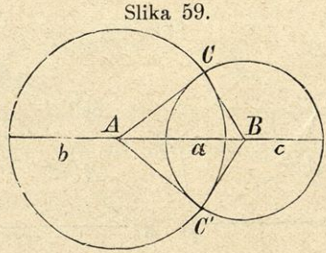
9.) **Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici** a **in** b **in kot** α, **kateri je večji stranici** a **nasproten** (slika 58.).

Načrtaj v točki A kot, kateri je jednak danemu kotu α, naredi $AC = b$; napiši dalje iz C z večji stranici a jednakim polumerom lok, kateri seče drugi krak v B in potegni BC.



Slika 58.

10.) **Načrtaj trikotnik, ako so dane vse tri stranice** a, b **in** c (slika 59.).



Slika 59.

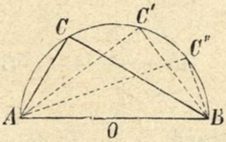
Načrtaj daljico $AB = c$, napiši iz A s polumerom b in iz B s polumerom a loka, katera se sečeta v točki C; ako potegneš AC in BC, dobiš zahtevani trikotnik.

Ker se sečeta loka tudi v točki C', dobiš še drug trikotnik ABC', kateri je pa s trikotnikom ABC skladen.

Kedaj je rešitev te naloge mogoča? (§ 38., 1.).

11.) **Načrtaj nad dano daljico** AB (slika 60.) **kakor hipotenuzo pravokoten trikotnik.**

Slika 60.



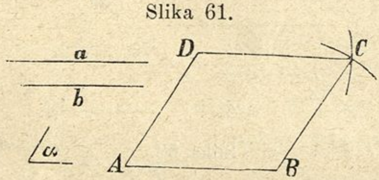
Razpolovi AB v točki O, napiši iz O s polumerom OA polukrog in zveži poljubno njegovo točko C z A in B; potem je $\sphericalangle ACB = R$ (§ 37.) in ACB zahtevani trikotnik.

Brezštevilno različnih trikotnikov ACB, $AC'B$, $AC''B$ zadostuje tej nalogi, ona je tedaj nedoločena.

12.) **Načrtaj trikotnik, kateri je z danim trikotnikom skladen.** (Glej nalogo 10.)

13.) **Načrtaj paralelogram, ako sta dani dve stranici** a **in** b **in kot** α, **katerega oklepata** (slika 61.).

Slika 61.



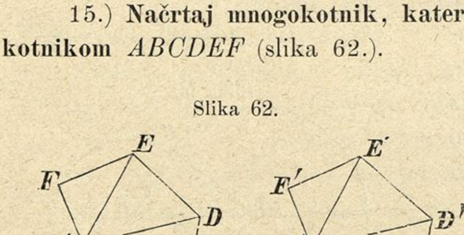
Načrtaj v A kot, kateri je jednak danemu kotu α, naredi $AB = a$ in $AD = b$ in napiši iz B in D s polumeroma b in a loka, katera se sečeta v C; ako potegneš BC in DC, je $ABCD$ zahtevani paralelogram.

14.) **Poišči središče danega pravilnega mnogokotnika.**

Rešitev sledi neposredno iz § 66.

15.) **Načrtaj mnogokotnik, kateri je skladen z danim mnogokotnikom** $ABCDEF$ (slika 62.).

Slika 62.



Raztvori dani mnogokotnik $ABCDEF$ z diagonalami, katere potegneš od oglišča A do vseh drugih oglišč, na trikotnike; načrtaj potem v istem redu isto toliko trikotnikov, kateri so z onimi danega mnogokotnika skladni.

Vaje.

Poišči sam razrešitev tem-le nalogam:

1.) Načrtaj trikotnik, ako je dana *a)* jedna stranica, *b)* jeden kot.

2.) Načrtaj trikotnik, ako sta dana dva kota.

3.) Načrtaj trikotnik, ako je dana jedna stranica in nji priležen kot. Povej geometrijsko mesto dani stranici nasprotnega oglišča.

4.) Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici. Povej geometrijsko mesto tretjega oglišča.

5.) Načrtaj pravokoten trikotnik, ako je: *a)* dana jedna kateta, *b)* dana hipotenuza, *c)* dan oster kot.

Kaj je geometrijsko mesto nasprotnega vrha v *a)* in *b)?*

6.) Načrtaj jednakokrak trikotnik, ako so dani: *a)* višina, *b)* kot na osnovnici, *c)* kot pri vrhu, *d)* krak.

Opomnja. Naloge 1. do 6. so nedoločene.

7.) Načrtaj pravokoten trikotnik, ako so dani: *a)* obe kateti, *b)* hipotenuza in priležen kot, *c)* jedna kateta in priležni oster kot, *d)* jedna kateta in nasprotni kot, *e)* hipotenuza in višina na njo, *f)* jedna kateta in višina na hipotenuzo, *g)* višina na hipotenuzo in jeden oster kot.

8.) Načrtaj jednakokrak trikotnik, ako so dani: *a)* osnovnica in jeden priležnih kotov, *b)* osnovnica in kot pri vrhu, *c)* krak in kot na osnovnici, *d)* krak in kot pri vrhu, *e)* osnovnica in višina, *f)* krak in višina, *g)* višina in kot pri vrhu.

9.) Načrtaj jednakostraničen trikotnik, ako je dana višina.

10.) Načrtaj pravokoten jednakokrak trikotnik, ako je dana višina.

11.) Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici in višina na jedno teh stranic.

12.) Načrtaj romboid, ako sta dani obe diagonali in kot, katerega oklepata.

13.) Načrtaj romb, ako so dane: *a)* stranica in jeden kot, *b)* stranica in višina, *c)* obe diagonali.

14.) Načrtaj pravokotnik, ako je dana jedna stranica in nji nasprotni kot, katerega oklepata diagonali.

15.) Načrtaj kvadrat, ako je dana vsota stranice in diagonale.

16.) Načrtaj trapec, ako je dano: *a)* tri stranice in višina, *b)* vzporedni stranici in diagonali.

Četrti oddelek.

Ploščina premočrtnih likov.

§ 67. Kolikost ploskve, katero omejeva obseg lika, imenujemo **ploskveno vsebino** (ploščino) lika.

Dva lika, katera imata jednako ploščino, imenujemo **ploskveno-jednaka.**

§ 68. Za merjenje ploskev rabi nam jedna znana ploskev, s katero preiskujemo, kolikokrat je v drugi; to ploskev imenujemo **ploskveno jednoto,** in število, katero izražuje, kolikokrat je ploskvena jednota v dani ploskvi, **mersko število** ploskve.

Za mersko jednoto jemljemo kvadrat, čegar stranica je dolgostni jednoti jednaka. Imenujemo jo po tej:

Kvadraten-meter (m^2), **kvadraten-decimeter** (dm^2), **kvadraten-centimeter** (cm^2), **kvadraten-milimeter** (mm^2).

Večja jednota je **kvadraten-kilometer** (km^2) ali še večja **kvadraten-mirijameter** (μm^2).

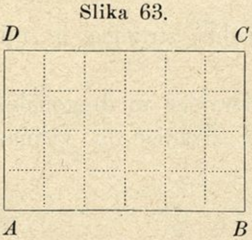
$$1\ m^2 = 100\ dm^2\ à\ 100\ cm^2\ à\ 100\ mm^2;\ 1\ \mu m^2 = 100\ km^2\ à\ 1000.000\ m^2.$$

Za merjenje zemljišč jemljemo ar $(a) = 100\ m^2$ in hektar $(ha) = 100\ a^2$.

Ploskve, katere hočemo izmeriti so različne; zato je pa mnogokrat nemogoče, da bi jih izmerili s pokladanjem ploskvene jednote na nje. Ker pa kolikost ploskve zavisi od merskih števil gotovih daljic, treba nam le poznati pravila, po katerih moremo izračunati ploščino iz merskih števil onih daljic.

§ 69. Naloga. Kolika je ploščina (p) pravokotnika, v katerem meri osnovnica 6 (a) in višina 4 (b) takistih dolgostnih jednot?

Slika 63.



Ker meri osnovnica (slika 63.) 6 (a) dolgostnih jednot, moremo ob nji na pravokotnik 6 (a) ploskvenih jednot položiti; in ker meri višina 4 (b) dolgostnih jednot, moremo na celi pravokotnik 4 (b) takih prog po 6 (a) ploskvenih jednot, t. j. 4krat 6 (b krat a) ploskvenih jednot položiti. Torej je

$$p = 6 \times 4 = 24,\ p = a \times b = ab.$$

Mersko število pravokotnikove ploščine je jednako produktu (merskih števil) osnovnice in višine (dolžine in širine).

Iz $p = ab$ sledi:

$$a = \frac{p}{b},\ b = \frac{p}{a},\ \text{t. j.}$$

Jedna pravokotnikova stranica je jednaka ploščini, deljeni z drugo stranico.*

§ 70. Kvadrat je pravokotnik, v katerem je višina jednaka osnovnici, tedaj $a = b = s$ in

$$p = s \,.\, s = s^2.$$

Kvadratova ploščina je jednaka drugi potenci (merskega števila) njegove stranice.

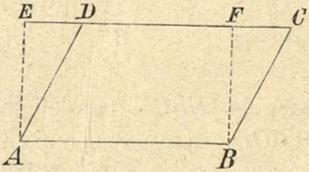
Od tod ime **kvadrat** za drugo potenco kacega števila v aritmetiki.

Iz $p = s^2$ sledi

$$\text{n. pr. } p = 4,\ s = \sqrt{4} = 2,\ s = \sqrt{p}$$

§ 71. Izrek. **Dva paralelograma z jednako osnovnico in jednako višino sta ploskvenojednaka.**

Slika 64.



Pogoj. $AB \parallel DC,\ AD \parallel BC,\ AE \parallel BF$ (slika 64.).

Trditev. $ABCD = ABEF$.

Dokaz. $\triangle\, BFC \cong \triangle\, AED$ (§ 51.) in $ABFD = ABFD$, torej

$$ABFD + BFC = ABFD + AED$$

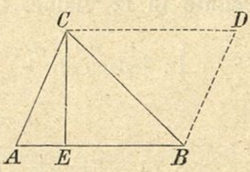
ali $ABCD = ABFE.$

Izvoda. 1.) **Vsak paralelogram je ploskvenojednak pravokotniku, ki ima isto toliko osnovnico in isto toliko višino.**

2.) **Paralelogramova ploščina je jednaka produktu (merskih števil) osnovnice in višine.**

§ 72. Izrek. **Trikotnik je polovica paralelograma, ki ima isto toliko osnovnico in isto toliko višino.**

Slika 65.



Dokaz. Ako potegnemo (slika 65.) $CD \parallel AB,\ BD \parallel AC$, dobimo paralelogram $ABCD$, kateri ima isto osnovnico in isto višino, in $\triangle\, ABC \cong \triangle\, BCD$ (§ 63., 1.), torej

$$ABC = \tfrac{1}{2}\, ABCD.$$

* «Ploščino deliti sè stranico» je krajši izraz za «mersko število ploščine deliti z merskim številom stranice». — Ta opomnja velja tudi za druge take slučaje.

Izvod. *a)* **Trikotnikova ploščina** *(p)* **je jednaka polovici produkta iz (merskih števil) osnovnice** *(a)* **in višine** *(v)*.

$$p = \tfrac{1}{2}\, av.$$

b) **Ploščina pravokotnega trikotnika je jednaka polovici produkta obeh katet.**

c) **Dva trikotnika z isto toliko osnovnico in isto toliko višino sta ploskvenojednaka.**

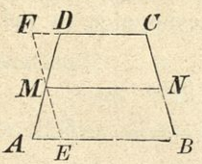
Iz $p = \frac{1}{2}\, av$ sledi

$$a = \frac{2p}{v},\ v = \frac{2p}{a},\ \text{t. j.}$$

Trikotnikova osnovnica (višina) je jednaka kvocijentu iz dvojne ploščine in višine (osnovnice).

§ 73. Izrek. **Trapec je ploskvenojednak paralelogramu, kateri ima isto toliko višino, in čegar osnovnica je jednaka srednici onega.**

Slika 66.



Dokaz. Ako je (slika 66.) $AM = MD$ in ako skoz M potegnemo premo $EF \parallel BC$, da seče podaljšano vzporednico CD v točki F, je

$$\triangle\, AEM \cong \triangle\, FMD \text{ in}$$
$$EMDCB = EMDCB, \text{ torej}$$
$$AEM + EMDCB = FMD + EMDCB \text{ ali}$$
$$ABCD = EBCF,$$

kjer je $EBCF$ paralelogram, kateri ima isto višino kakor trapec $ABCD$, za osnovnico pa

$$EB = \frac{AB + CD}{2},\ \text{t. j. srednico trapeca.}$$

Izvod. **Ploščina** *(p)* **trapeca je jednaka produktu (merskih števil) srednice** *(s)* **in višine** *(v)*.

$$p = sv \quad 1.).$$

Ali, ker je srednica jednaka polovici vsote obeh vzporednic *(a* in *b)*:

Ploščina trapeca je jednaka polovici produkta iz vsote vzporednic in iz višine.

$$p = \tfrac{1}{2}\,(a + b)\, v \quad 2.).$$

Iz jednačeb 1.) in 2.) sledi

$$s = \frac{p}{v},\ v = \frac{p}{s},\ a = \frac{2p}{v} - b.$$

§ 74. Izrek. **Ploščina pravilnega mnogokotnika je jednaka polovici produkta iz njegovega obsega in središčeve razdalje od jedne stranice.**

Dokaz. Vzemimo, da je $ABCD\ldots$ (slika 50.) pravilen $n$terokotnik, s mersko število stranice, d mersko število razdalje središča od stranice. Potem je ploščina trikotnika ABO jednaka $\frac{sd}{2}$ in ploščina vseh trikotnikov, v katere je mnogokotnik z daljicami iz središča do oglišč razdeljen, t. j. ploščina mnogokotnika

$$P = n \cdot \frac{sd}{2} = \tfrac{1}{2}(ns) \cdot d,$$

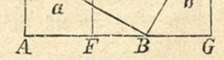
kjer je ns mersko število mnogokotnikovega obsega.

§ 75. Ploščino nepravilnega mnogokotnika dobimo, ako ga razdelimo z diagonalami v trikotnike; vsota ploščin vseh trikotnikov, katere izračunamo po znanem pravilu, je ploščina mnogokotnika.

Mnogokotnik pa moremo razdeliti tudi na trikotnike in trapece, ako potegnemo diagonalo, na katero potem spuščamo pravokotnice iz ostalih oglišč. Ploščino vsakega teh likov izračunamo po znanem pravilu in vsota teh ploščin je ploščina mnogokotnika.

§ 76. Pitagorov izrek. **V vsakem pravokotnem trikotniku je kvadrat nad hipotenuzo jednak vsoti kvadratov nad obema katetama.**

Slika 67.



Načrtajmo nad hipotenuzo BC (slika 67.) pravokotnega trikotnika ABC kvadrat $BCDE$ in potegnimo $DF \perp AB$, $EG \perp AB$, $EJ \perp DF$, $CH \perp DF$, potem so $AFCH$ in $FGEJ$ pravokotni paralelogrami, trikotniki a, b, c, d pa skladni (§ 52.), in

$c + d = a + b$. Nadalje je

$BCHJE = BCHJE$, torej

$BCHJE + d + c = BCHJE + a + b$ ali

$$BCDE = ACHJEGA = AFHC + FJEG.$$

Iz skladnosti trikotnikov a, b, c, d sledi $CH = AC$ in $EJ = EG = AB$ ali $ACHF$ je kvadrat nad kateto AC in $FJEG$ kvadrat nad kateto AB. Ako torej zaznačimo kratko $BCDE = \square\, BC$, $AFCH = \square\, AC$ in $FGEJ = \square\, AB$, je po gornjem

$$\square\, BC = \square\, AC + \square\, AB.$$

Izvod. **Kvadrat nad jedno kateto je jednak kvadratu nad hipotenuzo menj kvadratu nad drugo kateto.**

Kajti iz $\square\, BC = \square\, AC + \square\, AB$, sledi $\square\, AB = \square\, BC - \square\, AC$, in $\square\, AC = \square\, BC - \square\, AB$.

§ 77. Pitagorov izrek izražuje v obliki, kakeršno ima v prejšnjem paragrafu, geometrično lastnost pravokotnega trikotnika. Damo pa mu lahko tako obliko, da postane aritmetični izraz medsebojne zavisnosti merskih števil stranic v pravokotnem trikotniku.

Kajti, ako so a, b, c merska števila stranic AB, AC, BC (slika 67.) z ozirom na isto dolgostno jednoto, so a^2, b^2, c^2 merska števila ploščin kvadratov, katere smo nad onimi stranicami načrtali (§ 70.).

Iz jednačeb prejšnjega izvoda sledé potem té-le:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ali} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \quad » \quad a = \sqrt{c^2 - b^2},$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \quad » \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Izrazi te jednačbe z besedami!

Računske naloge.

1.) Stranica kvadrata je *a)* 42 *m*, *b)* 0·855 *m*, *c)* 1 *m* 4 *dm* 7 *cm* dolga: kolik je njegov obseg in kolika njegova ploščina?

2.) Kvadratov obseg znaša *a)* 23 *m* 2 *dm*, *b)* $9\frac{1}{3}$ *m*; kolika je ploščina?

3.) V pravokotniku znašate dve stikajoči se stranici a in b, o je mersko število za obseg, p pa ono za ploščino; izračuni iz dveh teh količin drugi dve.

1.) a = 3 *m* 4 *dm* ($4\frac{1}{6}$ *m*), b = 2 *m* 5 *dm* ($1\frac{3}{5}$ *m*);
2.) b = 5·7 ($5\frac{1}{4}$) *m*, p = 74·52 ($11\frac{3}{8}$) m^2;
3.) a = 5 *m* 2 *dm* 8 *cm*, p = 21 m^2 56 dm^2;
4.) a = 12·84 ($6\frac{3}{4}$) *m*, o = 40 (22) *m*.

4.) Nekdo zameni njivo, katera ima 746 m^2 20 dm^2, z drugo isto toliko pa 18 *m* 2 *dm* široko; koliko je druga njiva dolga?

5.) Pravokotnik, 2 *m* 1 *dm* 8 *cm* dolg, je s kvadratom ploskveno-jednak, čegar stranica 5 *m* 8 *cm* znaša; kolika je širina pravokotnika?

6.) Vrvica, 10·4 *m* dolga, obseže ravno 3·24 *m* dolg pravokotnik; za koliko se razloči ploščina tega pravokotnika od ploščine kvadrata, katerega ona vrvica tudi ravno obseže?

7.) V paralelogramu (trikotniku) je a osnovnica, v višina in p ploščina; izračuni iz dveh teh količin tretjo.

8.) Izračuni obseg paralelograma, v katerem je dano mersko število jedne stranice (a = 37 *m*), in merski števili razstojev po dveh nasprotnih stranic (v_1 = 21 *m*, v_2 = 27·8 *m*).

9.) V pravokotnem trikotniku sta kateti 29 *m* 3 *dm* in 18 *m* 4 *dm* dolgi; kolika je ploščina?

10.) V rombu sta d_1 in d_2 merski števili diagonal; kolika je ploščina p?

$$p = \frac{d_1 \, . \, d_2}{2} \text{ (§ 63., 4.).}$$

11.) Miza, 12 *dm* dolga in 9 *dm* široka, je na sredi olepotičena z rombom, čegar diagonali sta 4 *dm*, oziroma 3 *dm* dolgi; za koliko je miza večja od romba?

12.) V trapecu sta merski števili vzporednic a in b, oni višine in ploščine pa v in p; izračuni iz treh teh količin četrto.

13.) V trapecu znašata vzporednici 2·37 *m* in 0·954 *m*, višina pa 0·753 *m*; kolika je osnovnica ploskvenojednakega trikotnika, čegar višina znaša 0·685 *m* (3 dec.)?

14.) Stranica pravilnega osmerokotnika znaša 1·4 *m* in nje razdalja od središča 1·69 *m*; kolika je ploščina?

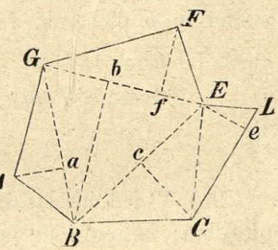
15.) Obseg pravilnega šesterokotnika meri 15 *m*; kolika je ploščina?

16.) V mnogokotniku *ABCDEFG* (slika 68.) je

$BG = 39\ m$, $Cc = 19·7\ m$,
$BE = 42·5\ m$, $Ee = 12·1\ m$,
$CD = 31·5\ m$, $Bb = 35·4\ m$,
$EG = 39·5\ m$, $Ff = 16·4\ m$;
$Aa = 11·6\ m$,

kolika je ploščina mnogokotnika?

Slika 68.

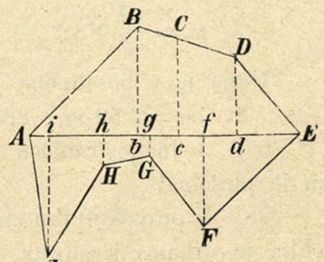


17.) V mnogokotniku *ABCDEFGHJ* (slika 69.) je

$Ai = 9·1\ m$, $Ji = 63·4\ m$,
$ih = 29·2\ m$, $Hh = 17·1\ m$,
$hb = 22·1\ m$, $Bb = 60·5\ m$,
$bg = 6·1\ m$, $Gg = 12·1\ m$,
$gc = 19·2\ m$, $Cc = 57·2\ m$,
$cf = 16·4\ m$, $Ff = 52·3\ m$,
$fd = 21·8\ m$, $Dd = 46\ m$;
$dE = 41·6\ m$,

kolika je mnogokotnikova ploščina?

Slika 69.



18.)* V kvadratu so merska števila stranice, obsega in ploščine, s, o in p; izračuni iz jedne teh količin obe drugi.

1.) $s = 2{\cdot}4\ m$, $6\ m\ 4\ dm\ 2\ cm$, $8\frac{2}{3}\ dm$.

2.) $o = 8{\cdot}64\ m$, $24\ m\ 2\ dm\ 8\ cm$, $12\frac{3}{5}\ m$.

3.) $p = 16\ m^2$, $30{\cdot}25\ dm^2$, $5\ dm^2\ 24\ cm^2\ 41\ mm^2$.

19.) Kolika je stranica kvadratne njive, katera meri 9 *ha*?

20.) Na travniku hočejo zakliniti kvadraten prostor imajoč 9·61 arov; kolik je obseg tega prostora?

21.) V pravokotnem trikotniku sta a in b kateti, c hipotenuza, o obseg in p ploščina. Izračuni iz dveh teh količin vse druge.

1.) $a = 36\ m$, $b = 27\ m$; 2.) $a = 13{\cdot}2\ m$, $c = 14{\cdot}3\ m$; 3.) $b = 3{\cdot}84\ dm$, $c = 7{\cdot}3\ dm$; $\}$ 2 dec.

4.) $a = 7\ m\ 2\ dm$, $p = 7\ m^2\ 56\ dm^2$.

22.) Kolik je obseg pravokotnega trikotnika, v katerem sta merski števili katete in hipotenuze $k = 6{\cdot}2\ dm$, $h = 9{\cdot}4\ dm$?

23.) Kolika je diagonala kvadrata sè stranico 3·2 *m*?

24.) V kvadratu meri diagonala 2·12 *m*; kolika je ploščina?

25.) V jednakokrakem trikotniku je a osnovnica, b krak, v višina in p ploščina. Izračuni iz dveh teh količin drugi dve.

1.) $a = 124\ cm$, $b = 165\ cm$; 2.) $a = 3{\cdot}5\ dm$, $v = 5{\cdot}4\ dm$; 3.) $a = 2{\cdot}34\ m$, $p = 3{\cdot}76\ m^2$;

4.) $v = 7{\cdot}8\ m$, $p = 32\ m^2$.

26.) V jednakostraničnem trikotniku je a stranica, v višina in p ploščina; izračuni iz jedne teh količin drugi dve.

1.) $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $p = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; 2.) $a = \frac{2v}{3}\sqrt{3}$, $p = \frac{v^2}{3}\sqrt{3}$; 3.) $a = 2\sqrt{\frac{p\sqrt{3}}{3}}$, $v = \sqrt{p\sqrt{3}}$.

Dana je v posebnem

1.) $a = 2{\cdot}59\ m$, 2.) $v = 1{\cdot}35\ m$, 3.) $p = 36\frac{3}{4}\ m^2$.

27.) Jednakostraničen trikotnik ima 7·2 *m* v obsegu; kolika mu je ploščina?

28.) V pravokotniku znaša osnovnica 6·8 *m* in diagonala 8·5 m; kolika je stranica kvadrata, ki je pravokotniku ploskvenojednak?

---

* Te naloge namenjene so za ponavljanje, in sicer, če učenci že znajo drugi koren iz števil poiskati.

29.) Obseg jednakokrakega trikotnika meri 16 *m*, krak 5 *m*; kolik je obseg ploskvenojednakega kvadrata?

30.) Stranica jednakostraničnega trikotnika je 16 *m* dolga; kolik je obseg ploskvenojednakega pravokotnika, čegar dolžina znaša 12·99 *m*?

31.) V rombu znaša ploščina 120 m^2 in jedna diagonala 24 *m*; kolika je *a)* druga diagonala, *b)* stranica, *c)* višina dolga?

32.) V jednakokrakem trapecu znaša ploščina 3·72 m^2, višina 1·2 *m* in daljša vzporednica 3·6 *m*; kolik je njegov obseg?

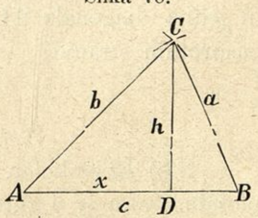
33.) V pravilnem šesterokotniku je a stranica, o obseg, v razstoj stranice od središča in p ploščina; izračuni iz vsake teh količin vse druge.

1.) $a = 4\ dm$; 2.) $v = 5\ dm\ 4\ cm$; 3.) $o = 7{\cdot}2\ dm$; 4.) $p = 3{\cdot}62\ dm^2$.

34.) V trikotniku so dane vse tri stranice; izračunaj k jedni stranici pripadajočo višino in ploščino trikotnika.

Vzemimo, da je v trikotniku ABC (slika 70.) stranica $BC = a$. $AC = b$, $AB = c$, višina $CD = h$ in daljica $AD = x$, tedaj $BD = c - x$.

Slika 70.



x določimo po § 77

iz $\triangle\ ADC \ldots h^2 = b^2 - x^2$,

iz $\triangle\ BDC \ldots h^2 = a^2 - (c - x)^2$,

tedaj $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$, in iz tega dobimo

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Ker je pa $h^2 = b^2 - x^2 = (b + x)(b - x)$, dobimo, ako nadomestimo x z ravno izračunano vrednostjo,

$$h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \cdot \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}$$

$$= \frac{(b + c^2) - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b^2 - c^2)}{2c}$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4c^2}, \text{ in}$$

$$h = \frac{1}{2c} \sqrt{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}.$$

Ako zaznamenujemo polovico trikotnikovega obsega s črko s, tedaj $a + b + c = 2s$, dobimo, ako odštejemo od te jednačbe zaporedoma $2a$, $2b$, $2c$,

$$b + c - a = 2(s - a),$$
$$a - b + c = 2(s - b),$$
$$a + b - c = 2(s - c); \text{ torej}$$
$$h = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ako je p ploščina trikotnika ABC, je

$$p = \frac{ch}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Izrazi to formulo z besedami!

35.) V trikotniku je

1.) $a = 5\ m$,	2.) $a = 2{\cdot}8\ m$,	3.) $a = 2\ m\ 5\ dm\ 7\ cm$,
$b = 6\ m$,	$b = 3{\cdot}7\ m$,	$b = 3\ m\ 1\ dm\ 1\ cm$,
$c = 9\ m$;	$c = 4{\cdot}5\ m$;	$c = 1\ m\ 8\ dm\ 4\ cm$;

kolika je ploščina?

36.) V romboidu merita dve stikajoči se stranici 25 m in 7 m in jedna diagonala 24 m; kolika je ploščina in kolik razstoj dveh nasprotnih stranic?

37.) Pravokoten vrt ima 200 m v obsegu; kolika je njegova ploščina, ako je $1\frac{2}{3}$krat tako dolg kakor širok?

38.) Trikotnik, čegar ploščina znaša 1734 m^2, ima trikrat daljšo višino kakor osnovnico; kolika je vsaka?

39.) V rombu meri stranica 25 m in jedna diagonala 48 m; kolik je obseg pravokotnega jednakokrakega trikotnika, kateri je rombu ploskvenojednak?

40.) Trapec ima 100 m v obsegu; vzporednici merita 42 m in 24 m in jedna nevzporednica 15 m; kolika je ploščina?

41.) Obseg trikotnika meri 12 m, in stranice so si kakor 4 : 5 : 6; kolik je obseg ploščinskojednakega pravilnega šesterokotnika?

42.) Kolika je ploščina romba sè stranico 3 dm 8 cm, ako ima jeden njegovih kotov 45^0?

43.) Kolika je ploščina paralelograma, čegar dve stikajoči se stranici merita 7·5 m in 6 m in kot, katerega oklepata, 60^0?

Naloge za načrtovanje.

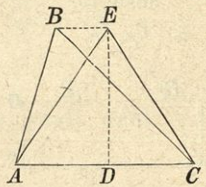
(Pretvor in razdelba premočrtnih likov.)

Dan lik **pretvorimo** v druzega, ako načrtamo lik, ki je danemu ploskvenojednak, pa ne skladen.

1.) **Pretvori raznostraničen trikotnik** ABC (slika 71.) **v jednakokrakega, kateri ima s prvim jednako osnovnico.**

Postavi v sredi osnovnice v točki D pravokotnico DE in potegni skoz vrh B premo $BE \parallel AC$; ako zvežeš presečišče E z A in C je ACE zahtevani jednakokraki trikotnik.

Slika 71.

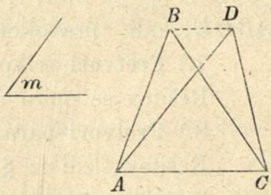


Da je rešitev prava, sledi iz § 72., izv. *c)* in § 59., 4.

2.) **Pretvori trikotnik** ACB (slika 72.) **v druzega, kateri ima dan kot** m.

Načrtaj kot $CAD = m$ in $BD \parallel AC$; presečišče D prem BD in AD je vrh iskanega trikotnika ACD (§ 72., izv. *c)*.

Slika 72.

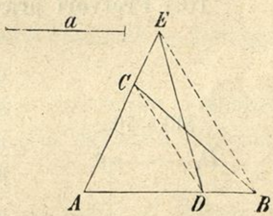


3.) **Pretvori poševnokoten trikotnik v pravokotnega.**

Rešitev kakor pri nalogi 2.), samo da je $m = 90^0$.

4.) **Pretvori trikotnik** ABC (slika 73.) **v druzega, kateri ima** a **za osnovnico.**

Slika 73.

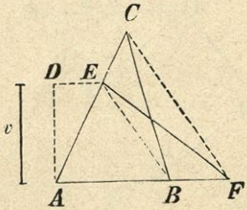


Naredi $AD = a$, potegni CD in vzporedno s to BE, katera seče podaljšano AC v E; ADE je potem zahtevani trikotnik. Kajti

$$\triangle ACD = \triangle ACD,$$
$$\triangle CDE = \triangle CDB, \text{ tedaj}$$
$$\triangle ACD + \triangle CDE = \triangle ACD + \triangle CDB,$$
$$\text{ali } \triangle ADE = \triangle ABC.$$

5.) **Pretvori trikotnik** ABC (slika 74.) **v druzega, kateri ima dano višino** v.

Slika 74.



Postavi $AD = v$ pravokotno na AB, potegni $DE \parallel AB$, zveži E z B in načrtaj $CF \parallel EB$. Ako potegneš še EF, je

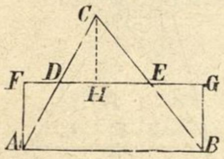
$$\triangle AEF = \triangle ABC.$$

Dokaz kakor pri nalogi 4.

Dostavek. Po tej nalogi moreš zmerom trikotnike z različnimi višinami pretvarjati v take, ki imajo jednako višino; potem pa tudi lahko načrtaš trikotnik, ki je jednak vsoti (diferenci) dveh danih trikotnikov.

6.) **Pretvori trikotnik** ABC (slika 75.) **v pravokotnik, kateri ima isto osnovnico kakor trikotnik.**

Slika 75.



Razpolovi stranici AC in BC v D in E, potegni skoz te dve točki premo in postavi v A in B pravokotnici AF in BG; $ABGF$ je iskani pravokotnik, kajti, ako potegneš, $CH \perp DE$, je

$\triangle\ AFD = \triangle\ CHD,$

$\triangle\ BGE = \triangle\ CHE,$

trap. $ABED = ABED$, tedaj

$\triangle\ AFD + \triangle\ BGE +$ trap. $ABDE = \triangle\ CHD + \triangle\ CEH +$ trap. $ABDE$, ali pravokotnik $ABGF = \triangle\ ABC$.

7.) **Pretvori trikotnik v isto tako visok paralelogram.**

Rešitev se opira na § 72.

8.) **Pretvori paralelogram v isto tako visok pravokotnik.**

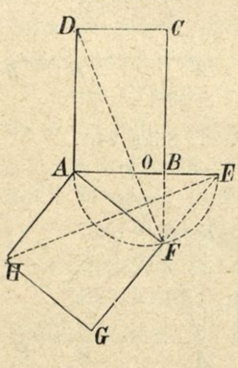
Rešitev sledi iz § 71., izv. 1.

9.) **Pretvori trapec** $ABCD$ (slika 66.) **v paralelogram.**

Rešitev v § 73.

10.) **Pretvori pravokotnik** $ABCD$ (slika 76.) **v kvadrat.**

Slika 76.



Podaljšaj manjšo stranico AB do E, tako da je $AE = AD$ in napiši nad AE iz njene srede O lok, kateri seče podaljšano CB v točki F. Ako potegneš AF in načrtaš nad njo kvadrat $AFGH$, je ta danemu pravokotniku ploskvenojednak.

Dokaz. Ker je $\sphericalangle\ AFE = R$ (§ 37.) je EFG prema črta. Ako potegneš HE in DF, je po § 72.

$\triangle\ AHE = \frac{1}{2}$ kvadrata $AFGH$,

$\triangle\ FAD = \frac{1}{2}$ pravokotnika $ABCD$.

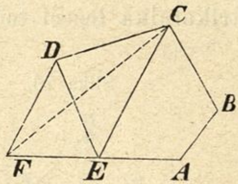
Ker pa je

$\triangle\ AHE \cong \triangle\ FAD$, je tudi

kvadrat $AFGH =$ pravokotniku $ABCD$.

11.) **Pretvori mnogokotnik** *ABCDE* (slika 77.) **v druzega, kateri ima jedno stranico menj.**

Slika 77.



Potegni diagonalo CE in $DF \parallel CE$, zveži točki F in C; potem je $ABCDE = ABCF$. Kajti oba mnogokotnika sta sestavljena iz jednakih delov.

Dostavek. Vsak mnogokotnik moreš pretvoriti v kvadrat. Kajti po nalogi 11. pretvoriš ga lahko v trikotnik, tega po nalogi 6. v pravokotnik in zadnjega po nalogi 10. v kvadrat.

12.) **Načrtaj kvadrat, kateri je jednak vsoti dveh danih kvadratov.**

Načrtaj pravôkoten trikotnik, čegar kateti sta stranici danih kvadratov; hipotenuza tega trikotnika je stranica zahtevanega kvadrata (§ 76.).

Ako ponavljaš postopanje te naloge, načrtaš lahko kvadrat, kateri je

a) jednak vsoti več danih kvadratov,

b) 3-, 4-, 5krat tolik kakor dan kvadrat.

13.) **Načrtaj kvadrat, kateri je jednak diferenci dveh danih kvadratov.**

Načrtaj pravokoten trikotnik, kateri ima stranico večjega kvadrata za hipotenuzo in stranico manjšega za jedno kateto; druga kateta je stranica iskanega kvadrata.

14.) **Razdeli trikotnik s premami, katere potegneš iz jednega oglišča, na več jednakih delov.**

Razdeli onemu oglišču nasprotno stranico na toliko jednakih delov, kolikor je zahtevanih in zveži razdelišča in oglišče z daljicami (§ 72., izv. *c)*.

15.) **Razdeli trikotnik** *ABC* (slika 78.) **od točke** *D,* **ležeče v stranici** *AB,* **na dva jednaka dela.**

Razpolovi AB v E, potegni CE in CD in $EF \parallel DC$; potem je

$$\triangle BDF = ADFC = \tfrac{1}{2} \triangle ABC.$$

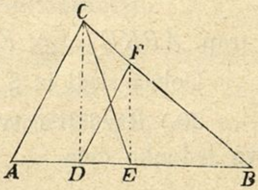
Kajti $\triangle EFD = \triangle EFC$ (§ 72., izv. *c)*,

$$\triangle BEF = \triangle BEF$$

$$\overline{\triangle BDF = \triangle BCE = \tfrac{1}{2} \triangle ABC,}$$

tedaj tudi $ADFC = \tfrac{1}{2} \triangle ABC$.

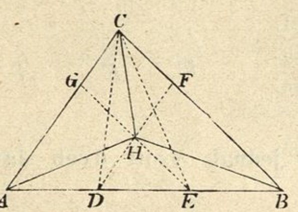
Slika 78.



Takisto moreš rešiti nalogo, ako ti je razdeliti trikotnik ABC od točke D na več jednakih delov.

16.) **Razdeli trikotnik** ABC (slika 79.) **tako na tri jednake dele, da se sečejo iz oglišč potegnene razdelnice v jedni znotraj trikotnika ležeči točki.**

Slika 79.



Razdeli stranico AB v točkah D in E na tri jednake dele, potegni $DF \parallel AC$ in $EG \parallel BC$; ako zvežeš presečišče H prem DF in EG z oglišči, je $\triangle AHC = \triangle AHB = \triangle BHC$.

Kajti ako potegneš pomočni črti CD in CE, je $\triangle AHC = \triangle ACD$ in $\triangle BHC = \triangle BCE$, tedaj tudi $\triangle AHB = \triangle DCE$.

Ker so pa trikotniki ACD, DCE, BCE jednaki, morajo biti jednaki tudi trikotniki ACH, AHB, BHC.

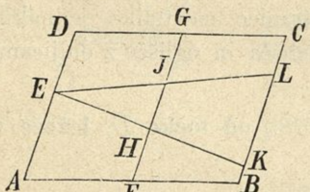
17.) **Razdeli trikotnik na štiri skladne trikotnike.**

Zveži razpolovišča vseh treh stranic z daljicami.

18.) **Razdeli paralelogram s premami, katere so z jedno stranico vzporedne, na poljubno mnogo jednakih delov.**

Razdeli stranici, kateri se s to stikata, na zahtevano število jednakih delov in zveži po dve nasprotni razdelišči z daljicami (§ 71.).

Slika 80.



19.) **Razdeli paralelogram** $ABCD$ (slika 80.) **od točke** E, **ležeče v stranici** AD, **na določeno število, n. pr. na tri jednake dele.**

Zveži razpolovišči F in G stranic AB in CD z daljico FG, razdeli to na tri jednake dele in potegni skoz E in razdelišči J in H daljici EHK in EJL, potem je

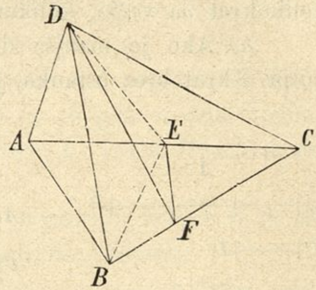
trap. $ABKE = \triangle EKL =$ trap. $ELCD = \frac{1}{3}$ paralelogr. $ABCD$.

Dokaz sledi iz § 72. in § 73.

20.) **Razdeli četverokotnik** $ABCD$ (slika 81.) **iz oglišča** D **na dva jednaka dela.**

Potegni obe diagonali AC in BD in skoz sredo E prve $EF \parallel DB$; ako zvežeš D in F z daljico DF, razpolavlja ona četverokotnik $ABCD$.

Slika 81.



Dokaz. Ako potegneš DE in BE, je

$\triangle DBF = \triangle DBE$ (§ 72., izv. c).

$\triangle ABD = \triangle ABD$, tedaj

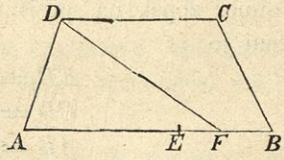
četverokot. $ABFD$ = četverokot. $ABED$.

Ker je pa četverokot. $ABED = \frac{1}{2} ABCD$,

je tudi četverokot. $ABFD = \frac{1}{2} ABCD$.

21.) **Razdeli trapec** $ABCD$ (slika 82.) **iz oglišča** D **na dva jednaka dela.**

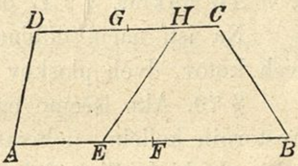
Slika 82.



Načrtaj $AE = DC$ in $EF = FB$; daljica DF razpolavlja trapec (§ 72. in § 73.).

22.) **Razdeli trapec** $ABCD$ (slika 83.) **iz točke** E, **ležeče v vzporednici** AB, **na dva jednaka dela.**

Slika 83.



Razpolovi obe vzporednici v točkah F in G, naredi $HG = EF$; daljica EH razpolavlja trapec $ABCD$ (§ 73.).

Peti oddelek.

O podobnosti premočrtnih likov.

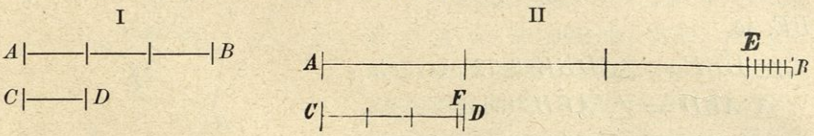
1. Geometrijska razmerja in sorazmerja.

§ 78. Prostorno količino, katero lahko od druge istovrstne prostorne količine večkrat odvzamemo, in sicer brez ostanka, imenujemo nje **mero.** Ako je prostorna količina M ob jednem mera prostorne količine A in prostorne količine B, imenujemo jo **skupno mero** od A in B.

Da dobimo **skupno mero dveh daljic**, vnesimo manjšo daljico tolikokrat na večjo, kolikorkrat je mogoče.

a) Ako je manjša daljica (slika 84., I) v večji AB večkrat, n. pr. 3krat brez ostanka, je CD sama skupna mera od AB in CD.

Slika 84.



b) Vzemimo, da se manjša daljica ne dá na večji natanko vnesti, da je n. pr. daljica CD (slika 84., II) v AB 3krat in EB ostanek; vnesimo zdaj EB na CD tolikokrat, kolikorkrat je mogoče; recimo, da je EB v DC 3krat in ostaje še daljica FD. Ta ostanek vnesimo zopet na prejšnjega EB, v katerem je natanko 6krat. Potem je

$$EB = 6\,FD,$$
$$CD = 3\,EB + FD = 19\,FD,$$
$$AB = 3\,CD + EB = 63\,FD.$$

Daljici AB in CD imata tedaj skupno mero FD, in sicer je ta v AB 63krat, v CD pa 19krat.

Na isti način dobimo skupno mero dveh istovrstnih krogov, dveh kotov, dveh ploskev ali teles.

§ 79. Ako iščemo na v § 78. navedeni način skupno mero dveh prostornih količin, dobivamo manjše in manjše ostanke; vender ni treba, da bi dobili kedaj ostanek, ki bi bil mera prejšnjemu. V tem slučaji nimata dani količini skupne mere.

Dve količini, kateri imata skupno mero, imenujemo **somerni**; dve količini pa, kateri nimata skupne mere, imenujemo **nesomerni**.

§ 80. Primerjanje dveh istovrstnih prostornih količin A in B v to svrho, da zvemo, kolikokrat je druga v prvi, imenujemo **razmerje**. Razmerje zaznamenujemo z $A : B$ ali $\frac{A}{B}$. A je **prednji**, B **zadnji** člen razmerja; število pa, katero pové, kolikokrat je količina B v A, **eksponent** razmerja.

Razmerje dveh prostornih količin določujemo z razmerjem njijinih merskih števil, ozirajočih se na isto mero. Tako je v sliki 84., II

$$AB : CD = 63\,FD : 19\,FD = 63 : 19.$$

Splošno. Ako je prostorna količina C skupna mera dveh istovrstnih prostornih količin A in B, in je $A = mC$, $B = nC$, je

$$A : B = mC : nC = m : n.$$

Dostavek. Vrednost razmerja dveh somernih prostornih količin je popolnem natanko določena, in sicer je *a)* eksponent celo število, ako je jedna danih dveh količin mera druge, *b)* vsaki drugikrat pa ulomek.

Vrednost razmerja dveh nesomernih prostornih količin se ne dá popolnem natanko določiti, približno pa poljubno natanko.

Kajti, ako sta A in B dve nesomerni prostorni količini, moremo razdeliti manjšo količino B v n jednakih, neskončno majhnih delov C (kar je mogoče, ako vzamemo n dosti velik), tako, da je $B = nC$. Ako je potem $A = mC + o$, smemo ostanek o zanemariti, ker je v primeri z mC neskončno majhen. Na ta način dobimo

$$A : B = mC : nC = m : n,$$ t. j.

dve nesomerni prostorni količini smemo približno kot somerni smatrati, ako jima vzamemo za skupno mero neskončno majhno istovrstno količino.

Vsled tega bodemo se pečali v sledečem le sè somernimi prostornimi količinami.

Načrtaj dve daljici, kateri se imata kakor *a)* 1 : 2, *b)* 2 : 3, *c)* 3 : 5.

§ 81. Dve razmerji, kateri imata jednaka eksponenta, sta jednaki. Ako je

$$A : B = e \text{ in } C : D = e, \text{ je}$$
$$A : B = C : D.$$

Jednačenje dveh jednakih razmerij imenujemo **sorazmerje** (proporcijo). V sorazmerji $A : B = C : D$ imenujemo A in D **vnanja**, B in C **notranja** člena.

Sorazmerje, v katerem sta notranja člena jednaka, je **stalno** sorazmerje; notranji člen imenujemo **srednjo geometrijsko sorazmernico** (proporcijonalo), četrti člen pa **tretjo stalno sorazmernico.**

O daljici AC, katero deli točka B tako v dva odseka, da velja sorazmerje $AC : AB = AB : BC$, pravimo, da je v točki B po **stalnem sorazmerji,** ali v **srednjem** in **vnanjem razmerji** razdeljena.

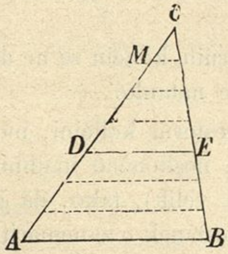
Načrtaj dva para daljic, katera sta sorazmerna.

2. Podobnost trikotnikov.

§ 82. **Izreki o sorazmerni razdelbi trikotnikovih stranic.**

1.) **Ako potegnemo v trikotniku z jedno stranico vzporednico, razdeli ta drugi dve stranici sorazmerno** (slika 85.).

Slika 85.



Pogoj. $DE \parallel AB$.

Trditev. $CD : DA = CE : EB$.

$CA : DA = CB : EB$.

$CA : CD = CB : CE$.

Dokaz. Vzemimo, da je CM skupna mera daljic CD in DA, in sicer $CD = m \,.\, CM$, $DA = n \,.\, CM$; potem je $CD : DA = m : n$.

Ako razdelimo CD na m in DA na n jednakih delov in potegnemo skoz razdelišča vzporednice z AB, razdelimo na ta način (§ 65., 2.) CE v m, celo CB pa v $m + n$, tedaj EB v n med seboj jednakih delov; torej $CE : EB = m : n$.

Iz tega in prejšnjega sorazmerja pa sledi: $CD : DA = CE : EB$.

Iz sorazmerja $CD : DA = CE : EB$ pa sledi tudi resničnost drugih dveh v pogoji navedenih razmerij.

Kajti

$$(CD + DA) : DA = (CE + EB) : EB \text{ ali } CA : DA = CB : EB$$

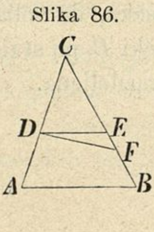
$$\text{ali } (CD + DA) : CD = (CE + EB) : CE \text{ ali } CA : CD = CB : CE.$$

Izvoda. *a)* Ako sečemo dva trakova z dvema vzporednicama, so odseki trakov sorazmerni.

b) Ako potegnemo od skupne točke 3, 4, 5 . . . trakov in sečemo prva dva z dvema vzporednicama, takisto druzega in tretjega od presečišč v drugem, tretjega in četrtega od presečišč v tretjem i. t. d., so odseki vseh teh trakov paroma sorazmerni in prečnice tvorijo dva mnogokotnika (slika 92.).

2.) **Prema, katera seče v trikotniku dve stranici sorazmerno, je vzporedna s tretjo trikotnikovo stranico** (slika 86., obrat izr. 1.).

Slika 86.



Pogoj. $CA : CD = CB : CE$.

Trditev. $DE \parallel AB$.

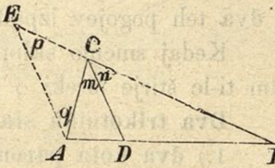
Dokaz. Ako bi DE ne bila vzporedna z AB, bi bila pa druga iz točke D potegnena prema n. pr. $DF \parallel AB$. Potem pa velja (po 1.)

$$CA : CD = CB : CF.$$

Z ozirom na pogoj mora biti $CF = CE$, t. j. točka F s točko E identična. Tedaj je $DE \parallel AB$.

3.) **Ako razpolovimo v trikotniku jeden kot, deli polovnica nasprotno stranico v dva odseka, katera sta sorazmerna z njima priležnima stranicama** (slika 87.).

Slika 87.



Pogoj. $\sphericalangle m = \sphericalangle n$.

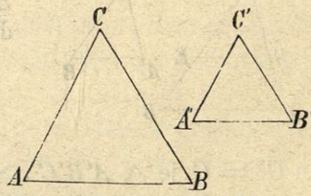
Trditev. $AD : DB = AC : BC$.

Dokaz. Naredimo podaljšek $CE = AC$ in zvežimo točki E in A, potem je $\triangle ACE$ jednakokrak in $\sphericalangle p = \sphericalangle q$.

Ker je pa $\sphericalangle m + \sphericalangle n = \sphericalangle p + \sphericalangle q$ (§ 33.), je tudi $\sphericalangle n = \sphericalangle p$, torej $CD \parallel AE$ (§ 26., 1.) in $AD : DB = EC : BC$ (§ 82., 1.) ali $AD : DB = AC : BC$.

§ 83. Dva trikotnika imenujemo **podobna**, ako imata vse kote paroma jednake in jednakim kotom nasprotne, t. j. **istoležne** stranice paroma sorazmerne. Znak podobnosti je $\sim$.

Slika 88.



Vzemimo, da je v trikotnikih ABC in $A'B'C'$ (slika 88.)

$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ in $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$, potem je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

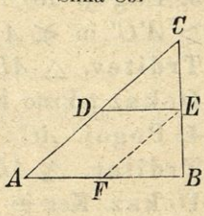
Da imamo sploh podobne trikotnike, spoznamo iz sledečega izreka:

Ako potegnemo v trikotniku vzporednico z jedno stranico, dobimo manjši trikotnik, kateri je večjemu podoben.

Pogoj. $DE \parallel AB$ (slika 89.).

Trditev. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

Slika 89.



Dokaz. $\sphericalangle C = \sphericalangle C$, in $\sphericalangle A = \sphericalangle CDE$, $\sphericalangle B = \sphericalangle CED$ (§ 26., 2.); dalje je $AC : DC = BC : EC$; potegnimo še $EF \parallel CA$; potem je (§ 82., 1.) $AB : AF = BC : EC$; ker je pa $AF = DE$, je tudi $AB : DE = BC : EC$, tedaj $\triangle ABC \sim DEC$.

Izvoda. 1.) Ako sečeta dve vzporedni prečnici dva traka, sta odseka prečnic sorazmerna z odseki trakov.

2.) Ako sečemo več trakov s prečnicami tako, da je (slika 92.) $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$ i. t. d., so odseki prečnic paroma sorazmerni. Kajti vsi so sorazmerni z odsekoma istega traka.

§ 84. Da sta dva trikotnika podobna, morata šestim pogojem zadostovati. Ti pogoji pa so zavisni drug od druzega in zato je mnogokrat mogoče, da sklepamo na podobnost trikotnikov, ako sta le **dva** teh pogojev izpolnjena.

Kedaj smemo sklepati, da sta dva trikotnika podobna, povedó nam ti-le štirje izreki o podobnosti trikotnikov.

Dva trikotnika sta podobna, ako imata

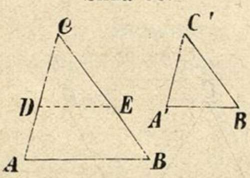
1.) dva kota paroma jednaka,

2.) dve stranici paroma sorazmerni in od njih oklepana kota jednaka,

3.) dve stranici paroma sorazmerni in večji teh stranic nasprotna kota jednaka,

4.) vse tri stranice paroma sorazmerne.

Slika 90.



Te izreke dokažemo, ako naredimo $DC = A'C'$ (slika 90.), $DE \parallel AB$, torej $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (§ 83.) in dokažemo, da je $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEC$.

1. Pogoj. $\sphericalangle A = \sphericalangle A', \sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

Trditev. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Ker je $\sphericalangle A' = \sphericalangle A = \sphericalangle D$ in $C' = C$, je $\triangle A'B'C' \cong DEC$ (§ 50.), torej $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

2. Pogoj. $AC : A'C' = BC : B'C'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

Trditev. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Ker je $DE \parallel AB$, imamo $AC : CD = BC : CE$ ali $AC : A'C' = BC : CE$, torej oziraje se na pogoj $CE = B'C'$ in $A'B'C' \cong \triangle DEC$ (§ 51.) ter tudi $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

3. Pogoj. $AC : A'C' = BC : B'C'$, $BC > AC$, torej tudi $B'C' > A'C'$ in $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

Trditev. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dokaz takisto kakor pri 2.

4. Pogoj. $AC : A'C' = BC : B'C'$, $AC : A'C' = AB : A'B'$.

Trditev. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Dokaz. Ker je $DE \parallel AB$, imamo $AC : CD = BC : CE$ in $AC : CD = AB : DE$, ali $AC : A'C' = BC : CE$ in $AC : A'C' = AB : DE$; torej oziraje se na pogoj $CE = B'C'$ in $DE = A'B'$ in $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEC$ ter tudi $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

3. Podobnost mnogokotnikov.

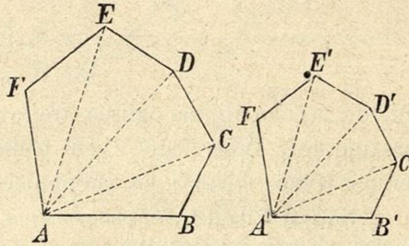
§ 85. Dva mnogokotnika sta podobna, ako imata istoležne stranice paroma sorazmerne in vse kote paroma jednake.

Izvod. Dva pravilna mnogokotnika z istim številom stranic sta podobna.

§ 86. Izreki. 1.) **Istoležne diagonale razdeljujejo dva podobna mnogokotnika na isto toliko podobnih trikotnikov.**

Pogoj. Vzemimo, da je mnogokotnik $ABCDEF \backsim A'B'C'D'E'F'$ (slika 91.).

Slika 91.



Trditev.
$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,
$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$,
i. t. d.

Dokaz. Da je $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, sledi neposredno iz pogoja po § 84, 2.

Iz podobnosti teh dveh trikotnikov pa sledi $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$ in $AB : A'B' = AC : A'C' = CD : C'D'$. Ker pa je po pogoji $\measuredangle BCD = \measuredangle B'C'D'$, je tudi $\measuredangle BCD - \measuredangle ACB = \measuredangle B'C'D' - \measuredangle A'C'B'$ ali $\measuredangle ACD = \measuredangle A'C'D'$; to v zvezi s prejšnjim sorazmerjem pa kaže, da je $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$ (§ 84., 2.).

Takisto sledi podobnost vsakega sledečega para trikotnikov iz podobnosti prejšnjega para in podobnosti mnogokotnikov.

2.) **Dva mnogokotnika sta podobna, ako ja moremo z istoležnimi diagonalami na isto toliko podobnih trikotnikov razdeliti.**

Dokaz. Iz pogoja lahko dokažemo, da so v obeh mnogokotnikih istoležni koti jednaki in istoležne stranice sorazmerne.

Izvod. V dveh podobnih mnogokotnikih je razmerje po dveh istoležnih diagonal jednako razmerju dveh istoležnih stranic.

3.) **V podobnih mnogokotnikih sta obsega sorazmerna z dvema istoležnima stranicama.**

Kajti ako je (slika 91.)

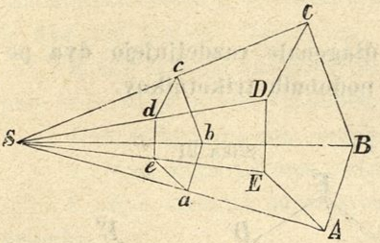
$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \ldots$$

je tudi

$$(AB + BC + CD + \ldots) : (A'B' + B'C' + C'D' + \ldots) = \\ = AB : A'B'.$$

§ 87. Izrek. **Ako potegnemo od točke S (slika 92.) več v isti ravnini ležečih trakov, katere sečejo prečnice v točkah A in a, B in b, C in c, . . . sorazmerno, sta mnogokotnika $ABCD$ . . . in $abcd$ . . . podobna.**

Slika 92.



Mnogokotnika $ABCD$ . . . in $abcd$ . . . imata namreč istoležne stranice sorazmerne (§ 83., izv. 2.). Ker je dalje $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, $CD \parallel cd$, . . . je $\sphericalangle A = \sphericalangle a$, $\sphericalangle B = \sphericalangle b$, $\sphericalangle C = \sphericalangle c$ . . .

Mnogokotnika sta tedaj podobna. Dva podobna mnogokotnika moremo zmerom v tako lego spraviti, da sečejo njijina oglišča trakove, katere potegnemo od točke S, sorazmerno. Tako lego dveh podobnih mnogokotnikov imenujemo **perspektivno**, točko S pa **podobnišče.**

Načrtaj k daljici AB perspektivno ležečo ab, ako je dano podobnišče S in eksponent ($e = AB : ab$).

a) $AB = 60\,mm$, $AS = 65\,mm$, $BS = 40\,mm$, $e = \frac{3}{4}$;

b) $AB = 40\,mm$, $AS = 50\,mm$, $BS = 30\,mm$, $e = \frac{2}{5}$.

Načrtaj k trikotniku ABC perspektivno ležeč trikotnik abc, ako je dano podobnišče S in $e = AB : ab$.

$AB = 60\,mm$, $AC = 45\,mm$, $BC = 30\,mm$, $AS = 60\,mm$, $BS = 50\,mm$, $e = \frac{4}{3}$.

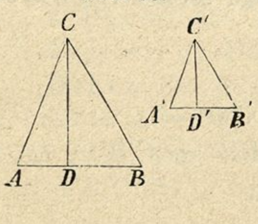
Načrtaj k četverokotniku $ABCD$ perspektivno ležeč četverokotnik $abcd$, ako je dano podobnišče S in $e = AB : ab$

$AB = 60\,mm$, $AC = 50\,mm$, $BC = 30\,mm$, $AD = 32\,mm$, $BD = 48\,mm$, $AS = 60\,mm$, $BS = 75\,mm$, $e = \frac{2}{3}$.

4. Uporaba izrekov o podobnosti trikotnikov.

§ 88. Izrek. **V podobnih trikotnikih je razmerje istoležnih višin jednako razmerju istoležnih osnovnic.**

Slika 93.



Pogoj. $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, $C'D' \perp A'B'$, $CD \perp AB$ (slika 93.).

Trditev. $C'D' : CD = A'B' : AB$.

Dokaz. Iz pogoja sledi

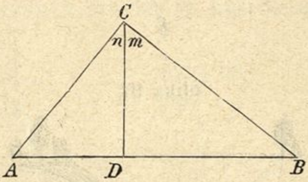
a) $A'B' : AB = A'C' : AC$, in ker je $A'C'D' \sim ACD$ (§ 84., 1.), je

b) $C'D' : CD = A'C' : AC$, torej tudi zarad *a)* in *b)* $C'D' : CD = A'B' : AB$.

§ 89. Izrek. **Ako spustimo v pravokotnem trikotniku z vrha pravega kota pravokotnico na hipotenuzo, je** *a)* **vsaka kateta srednja geometrijska proporcijonala med celo hipotenuzo in tej kateti priležnim odsekom hipotenuze,** *b)* **pravokotnica srednja geometrijska proporcijonala med obema odsekoma hipotenuze.**

Pogoj. $\sphericalangle ACB = R,\ CD \perp AB$ (slika 94.).

Slika 94.



Trditev.

a) $AB : AC = AC : AD$,
$AB : BC = BC : BD$;

b) $AD : CD = CD : BD$.

Dokaz. $\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle BCD$ (§ 84., 1.), in $\sphericalangle m = B$ in $\sphericalangle n = A$;

zarad $ABC \backsim ACD$ imamo $AB : AC = AC : AD$,
» $ABC \backsim BCD$ » $AB : BC = BC : BD$,
» $ACD \backsim BCD$ » $AD : CD = CD : BD$.

§ 90. Ako pomenijo c, a, b, r, s, oziroma merska števila hipotenuze AB, katet BC in AC, hipotenuznih odsekov AD in BD, potem je

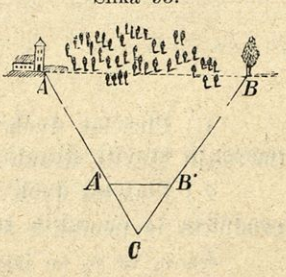
$$c : b = b : r \text{ in } c : a = a : s, \text{ tedaj}$$
$$cr = b^2 \text{ in } cs = a^2, \text{ in zato tudi}$$
$$cr + cs = a^2 + b^2 \text{ ali } c(r + s) = a^2 + b^2 \text{ ali } c^2 = a^2 + b^2.$$

Kvadrat merskega števila hipotenuze je jednak vsoti kvadratov merskih števil obeh katet. (Glej § 77.)

Praktična uporaba izrekov o podobnosti.

a) **Določi dolžino daljice, ako je ne moreš neposredno meriti zarad ovir med njenima krajiščema.**

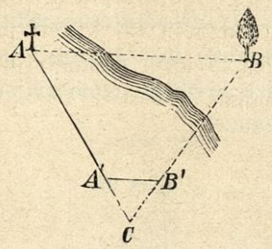
Slika 95.



To nalogo smo že rešili s pomočjo izrekov o skladnosti. Ako pa AC in BC ne moremo podaljšati, ker svet ni za to, rešimo nalogo s pomočjo izrekov o podobnosti. V tem slučaji meri tudi daljici AC in BC naredi $A'C = \frac{1}{n} AC$, $B'C = \frac{1}{n} BC$ (n. pr. $n = 4$), in izmeri $A'B'$. Ker je $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C$, je $A'B' = \frac{1}{4} AB$.

b) **Določi dolžino daljice** AB (slika 96.), **ako moreš le do jednega njenega krajišča** A **priti.**

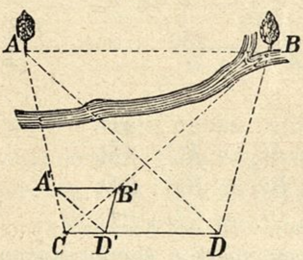
Slika 96.



Izberi si stališče C tako, da moreš AC odmeriti, naredi $A'C = \frac{1}{n} AC$ (n pr. $n = 4$). V točki A' zaklini $\sphericalangle CA'B' = \sphericalangle CAB$ in določi točko B', katera leži v kraku $A'B'$ in v BC. Ker je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$, je $AB = n \,.\, A'B'$.

c) **Določi dolžino daljice** AB (slika 97.), **katera ni na nobednem krajišči pristopna.**

Slika 97.



Izberi si stališči C in D takó, da moreš med njima meriti in videti od njih do toček A in B. Izmeri potem stalnico CD in naredi $CD' = \frac{1}{n} CD$ (n. pr. $n = 4$). V točki D' zaklini $\sphericalangle CD'A' = \sphericalangle CDA$ in določi točko A', katera leži v kraku $D'A'$ in v meri CA. Takisto zaklini v D' $\sphericalangle CD'B' = \sphericalangle CDB$ in določi točko B', katera leži v kraku $D'B'$ in v meri CB. Potem je $AB = n \,.\, A'B'$.

5. Ploščinska razmerja premočrtnih likov.

§ 91. Naloga. Izrazi ploščini p_1 in p_2 dveh *a)* kvadratov, *b)* pravokotnikov, *c)* paralelogramov, *d)* trikotnikov z občnimi izrazi in ji primerjaj.

Rešitev. Ako so s_1, o_1, v_1 in s_2, o_2, v_2, oziroma merska števila stranic kvadratov, osnovnic in višin onih likov, potem je

$$a)\ p_1 = s_1^2, \quad b) \text{ in } c)\ p_1 = o_1 v_1, \quad d)\ p_1 = \frac{o_1 v_1}{2},$$

$$p_2 = s_2^2, \quad p_2 = o_2 v_2, \quad p_2 = \frac{o_2 v_2}{2}, \text{ torej}$$

$$p_1 : p_2 = s_1^2 : s_2^2; \quad p_1 : p_2 = o_1 v_1 : o_2 v_2; \quad p_1 : p_2 = \frac{o_1 v_1}{2} : \frac{o_2 v_2}{2} =$$

$$= o_1 v_1 : o_2 v_2, \text{ t. j.}$$

1.) **Ploščini dveh kvadratov se imata kakor drugi potenci (merskih števil) stranic.**

2.) **Ploščini dveh paralelogramov (trikotnikov) se imata kakor produkta iz (merskih števil) njih osnovnice in višine.**

Za $v_1 = v_2$ se izpremenita oni sorazmerji *b)* in *d)* v

$$p_1 : p_2 = o_1 : o_2, \text{ t. j.}$$

3.) Ploščini dveh jednako visokih paralelogramov (trikotnikov) se imata kakor njih osnovnici.

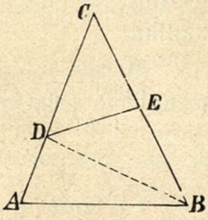
Za $o_1 = o_2$ se izpremenita oni sorazmerji v

$$p_1 : p_2 = v_1 : v_2, \text{ t. j.}$$

4.) Ploščini dveh paralelogramov (trikotnikov) z jednakima osnovnicama se imata kakor višini.

§ 92. Izrek. **Ploščini dveh trikotnikov, katera imata jeden kot jednak, se imata kakor produkta (merskih števil) ta kot oklepajočih stranic.**

Slika 98.



Pogoj. $\triangle\ ABC$ in $\triangle\ CDE$ (slika 98.), ima $\measuredangle\ C$ jednak in $AC = a_1$, $BC = b_1$, $CD = a_2$, $CE = b_2$.

Trditev.

$$\triangle\ ABC : \triangle\ CDE = a_1 b_1 : a_2 b_2.$$

Dokaz. Ako potegnemo DB, dobimo trikotnik DBC, kateri ima isti vrh B kakor $\triangle\ ABC$, potem je

$$\triangle\ ABC : \triangle\ DBC = AC : DC \text{ (§ 91., 3.),}$$

$$\triangle\ DBC : \triangle\ DEC = BC : EC \text{ iz istega vzroka, torej}$$

$$\triangle\ ABC \,.\, DBC : \triangle\ DBC \,.\, DEC = AC \,.\, BC : DC \,.\, EC \text{ ali}$$

$$\triangle\ ABC : \triangle\ DEC = a_1 b_1 : a_2 b_2.$$

§ 93. Izrek. **Ploščini dveh podobnih trikotnikov se imata kakor drugi potenci (merskih števil) istoležnih stranic.**

Pogoj. $\triangle\ ABC \backsim \triangle\ A'B'C'$ (slika 88.), $AB = a_1$, $A'B' = a_2$.

Trditev. $\triangle\ ABC : \triangle\ A'B'C' = a_1{}^2 : a_2{}^2$.

Dokaz. *a)* $\triangle\ ABC : \triangle\ A'B'C' = AB \,.\, AC : A'B' \,.\, A'C'$ (§ 92.), in vsled pogoja imamo

$$AB : A'B' = AC : A'C', \text{ in ker je}$$

$$AB : A'B' = AB : A'B', \text{ je}$$

b) $\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = AB \,.\, AC : A'B' \,.\, A'C'$. Iz sorazmerij *a)* in *b)* potem sledi:

$$\triangle\ ABC : \triangle\ A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 \text{ ali}$$

$$\triangle\ ABC : \triangle\ A'B'C' = a_1{}^2 : a_2{}^2.$$

§ 94. Izrek. **Ploščini dveh podobnih mnogokotnikov se imata kakor kvadrata (merskih števil) istoležnih stranic.**

Pogoj. $ABCD \ldots \backsim A'B'C'D' \ldots$ (slika 91.), $AB = a_1$, $A'B' = a_2$.

Trditev. $ABCD \ldots : A'B'C'D' \ldots = a_1{}^2 : a_2{}^2$.

Dokaz. Po § 93. je

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = a_1^2 : a_2^2,$$
$$\triangle ACD : \triangle A'C'D' = a_1^2 : a_2^2,$$
$$\triangle ADE : \triangle A'D'E' = a_1^2 : a_2^2, \text{ i. t. d., tedaj tudi}$$

$$(ABC + ACD + ADE\ldots) : (ABC + A'C'D' + A'D'E'\ldots) = $$
$$= a_1^2 : a_2^2, \text{ ali}$$
$$ABCD\ldots : A'D'C'D\ldots = a_1^2 : a_2^2.$$

Ako je tedaj vsaka stranica mnogokotnika $A'B'C'D'\ldots$ $m$krat manjša od vsake stranice mnogokotnika $ABCD\ldots$, ki je podoben prvemu, je ploščina prvega m^2 manjša od ploščine druzega mnogokotnika.

Merilo, na katerem so prave mere po danem razmerji umanjene, imenujemo **omaljeno.**

Računske naloge.

1.) Izračuni stranici $A'C'$, $B'C'$ trikotnika $A'B'C'$, kateri je podoben trikotniku ABC, ako je

$$AB = 35\ m,\ AC = 40\ m,\ BC = 30\ m,\ A'B' = 12\ m.$$

2.) Merska števila stranic trikotnika ABC so dana; kolike so stranice podobnega trikotnika $A'B'C'$, ako je razmerje dveh istoležnih stranic $m : n$?

$$AB = 58\ m,\ AC = 45\ m,\ BC = 36\ m,\ m : n = 3 : 4.$$

3.) Za trikotnik ABC sta dani razmerji stranic $AB : AC$ in $AB : BC$, izračunaj tretje razmerje stranic $AC : BC$.

$$AB : AC = 7 : 9,\ AB : BC = 12 : 5.$$

4.) Na katasterskem črteži znaša daljica 5·75 *dm;* kolika je njena resnična dolžina, *a)* ako je z 1 *cm* na črteži načrtanih 30 *m*, *b)* ako je razmerje med mero na črteži in natorno dolgostno mero 1 : 2500?

5.) Koliko dolgo moraš 648 *m* dolgo daljico po omaljenem merilu načrtati, ako narisuješ resnične dolgostne mere omaljene v razmerji 1 : 7500?

6.) Senca stolpa je 62 *m* dolga in senca 1 *m* visoke vertikalne palice 1·6 *m;* kolika je višina stolpa?

7.) Obseg trikotnika ABC je o; kolik je obseg o' podobnega trikotnika, ako je razmerje dveh istoležnih stranic $m : n$?

a) $o = 54\ m,\ m : n = 3 : 4$; *b)* $o = 6{\cdot}4\ cm,\ m : n = 5 : 8.$

8.) Dan je obseg o trikotnika ABC, stranica AB in istoležna stranica $A'B'$ podobnega trikotnika $A'B'C'$; izračunaj obseg druzega trikotnika.

$o = 54\ mm$, $AB = 15\ mm$, $A'B' = 27\ m$.

9.) Obsega o in o' podobnih trikotnikov ABC in $A'B'C'$ sta dana in stranica AB; izračunaj istoležno stranico $A'B'$.

$o = 48\ mm$, $o' = 126\ mm$, $AB = 17\ mm$.

10.) V pravokotnem trikotniku so a, b, c, v, m in n, oziroma merska števila obeh katet, hipotenuze, pravokotnice od vrha pravega kota na hipotenuzo in odsekov hipotenuze; izračunaj iz dveh teh količin vse druge.

a) $a = 2{\cdot}8\ m$, $b = 2{\cdot}1\ m$; *b)* $b = 7\ dm$, $v = 6{\cdot}72\ dm$; *c)* $m = 16\ m$, $n = 9\ m$.

11.) Dve istoležni stranici dveh podobnih trikotnikov sta si kakor $2 : 3$ in ploskev prvega trikotnika znaša $1{\cdot}4\ m^2$; kolika je ploskev druzega?

12.) Obsega dveh podobnih trikotnikov sta $o = 54\ cm$, $o_1 = 42\ cm$ in ploščina prvega trikotnika $p = 176\ m^2$; kolika je ploskev druzega?

13.) Ploščini dveh podobnih trikotnikov sta $p = 5{\cdot}67\ m^2$, $p_1 = 4{\cdot}27\ m^2$ in obseg prvega $o = 6{\cdot}2\ m$; kolik je obseg druzega?

14.) V stavbenem črteži, v katerem so 4 cm izbranega merila za 3 m vzeti, znaša ploščina očrta 5 dm^2 20 cm^2; kolik je resnični prostor za stavbo?

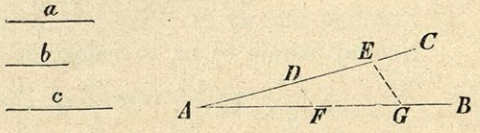
15.) Jedna in ista dežela je na jednem zemljevidu v razmerji 1 : 750000, na drugem v razmerji 1 : 5000 narisana; ako je na prvem zemljevidu dolžina reke 8 cm in ploščina jezera $2{\cdot}75\ cm^2$, kolika je dolžina reke in ploščina jezera na drugem zemljevidu?

16.) Posestvo meri v resnici 200 ha in na črteži 8 dm^2; po kakšnem merilu je posestvo narisano?

Naloge za načrtovanje.

1.) Dane so tri daljice $a = 16\ mm$, $b = 10\ mm$, $c = 8\ mm$; **poišči četrto proporcijonalo.**

Slika 99.



Načrtaj katerikoli kot BAC, stvori $AD = a$, $DE = b$, $AF = c$, zveži D in F z daljico DF in načrtaj

$EG \parallel DF$. FG je iskana četrta proporcijonala. Recimo, da je $FG =$ $= x$, potem je

$$a : b = c : x, \text{ torej } x = \frac{b.c}{a}.$$

Načrtaj po tej nalogi te-le izraze:

$$a)\ \frac{3.4}{5},\quad b)\ \frac{5.7}{3},\quad c)\ \frac{2.3.5}{7.11},\quad d)\ \frac{4}{5} = \frac{4.1}{5},\quad e)\ \frac{2.3}{7} + \frac{5}{3},$$

$$f)\ \frac{5.8}{3} - \frac{11.3}{7}.$$

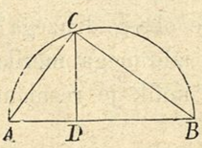
Rešitev za *e)*:

$$\frac{2.3.5}{7.11} = \left(\frac{2.3}{7}\right).\frac{5}{11} = \frac{\left(\frac{2.3}{7}\right).5}{11} \text{ i. t. d.}$$

Za *e)* in *f)*: Načrtaj najprej vsak del vsote (diference) in potem vsoto (diferenco).

2.) **Načrtaj tretjo stalno proporcijonalo k danima daljicama** *a* **in** *b*.

Slika 100.



Rešitev. *a)* Po prejšnji nalogi, ako v nji postavimo $c = b$.

b) Analiza. Ako spustimo v pravokotnem trikotniku ABC (slika 100.) z vrha C pravega kota pravokotnico na hipotenuzo, je DB tretja proporcijonala k AD in DC ali tudi DB (oziroma AD) k AB in BC (oziroma AC). Potem dobimo še dvojno rešitev te naloge.

Rešitev. *a)* Stvori $CD \perp AB$, $AD = a$, $CD = b$; zveži točki C in A z daljico AC in stvori $CB \perp AC$, katera seče podaljšano AD v točki B. DB je iskana tretja proporcijonala x.

Dokaz sledi iz analize.

b) Velja za $a > b$. Stvori $AB = a$, napiši nad AB polukrog in iz A s polumerom b lok, kateri seče oni polukrog v točki C. Ako načrtaš $CD \perp AB$, je AD iskana tretja proporcijonala x.

Po tej nalogi je:

$$a : b = b : x, \text{ torej } x = \frac{b^2}{a}.$$

Načrtaj oziraje se na to nalogo še sledeče izraze:

$$a)\ \frac{2^2}{5},\quad b)\ \frac{16}{7},\quad c)\ \frac{25}{4} + \frac{4}{3},\quad d)\ 5\tfrac{1}{7} - 4\tfrac{1}{2}.$$

3.) **Načrtaj srednjo geometrijsko proporcijonalo k danima daljicama** a **in** b.

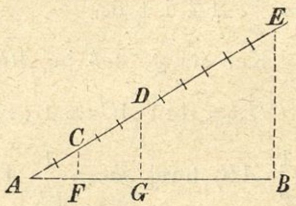
a) Stvori (slika 100.) $AD = a$, $BD = b$, napiši nad AB polukrog in postavi $DC \perp AB$, katera seče polukrog v točki C. DC je srednja geometrijska proporcijonala med AD in DB.

b) Stvori $BA = a$, katera je večja od b, in $AD = b$, napiši nad AB polukrog in potegni $DC \perp AB$; tetiva AC je iskana srednja geometrijska proporcijonala k a in b.

4.) **Razdeli dano daljico na več delov, kateri so med seboj v danem razmerji.**

Recimo, da imamo daljico AB razdeliti na tri dele, kateri so si kakor $m : n : p$ (2 : 3 : 6).

Slika 101.

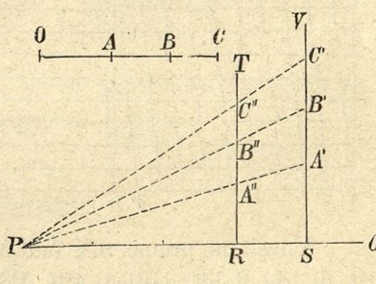


Potegni skoz A katerokoli premo AE, vnesi na njo od A do C m, od C do D n, od D do E p med seboj jednakih, drugače pa poljubno dolgih delov in potegni EB. Ako stvoriš $CF \parallel DG \parallel EB$, so AF, FG, GB iskani deli daljice AB.

5.) **Umanji in povečaj več danih daljic po danem razmerji.**

Ako hočeš dane daljice OA, OB, OC (slika 102.) umanjiti n. pr. v razmerji 4 : 3, potegni premo PQ, vnesi od P do R tri in od P do S štiri jednake dele, stori $SV \perp PQ$ in $RT \perp PQ$, in $SA' = OA$, $SB' = OB$, $SC' = OC$, potegni skoz P in točke A', B', C' preme, katere sečejo bližnjo pravokotnico RT v točkah A'', B'', C''; RA'', RB'', RC'' so iskane daljice, katere so umanjene v razmerji 4 : 3.

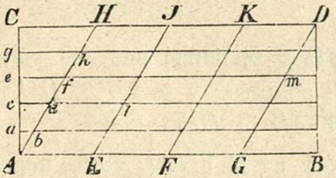
Slika 102.



Ako pa hočeš dane daljice povečati v razmerji 3 : 4, moraš jih vnesti na bližnjo pravokotnico RT; in na pravokotnici SV imaš potem povečane daljice.

6.) **Razdeli daljico** AB **s prečnicami na** $n = p \cdot r$ (20 = 4 . 5) **jednakih delov.**

Slika 103.



Razdeli AB (slika 103.) na p (4) jednakih delov in postavi v A in B pravokotnici nanjo. Na vsako teh dveh pravokotnic vnesi r (5) med seboj jednakih, drugače pa poljubnih delov do C, oziroma do D. Točki C in D zveži z daljico CD in razdeli to tudi na p (4) jednakih delov, da je $CH = HJ = JK = KD$. Ako zvežeš istoležna razdelišča pravokotnic z daljicami in točki A in H, E in J, F in K, G in D, s prečnicami AH, EJ, FK, GD je $ab = \frac{1}{n} AB$, $cd = \frac{2}{n} AB$, $ef = \frac{3}{n} AB$ i. t. d.

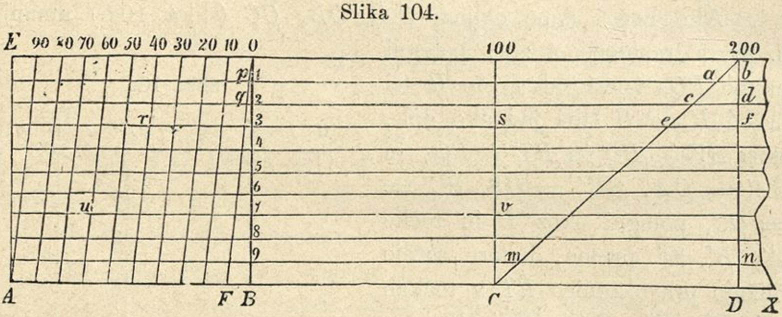
Ker sta $\triangle$ Aab in ACH podobna, je namreč

$ab : CH = Aa : AC = 1 : r$, torej $ab = \frac{1}{r} CH$. Nadalje je $CH = \frac{1}{p} AB$, torej $ab = \frac{1}{pr} AB$ ali $ab = \frac{1}{n} AB$.

Takisto dokažeš, da je $cd = \frac{2}{n} AB$, $ef = \frac{3}{n} AB$ i. t. d.

7.) **Načrtaj tisočninsko poprečno merilo.**

Slika 104.



Vnesi na premo AX (slika 104.) 10 jednakih delov $AB = BC$ i. t. d., da dobiš daljico AM. Postavi v teh razdeliščih pravokotnice, vnesi tudi na vsako teh 10 med seboj jednakih, vender poljubnih delov in zveži razdelišča takisto, kakor v prejšnji nalogi. Potegni prečnico $C200$, potem je $ab = \frac{1}{10} CD$. To daljico vnesi na AB desetkrat, isto tako na Eo in potegni med razdelišči takisto prečnice kakor v prejšnji nalogi. Potem je

$$p1 = \frac{1}{10} ab = \frac{1}{100} AB = \frac{1}{1000} AM;\ q2 = \frac{2}{1000} AM \text{ i. t. d.}$$

Ako je n. pr. AB namesto jednega decimetra, je BF namesto jednega centimetra, $p1$ namesto jednega milimetra na omaljenem merilu.

Kako moreš s poprečnim merilom

a) meriti daljico na papirji,

b) načrtati daljico dane dolžine na papir,

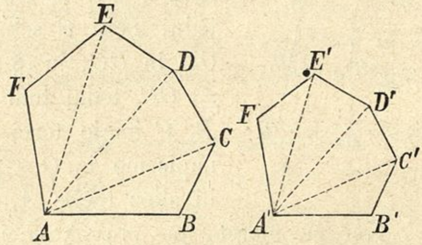
c) razdeliti dano daljico na več jednakih delov,

d) poiskati razmerje dveh daljic?

8.) **Načrtaj nad dano daljico $A'B'$ mnogokotnik, kateri je podoben danemu.**

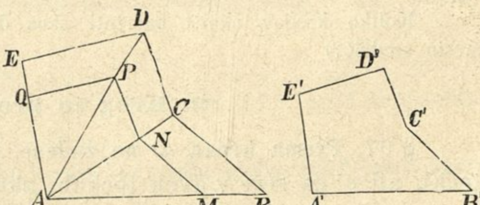
a) Razdeli dani mnogokotnik $ABCD$ . . . (slika 105.) z diagonalami na trikotnike, napiši nad $A'B'$ $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, nad $A'C'$ $\triangle A'C'D' \sim \triangle ACD$, nad $A'D'$ $\triangle A'D'E' \sim \triangle ADE$ i. t. d.; $A'B'C'D'$ . . . je zahtevani mnogokotnik.

Slika 105.



b) Potegni od A (slika 106.) do vseh oglišč diagonale, stvori $AM =$ $= A'B'$, in potegni $MN \parallel BC$, $PN \parallel CD$ i. t. d. Mnogokotnik $ABCD$ . . . $\sim AMNP$ . . . Ako tedaj načrtaš nad $A'B'$ mnogokotnik $A'B'C'D'$ . . . $\cong AMNP$ . . ., je on zahtevani mnogokotnik.

Slika 106.



Zmeri sobo in jo načrtaj v omaljenem merilu.

Šesti oddelek.

Krog.

1. Krog in točka.

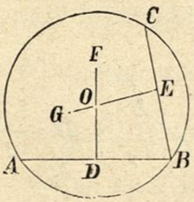
§ 95. **Krožnica** (§ 4.) je kriva črta, v kateri so vse točke od nepremične notranje točke jednako oddaljene. Ono notranjo točko imenujemo **središče**, vsako daljico pa, katera veže katerokoli točko krožnice sè središčem, **polumer** (radij) kroga.

Točka leži zunaj (znotraj) kroga, ako je njen razstoj od središča kroga večji (manjši) od polumera.

Načrtaj krog s polumerom $r = 2$ *cm* in poišči točko, katera je od središča *a)* 3 *cm*, *b)* 2 *cm*, *c)* 1 *cm* oddaljena. — Koliko takih točk moreš načrtati?

§ 96. **Tri točke** A, B, C (slika 107.), **katere ne ležé v jedni premi, določujejo krog popolnoma.**

Slika 107.



Ako potegnemo daljici AB in BC in postavimo v njijinih razpoloviščih D in E pravokotnici DF in EG na nji, morata se te dve v jedni točki O sekati. Ako potegnemo dalje OA, OB in OC, je (§ 59., 5.) $OA = OB$ in $OB = OC$, tedaj tudi $OA = OB = OC$. Točke A, B, C imajo torej od O jednak razstoj, in ako napišemo iz O s polumerom OA krog, mora ta iti skoz točke A, B, C.

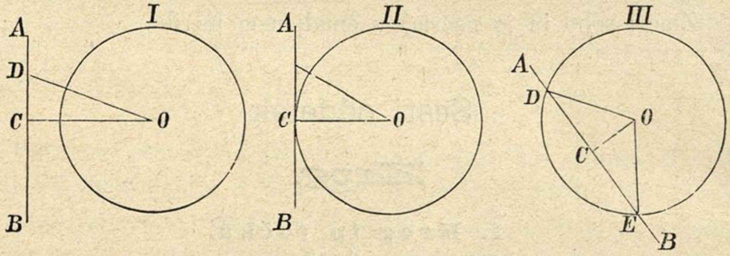
Ker se moreta pa pravokotnici DF in EG le v **jedni** točki sekati, načrtati moremo tudi le **jeden** krog, kateri gre skoz točke A, B, C.

Koliko krogov moreš načrtati skoz dve dani točki? (Geometrijsko mesto središč?)

2. Krog in prema.

§ 97. **Prema kroga** *a)* **ne zadene, ali** *b)* **se ga dotika v jedni točki, ali** *c)* **ga seče v dveh točkah, ako je njen razstoj od središča kroga večji ali jednak ali manjši od polumera.**

Slika 108.



Dokaz. *a)* Ako je (slika 108., I) pravokotnica OC od središča na premo AB večja od polumera, leží že podnožišče C pravokotnice zunaj kroga, torej tem bolj vsaka druga točka D preme AB, ker je hipotenuza OD večja od katete OC.

b) Ako je (slika 108., II) pravokotnica OC od O na AB jednaka polumeru, leži njeno podnožišče C v obodu kroga; vsaka druga točka D preme AB pa mora, ker je $OD > OC$, zunaj kroga ležati.

c) Ako je (slika 108., III) pravokotnica OC od O na AB manjša od polumera, je njeno podnožišče znotraj kroga; razstoji vseh drugih toček preme AB na obeh straneh točke C pa rastejo od tod neprestano in postanejo na obeh straneh **jedenkrat** polumeru jednaki, t. j. dotični točki D in E preme AB ležita v obodu kroga. Razstoji vseh drugih toček so pa ali večji ali manjši od polumera; razun toček D in E ne leži torej nobedna v krožnici.

§ 98. Premo, katera se dotika kroga le v jedni točki tako, da ležé vse druge njene točke zunaj te krive črte, imenujemo **dotikalnico** (tangento); točko, katero imata tangenta in krožnica skupno, pa **dotikališče.**

Premo, katera seče krog v dveh točkah, imenujemo **sečnico** (sekanto), daljico med presečiščema pa tetivo in na tetivo pravokotno daljico od srede tetive do loka **višino loka.** Ploskev, katera je omejena od tetive in loka, imenujemo **krogov odsek** (segment), in oni del krožnine, katerega omejevata dva polumera in lok med njima, **krogov izsek** (sektor). — Vsaka tetiva razdeli krog v dva odseka, imenujemo ja **nasprotna.**

Izreki o tetivah kroga.

§ 99. Iz izrekov 1., 2. in 4. v § 59. in iz § 15. sledé neposredno ti-le trije izreki:

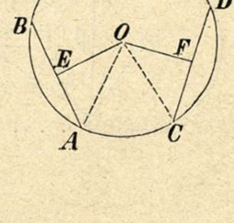
1.) **Daljica iz središča kroga do srede tetive stoji pravokotno na tetivi in razpolavlja pripadajoči lok.**

2.) **Pravokotnica od središča kroga na tetivo razpolavlja to in pripadajoči lok.**

3.) **Pravokotnica, postavljena na tetivo v njeni sredi, gre skoz središče kroga.**

§ 100. 1.) **V istem krogu imata dve jednaki tetivi jednak razstoj od središča.**

Slika 109.



Pogoj. $AB = CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ (slika 109.).

Trditev. $OE = OF$.

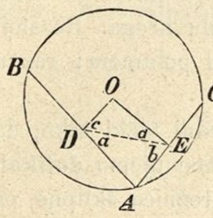
Dokaz. Ako potegnemo OA in OC je $\triangle AEO \cong \triangle CFO$ (§ 52.), tedaj $OE = OF$.

2.) **Dve tetivi kroga sta jednaki, ako imata jednak razstoj od središča.**

Recimo, da je (slika 109.) $OE = OF$. Potem pa je $\triangle AEO \cong \triangle CFO$, tedaj $AE = CF$ in $AB = CD$.

3.) **Izmed dveh nejednakih tetiv ima večja manjši razstoj od središča.**

Slika 110.



Po 1. smemo vzeti dve tetivi, kateri imata jedno krajišče skupno. Vzemimo, da je (slika 110.) $AB > AC$, $OD \perp AB$ in $OE \perp AC$. Ako potegnemo DE, je v $\triangle ADE \sphericalangle b > \sphericalangle a$ (§ 35., 2.), tedaj $\sphericalangle d < \sphericalangle c$ in zato tudi $OD < OE$.

4.) **Izmed dveh nejednakih tetiv ima večja manjši razstoj od središča.**

Recimo, da je (slika 110.) $OD < OE$. Ako bi bila $AB \overline{\overline{<}} AC$, morala bi biti oziroma po 1. ali 3. $OD \overline{\overline{>}} OE$, kar pa je proti pogoju.

Izvod. **Premer** je največja tetiva kroga. On deli periferijo kroga v dva jednaka dela.

Izreki o tangentah kroga.

§ 101. 1.) **Pravokotnica na polumer v njegovem krajišči je tangenta kroga** (§ 97., 2.).

2.) **Polumer do dotikališča stoji pravokotno na tangenti.**

3.) **Pravokotnica na tangento v dotikališči gre skoz središče kroga.**

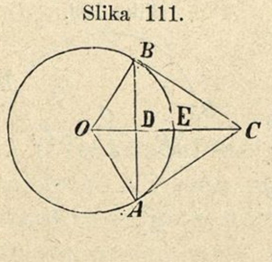
4.) **Pravokotnica od središča na tangento gre skoz dotikališče.**

Dokazi za **obrate** 2., 3. in 4. so indirektni.

Izvod. Skoz jedno točko krožnice moremo na to le jedno tangento potegniti.

§ 102. **Tangenti, kateri potegnemo od zunaj kroga ležeče točke nanj, sta jednaki.**

Slika 111.



Pogoj. $AC \perp OA$, $BC \perp OB$.

Trditev. $AC = BC$.

Dokaz. Ako zvežemo točko C sè središčem po daljici CO, potem je $\triangle AOC \cong \triangle BOC$, tedaj $AC = BC$.

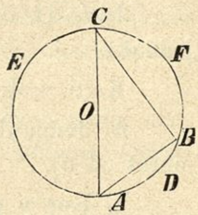
Tetiva AB, katera veže dotikališči kroga in tangent AC in BC, imenujemo **dotikalno tetivo** z ozirom na točko C.

Izvod. Prema, katera veže presečišče dveh tangent s središčem kroga, razpolavlja *a)* kot med tangentama, pa tudi kot, katerega polumera oklepata, *b)* lok in dotikalno tetivo, in stoji *c)* na tej tetivi pravokotno.

3. Krog in kot.

§ 103. Vrh kota leži oziraje se na krog ali v njegovem središči ali zunaj središča; v prvem slučaji imenujemo ga **središčen**, v drugem pa **izsrediščen kot.** Ako leži vrh izsrediščnega kota **v** periferiji, imenujemo ga **kot v obodu** ali **oboden kot.**

Slika 112.

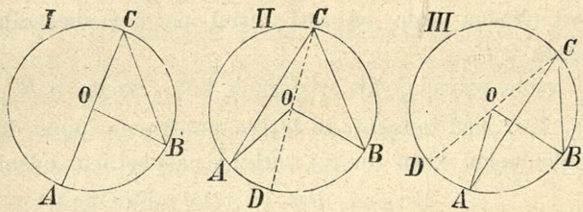


Pravimo, da stoji obodni kot ABC na loku ADB (tetivi AB), kateri je med krajiščema njegovih krakov, in da je obodni kot ACB v odseku $AECFB$, v katerem so njegov vrh in njegova kraka.

Oboden kot, čegar kraka gresta skoz krajišči premera, imenujemo **kot v polukrogu,** kakor ABC.

§ 104. **Oboden kot je jednak polovici središčnega kota na istem loku.**

Slika 113.



Pogoj. Kota ACB in AOB stojita na istem loku AB.

Trditev. $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$.

Dokaz. Tu je treba razločevati tri slučaje:

1.) Jeden krak obodnega kota je premer (slika 113., I). Potem sledi iz jednakokrakega $\triangle BOC$ (§ 35., I, izv. *b*)

$$\sphericalangle AOB = 2 \,.\, \sphericalangle ACB \text{ ali } \sphericalangle ACB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AOB.$$

2.) Središče leži med krakoma obodnega kota (slika 113., II). Ako potegnemo premer CD, je

$$\sphericalangle ACD = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AOD,$$
$$\sphericalangle BCD = \tfrac{1}{2} \sphericalangle BOD, \text{ tedaj}$$
$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle BCD = \tfrac{1}{2} (\sphericalangle AOD + \sphericalangle BOD) \text{ ali}$$
$$\sphericalangle ACB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AOB.$$

3.) Središče leži zunaj krakov obodnega kota (slika 113., III). Ako potegnemo premer CD, je

$$\sphericalangle BCD = \tfrac{1}{2} \sphericalangle BOD,$$
$$\sphericalangle ACD = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AOD, \text{ torej}$$
$$\sphericalangle BCD - \sphericalangle ACD = \tfrac{1}{2} (\sphericalangle BOD - \sphericalangle AOD), \text{ ali}$$
$$\sphericalangle ACB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AOB.$$

Izvodi. *a)* **Obodni koti na istem loku in v istem krogu so jednaki.**

Kajti vsak je jednak polovici središčnega kota na istem loku.

b) **Jednaki obodni koti stojé v istem krogu na jednakih lokih** (obrat od *a*).

c) **Kot v polukrogu je prav.**

Kajti središčni kot na istem loku je iztegnen. (Sledi tudi iz § 37.).

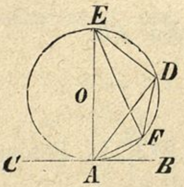
d) **Obodni koti na lokih, kateri so manjši (večji) od polukroga so ostri (topi).**

e) **Dva obodna kota na isti tetivi pa v nasprotnih odsekih kroga znašata 2 *R*.**

Kajti vsota pripadajočih središčnih kotov znaša 4 *R*.

§ 105. **Kot med tangento in tetivo, potegneno skozi dotikališče, je jednak obodnemu kotu na tej tetivi v nasprotnem odseku kroga.**

Slika 114.



Pogoj. $BC \perp AOE$ (slika 114.).

Trditev. *a)* $\sphericalangle BAD = \sphericalangle AED$.

b) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle AFD$.

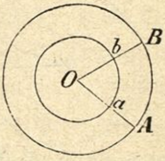
Dokaz. *a)* $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EAD + \sphericalangle BAD = R$, in v pravokotnem $\triangle ADE$ tudi $\sphericalangle EAD + \sphericalangle AED = R$, torej $\sphericalangle EAD + \sphericalangle BAD = \sphericalangle EAD + \sphericalangle AED$ ter tudi $\sphericalangle BAD = AED$.

b) $\sphericalangle CAD + \sphericalangle BAD = 2\,R$ in $\sphericalangle AFD + \sphericalangle AED = 2\,R$ (§ 104., *e*), torej je $\sphericalangle CAD + \sphericalangle BAD = \sphericalangle AFD + \sphericalangle AED$ ter tudi $\sphericalangle CAD = \sphericalangle AFD$.

4. Dva kroga.

§ 106. Dva kroga, katera imata skupno središče, imenujemo **sosredna** (koncentrična) kakor kroga v sliki 115. Ploskev med dvema koncentričnima krožnicama imenujemo **kolobar** in njegov del med polumeroma in lokoma **kolobarjev izsek** kakor $AaBb$. Razloček polumerov kakor Aa imenujemo **širino** kolobarja ali kolobarjevega izseka.

Slika 115.



Dva loka ali izseka kroga za jednaka središčna kota imenujemo **istoležna**; n. pr. loka AB in ab, ali izseka AOB in aOb.

§ 107. Dva kroga, katera imata različni središči, imenujemo **izsredna** (ekscentrična) in daljico med središčema dveh ekscentričnih krogov **središnico** (centralo).

Dva ekscentrična kroga ležita ali popolnoma jeden zunaj druzega, ali popolnoma jeden znotraj druzega, ali vsak deloma znotraj, deloma zunaj druzega.

Ako jeden krogov, kateri leži popolnoma zunaj (znotraj) druzega, zadene druzega, se ga na tem mestu dotika zunaj (znotraj).

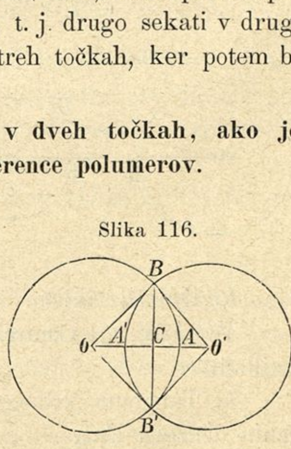
Ako vsak izmed obeh krogov le deloma zunaj in znotraj druzega leži, se krožnici sečeta. Skupno ploskev krogov imenujemo **lečo**, in ostala dela **meseca**.

§ 108. **Dve krožnici se sečeta v dveh, in sicer le v dveh točkah.** Kajti, ako seče jedna krožnica drugo v jedni točki, preide prva v znotranje od druge; in ker sta obe skleneni črti, mora prva zopet na drugem mestu iz druge preiti v vnanje, t. j. drugo sekati v drugi točki. Krožnici se pa ne moreta sekati v treh točkah, ker potem bi se popolnoma krili (§ 96.).

§ 109. 1.) **Dve krožnici se sečeta v dveh točkah, ako je centrala manjša od vsote in večja od diference polumerov.**

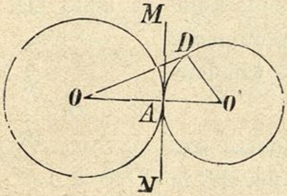
Vzemimo, da sta OB in $O'B$ (slika 116.) polumera krožnic, kateri se sečeta. Ker je $OB + O'B > OO'$ in $OB - O'B < OO'$, moremo nad OO' načrtati dva trikotnika s polumeroma krožnic tako, da je $OB = OB'$ in $O'B = O'B'$, torej sta B in B' skupni točki krožnic, t. j. krožnici se sečeta v teh dveh točkah

Slika 116.



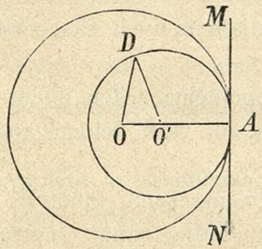
2.) Dve krožnici se dotikata v jedni točki *a)* **od zunaj,** *b)* **od znotraj, ako je centrala jednaka** *a)* **vsoti,** *b)* **diferenci polumerov.**

Slika 117.



a) Ker je $OO' = r + r'$ (slika 117.), se mora polumer druge krožnice, kateri leži v meri centrale, tam začeti, kjer se konča polumer prve krožnice; A je torej skupna točka krožnic. Vsaka druga točka D krožnice O', leži pa zunaj krožnice O; kajti $OD > OO' - O'D$ ali $OD > OA$.

Slika 118.



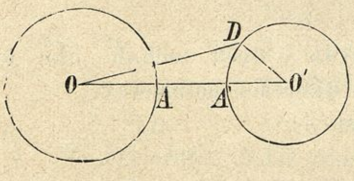
b) Po pogoji je $OO' = r - r'$ (slika 118.). Ako je potem $OA = r$, je $OO' = OA - r'$, tedaj $OA - OO' = O'A = r'$; točka A leži torej v obeh krožnicah.

Ta je pa tudi jedina skupna točka; kajti $OD < OO' + O'D$ ali $OD < OA$, t. j. vsaka druga točka krožnice O' leži znotraj kroga O.

3.) Dve krožnici nimata nobedne točke skupne in ležita *a)* **jedna popolnoma zunaj druge,** *b)* **jedna popolnoma znotraj druge, ako je centrala** *a)* **večja od vsote,** *b)* **manjša od diference polumerov.**

a) Polumera obeh krogov O in O' (slika 119.), ležeča v meri centrale, se začenjata jeden pri jednem, drugi pri drugem krajišči centrale; in ker je centrala večja od vsote polumerov, se polumera ne doseżeta in točki A in A' sta za daljico AA' narazen. Točka A' leži torej zunaj krožnice O. Leži pa tudi vsaka druga točka D krožnice O' zunaj kroga O, kajti $OD > OO' - O'D$ ali $OD > OA'$.

Slika 119.



b) Dokaži takisto.

Izvodi. *a)* Centrala dveh dotikajočih se krogov gre skozi dotikališče.

b) Tangenta jednega kroga v skupnem dotikališči je tudi tangenta druzega kroga.

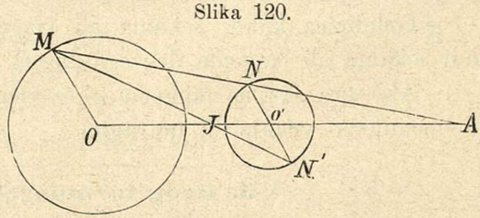
c) Centrala dveh sekajočih se krogov stoji na skupni tetivi pravokotno, razpolavlja to tetivo in pripadajoča središčna kota.

Vzemimo, da sta r in r' dolžini polumerov in c dolžina centrale dveh krogov; določi medsebojno lego teh dveh krogov za sledeče vrednosti teh količin.

a) $r = 5$, $r' = 3$, $c = 8$; *f)* $r = 6$, $r' = 6$, $c = 8$;
b) $r = 7$, $r' = 4$, $c = 2$; *g)* $r = 10$, $r' = 3$, $c = 7$;
c) $r = 6$, $r' = 4$, $c = 10$; *h)* $r = 5$, $r' = 5$, $c = 10$;
d) $r = 8$, $r' = 3$, $c = 6$; *i)* $r = 12$, $r' = 7$, $c = 9$;
e) $r = 9$, $r' = 5$, $c = 4$; *k)* $r = 9$, $r' = 2$, $c = 5$.

§ 110. **Trakovi, katere potegnemo v dveh krogih skoz krajišči po dveh vzporednih polumerov, se sečejo vsi v jedni sami točki centrale, in sicer *a)* v njenem podaljšku, *b)* med središčema, ako sta polumera *a)* v istem smislu, *b)* v nasprotnem smislu vzporedna.**

Slika 120.



Recimo, da je (slika 120.) $OM \parallel O'N$ in $OM \parallel O'N'$, potem je $\triangle OMA \sim \triangle O'NA$, torej

$OA : O'A = OM : O'N$,
$(OA - O'A) : OA = (OM - O'N) : OM$ ali

$$OO' : OA = (OM - O'N) : OM.$$

Ako so c, r, r' merska števila centrale in polumerov, se izpremeni zgornja proporcija v sledečo:

$$c : OA = (r - r') : r, \text{ iz česar sledi } OA = \frac{cr}{r - r'}.$$

Ker so c, r, r' nepremenljive, torej od lege polumerov ne zavisne količine, je tudi OA nepremenljiva, t. j. vsi trakovi, katere potegnemo skoz krajišči raznih parov v istem smislu vzporednih polumerov, sečejo podaljšek centrale v isti točki A.

Dokaži takisto iz podobnosti trikotnikov OJM in $O'JN'$, da je $OJ = \dfrac{cr}{r + r'}$ nepremenljiva količina.

Točko A imenujemo **vnanje** in točko J **notranje podobnišče** obeh krogov. Vsak trak, katerega potegnemo skoz podobnišče, imenujemo **podobnico,** in sicer z ozirom na podobnišče, skoz katero gre, **vnanjo** ali **notranjo podobnico.**

Kroga sta pa **podobno ležeča** z ozirom na podobnišče.

Izvod. Ako sta polumera obeh krogov jednaka, je vnanje podobnišče brezkončno oddaljeno.

Kajti za $r = r'$ je $OA = \frac{cr}{O}$, t. j. brezkončno velika.

Načrtaj krog O', kateri ima z danim krogom O dano podobnišče A. Koliko takih krogov moreš načrtati?

§ 111. **Ako ima podobnica dveh krožnic z jedno skupno točko, jo ima tudi z drugo.**

Recimo, da je AM (slika 120.) podobnica, katera se kroga O dotika v M. Ako potegnemo polumer OM in polumer $O'N \parallel OM$, potem mora podaljšana daljica MN iti skoz podobnišče A, t. j. MNA in podobnica AM sta ista prema ali AM ima s krogom O' točko N skupno. — Takisto izvršiš dokaz za notranjo podobnico JM.

Izvod. Ako ima podobnica dveh krogov z jednim dve točki skupni, ali jedno samo, ali nobedne, velja isto za drugi krog. Podobnica kakor sekanta ali tangenta jednega kroga je torej tudi sekanta ali tangenta druzega kroga.

Ako gre skupna tangenta skoz vnanje ali notranje podobnišče, jo imenujemo **vnanjo** ali **notranjo**.

5. Krog in mnogokotnik.

§ 112. Mnogokotnik, kateri ima tetive (tangente) za stranice, imenujemo krogu **vpisan (opisan)** mnogokotnik, ali tetiven (tangenten) mnogokotnik; krog pa je mnogokotniku **opisan (vpisan)**.

§ 113. **Vsakemu trikotniku moremo** *a)* **krog opisati**, *b)* **krog vpisati.**

Sledi iz § 61., 1. in 2., ker je prva znamenita točka jednako oddaljena od vseh oglišč, druga znamenita točka pa jednako oddaljena od vseh stranic trikotnika.

Dostavek. Trikotniku vpisan krog imenujemo **notranji dotikajoči krog.** Ako razpolovimo v trikotniku dva vnanja kota in skupni nasprotni kot, sečejo se polovnice v jedni točki, katera je tudi od vseh treh stranic jednako oddaljena. Na ta način dobimo tri druge dotikajoče kroge, katere imenujemo **vnanje dotikajoče kroge.**

§ 114. 1.) **V vsakem tetivnem četverokotniku sta vsoti nasprotnih kotov jednaki, in sicer je vsaka vsota jednaka dvema pravima.** Sledi iz § 104., *e)*.

2.) Obratno. **Četverokotnik, v katerem znaša vsota nasprotnih dveh kotov dva prava, je tetiven četverokotnik.**

Indirekten dokaz. Skoz tri točke A, B, C (slika 121.) moremo zmerom napisati krog (§ 96.). Ako bi ta ne šel skoz četrto D, bi sekal tetivo AD ali pa njen podaljšek v točki D', in potem bi bila, ako potegnemo daljico $D'C$,

$$\sphericalangle B + \sphericalangle AD'C = 2R \text{ (po 1.)};$$

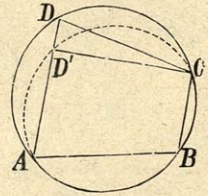
po pogoji je pa tudi $\sphericalangle B + \sphericalangle ADC = 2R$, torej bi bil

$$\sphericalangle AD'C = \sphericalangle ADC,$$

kar je pa nemogoče (§ 33., izv.).

Izvod. Vsakemu kvadratu in pravokotniku moremo opisati krog.

Slika 121.



§ 115. 1.) **V vsakem tangentnem četverokotniku sta vsoti iz nasprotnih dveh stranic jednaki** (slika 122.).

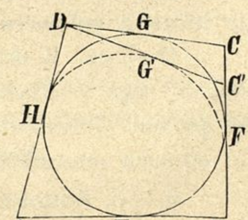
Ker je po § 102.

$$AE = AH,$$
$$BE = BF,$$
$$CG = CF,$$
$$DG = DH, \text{ je tudi}$$

$$AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH \text{ ali}$$
$$AB + CD = AD + BC.$$

2.) Obratno. **Četverokotnik, v katerem sta vsoti nasprotnih dveh stranic jednaki, je tangenten mnogokotnik.**

Slika 122.



Recimo, da je (slika 122.) $AB + CD = BC + AD$.

Indirekten dokaz. Ako bi se krog, kateri se dotika stranic AB, BC in AD v točkah E, F, H, ne dotikal tudi stranice DC, potem bi se dotikal druge preme, katera gre skoz točko D, n. pr. DC'. Potem pa je po 1.

$$AB + DC' = AD + BC',$$

in po pogoji $AB + DC = AD + BC$, tedaj

$$DC - DC' = BC - BC' = CC', \text{ kar je pa nemogoče}$$

(§ 38., 2.).

Izvod. Vsakemu kvadratu in rombu moremo vpisati krog.

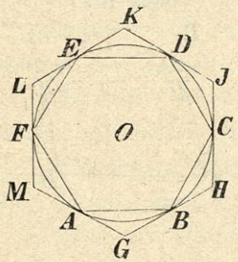
§ 116. 1.) **Vsakemu pravilnemu mnogokotniku moremo krog vpisati in opisati.**

Sledi iz § 66.

Dostavek. Središče pravilnega mnogokotnika je tudi središče opisanega in vpisanega kroga.

2.) **Ako razdelimo periferijo kroga na več jednakih delov, tvorijo** *a)* **tetive med po dvema sosednima razdeliščema pravilen vpisan in** *b)* **tangente v razdeliščih pravilen opisan mnogokotnik.**

Slika 123.



Pogoj. $\overparen{AB} = \overparen{BC} = \overparen{CD} = \ldots$ (slika 123.).

Trditev. $ABCD \ldots$ in $GHJK \ldots$ sta pravilna mnogokotnika.

Dokaz. *a)* $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} \ldots$ (§ 15.) in $\sphericalangle FAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD \ldots$ (§ 104., izv. *a)*, torej je $ABCD \ldots$ pravilen mnogokotnik.

b) $\triangle AGB$, $\triangle BHC$, $\triangle CJD$ i. t. d. so jednakokraki (§ 102.). Ker pa imajo osnovnice AB, BC, CD i. t. d. jednake in tudi kote na teh ležeče (§ 105.), so tudi skladni. Potem je pa $\sphericalangle G = \sphericalangle H = \sphericalangle J = \sphericalangle K = \ldots$ in $GB = BH = HC = CJ \ldots$ ali $GH = HJ = JK = \ldots$, torej mnogokotnik $GHJK \ldots$ pravilen.

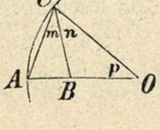
§ 117. **Stranica krogu vpisanega pravilnega šesterokotnika je jednaka polumeru kroga.**

Dokaz. Z daljicami od središča do oglišč šesterokotnika razdelimo tega v skladne jednakokrake trikotnike (§ 66., izv.), kateri so pa tudi jednakostranični, ker kot pri vrhu 60^0 znaša. Polumer in stranica mnogokotnika sta torej jednaka.

§ 118. **Stranica krogu vpisanega pravilnega deseterokotnika je jednaka daljšemu odseku polumera, razdeljenega v notranjem in vnanjem razmerji.**

Dokaz. Ako je AC (slika 124.) stranica pravilnega deseterokotnika, je $\sphericalangle AOC = 36^0$, $\sphericalangle A = \sphericalangle ACO = 72^0$, in ako stvorimo $\sphericalangle m = \sphericalangle n = \sphericalangle p$, potem sta $\triangle ABC$ in $\triangle BCO$ jednakokraka in $AC = BC = BO$. Nadalje je $\triangle ABC \sim \triangle ACO$ (§ 81., 1.), torej tudi $AO : AC = AC : AB$ ali

Slika 124.



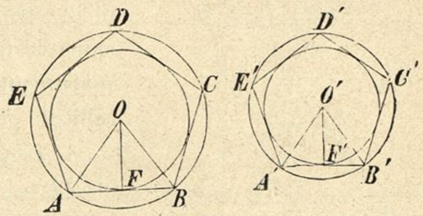
$$AO : BO = BO : AB,$$

iz česar sledi, da je AC jednaka daljšemu odseku polumera, kateri je razdeljen v vnanjem in notranjem razmerji.

§ 119. **V pravilnih mnogokotnikih z istim številom stranic sta si** *a)* **obsega kakor polumera tema mnogokotnikoma vpisanih ali opisanih krogov in** *b)* **ploščini kakor kvadrata onih polumerov.**

Recimo, da sta $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ (slika 125.) pravilna mnogokotnika, s in s', o in o', p in p' oziroma merski števili stranic, obsegov, ploščin. Recimo nadalje, da je $AO = R$, $A'O' = R'$, $OF = r$, $O'F' = r'$.

Slika 125.



a) Ker imata oba pravilna mnogokotnika isto število stranic, sta podobna (§ 88., izv.); tedaj po § 90. $o : o' = s : s'$.

Iz podobnosti trikotnikov ABO in $A'B'O'$ pa sledi

$$AB : A'B' = OF : O'F' \;(\S\, 92.) \text{ ali } s : s' = r : r'$$
$$= OA : O'A' \qquad\qquad = R : R;$$

tedaj tudi $o : o' = r : r'$
$$= R : R'.$$

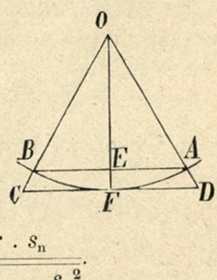
b) Po § 99. je $p : p' = s^2 : s'^2$,

toda $s^2 : s'^2 = r^2 : r'^2$
$$= R^2 : R'^2;$$

tedaj tudi $p : p' = r^2 : r'^2$
$$= R^2 : R'^2.$$

§ 120. **Izračunaj iz polumera kroga in iz stranic njemu vpisanega pravilnega mnogokotnika stranico istemu krogu opisanega pravilnega mnogokotnika z istim številom stranic.**

Slika 126.



Vzemimo, da je (slika 126.) $OA = r$ polumer kroga in $AB = s_n$ stranica vpisanega $n$terokotnika. Ako potegnemo $OF \perp AB$ in $CD \perp OF$ je $CD = S_n$ stranica opisanega pravilnega mnogokotnika.

Iz $\triangle\, CDO \sim \triangle\, ABO$ sledi

$CD : AB = OF : OE$, ali

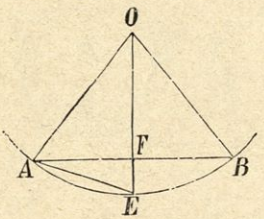
$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ tedaj } S_n = \frac{r \,.\, s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

N. pr. v pravilnem vpisanem šesterokotniku je za $r = 1$ tudi $s_6 = 1$.

Za pravilen opisan šesterokotnik je potem

$$S_6 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{\cdot}1547005.$$

Slika 127.



§ 121. **Izračunaj iz polumera kroga in iz stranice njemu vpisanega pravilnega mnogokotnika stranico istemu krogu vpisanega pravilnega mnogokotnika z dvakrat tolikim številom stranic.**

Vzemimo, da je (slika 127.) $OA = r$ in $AB = s_n$. Ako potegnemo $OE \perp AB$, je tetiva $AE = s_{2n}$ stranica vpisanega pravilnega $2n$terokotnika. Iz pravokotnega trikotnika AEF sledi

$$\overline{AE^2} = \overline{AF^2} + \overline{EF^2}; \text{ toda}$$

$$\overline{AF^2} = \frac{s_n^2}{4} \text{ in } \overline{EF^2} = (OE - OF^2) = \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)^2 =$$

$$= r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} + r^2 - \frac{s_n^2}{4} =$$

$$= 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} - \frac{s_n^2}{4}, \text{ tedaj}$$

$$\overline{AE^2} = \frac{s_n^2}{4} + 2r^2 - 2r\sqrt{r - \frac{s_n^2}{4}} - \frac{s_n^2}{4}, \text{ in}$$

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} \text{ ali}$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

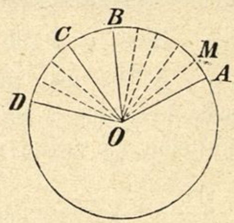
N. pr. za $r = 1$ je $s_6 = 1$; tedaj

$$s_{12} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{\cdot}51763818.$$

6. Sorazmerja pri krogu.

§ 122. 1.) **V istem krogu so loki sorazmerni s pripadajočimi središčnimi koti.**

Slika 128.



Vzemimo, da je (slika 128.) AM skupna mera lokov AB in CD, in sicer

$$\frown{AB} = m \,.\, \frown{AM},$$
$$\frown{CD} = n \,.\, \frown{AM}, \text{ tedaj}$$

$$\frown{AB} : \frown{CD} = m : n \; \ldots \; 1.).$$

Potegnimo dalje k vsakemu razdelišču teh dveh lokov polumer; na ta način razdelimo središčni kot AOB na m in COD na n kotu AOM jednakih delov (§ 15.);

$$\text{tedaj } \sphericalangle AOB = m \,.\, \sphericalangle AOM,$$
$$\sphericalangle COD = n \,.\, \sphericalangle AOM, \text{ in}$$

$$\sphericalangle AOB : \sphericalangle COD = .\, m : n \; \ldots \; 2.).$$

Iz razmerij 1.) in 2.) pa sledi:

$$\frown{AB} : \frown{CD} = \sphericalangle AOB : \sphericalangle COD.$$

2.) **V istem krogu so izseki sorazmerni s pripadajočimi središčnimi koti.**

Dokaz je prejšnjemu podoben.

Izvoda. *a)* Razmerje loka in celega oboda je jednako razmerju loku pripadajočega središčnega kota in 360^0.

b) Razmerje izseka in cele krožnine je jednako razmerju pripadajočega središčnega kota in 360^0.

§ 123. **Istoležni loki so sorazmerni z obodi in istoležni izseki sorazmerni s krožninami pripadajočih krogov** (slika 115.).

Ako sta O in o oboda, P in p ploščini, R in r polumera dveh krogov, dalje L in l dva loka, pripadajoča istemu središčnemu kotu α, potem je po § 122., izv. *a)*

$$L : O = \alpha^0 : 360^0 \text{ in}$$
$$l : o = \alpha^0 : 360^0, \text{ tedaj}$$

$$L : O = l : o, \text{ ali}$$
$$L : l = O : o.$$

Takisto dobimo po § 122., izv. *b)* sorazmerje

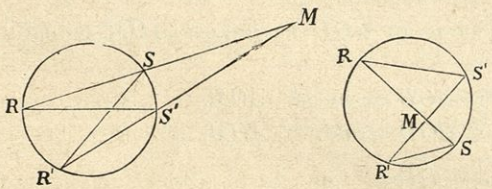
$$\text{izsek } AOB : \text{izsek } aOb = P : p.$$

§ 124. **Ako zvežemo točko polukrožnice in krajišči premera s tetivama in postavimo z one točke pravokotnico na tega, je** *a)* **vsaka tetiva srednja geometrijska sorazmernica med celim premerom in oni kateti priležnim odsekom premera,** *b)* **pravokotnica je srednja geometrijska sorazmernica med obema odsekoma premera.**

Sledi iz § 109., izv. *c)* v zvezi s 93.

§ 125. **Ako potegnemo iz katerekoli točke** M **premo, katera seče krožnico v točkah** R **in** S, **je produkt** $MR \,.\, MS$ **nepremenljiva količina za vsako poljubno premo, katero potegnemo skoz točko** M.

Slika 129.



D o k a z. Ker je (slika 129.) $\triangle MSR' \sim \triangle MS'R$ (§ 88., 1.), se ima $MS : MR' = MS' : MR$, torej je $MS \,.\, MR = MS' \,.\, MR' =$ nepremenljiva količina.

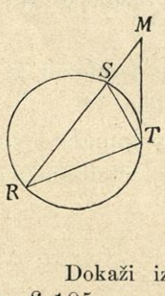
Ta nepremenljiv produkt imenujemo **potenco** točke M za dani krog.

Ako gre prema $MS'R'$ skoz središče O, je izraz

$$(MO + r) \,.\, (MO - r) = \overline{MO}^2 - r^2$$

potenca točke M, kjer je r polumer kroga in MO razdalja točke M od središča.

Slika 130.



I z v o d a. 1.) **Ako leži točka** M **zunaj kroga, je njena potenca jednaka kvadratu tangente** MT (slika 130.), **potegnene iz točke na krog.** — Kajti za tangento je $MR' = MS' = MT$ in $MS \,.\, MR = \overline{MT}^2$.

2.) **Tangenta, potegnena od točke** M, **je srednja geometrijska proporcijonala med celo sekanto** MR **in njenim vnanjim odsekom** MS.

Dokaži izv. 2. iz podobnosti trikotnikov MRT in MST oziraje se na § 105.

Kolika je potenca točke M, ako je *a)* $MO = 8\,cm$, $r = 5\,cm$; *b)* $MO = 5\,cm$, $r = 5\,cm$; *c)* $MO = 3\,cm$, $r = 5\,cm$; *d)* $MO = o$, $r = 5\,cm$?

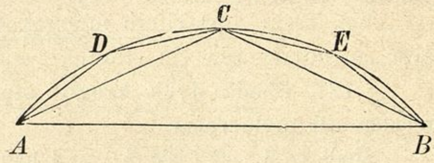
7. Krogomerstvo.

§ 126. 1.) **Vsaka tetiva kroga je manjša od loka med njenima krajiščema.**

Vzemimo, da je (slika 131.) $\widehat{AC} = \widehat{CB}$, $\widehat{AD} = \widehat{DC}$, $\widehat{CE} = \widehat{EB}$, i. t. d.

Potem je po § 38., 1. $AB < AC + BC < AD + DC + CE + EB <$ i. t. d., t. j. ulomljena črta, katero dobimo, ako razpolavljanje lokov ponavljamo, veča se tem bolj, čim več toček ima z lokom skupnih; najdaljša izmed teh ulomljenih črt mora torej biti ona, katera ima največ, in sicer brezkončno mnogo toček skupnih z lokom, t. j. lok sam Tedaj je tem bolj $\overline{AB} < \widehat{AB}$.

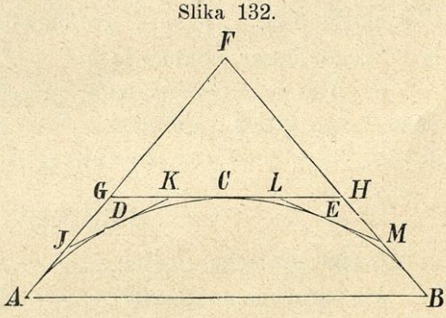
Slika 131.



2.) **Vsota tangent, potegnenih od točke na krog, je večja od loka med dotikališčema.**

Recimo, da sta (slika 132.) AF in BF iz F na krog potegneni tangenti, ACB pa lok, ki ga omejevata dotikališči, in C njegova sreda. Ako potegnemo skoz C tangento GH na lok, potem je zarad $GF + FH > GH$ tudi $AF + BF > AG + GH + HB$. Ako sta dalje JK in LM skoz sredi D in E lokov AC in BC potegneni tangenti, je ulomljena črta $AGHB <$ od ulomljene črte $AJKLMB$ in tem bolj $AF + BF > AJKLMB$, t. j. ulomljena črta manjša se tem bolj, čim več toček ima z lokom skupnih.

Slika 132.



Najkrajša izmed teh ulomljenih črt mora torej biti ona, katera ima največ, in sicer brezkončno mnogo toček skupnih z lokom, t. j. lok sam. Tedaj je tem bolj $AF + BF > \widehat{ACB}$.

Izvoda. *a)* Obseg vsakega krogu **vpisanega (opisanega)** pravilnega mnogokotnika je **manjši (večji)** nego obod kroga.

b) Obsegi vpisanih in opisanih pravilnih mnogokotnikov dadó se obodu kroga poljubno približati, ako podvojujemo število njih stranic, t. j. krog moremo smatrati za **mejo**, kateri se bliža obseg vpisanega (opisanega) pravilnega mnogokotnika, ako neprenehoma podvojujemo število njegovih stranic. V tem smislu moremo reči: **Krog je pravilen mnogokotnik z brezkončno mnogo brezkončno majhnih stranic.**

Vsi izreki o pravilnih mnogokotnikih, katere smo dokazali brez ozira na število njihovih stranic, veljajo tudi za krog.

§ 127. **Oboda dveh krogov sta sorazmerna z njijinima polumeroma ali premeroma.**

Sledi iz § 126., izv. *b)* in § 119., *a).*

Izvodi. *a)* Ako so O in o, R in r, P in p oziroma merska števila obodov, polumerov in premerov v dveh krogih, je

$$O : o = R : r = P : p.$$

Iz tega sledi $O : P = o : p$, t. j. **razmerje oboda in premera je za vse kroge nepremenljiva količina.**

Vrednost tega nepremenljivega razmerja zaznamenujemo s številom π,

$$\text{tako da je } \frac{o}{p} = \frac{o}{2r} = \pi.$$

b) Iz prejšnjega izraza sledi: $o = p\pi = 2r\pi$, t. j. **obod kroga je jednak produktu iz premera in števila** π.

c) Za $p = 1$, je $o = \pi$. Število π moremo tedaj smatrati za obod kroga, čegar premer je 1.

d) Ako je l dolžina loka, pripadajočega k središčnemu kotu α, potem je po § 122., izv. *a)*

$$l : 2r\pi = \alpha : 360;$$

$$\text{tedaj } l = \frac{r\alpha\pi}{180}.$$

§ 128. Določba števila π.

Da izračunamo število π, t. j. obod kroga, čegar premer je 1, treba da začnemo s pravilnim temu krogu vpisanim šesterokotnikom, čegar stranica je $s_6 = r = \frac{1}{2}$; iz te izračunamo po § 121. stranico vpisanega pravilnega dvanajsterokotnika s_{12}, iz te zopet na isti način stranico 24terokotnika s_{24} i. t. d. Ako množimo posamezne stranice z dotičnimi števili, dobimo obsege o_6, o_{12}, o_{24}, . . . mnogokotnikov, torej vrsto števil, od katerih je vsako manjše nego iskani obod, pa vsako sledeče bliže od prejšnjega. Potem izračunamo iz stranic s_6,

$s_{12}, s_{24} \ldots$ po § 120. stranice $S_6, S_{12}, S_{24} \ldots$ opisanih pravilnih mnogokotnikov, oziroma z istim številom stranic, in iz teh obsege $O_6, O_{12}, O_{24} \ldots$; na ta način dobimo drugo vrsto števil, od katerih je vsako večje nego iskani obod, toda vsako sledeče bliže kakor prejšnje.

Na ta način moremo število π zaporedoma med dve števili o_6 in O_6, o_{12}, in $O_{12} \ldots$ spraviti ter poljubno natanko izračunati.

Resultate tega računa do 3072terokotnika navaja sledeča tablica:

n	o_n	O_n
6	3	3·464102
12	3·105829	3·215390
24	3·132629	3·159660
48	3·139350	3·146086
96	3·141032	3·142715
192	3·141452	3·141873
384	3·141558	3·141663
768	3·141584	3·141610
1536	3·141590	3·141597
3072	3·141592	3·141594

Obsega vpisanega in opisanega pravilnega 3072terokotnika razlikujeta se tedaj še le v šestem desetinskem mestu; ker je pa obod π med tema dvema obsegoma, mora skupni del zgoraj navedenih števil obod π biti; torej

$$\pi = 3{\cdot}14159.$$

Števila π ne moremo popolnoma natančno izračunati, vender pa toliko natančno, kolikor le hočemo; ono je iracijonalno število. Na deset decimalk je

$$\pi = 3{\cdot}14159\ 26536.$$

Arhimed je izračunal za π vrednost $3\frac{1}{7}$, Metij $\frac{355}{113}$, Ludolf na 35 decimalk; po zadnjem imenujemo π **Ludolfovo število.**

§ 129. **Ploščina kroga je jednaka produktu iz oboda in polovice polumera.**

Sledi iz § 126., izv. *b)* in § 74.

Izvod. *a)* Ako so r, o, p oziroma merska števila polumera, oboda in ploščine kroga, je

$$p = o\,\frac{r}{2}.$$

Ker je pa $o = 2r\pi$, je tudi

$$p = r^2\pi,$$

t. j. **ploščina kroga je jednaka produktu iz kvadrata polumera in števila** π.

b) Ako sta P in p ploščini, R in r pa polumera dveh krogov,

je $P = R^2\pi$ in $p = r^2\pi$, tedaj

$$P : p = R^2 : r^2,$$

t. j. **ploščini dveh krogov sta sorazmerni s kvadratoma njijinih polumerov.**

§ 130. **Ploščina izseka kroga je jednaka dolžini loka, množeni s polovico polumera.**

Ako je p_i ploščina izseka, r polumer in α središčni kot, je

$p_i : r^2\pi = \alpha : 360$ (§ 122., izv. *b*), tedaj $p_i = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{r\pi\alpha}{180} \cdot \frac{r}{2}$, ali

ker je $\frac{r\pi\alpha}{180} = l$ dolžina loka, pripadajočega k središčnemu kotu α (§ 127., izv. *d*)

$$p_i = l \cdot \frac{r}{2}.$$

Dostavek. Ploščina krogovega odseka je jednaka, ako je odsek manjši (večji) od polukroga, diferenci (vsoti) iz pripadajočega izseka in trikotnika, omejenega od tetive in polumerov.

§ 131. 1.) **Ploščina kolobarja je jednaka polovici vsote obeh obodov, množeni s širino kolobarja.**

Ako zaznamenuje p_k ploščino kolobarja, R in O polumer in obod večjega, r in o pa polumer in obod manjšega obeh koncentričnih krogov, je

$$p_k = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2) \cdot \pi = (R + r)(R - r)\pi =$$
$$= \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot (R - r) = \frac{O + o}{2} \cdot (R - r).$$

2.) **Ploščina kolobarjevega izseka je jednaka polovici vsote obeh lokov, množeni s širino kolobarjevega izseka.**

Dokaz je prejšnjemu podoben.

Računske naloge.

1.) V krogu je r polumer, b tetiva in d njena razdalja od središča; izračunaj iz dveh teh količin tretjo.

a) $b = 3{\cdot}4\ m$, $d = 2{\cdot}5\ m$; *b)* $r = 1{\cdot}56\ m$, $d = 0{\cdot}84\ m$; *c)* $r = 7\ dm\ 2\ cm$, $b = 4\ dm\ 8\ cm$.

2.) V krogu ($r = 5\,m\ 2\,dm$) je premer razdeljen v razmerji $4:9$; kolika je skoz razdeljišče pravokotno na premer potegnena tetiva?

3.) V krogu je $2r$ premer, b tetiva in v višina loka; izračunaj iz dveh teh količin tretjo.

$a)\ 2r = 36\,dm, \quad b)\ b = 8\,m,$
$v = 4\,dm; \quad v = 2\,m.$

4.) Dva jednaka kroga ($r = 6\,cm$) se dotikata; kolika je *a)* tangenta iz središča jednega na obod druzega, *b)* dotikalna tetiva?

5.) V krogu je r polumer, o obod, p ploščina; izračunaj iz jedne teh količin drugi dve.

$a)\ r = 5{\cdot}2\,m; \quad b)\ o = 1{\cdot}256\,dm; \quad c)\ p = 349\,dm^2.$

6.) Premer zemeljskega ravnika je 12755 *km;* kolik je njegov obod, kolika jedna njegova stopnja? ($\pi = 3{\cdot}14159$).

7.) Kolika je pot, katero preleti točka ravnikova vsled vrtenja zemlje okoli njene osi v jedni minuti?

8.) Sprednje kolo pri vozu ima polumer $r = 40\,cm$ in zadnje $R = 50\,cm$; kolikokrat se zavrti sprednje kolo, ako se zavrti zadnje 1065krat?

9.) Polumera dveh krogov sta 2 *dm* 4 *cm* in 3 *dm* 2 *cm;* kolik je premer kroga, kateri je jednak vsoti onih dveh krogov?

10.) Oboda dveh krogov sta 50·24 *cm* in 18·84 *cm;* kolik je obod kroga, čegar ploščina je jednaka diferenci onih dveh krogov?

11.) Obod kroga je jednak obsegu kvadrata, čegar stranica je 4 *cm;* izračunaj razmerje njijinih ploščin.

12.) Polumer kroga je 5 *dm;* kolika je stranica ploskveno-jednakega jednakostraničnega trikotnika?

13.) V krogu je r polumer, α središčen kot in l dolžina pripadajočega loka; izračunaj iz dveh teh količin tretjo.

$a)\ r = 8\,dm, \quad b)\ r = 2\,dm\ 7\,cm, \quad c)\ \alpha = 48^0,$
$\alpha = 135^0; \quad l = 2\,dm\ 28\,mm; \quad l = 6\,dm\ 28\,mm.$

14.) Ako je polumer kroga 1 *dm,* kolika je dolžina loka za *a)* 1^0, *b)* $1'$, *c)* $1''$?

15.) Dolžina loka je jednaka premeru; kolik je pripadajoči središčni kot?

16.) Geografična širina Ljubljane je $46^0\ 3'$; koliko kilometrov je od ravnika oddaljena, ako ima polumer meridijana 6371·56 *km?*

17.) V krogu je r polumer, α središčen kot, l dolžina pripadajočega loka in p_i ploščina pripadajočega izseka; izračunaj iz dveh količin drugi dve.

$a)$ $r = 2\ m$, $\alpha = 38^0$; $b)$ $\alpha = 35^0$, $l = 2{\cdot}61\ m$; $c)$ $\alpha = 75^0$, $p_i = 10\ dm^2$; $d)$ $l = 0{\cdot}698\ m$, $p_i = 0{\cdot}349\ m^2$; $e)$ $r = 4\ m$, $p_i = 21{\cdot}98\ m^2$.

18.) Kolika je ploščina odseka v krogu s polumerom $r = 8\ dm$, ako ima središčen kot $a)$ 60^0, $b)$ 120^0, $c)$ 90^0?

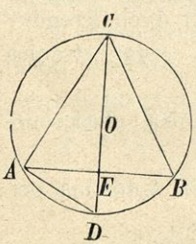
19.) Polumera dveh koncentričnih krogov sta R in r, oboda O in o, širina kolobarja c in njegova ploščina p_k; izračunaj iz dveh teh količin vse druge.

$a)$ $R = 6\ dm\ 5\ cm$, $r = 4\ dm\ 5\ cm$; $b)$ $R = 3{\cdot}5\ m$, $o = 12{\cdot}56\ m$; $c)$ $r = 3{\cdot}5\ dm$, $p_k = 25{\cdot}12\ dm^2$; $d)$ $O = 34{\cdot}54\ m$, $c = 2{\cdot}5\ m$; $e)$ $o = 53{\cdot}38\ dm$, $p_k = 56{\cdot}52\ dm^2$; $f)$ $c = 2\ dm$, $p_k = 69\ dm^2\ 8\ cm^2$.

20.) Razdeli krog, čegar polumer je 6 dm dolg, s koncentričnim krogom na dva jednaka dela; kolika je širina kolobarja?

21.) Kolika je ploščina kolobarjevega izseka, ako sta polumera lokov 5 dm in 4 dm in središčen kot 48^0?

Slika 133.



22.) Izračunaj iz polumera kroga stranico vpisanega in opisanega jednakostraničnega trikotnika.

Ako je (slika 133.) $AB = s_3$ stranica jednakostraničnega trikotnika, $OC = r$ polumer kroga in premer $CD \perp AB$, je AD stranica vpisanega pravilnega šesterokotnika in tedaj jednaka r.

V pravokotnem trikotniku CAD je potem

$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AD}^2$ ali $s^2_3 = 4r^2 - r^2$, iz česar sledi

$$s_3 = r\sqrt{3}.$$

Za opisani jednakostraničen trikotnik dobimo po § 120.

$$S_3 = \frac{r \,.\, s_3}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2_3}{4}}} = \frac{r^2\sqrt{3}}{\sqrt{r^2 - \frac{3r^2}{4}}} = 2r\sqrt{3} = 2s_3.$$

23.) Izračunaj iz polumera kroga stranici s_4 in S_4 vpisanega in opisanega kvadrata.

$$s_4 = \sqrt{2};\ S_4 = 2r.$$

24.) V krogu je polumer 35 *cm;* za koliko sta obod in ploščina tega kroga večja (manjša) od obsega in ploščine *a)* vpisanega (opisanega) kvadrata, *b)* vpisanega (opisanega) pravilnega šesterokotnika?

25.) V krogu je polumer 1; izračunaj stranico in ploščino vpisanega pravilnega *a)* osmerokotnika, *b)* šestnajsterokotnika (§ 121.).

$$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}};\quad s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

$$p_8 = 2\sqrt{2};\quad p_{16} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

26.) Vsota ploščin krogu vpisanega jednakostraničnega trikotnika in kvadrata je 100 dm^2; kolik je polumer?

27.) Diferenca ploščin krogu opisanega in vpisanega kvadrata je 24 dm^2; kolik je polumer?

28.) Ako podaljšaš vrvico z drugo 1 *m* dolgo, moreš obseči za 2 m^2 večji krog; kolika je nepodaljšana vrvica?

Naloge za načrtovanje.

1.) **Poišči središče kroga ali loka.**

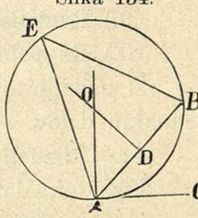
Potegni dve nevzporedni tetivi in reši nalogo po § 96.

2.) **Potegni skoz točko znotraj kroga najkrajšo tetivo.**

Potegni skoz dano točko polumer in na tega pravokotno tetivo; ta je zahtevana tetiva. Kajti vsaka druga tetiva, katero potegneš skoz dano točko, ima manjšo razdaljo od središča ter je daljša (§ 100., 4.).

3.) **Dana je daljica; napiši nad njo kakor tetivo tak odsek kroga, da so vsi njegovi obodni koti jednaki danemu.**

Slika 134.



Vzemimo, da je (slika 134.) *BAC* dani kot *AB* dana daljica Stvori $AD = DB$, $DO \perp AB$ in $AO \perp AC$, in napiši iz presečišča *O* pravokotnic s polumerom *OA* krog. Potem je *AEB* iskani odsek kroga, v katerem je obodni kot *AEB* jednak danemu. (Zakaj?)

4.) **Potegni skoz dano točko na obodu kroga tangento nanj.**

Potegni polumer do dane točke in v krajišči postavi pravokotnico na njega.

5.) **Potegni skoz dano točko zunaj kroga dve tangenti nanj.**

Analiza. Mislimo si nalogo rešeno ter CB in CA (slika 111.) kakor iskani tangenti. Potem je $\sphericalangle OBC = R$, torej leži njegov vrh, t. j. dotikališče B v obodu polukroga, napisanega nad OC; B pa tudi leži v obodu danega kroga, torej v presečišči obeh. Isto velja o kotu OAC.

Načrtovanje. Zveži središče danega kroga in dano točko C z daljico OC, razpolovi to in napiši iz njene srede krog, kateri seče dani krog v točkah A in B; premi CA in CB sta iskani tangenti.

Dokaz sledi iz analize.

6.) **Dan je krog s premerom** NN' (slika 120.); **načrtaj krog, kateri leži podobno k danemu, ako je dano podobnišče** A **in** $AN : AM = e$.

$$NN' = 50\ mm,\quad AN = 65\ mm,\quad AN' = 74\ mm,\quad e = \tfrac{3}{5}.$$

Za koliko mora biti točka C oddaljena, da sta tangenti vzporedni?

7.) **Poišči vnanje in notranje podobnišče dveh krogov s centralo** c.

$a)$ $R = 30\ mm,\quad r = 15\ mm,\quad c = 60\ mm;$
$b)$ $R = 25\ mm,\quad r = 10\ mm,\quad c = 35\ mm;$
$c)$ $R = 35\ mm,\quad r = 10\ mm,\quad c = 30\ mm;$
$d)$ $R = 40\ mm,\quad r = 18\ mm,\quad c = 12\ mm.$

8.) **Načrtaj k dvema krogoma** (R in r) **s centralo** c **skupne tangente.**

$$R = 25\ mm,\quad r = 6\ mm,\quad c = 35\ mm.$$

Potegni v obeh krogih dva v istem smislu vzporedna polumera in skoz njijini krajišči premo; ta seče centralo v vnanjem podobnišči krogov. Potem podaljšaj polumer jednega kroga čez središče do oboda in potem potegni premo skoz krajišče tega polumera in skoz krajišče tega polumera v drugem krogu; njeno presečišče s centralo je notranje podobnišče krogov (§ 110.).

9.) **Razpolovi dan lok.** (§ 99., 1.)

10.) **Razpolovi obod kroga.**

Z nadaljevanim razpolavljanjem razdeliš obod na 4, 8, 16, . . . jednakih delov.

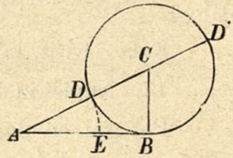
11.) **Razdeli obod na šest jednakih delov.** (§ 117.)

Dva taka loka skupaj znašata tretji del oboda.

Z razpolavljanjem lokov razdeliš obod v 12, 24, . . . jednakih delov.

12.) **Razdeli dano daljico po stalnem sorazmerji** (v srednjem in vnanjem razmerji).

Slika 135.



Potegni (slika 135.) $BC \perp AB$, stvori $BC = \frac{1}{2} AB$, napiši iz C s polumerom CB krog, in potegni skoz točki A in C sekanto, katero seče krog v točkah D in D'; ako stvoriš še $AE = AD$, je AB v točki E po stalnem sorazmerji razdeljena.

Kajti $AD' : AB = AB : AD$ (§ 128., izv. 2.), tedaj tudi $AB : (AD' - AB) = AD : (AB - AD)$. Ker je pa

$$AD' - AB = AD' - D'D = AD = AE,$$
$$AB - AD = AB - AE = BE,$$

je $AB : AE = AE : BE$.

13.) **Razdeli obod kroga na deset jednakih delov.**

Razdeli polumer po stalnem sorazmerji (naloga 12.) in vnesi večji odsek kakor tetivo v krog. (§ 129.)

Dva taka loka skupaj znašata peti del oboda.

Z razpolavljanjem lokov razdeljujemo obod na 20, 40, . . . jednakih delov.

Ako zvežeš po dva sosedna razdelišča oboda v nalogi 10, 11, 13, **vpišeš** krogu **pravilne mnogokotnike** s tolikim številom stranic, kolikor je razdelišč, ako pa načrtaš v razdeliščih na krog tangente, dobiš **pravilne opisane mnogokotnike**.

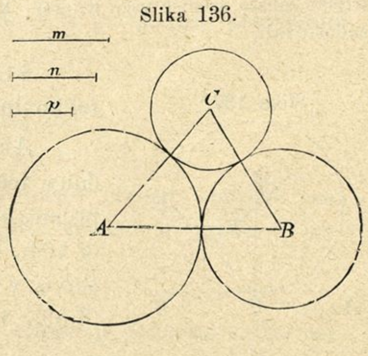
14.) **Napiši krog, kateri je jednak** *a)* **vsoti,** *b)* **diferenci dveh danih krogov** ($r_1 = 30\,mm$, $r_2 = 20\,mm$).

Analiza. Recimo, da je r polumer iskanega kroga, potem je

$$a)\; r^2\pi = r_1{}^2\pi + r_2{}^2\pi \text{ ali } r^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2,$$
$$b)\; r^2\pi = r_1{}^2\pi - r_2{}^2\pi \text{ ali } r^2 = r_1{}^2 - r_2{}^2.$$

Načrtovanje. Načrtaj pravokoten trikotnik *a)* s katetama r_1 in r_2, *b)* s hipotenuzo r_1 in s kateto r_2 i. t. d.

Slika 136.



15.) **Napiši s polumeroma 3** *cm* **in 2** *cm* **kroga, katera se dotikata** *a)* **od zunaj,** *b)* **od znotraj** (§ 109., izv. *a*).

16.) **Načrtaj s polumeri** *m, n, p* **tri kroge, kateri se vsi od zunaj dotikajo.**

Načrtaj trikotnik ABC sè stranicami $AB = m + n$, $AC = m + p$, in $BC = n + p$, napiši iz A, B, C s polumeri m, n, p kroge; ti zadostujejo nalogi.

Kako izvršiš nalogo, ako so polumeri vseh krogov jednaki?

17.) **Napiši iz danega središča krog, kateri se dotika dane preme.**

Potegni od dane točke pravokotnico OA na premo in napiši s polumerom OA krog. (§ 101., 4.)

18.) **Napiši iz danega središča krog, kateri se dotika danega kroga.** (§ 114., izv. *a*).

19.) **Napiši z danim polumerom krog, *a)* kateri gre skoz dano točko, *b)* kateri se dotika danega kroga, *c)* kateri zadostuje obema pogojema.**

a) Središče iskanega kroga leži v obodu kroga, katerega napišemo iz dane točke z danim polumerom. — Nedoločena naloga. Povej geometrijsko mesto središč vseh krogov, kateri tej nalogi zadostujejo.

b) Središče iskanega kroga leži v obodu kroga, katerega napišemo iz središča danega kroga s polumerom, ki je jednak vsoti ali diferenci danih polumerov. (§ 109., 2.) — Nedoločena naloga. Povej geometrijsko mesto središč vseh krogov, kateri tej nalogi zadostujejo.

c) Središče iskanega kroga leži v presečišči geometrijskih mest za *a)* in *b)*.

20.) Napiši krog z **danim polumerom**, kateri

a) gre skoz dve točki;

b) gre skoz dano točko in se dotika dane preme (§ 102., 5.);

c) se dotika dveh danih prem;

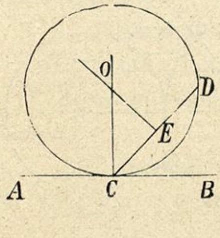
d) se dotika dane preme in danega kroga;

e) se dotika dveh danih krogov.

Razloži te naloge, kakor to vidiš v nalogi 19. in določi najprej geometrijsko mesto središč vseh krogov, kateri bi samo jednemu pogoju vsake naloge zadostovali.

21.) **Napiši krog, kateri gre skoz dano točko in se dotika dane preme v dani točki.**

Slika 137.



Ako je AB (slika 137.) dana prema, C dana točka v njej in D dana točka zunaj te preme, leži središče iskanega kroga v $CO \perp AB$ (§ 104., 4.) in v pravokotnici EO, katero postaviš v sredi daljice CD, torej v presečišči O. (§ 59., 4.)

22.) **Napiši krog, kateri gre skoz dano točko in se dotika danega kroga v dani točki** (§ 109., izv. *a*).

23.) **Napiši krog, kateri se dotika dveh danih prem, in sicer jedne v dani točki** (§ 101., 3.).

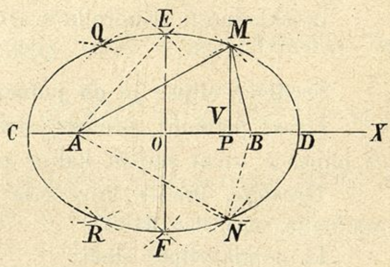
Sedmi oddelek.

Elipsa, hiperbola in parabola.

1. Elipsa.

§ 132. Razpolovi dano daljico CD v O, napravi $OA = OB$ (slika 138.), razdeli s poljubno ležečo točko V premo CD v dva dela ter napiši iz toček A in B s polumeroma CV in DV loke nad in pod CD, kateri se sečejo v obče v štirih točkah M, Q, N in R. Takisto načrtovanje toček ponavljaj večkrat, tako da lego točke V na premi CD menjavaš. Vse dobljene točke zveži zaporedoma in nepretrgljivo s krivo črto. Vsota razdalj vsake točke v tej črti od toček A in B je jednaka OD.

Slika 138.



Krivo črto, v kateri je vsota razdalj vsake točke od dveh nepremičnih toček dani daljici jednaka, imenujemo **elipso** (pakrog).

V elipsi je torej $AM + BM = CD$.

Nepremični točki A in B imenujemo **gorišči** (žarišči) elipse, daljici AM in BM, kateri vežeta točko M z goriščema, **prevodnici** te točke.

Iz načrtovanja sledi:

1.) $$AC = BD, \text{ torej tudi}$$
$$AC + CB = BD + AD = CD, \text{ t. j.}$$

krajišči C in D dane daljice sta tudi točke elipse. Daljico med njima imenujemo **veliko os**; njijini krajišči **temeni** in sredo O **središče** elipse.

Iz povedanega sledi:

Vsota prevodnic katerekoli točke elipse je jednaka veliki osi.

Ako je vsota razdalj katere točke od gorišč večja ali manjša od velike osi, leži točka oziroma zunaj ali znotraj elipse.

2.) Ker je $OA = OB$, velja:

Središče elipse je jednako oddaljeno od gorišč.

Razdaljo gorišč od središča imenujemo **ekscentričnost** (izsrednost) elipse.

Elipsa je tem bolj krogu podobna, čim manjša je njena ekscentričnost.

3.) Daljico EF, katera stoji v O pravokotno na veliki osi, imenujemo **malo os** elipse.

Ako zvežemo E z A in B, sta trikotnika AEO in BEO skladna (§ 50.); torej je

$$AE = BE = \frac{CD}{2}.$$

Isto velja za točko F.

Krajišči male osi sta od gorišč jednako oddaljeni.

Iz skladnosti trikotnikov AOF in AOE sledi

$$OE = OF.$$

Središče elipse je ob jednem tudi razpolovišče male osi.

Izraze polumer, premer, sekanta, tangenta, obod i. t. d. rabimo pri elipsi v istem smislu kakor pri krogu.

Opomnja. Premer krive črte imenujemo sploh vsako daljico, katera razpolavlja vzporedne tetive.

Iz pojma elipse sledi:

1.) Polumeri (premeri) elipse niso vsi jednaki.

2.) Največji (najmanjši) premer je velika (mala) os.

Iz pravokotnega trikotnika AOE sledi, ako so a, b, e merska števila polovice velike osi, polovice male osi in ekscentričnosti, po Pitagorovem izreku:

$$a^2 = b^2 + e^2, \text{ torej tudi}$$

$$a = \sqrt{b^2 + e^2}, \quad b = \sqrt{a^2 - e^2}, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

1.) Načrtaj elipso, v kateri je $CO = a$, $AO = e$.

$a = 3$ *cm*, $2 \cdot 5$ *cm*, 2 *cm*; $e = 2 \cdot 5$ *cm*, $2 \cdot 3$ *cm*, $1 \cdot 3$ *cm*.

2.) Kolika je velika os elipse, ako je mala os 1 *m*, ekscentričnost 3 *dm*?

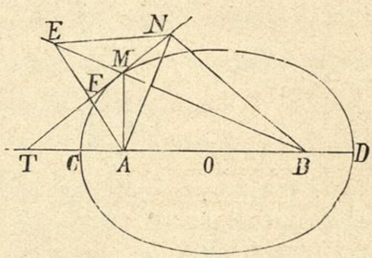
3.) Ekscentričnost elipse je 0·34 *m*, velika os 1·3 *m*; kolika je mala os?

4.) Vrtnar mora načrtati elipso, v kateri je velika os 58 *dm* in mala os 45 *dm*; za koliko morata gorišči oddaljeni biti?

5.) Pot naše zemlje krog solnca je elipsa, v kateri je polovica velike osi 153,280.134 *km*, polovica male osi 153,260.842 *km*; kolika je ekscentričnost zemljine poti (ekliptike)?

§ 133. **Prema, katera razpolavlja kot med jedno prevodnico in podaljškom druge prevodnice katerekoli točke, je tangenta elipse v tej točki.**

Slika 139.



Pogoj. AM in BM sta prevodnici točke M (slika 139.) in $\sphericalangle EMF = \sphericalangle FMA$.

Trditev. NT je tangenta elipse.

Dokaz. Naredimo $EM = AM$, potem je $EF = AF$ in $FM \perp AE$ (§ 59., 5.). Ako je N poljubna točka preme FM, je tudi $EN = AN$ (§ 59., 5.).

Nadalje je $EN + BN > EB = CD$ ali

$$AN + BN > AM + BM = CD, \text{ t. j.}$$

vsota razdalj točke N od gorišč je večja od velike osi, N leži torej zunaj elipse. Ker pa to za vsako točko preme TN, razun točke M, dokazati moremo, je TN tangenta elipse.

Izvod. **Vsaka tangenta elipse tvori s prevodnicama dotikališča jednaka kota.**

Kajti $\sphericalangle AMF = \sphericalangle EMF$, pa $\sphericalangle EMF = \sphericalangle BMN$; torej je tudi $\sphericalangle AMF = \sphericalangle BMN$.

Ta izvod ima posebno važnost v fiziki. Valovni traki, izhajajoči iz jednega gorišča, združijo se zopet v drugem.

2. Hiperbola.

§ 134 Razpolovi dano daljico CD v O, podaljšaj jo na obe strani in napravi $OA = OB$ (slika 140.), vzemi na premi OX točko V poljubno in napiši s polumerom CV iz točk A in B nad in pod premo OX loke, potem takisto s polumerom DV.

Napisani loki se sečejo v točkah M, N, Q, R. Potem menjaj lego točke V in ponavljaj takisto načrtovanje večkrat. Vse točke, v katerih se sečejo loki, zveži zaporedoma in nepretrgljivo s krivo črto.

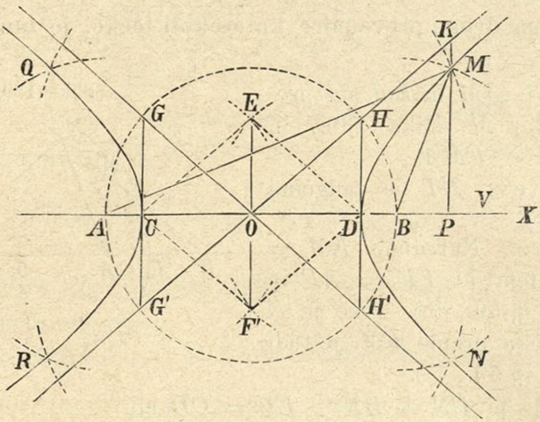
Točke M, N, Q, R i. t. d. so od točk A in B za daljico CV oziroma DV oddaljene; diferenca teh razdalj je jednaka AB.

Krivo črto, v kateri je diferenca razdalj vsake točke od dveh nepremičnih točk jednaka dani daljici, imenujemo **hiperbolo**. — Hiperbola ima dve rami.

V hiperboli je torej za vsako točko M:

$$AM - BM = CD.$$

Slika 140.



Nepremični točki A in B imenujemo **gorišči** hiperbole, daljici AM in BM pa **prevodnici** točke M.

Iz načrtovanja hiperbole sledi:

1.) $$CA = DB, \text{ torej tudi}$$
$$CB - AC = DA - DB = CD, \text{ t. j.}$$

krajišči C in D dane daljice sta tudi točki hiperbole.

Daljico med njima imenujemo **glavno os**, njeni krajišči C in D **temeni**, točko O **središče** hiperbole.

Iz povedanega sledi:

Diferenca prevodnic katerekoli točke hiperbole je jednaka glavni osi.

Ako je diferenca razdalj katere točke večja ali manjša od glavne osi, leži ta oziroma znotraj ali zunaj hiperbole.

2.) Ker je $OA = OB$, velja:

Središče hiperbole je od obeh gorišč jednako oddaljeno.

Razdaljo gorišč od središča imenujemo **ekscentričnost** hiperbole.

Ako napišemo iz toček C in D s polumerom AO loke, kateri se sečejo v E in F in potegnemo premo EF, stoji ta pravokotno na glavni osi in jo seče v točki O. Trikotnika CDE in CDF sta namreč jednakokraka.

Premo EF imenujemo **postransko os** hiperbole.

3.) Ker je $\triangle\, COE \cong \triangle\, COF$, je $OE = OF$; t. j.

Središče hiperbole razpolavlja tudi njeno postransko os.

Ako so a, b, e merska števila polovice glavne osi, polovice postranske osi in ekscentričnosti hiperbole, je v trikotniku COE po Pitagorovem izreku:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = \sqrt{e^2 - b^2},\ b = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Ako napišemo iz središča O s polumerom OA krožnico in načrtamo tetivi GG' in HH' pravokotno na AB, je

$$CG = CG' = DH = DH' = \sqrt{e^2 - a^2} = b.$$

Premi GH' in $G'H$, kateri gresta tudi skozi središče O hiperbole, imenujemo **asimptoti** (nestičnici) hiperbole. Oni ne sečeta nikjer hiperbole, ako ji še tako podaljšamo, vender se ji pa bližata bolj in bolj.

Načrtaj hiperbolo, v kateri je glavna os a, ekscentričnost e.

$a = 2\ cm,\ 2{\cdot}5\ cm,\ 3\ cm;\ e = 1{\cdot}8\ cm,\ 3{\cdot}5\ cm,\ 1{\cdot}5\ cm.$

Pirmerjaj dobljene hiperbole z ozirom na to, za koliko so odprte.

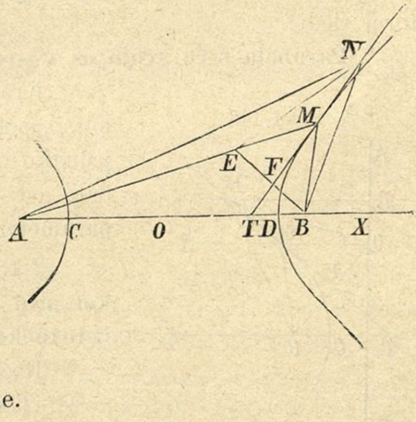
a) Glavna os hiperbole je $0{\cdot}4\ m$, postranska os $0{\cdot}5\ m$; kolika je ekscentričnost?

b) Ekscentričnost hiperbole je $5{\cdot}12\ dm$, glavna os $3{\cdot}85\ dm$; kolika je postranska os?

c) Ekscentričnost hiperbole je $3\ dm\ 9\ cm$, postranska os $2\ dm\ 2\ cm$; kolika je glavna os?

§ 135. **Prema, katera razpolavlja kot med prevodnicama točke, je tangenta hiperbole v tej točki.**

Slika 141.



Recimo, da je (slika 141.) $\sphericalangle AMT = \sphericalangle TMB$ in $EM = MB$, potem je $MF \perp EB$ in $EF = FB$. Ako je N katerakoli druga točka preme MT in ako potegnemo preme AN, BN in EN, je tudi $EN = BN$. (§ 59., 5.) Nadalje je $AN - EN < AE$ ali $AN - BN < CD$. Točka N leži zunaj hiperbole. Ker isto za vsako drugo točko preme TM, razun točke M, dokazati moremo, je NT tangenta hiperbole.

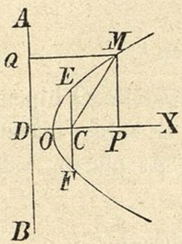
Izvod. **Vsaka tangenta tvori s prevodnicama dotikališča jednaka kota.**

Ta izvod je tudi važen v fiziki.

3. Parabola.

§ 136. Dana je prema AB in zunaj te točka C. Načrtaj skoz C premo $DX \perp AB$ in postavi v katerikoli točki P te preme $NM \perp DX$. Napiši z razdaljo DP iz točke C loka, katera sečeta pravokotnico v točkah M in N.

Slika 142.



Točki M in N sta od točke C in od preme AB jednako oddaljeni. Takisto načrtaj več takih točk in zveži jih zaporedoma in nepretrgljivo s krivo črto, v kateri je tedaj razdalja vsake točke od točke C jednaka razdalji od preme AB.

Krivo črto, v kateri je vsaka točka od dane nepremične točke in dane nepremične preme jednako oddaljena, imenujemo **parabolo** (metnico).

V paraboli je torej

$$MQ = MC$$

kjer je $MQ \perp AB$.

Nepremično točko C imenujemo **gorišče**, nepremično premo AB **vodnico**, premo DX, katera stoji pravokotno na AB in gre skoz C, **os** parabole, in presečišče parabole z osjo njeno **teme**; daljico MC, katera veže gorišče s katerokoli točko parabole, **prevodnico** one točke.

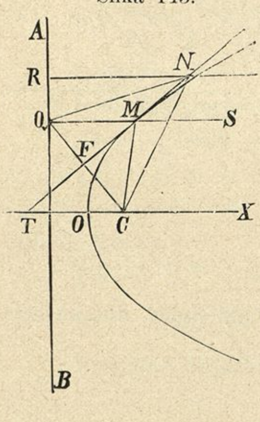
Ako je razdalja katere točke od gorišča večja ali manjša nego njena razdalja od vodnice, leži ta oziroma zunaj ali znotraj parabole.

Točka O, katera razpolavlja premo DC, je točka parabole, torej sledi:

Parabola seče svojo os v sredi med goriščem in vodnico.

Krajišči skoz gorišče na os pravokotno potegnene tetive EF sta od gorišča jednako oddaljeni, ker imata jednaki razdalji od vodnice. Tetivo EF imenujemo **parameter** parabole.

Slika 143.



§ 137. 1.) **Prema, katera razpolavlja kot med prevodnico točke in pravokotnico iz te točke na vodnico, je tangenta parabole.**

Recimo, da je (slika 143.) $\sphericalangle CMT = \sphericalangle TMQ$, potem je, ako potegnemo premo QC, $QF = FC$ in $FM \perp QC$. Ako je N katerakoli druga točka preme TM in ako potegnemo daljice CN, QN in $NR \perp AB$, je $\triangle\, CNF \cong QNF$, torej $CN = QN$; pa $QN > NR$ ali $CN > NR$. Točka N leži zunaj parabole. Taisto moremo za vsako drugo točko preme MT, razun točke M, dokazati, torej je MT tangenta parabole.

Izvod. **Vsaka tangenta parabole tvori jednaka kota s prevodnico dotikališča in s pravokotnico iz tega na vodnico.**

2.) **Presečišče tangente z osjo parabole in dotikališče sta od gorišča jednako oddaljeni.**

Kajti $\sphericalangle\, CTM = \sphericalangle\, SMN$; $\sphericalangle\, SMN = \sphericalangle\, QMT = \sphericalangle\, TMC$; torej $\sphericalangle\, CTM = \sphericalangle\, TMC$. Trikotnik TMC je jednakokrak in $CT = MC$.

Načrtaj parabolo, ako je razdalja gorišča od vodnice a.

$a = 5\ mm,\ 1\ cm,\ 2\ cm,\ 3\ cm.$

Primerjaj dobljene parabole z ozirom na to, koliko so odprte.

Naloge za načrtovanje.

1.) Mehanično načrtovanje elipse, ako je dana velika os in gorišči.

V goriščih zatakni trdno dve igli, na te priveži konca niti, katera je z veliko osjo jednako dolga. Ako napneš nit sè svinčnikom in ga okrog gorišč vrtiš, napiše ti svinčnik pri tej vrtnji elipso.

2.) **Dani sta osi elipse, poišči gorišči.**

Napiši iz točke E (slika 138.) s polumerom CO lok, kateri seče veliko os v točkah A in B. Presečišči A in B sta iskani gorišči.

Dokaz napravi sam.

3.) **Načrtaj skoz točko** M (slika 139.) **elipse tangento na to.**

Analizo napravi sam.

Načrtovanje. Potegni obe prevodnici k točki M in podaljšaj BM; ako razpoloviš kot AME, je razpolovnica TM iskana tangenta.

4.) **Načrtaj iz dane točke** N (slika 139.) **zunaj elipse tangento na to.**

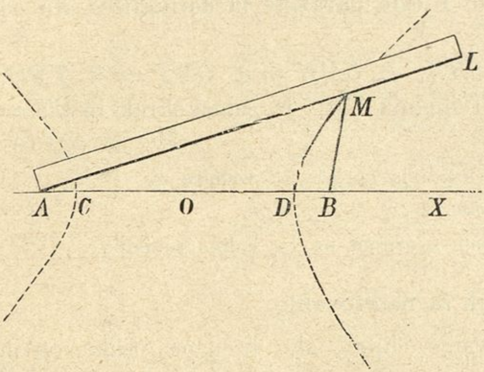
Analiza. Recimo, da je MN iskana tangenta. Potem je $NE = NA$. (§ 133.) in $BE = CD$, torej lega točke E in tudi daljice EA znana; razpolovišče F te daljice je druga točka iskane tangente.

Načrtovanje. Zveži točko N z goriščem A in napiši iz točke N krog s polumerom NA; napiši pa tudi krog iz druzega gorišča B s polumerom CD; presečišče obeh krogov je točka E. Ako potegneš potem daljico EA in jo v točki F razpoloviš, je prema FN iskana tangenta.

5.) Mehanično načrtovanje hiperbole, ako je dana glavna os in obe gorišči.

Vzemi ravnilo (lineal) in napravi, da je v gorišči A (slika 144.) vrtljivo; na drugem konci ravnila L pripní konec niti v, katera je za veliko os CD krajša od ravnila, drugi konec niti zatakni v gorišči B. Ako tedaj vrtiš ravnilo okrog točke A in ako pritiskaš niti k ravnilu sè svinčnikom, da ostane nit na obeh straneh napeta, napišeš sè svinčnikom jeden del hiperbole. Kajti za vsako lego točke M je

Slika 144.



$$AM - BM = (AM + ML) - (BM + ML) = AL - v = CD.$$

Kako moreš načrtati še druge dele hiperbole?

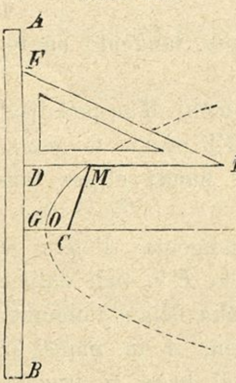
6.) **Načrtaj skoz točko M (slika 141.) hiperbole tangento na to.**

Potegni prevodnici AM in BM in razpolovi kot AMB; polovnica MT je zahtevana tangenta.

7.) Mehanično načrtovanje parabole, ako je dana vodnica in gorišče.

Vzemi lesen pravokoten trikotnik EDF (slika 145.) in nit, katera je jednaka DE; pripni jeden konec niti v gorišči C in drugi v E. Ako trikotnik s kateto DE ob vodnici premikaš in nit sè svinčnikom k trikotniku pritiskaš, da ostane vedno napeta, napišeš zgornji del parabole. Kajti za vsako lego točke M je $CM = MD$.

Slika 145.



Kako moreš načrtati spodnji del parabole?

8.) **Načrtaj skoz dano točko M (slika 143.) parabole tangento na to.**

Potegni MC in $MQ \perp AB$, razpolovi kot QMC; polovnica TM je iskana tangenta.

Osmi oddelek

Simetrična lega, projekcija.

Simetrija.

§ 138. Načrtaj na dano premo SS' pravokotnico AB, katera seče prvo v točki C in napravi $AC = BC$.

Takisto načrtaj drugo pravokotnico $A'B'$ na SS' in napravi $A'C' = B'C'$; potem pa zveži točki A in A', B in B' z daljicama AA' in BB'.

Točki A in B imenujemo **simetrično** (istomerno) ležeči z ozirom na premo SS', ako stoji njijina zveznica $AB \perp SS'$ in ako SS' razpolavlja daljico AB.

Premo SS' imenujemo **os simetrije** ali **simetralo.**

Daljici AA' in BB' ležita **simetrično** z ozirom na premo SS', ako nahajamo za vsako točko jedne daljice simetrično ležečo točko na drugi daljici z ozirom na SS'.

Taisto velja splošno **o simetrično ležečih tvorih.**

Načrtaj simetralo dveh danih trakov, ako sta *a)* nevzporedna, *b)* vzporedna.

Rešitev. *a)* Simetrala je polovnica kota, katerega tvorita traka. *b)* Simetrala je vzporednica s trakoma, ležeča v sredi med njima.

Iz tega sledi:

Dva traka imata zmerom simetralo ali ležita zmerom simetrično.

Taisto moremo reči o dveh jednakih krogih in nekaterih drugih jednakih tvorih.

Načrtaj simetralo dveh jednakih krogov s centralo c.

$$R = 2\ cm,\ 2{\cdot}5\ cm,\ 3\ cm;$$
$$c = 5\ cm,\ 5\ cm,\ 4\ cm.$$

Dana je simetrala; narisaj na jedno stran te *a)* trikotnik, *b)* četverokotnik, *c)* peterokotnik in potem k vsakemu teh likov simetrično ležečega.

Kaj bi se zgodilo sè simetričnima likoma, ako zavrtiš jednega okoli nepremične simetrale za 180^0 proti drugemu?

§ 139. Nekatere tvore moremo s premo razdeliti v dve simetrični polovici; take tvore imenujemo sploh **simetrične.**

Simetrični tvori so n. pr.:

1.) Trak; vsaka pravokotnica na njega je njegova simetrala.

2.) Daljica; pravokotnica v njeni sredi je simetrala.

3.) Kot; prema, katera ga razpolavlja, je njegova simetrala.

4.) Jednakokrak trikotnik; daljica, ki veže vrh z razpoloviščem osnovnice je njegova simetrala.

5.) Krog; vsak premer je simetrala.

6.) Elipsa; velika in mala os sta simetrali.

Simetrični so sploh vsi oni tvori, katere moremo s premo razdeliti v dve skladni polovici.

Projekcija.

§ 140. Ako spustimo z dane točke A zunaj preme XX' pravokotnico AB na to, pravimo, da **projiciramo** (vzmetnemo) točko A na premo XX'.

Podnožišče B pravokotnice imenujemo **projekcijo** (vzmet) točke na premo, in to premo pa **os projekcije** ali na kratko **os**.

Projekcijo daljice na dano premo imenujemo daljico med projekcijama njenih krajišč.

Projekcija z osjo vzporedne daljice je tej jednaka, postaje manjša, ako se kot, katerega tvorita dana daljica in os, bliža pravemu; za prav kot je projekcija daljice točka.

§ 141. Ako je dana točka ali daljica, je njena projekcija na dano os popolno določena. Obratno pa točka ali daljica ni določena, ako je dana njena projekcija.

Kajti pravokotnica na os je projekcija vsake točke v pravokotnici; in vse daljice, katere potegnemo med pravokotnicama na os, imajo isto projekcijo.

Ako sta izmed količin: daljica, projekcija in kot, katerega tvori daljica z osjo, dani dve, moremo tretjo določiti z načrtovanjem.

Za daljico, katero na ta način določimo, vemo vender le njeno dolžino, ne pa natančno njene lege; kajti jednako dolge vzporednice med pravokotnicama na os, imajo jednako projekcijo in tvorijo z osjo jednak kot.

Projiciraj daljico $AB = 4\,cm$ zunaj preme XX' na to, ako tvori (podaljšana) AB s XX' kot

a) $0°$, *b)* $15°$, *c)* $30°$, *d)* $45°$, *e)* $60°$, *f)* $90°$.

Dana je daljica AB in kot α, katerega tvori z osjo; odmeri dolžino projekcije z merilom.

$AB = 6\,cm$, $\alpha = 60°$; $AB = 7\,cm$, $\alpha = 45°$; $AB = 5\,cm$, $\alpha = 75°$.

Dan je kot α za daljico AB in njena projekcija $A'B'$; kolika je AB?

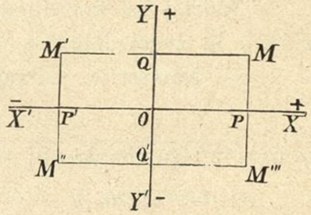
$A'B' = 40\,cm$, $\alpha = 60°$; $A'B' = 5\,cm$, $\alpha = 30°$; $A'B' = 6\,cm$, $\alpha = 54°$.

Dana daljica AB in njena projekcija $A'B'$; načrtaj kot med njima in odmeri ga s transportêrjem.

$AB = 7\ cm$, $A'B' = 5\ cm$; $AB = 8\ cm$, $A'B' = 5\ cm$; $AB = 9\ cm$, $A'B' = 3\ cm$.

§ 142. Lego točke M (slika 146.) v ravnini določimo s projekcijo popolnoma, ako jo projiciramo na dve pravokotni osi, na horicontalno XX' in vertikalno YY'; kajti točka M leži v $MP \perp XX'$ in v $MQ \perp YY'$, kateri postavimo v projekcijah P in Q, torej v presečišči teh pravokotnic. Daljico OP med horicontalno projekcijo in presečiščem osi O imenujemo **absciso** (x) in daljico OQ med vertikalno projekcijo in presečiščem O **ordinato** (y) točke M.

Slika 146.



Absciso in ordinato imenujemo skupno **koordinati**, in so XX' in YY' **osi koordinat**, in sicer v posebnem XX' **os abscis** YY' **os ordinat**; presečišče O teh osi pa **izhodišče** koordinat.

Da moremo lego točke v ravnini popolno natanko določiti, vzamemo os abscis na desno izhodišča pozitivno, na levo negativno. Koordinate so potem tudi pozitivne ali negativne. Ako je (slika 146.) absolutna vrednost daljic $OP = OP' = a$ in $OQ = OQ' = b$, je

za točko M . . . . . $x = + a,\ y = + b$;

» » M' . . . . . $x = - a,\ y = + b$;

» » M'' . . . . . $x = - a,\ y = - b$;

» » M''' . . . . . $x = + a,\ y = - b$.

S koordinatami krajišč daljice, t. j. s projekcijama daljic na dve pravokotni osi, pa določimo tudi popolnoma lego daljice.

Dani sta osi koordinat; načrtaj točko M, za katero je:

$$x = + 3\ cm,\ - 4\ cm,\ - 2\ cm,\ + 5\ cm;$$
$$y = + 2\ cm,\ + 3\ cm,\ - 5\ cm,\ - 4\ cm.$$

Dani sta osi koordinat; načrtaj daljico AB, ako pomenjata x in y koordinati točke A, x' in y' koordinati točke B:

$$x = + 1\ cm,\ + 2\ cm,\ - 5\ cm,\ - 1\ cm;$$
$$y = + 1\ cm,\ - 3\ cm,\ + 3\ cm,\ - 1\ cm;$$
$$x' = + 3\ cm,\ + 4\ cm,\ - 5\ cm,\ - 3\ cm;$$
$$y' = + 2\ cm,\ - 3\ cm,\ - 2\ cm,\ - 4\ cm.$$

§ 143. 1.) Namesti v jednačbi

$$y = ax$$

števili a in x z drugimi danimi števili in izračunaj y.

$a)$ $a = 0{\cdot}5$, $x = +1\ cm, +2\ cm, +3\ cm, +4\ cm, \ldots$

$a = 0{\cdot}5$, $x = -1\ cm, -2\ cm, -3\ cm, -4\ cm, \ldots$

$b)$ $a = 1$, $x = \pm 1\ cm, \pm 2\ cm, \pm 3\ cm, \pm 4\ cm, \ldots$

$c)$ $a = 2$, $x = \pm 1\ cm, \pm 2\ cm, \pm 3\ cm, \pm 4\ cm, \ldots$

Načrtaj osi koordinat, poišči lego toček za vsak izračunan par x in y in zveži dobljene točke; kakšen tvor dobiš? (Premo.)

2.) Namesti v jednačbi

$$x^2 + y^2 = a^2$$

y in a z drugimi števili ter izračunaj x.

$a)$ $a = 1\ cm$, $y = o$; $b)$ $a = 2\ cm$, $y = o$; $c)$ $a = 5\ cm$, $y = +3\ cm$.

Načrtaj osi koordinat, poišči lego toček za vsak znan x in y in načrtaj iz izhodišča krožnico skoz dobljene tri točke. — Načrtaj koordinate x in y katerekoli točke krožnice in zveži krajišče ordinate z izhodiščem; kakšno jednačbo dobiš iz dobljenega trikotnika po Pitagorovem izreku? $(x^2 + y^2 = a^2)$.

Iz povedanega sledi:

Jednačbi $y = ax$ in $x^2 + y^2 = a^2$ izražujeta oziroma premo in krog ali prema in krog sta geometrijski mesti vseh toček, katerih koordinate x in y zadostujejo tema jednačbama.

Takisto moremo tudi druge črte, n. pr. elipso, hiperbolo in parabolo, izraževati z jednačbami; o tem na tem mestu vender ne mislimo natančneje govoriti.

Drugi del.

Stereometrija.

Prvi oddelek.

Preme in ravnine v prostoru.

1. Meje teles.

§ 144. Snov* kocke, pravokotnega paralelepipeda, tetraedra, šesterostrane pravilne piramide, pokončnega cilindra in stožca, table, knjige i. t. d. zajemlje prostor, ki je na vse strani omejen.

Prostor, omejen na vse strani, imenujemo (geometrijsko) **telo**.

Iz tega sledi:

1.) **Meje teles, t. j. njegove ploskve, so okoli in okoli omejene, ali so liki.**

Lik leži ali v ravnini (n. pr. kvadrat ob kocki, trikotnik ob piramidi, krog ob cilindru in stožcu), ali pa nima ravnine (n. pr. plašč ob cilindru in stožcu). Prve imenujemo **ravne**, druge **vzvite** like.

Ravnoploska telesa so omejena samo od ravnoploskih, slokoploska pa od ravno- in slokoploskih likov.

Kroglja, pa tudi druga telesa, nimajo nobedne ravnine za mejo.

Ploskev, na katero si mislimo telo postavljeno, imenujemo **osnovno**, one ob strani pa **obstranske**. — Kocka, cilinder imata še ploskev, katera telo pokriva; tudi to imenujejo osnovno ploskev. — Osnovne ploskve so omejene od **osnovnih robov**; vse druge robe imenujejo **obstranske**.

2.) **Meje ploskve, t. j. njeni robi ali črte, so tudi na obe strani omejene.**

Meji roba (črte) sta ogla (točki). Na piramidi se vsi obstranski robi v istem oglu, v **vrhu**, stikajo. Tudi stožec ima vrh. — Krožnica nima ogljšč, njeni krajišči padeta v jedni točki skupaj. Ker si jo pa

* Oglej si ta telesa.

moreš misliti kot pravilen mnogokotnik z brezkončno mnogo, seveda brezkončno majhnih stranic (§ 127.), smeš si tudi cilinder (stožec) kot prizmo (piramido) misliti. Po plašču cilindra (stožca) pa moremo torej brezkončno mnogo prem, **stranic**, potegniti.

Določi like po njihovem številu, po podobi na kocki, tetraedru i. t. d. natančneje.

Primerjaj like vsakega onih teles po podobi in kolikosti. N. pr. na kocki so vsi liki skladni kvadrati.

Površje teles.

§ 145. Ploščino vseh likov skupaj, s katerimi je telo omejeno, imenujemo njega **površje**, vsoto vseh obstranskih ploskev pa njega **obstransko površje** ali **obstranje**. O merskih jednotah glej § 68.

Naloge.

1.) Merski števili stranice in površja kocke sta oziroma s in p; izračunaj iz jedne teh količin drugo.

$a)$ $s = 1\ m\ 4\ dm\ 5\ cm$, $b)$ $p = 36{\cdot}0150\ m^2$,
$s = 3{\cdot}68\ dm$; $p = 8{\cdot}72\ dm^2$.

2.) Merski števili kockinega površja in diagonale njenega kvadrata sta oziroma p in d; izračunaj iz jedne teh količin drugo.

$a)$ $d = 4{\cdot}56\ dm$, $b)$ $p = 2352\ dm^2$,
$d = 7{\cdot}28\ cm$; $p = 8{\cdot}407\ m^2$.

3.) Koliko je α) obstranje, β) površje pravokotnega paralelepipeda, ako so merska števila treh stikajočih se robov r', r'', r'''?

$a)$ $r' = 4{\cdot}7\ dm$, $b)$ $r' = 8{\cdot}2\ m$,
$r'' = 2{\cdot}8\ dm$, $r'' = 6{\cdot}8\ m$,
$r''' = 0{\cdot}6\ dm$; $r''' = 1{\cdot}2\ m$.

4.) Izračunaj dolgost tretjega roba pravokotnega paralelepipeda, ako so merska števila prvih dveh robov r', r'' in obstranja o.

$a)$ $r' = 28\ dm$, $b)$ $r' = 46\ dm$,
$r'' = 15\ dm$, $r'' = 3{\cdot}8\ m$,
$o = 46{\cdot}44\ m^2$; $o = 50\ m^2$.

5.) Kolik je tretji rob pravokotnega paralelepipeda, ako so merska števila prvih dveh robov r', r'' in površja p?

$a)$ $r' = 12\ cm$, $b)$ $r' = 4{\cdot}6\ dm$,
$r'' = 0{\cdot}9\ dm$, $r'' = 3{\cdot}5\ dm$,
$p = 0{\cdot}1056\ m^2$; $p = 136\ dm^2$.

6.) Izračunaj površje tetraedra, ako je mersko število njegove stranice s.

$a)\ s = 4{\cdot}56\ dm;\quad b)\ s = 724\ cm.$

7.) Merska števila stranice, višine trikotnikove in površja tetraedra so s, v, p; izračunaj iz jedne teh količin obe drugi.

8.) Izračunaj α) obstranje, β) površje šesterostrane pravilne piramide, ako sta merski števili osnovnega roba r in višine obstranske ploskve (obstranske višine) v.

$a)\ r = 46{\cdot}2\ m,\quad b)\ r = 8{\cdot}5\ dm,$
$v = 156\ m;\quad v = 46\ cm.$

9.) Koliko je obstranje pravilne šesterostrane piramide, ako sta merski števili obstranskega roba r' in osnovnega roba r''?

$a)\ r' = 15,\quad b)\ r' = 25{\cdot}8,$
$r'' = 18;\quad r'' = 12{\cdot}6.$

10.) Koliko je površje šesterostrane pravilne piramide, ako sta merski števili obstranskega roba r in razdalje središča v osnovni ploskvi od osnovnega roba r'?

11.) Recimo, da so r, s, p', p'' merska števila polumera, stranice, plašča* in površja pokončnega cilindra; izračunaj iz dveh teh količin obe drugi.

$a)\ r = 4\ cm,\quad b)\ r = 28\ cm,\quad c)\ s = 4{\cdot}28\ m,$
$s = 8{\cdot}5\ cm;\quad p' = 6428\ cm^2;\quad p' = 50{\cdot}46\ m^2;$

$d)\ r = 73{\cdot}6\ cm,\quad e)\ p' = 72{\cdot}8,$
$p'' = 250\ cm^2;\quad p'' = 118{\cdot}5.$

12.) Recimo, da so r', s, p' in p'' merska števila polumera, stranice, plašča** in površja pokončnega stožca; izračunaj iz dveh teh količin obe drugi.

$a)\ r = 1{\cdot}6\ m,\quad b)\ r = 43\ cm,\quad c)\ s = 8\ dm\ 4\ cm,$
$s = 4{\cdot}8\ m;\quad p' = 72{\cdot}8\ cm^2;\quad p' = 52\ dm^2;$

$d)\ r = 2{\cdot}68,\quad e)\ p' = 150{\cdot}86,$
$p'' = 60{\cdot}48;\quad p'' = 225{\cdot}43.$

2. Lega ravnin in prem.

§ 146. Z opazevanih teles posnamemo:

1.) Vsak raven lik ima **svojo** ravnino.

---

* Glej § 178.

** Glej § 175.

To ravnino si misli do brezkončnosti razširjeno, ako ne najdeš nič druzega omenjenega. Ona deli brezkončni prostor na dva brezkončna **poluprostora.**

2.) Vsaka prema (rob) leži vidno v dveh ravninah.

Tudi premo si misli brezkončno podaljšano, ako ne najdeš nič druzega omenjenega. Ona ostane skoz in skoz v svojih ravninah.

V mislih si pa moremo skoz jedno premo brezkončno mnogo ravnin položiti. Vse ravnine skupaj, katere gredó skoz isto premo, imenujemo **ravninje**, premo pa **os** ravninja. Os ravninja razpolavlja vsako ravnino na dve **poluravnini.**

V ravninji moremo vsako ravnino z vrtenjem okolo osi v lego vsake druge ravnine spraviti. Ako si tedaj mislimo tri točke, dve v osi in jedno zunaj nje, ležita prvi dve ves čas vrtenja v ravnini, tretja pa samo v jedni njeni legi. Torej velja:

Tri točke, katere ne ležé vse v jedni premi, določujejo ravnino popolnoma.

Ravnino tudi določujeta: *a)* prema in točka zunaj nje, *b)* dve premi, kateri se sečeta, *c)* dve vzporedni premi.

Dve ravnini se moreta sekati le v premi.

Kajti, ako bi se sekali v sloki črti, imeli bi vsaj tri točke skupne, katere ne ležé v isti premi, potem pa bi bile obe jedna in ista ravnina, kar je proti pogoju.

Pokaži ravnine na prizmah, piramidah, v sobi in na vsaki tri točke, katere vsako teh ravnin popolnoma določujejo. — Pokaži premo, v kateri se dve ravnini teh teles sečeta.

3.) Ravnini dveh ravnih likov se ali sečeta, ali sta vzporedni, t. j. ne sečeta se nikjer.

Poluravnini, kateri se sečeta, tvorita **ploskven kot** ali **klin.** Skupno premo imenujemo **rob** in poluravnini **kračji** ali **obstranski ploskvi** (krakini ali obstranini) klina.

Brezkončni prostor med dvema vzporednima ravninama (vzporedninama) imenujemo **plast.**

O vzporedninah moremo (takisto kakor o vzporednicah) reči: Presečnica dveh vzporednin leži v brezkončnosti.

Ali je plast na vse strani neomejena?

4.) Premi (roba) ležita ali v istej ravnini ter sta **vzporedni** ali se **sečeta**, ali pa si jih v jedni ravnini še misliti ne moreš, ter gresta **jedna mimo druge.**

Skoz jedno točko si moreš v prostoru brezkončno mnogo trakov potegnenih misliti; vsi skupaj tvorijo **trakovje v prostoru.**

Mer preme v prostoru določujeta dve točki popolnoma.

5.) Prema leži z ozirom na ravnino ali v nji ali zunaj nje. Prema, katera ima dve točki z ravnino skupni, leži popolnoma v tej. Prema pa, katera ne leži v ravnini, ima s to samo jedno točko skupno ali pa nobedne, ona je **naklonjena** proti ravnini ali pa je **vzporedna** z njo. — Prema, vzporedna z ravnino, ne more te nikjer zadeti.

Presečišče preme z ravnino imenujemo **podnožišče** preme v ravnini. Naklonjena prema stoji na ravnini ali **pravokotno** ali **poševno,** ako stoji na **vsaki** skoz njeno podnožišče v ravnini potegneni premi pravokotno ali pa ne.

Katero mer (lego) ima prema (ravnina) v prostoru, ako stoji pravokotno na *a)* vertikalni, *b)* horicontalni, *c)* poševni ravnini (premi)?

6.) Vsaka točka (ogel) leži najmanj v treh ravninah, ali v presečišči presečnic teh ravnin.

Tri ali več ravnin, katere se sečejo zaporedoma tako, da gredó vse presečnice skoz jedno in isto točko, stvarjajo tvor v prostoru, katerega imenujemo **telesen ogel** ali kratko **ogel.**

Ogel je na jedno stran neomejen del brezkončnega prostora.

Skupno točko vseh ravnin imenujemo **vrh**, presečnice vsakih dveh ravnin **robe**, kote dveh sosednih robov **robovne kote**, ravnine teh kotov **obstranske ploskve** in kote sosednih dveh obstranskih ploskev **ploskvene kote** ogla.

Klin in kot.

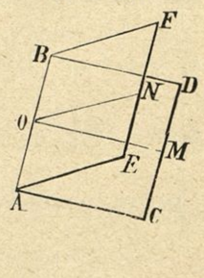
§ 147. V sliki 147. (prim. sliko 148.) vidiš klin $E(BA)C$, ali klin pri AB, ali klin FC, kakoršnega si lahko posnameš s kocke in z druzih ravnoploskih teles.

Ako načrtamo kjerkoli na rob klina dve v obstranskih ploskvah ležeči pravokotnici, je njijin kot povsod iste kolikosti.

Pogoj. $BD \perp AB, BF \perp AB; AC \perp AB, AE \perp AB.$

Dokaz. Stvorimo $AO = OB$ in $MO \perp AB$, $NO \perp AB$. Ako potem premikamo tvor $MONFBD$ tako navzdolj, da ostane lik $OMDB$ in $ONFB$ ves čas oziroma v ravnini BC in BE, pride

Slika 147.



jedenkrat B na O in O na A, ker je $BO = AO$, in BD na OM, OM na AC, BF na ON, in ON na AE, t. j. tvor $OMDBFN$ krije tvor $ACMONE$ popolnoma, torej je $\sphericalangle DBF = \sphericalangle MON = \sphericalangle CAE$.

Kot MON jemljemo za **mero** klina in ga imenujemo **naklonski** kot obeh obstranskih ploskev.

Kakor postaje z vrtenjem premičnega kraka NO $\sphericalangle MON$ oster, prav, top, iztegnen, izbočen in poln, velja to tudi za klin.

Ako je naklonski kot dveh ravnin prav ali poševen, stojita ravnini jedna na drugi **pravokotno** ali **poševno**.

Iz gornjega dokaza sledi naravnost:

Dva kota v prostoru sta jednaka, ako sta oba para krakov v istem smislu vzporedna.

Dokaži sledeče dopolnilo k temu izreku z ozirom na §§ 19., 22. (glej sliko 147.).

Kota v prostoru sta *a)* jednaka, ako sta oba para krakov v nasprotnem, *b)* suplementarna, ako sta dva kraka v istem, druga dva pa v nasprotnem smislu vzporedna.

Imenuj na telesih prave, ostre, tope kline z *a)* vertikalnim, *b)* horicontalnim, *c)* poševnim robom. — Na katerih telesih nahajaš prav ostre kline.

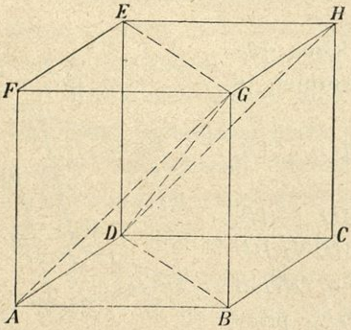
Kakšen ploskven kot stvarja veternica, ako se obrne *a)* od severja do juga, *b)* od severja do vzhoda, *c)* od severja čez zahod in jug do vzhoda, *d)* od severja do jugovzhoda?

Primerjaj kline s koti in povej, katere kline bi potem imenovali *a)* šokline, *b)* sovršne kline? In kaj bi imenovali soklinje? — Na koliko delov razdeli soklinje brezkončni prostor?

Vzporedne ravnine.

§ 148. 1.) **Vsaka ravnina seče dve vzporedni ravnini v dveh vzporednicah.**

Slika 148.



Kajti, ako bi presečnici *(DB* in *EG)* ne bili vzporedni, sekali bi se, kar je pa ne mogoče, ker ostaneta ves čas v vzporednih ravninah *(AC* in *FH)*.

Pokaži na raznih telesih dve ravnini, kateri seče tretja, in presečnici.

Koliko klinov dobiš, ako sečeš dve vzporedni ravnini s tretjo? — Katere kline bi potem imenovali protikline, izmenične kline in prikline?

Izvod. Vzporednice med dvema vzporednima ravninama so jednake.

2.) **Skoz jedno točko *(E)* zunaj ravnine *(GC)* moremo položiti le jedno s prvo vzporedno ravnino *(AE)*.** (Prim. sliko 148.)

Kajti, ako bi bila tudi druga ravnina (n. pr. *EB*) vzporedna z *GC*, sekala bi ravnina presečnina (n. pr. *FH*) vse tri ravnine v treh vzporednih premah *(EF, G* in *GH)*, izmed katerih bi šle dve skoz isto točko *(E)*, kar je pa nemogoče.

3.) **Ako sta dve ravnini vzporedni s tretjo, sta tudi med seboj vzporedni.**

Kajti drugače bi se sekali in imeli bi dve ravnini, kateri bi šle skoz isto točko in bi bili s tretjo vzporedni.

Ravnina in vzporedna prema.

§ 149. 1.) **Ako je prema z ravnino vzporedna, je tudi vzporedna s presečnico te ravnine in ravnine, katero položimo skoz premo.**

Kajti, ako bi prema (*EG* slika 148.) ne bila vzporedna s presečnico *(DB)* prve ravnine *(AC)* z drugo ravnino *(EB)*, sekali bi se premi *(EG* in *DB)*, ter tudi prema *EG* in ravnina *AC*, kar pa je po pogoju nemogoče.

2.) **Prema je vzporedna z ravnino, ako je vzporedna s premo, katera leži v tej ravnini.**

Dokaz kakor za 1.

3.) **Skoz točko zunaj ravnine moremo potegniti brezkončno mnogo vzporednih prem, katere ležé vse v jedni ravnini, vzporedni s prvo.**

Dokaz sledi iz § 148., 1., in iz 2. tega paragrafa.

Katero mer (lego) v prostoru more ali mora imeti prema (ravnina), ako stoji poševno na *a)* vertikalni, *b)* horicontalni, *c)* poševni ravnini (premi)?

Ravnina in pravokotna prema.

§ 150. V ravnini (*FB* slika 148.) moreš na premo *(AB)* v točki *(A)* samo jedno pravokotnico *(AF)* postaviti (§ 31., izv. *a*). Ako vrtiš v mislih pravi kot *FAB* okoli nepremičnega kraka *AF*, prehaja *AB* v razne lege in načrta ravnino lika *ABCD*, na kateri je *AF* pravokotna (§ 146., 5.). Iz tega sledi.

1.) **Nobedna pravokotnica na *AF* v točki *A* ne leži zunaj ravnine, na kateri stoji *AF* pravokotno.**

2.) **Skoz točko preme moremo le jedno pravokotno ravnino položiti.**

3.) **V točki ravnine moremo na to le jedno pravokotnico postaviti.**

4.) **S točke zunaj ravnine moremo na to le jedno pravokotnico spustiti.**

Kajti drugače bi imeli trikotnik z dvema pravima kotoma.

5.) **Prema stoji pravokotno na ravnini, ako stoji le na dveh v tej ravnini skoz njeno podnožišče potegnenih premah pravokotno.**

Kajti pravokotnici (*AD* in *AB*) ležita v isti, na premo (*AF*) pravokotni ravnini, katero določujeta popolnoma.

6.) **Pravokotnica je najkrajša izmed vseh daljic, katere potegnemo s točke zunaj ravnine na to; podnožišča jednako dolgih daljic so jednako oddaljena od podnožišča pravokotnice, in podnožišče daljše daljice je tudi od podnožišča pravokotnice bolj oddaljeno.**

§ 151. **Ako stoji prema pravokotno na ravnini, stoji na tej tudi vsaka skoz premo položena ravnina pravokotno.**

ED (slika 148.) stoji na *AC* pravokotno, torej ravnina *FD*, ki je položena skoz premo *ED*, tudi pravokotno, ker je naklonski kot *EDC* prav.

§ 152. 1.) **Ako stoji jedna izmed dveh vzporednic pravokotno na ravnini, stoji na tej tudi druga pravokotno.**

Recimo, da je $AF \parallel ED$ in $AF \perp AC$ (slika 148.). Ako položimo skoz vzporednici ravnino *FD*, stoji *AF* pravokotno na presečnici *AD* ter $ED \perp AD$ (§ 28., 2.). In ako stvorimo v ravnini *AC* $DC \parallel AB$, je $\sphericalangle EDC = \sphericalangle FAB$ (§ 147.), in $ED \perp DC$. Torej je $ED \perp AC$.

2.) **Dve pravokotnici na isto ravnino sta vzporedni.**

Kajti, ako bi pravokotnici ne bili vzporedni, bi mogli skoz podnožišče jedne pravokotnice potegniti premo, ki bi bila vzporedna z drugo; potem bi pa stali v tem podnožišči dve pravokotnici (1.) na istej ravnini, kar je nemogoče.

Izvoda. *a)* Vse pravokotnice od raznih točk preme na ravnino ležé v jedni sami ravnini, torej vsa njih podnožišča v jedni sami premi.

b) Pravokotnice med dvema vzporednima ravninama so jednake.

Pravokotnico med vzporednima ravninama imenujemo **razdaljo** teh ravnin.

3.) **Dve premi, vzporedni s tretjo, sta tudi med seboj vzporedni.**

Kajti, obe te dve premi (*AF* in *ED,* slika 148.) stojita pravokotno na ravnini *(AC),* na kateri stoji tudi tretja *(BG)* pravokotno.

§ 153. 1.) **Dve ravnini sta vzporedni, ako stoji prema na obeh pravokotno.**

ED (slika 148.) stoji na ravninah *AC* in *FH* pravokotno. Ko bi te dve ravnini ne bili vzporedni, sekali bi se ne samo oni, ampak tudi presečnici teh ravnin *(EG* in *DB)* z ravnino *EB;* ali preme *ED, EG* in *DB* stvarjali bi trikotnik z dvema pravima kotoma, kar je pa nemogoče.

2.) **Prema, katera stoji na jedni dveh vzporednih ravnin pravokotno, je tudi pravokotna na drugi.**

Ako položimo skoz premo dve ravnini, sta presečnici na jedni vzporedni ravnini paroma vzporedni s presečnicama na drugi. Ker pa stoji prema na prvih dveh presečnicah pravokotno, stoji tudi takisto na drugih dveh, ali prema je pravokotna na drugi ravnini (§ 150., 5.).

Vaje o osnih presekih.

§ 154. Premo, potegneno skoz središči osnovnih krogov cilindra, ali skoz vrh stožca in središče njegovega osnovnega kroga, imenujemo **os** teh teles. Pri pokončnih teh telesih stoji os na osnovni ploskvi pravokotno. (Prim. § 173., § 176.)

1.) Kakšne like dobiš, ako sečeš *a)* pokočen cilinder, *b)* pokončen stožec skoz os?

Take preseke imenujemo **osne.**

2.) Merska števila cilindrovega polumera, stranice in osnega preseka so *r, s, p;* izračunaj iz dveh teh števil tretje.

a) $r = 27\ cm,$ *b)* $r = 2{\cdot}2\ m,$ *c)* $s = 3{\cdot}56\ dm,$
$s = 45\ cm;$ $p = 6{\cdot}16\ m^2;$ $p = 8{\cdot}43\ dm^2.$

3.) Kolik je diagonalen presek pokončnega cilindra, ako sta merski števili polumera in presekove diagonale *r* in *d?*

4.) Merska števila polumera, osi in osnega preseka pokončnega stožca so *r, o* in *p;* izračunaj iz dveh teh števil tretje.

a) $r = 1{\cdot}24\ m,$ *b)* $r = 4{\cdot}8\ dm,$ *c)* $o = 32{\cdot}6\ cm,$
$o = 5{\cdot}16\ m;$ $p = 28{\cdot}56\ dm^2;$ $p = 68{\cdot}15\ cm^2.$

5.) Kolika je os pokončnega stožca, ako sta merski števili plašča in premera *p* in *d?*

6.) Kolik je plašč pokončnega cilindra, ako je mersko število osnovne ploskve *p* in stranice *s?*

7.) Os pokončnega stožca ima mersko število o in osnovna ploskev mersko število p; kolik je plašč?

8.) Pokončen stožec in pokončen cilinder imata skupno osnovno ploskev in skupno os (stožec je cilindru včrtan), kako sta si merski števili plaščev, ako je os jednaka premeru?

Vaje o diagonalnih presekih.

§ 155. 1.) Kakšne like dobiš, ako sečeš *a)* kocko ali pravokotni paralelepiped skoz vzporedni diagonali osnovnih ploskev, *b)* pravilno šesterostrano piramido skoz vrh in diagonalo osnovne ploskve?

Take preseke imenujemo **diagonalne.**

2.) Merski števili kockine stranice in diagonalnega preseka sta s in p; izračunaj iz jednega števila drugo.

a) $s = 6{\cdot}24\ dm$; *b)* $p = 20\ m^2$;

$s = 842$; $p = 45{\cdot}8$.

3.) Merska števila stranice, diagonale mejne ploskve in diagonale diagonalnega preseka (kockine diagonale) so s, d in D; izračunaj iz jednega teh števil oba druga.

a) $s = 6\ dm\ 5\ cm\ 3\ mm$; *b)* $d = 312\ cm$; *c)* $D = 24{\cdot}56$.

4.) Koliko je površje kocke, ako je mersko število

a) diagonale osnovne ploskve d, *b)* kockine diagonale D?

5.) Kolika je *a)* ploskvena diagonala, *b)* kockina diagonala, ako je mersko število kockinega površja p?

6.) Na pravokotnem paralelogramu so merska števila stičnih robov r', r'' in r''' in ploščine diagonalnega preseka p; izračunaj iz treh teh števil četrto.

a) $r' = 57\ cm$,	*b)* $r' = 2{\cdot}7\ m$,	*c)* $r' = 63{\cdot}2$,
$r'' = 76\ cm$,	$r'' = 3{\cdot}6\ m$,	$r'' = 56{\cdot}8$,
$r''' = 92\ cm$;	$p = 22{\cdot}95\ m^2$;	$p = 24$.

7.) Izračunaj površje p pravokotnega paralelepipeda, ako so merska števila diagonalnega preseka p' in kvadratne osnovne ploskve b.

8.) Kolik je diagonalen presek p, ako so merska števila paralelepipedovih robov r' in r'' in presekove diagonale d?

9.) Kolik je diagonalen presek šesterostrane pravilne piramide, ako sta merski števili osnovnega in obstranskega roba r' in r'', kedar gre diagonala presečnica *a)* skoz središče, *b)* mimo središča.

Simetrija z ozirom na ravnino.

§ 156. Dve točki ležita **simetrično** z ozirom na ravnino, ako ležita na nasprotnih stranéh ravnine, jednako od nje oddaljeni, a v isti pravokotnici na ravnino.

Ako nahajamo na vsaki strani ravnine po jedno črto, kateri imata lastnost, da ima vsaka točka jedne črte simetrično ležečo točko v drugi črti, sta črti **simetrično ležeči.**

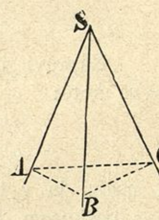
Isto velja za vsakovrstne druge tvore prostora.

Človeško telo n. pr. obstoji iz dveh simetrično ležečih delov, na katere ga deli vertikalna ravnina; ali v zrcalu je predmetova podoba simetrično ležeča s predmetom.

3. Telesni ogli.

§ 157. Ako je (slika 149.) S vrh ogla, SA, SB, SC njegovi robi, zaznačimo ogel s $S(ABC)$.

Slika 149.



Kakor stvarjata dva kraka dva kota (otlega in izbočnega), tako stvarjajo stranske ploskve ogla **otel** in **izbočen** ogel. Jeden ogel imenujemo **vnanji ogel** druzega.

Tu se hočemo pečati le z ogli, v katerih je vsak roboven kot in vsak ploskven kot manjši od 180°, t. j. z otlimi ogli.

Ogel ima toliko robovnih kotov in toliko stranskih ploskev kolikor robov.

Po številu stranskih ploskev razločujemo **tri-**, **četvero-**, **petero-**, ... *n* **terostrane** ogle, po številu robov jih tudi imenujemo **tri-**, **četvero-**, **petero-**, ... *n* **terorobovnike.**

Ako podaljšamo vse robe ogla čez njegov vrh, imenujemo ogel, v katerem so ti podaljški robi, **sovršni ogel** prvega.

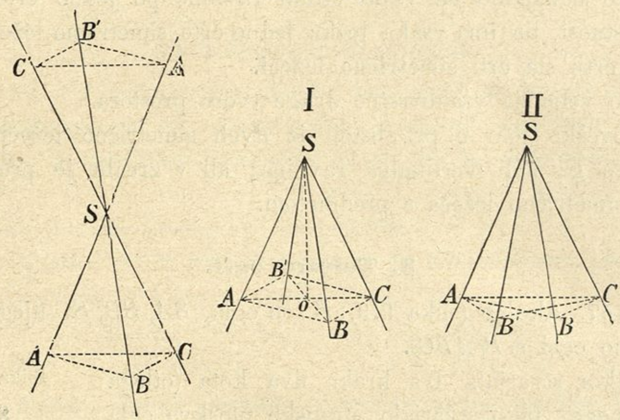
Pokaži to na prizmah in v sobi.

Pokaži na telesih ogle in ravnine, katere ga napravljajo. — Napravi take ogle iz lepenke.

Položi skoz ploskven kot tretjo ravnino, katera seče rob samo v jedni točki. — Na koliko delov razdelé te ravnine brezkončni prostor? Položi skoz skupno točko četrto ravnino, katera le sosedni dve ravnini seče; takisto peto, šesto ravnino i. t. d.

§ 158. Dva ogla imenujemo skladna, ako ja moremo v mislih tako jednega v druzega položiti, da se krijeta popolnoma; to je pa le mogoče, ako so vsi robovni in ploskveni koti paroma jednaki, in sicer v istem redu. V sovršnih oglih so vsi robovni in vsi ploskveni koti paroma jednaki, vender v nasprotnem redu. V obče ja ne moremo tako skupaj položiti, da bi se krila. To lahko spoznaš iz slike 150.

Slika 150.



Napravi iz lepenke ogla *a)* in *b)*, v katerih nahajaš sledeče robovne kote:

$$a)\ ASB = 80^0,\ BSC = 100^0,\ CSA = 60^0,$$
$$b)\ ASB = 60^0,\ BSC = 100^0,\ CSA = 80^0,$$

in spravi ja v tako lego, da je jeden sovršni ogel druzega. — Prepričaj se s poskusom, da jeden nikoli ne more druzega popolnoma kriti, akoravno imata robovne in ploskvene kote paroma jednake.

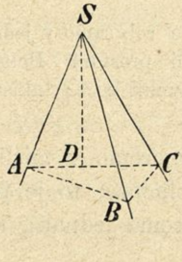
Ogle, kateri imajo vse robovne in ploskvene kote paroma jednake, vender v nasprotnem redu, imenujemo **simetričnojednake.**

Izvod. Vsak ogel je svojemu sovršnemu oglu simetričnojednak.

§ 159. **V vsakem tristranem oglu (trirobovniku) je vsota dveh robovnih kotov večja od tretjega.**

Recimo, da je (slika 151.) $\sphericalangle ASC$ največji robovni kot in stvorimo v njegovi ravnini $\sphericalangle ASD = \sphericalangle ASB$, $SD = SB$, potem je $\triangle ASD \cong \triangle ASB$ ter $AD = AB$. Nadalje je v $\triangle ABC$ $BC > AC - AB$ ali $BC > AC - AD$, torej $BC > DC$ in $\sphericalangle BSC > \sphericalangle CSD$ (§ 57.). Potem je pa tudi $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASD + \sphericalangle CSD$ ali $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC$.

Slika 151.



Ako je pa uže vsota manjših dveh robovnih kotov večja od tretjega, velja to tem bolj za vsoto drugih dveh robovnih kotov.

Napravi iz lepenke tristrane ogle, v katerih nahajaš sledeče robovne kote:

$$
\begin{array}{llll}
a) & ASB = 60^0, & BSC = 60^0, & CSA = 60^0; \\
b) & 45^0, & 120^0, & 90^0; \\
c) & 48^0, & 135^0, & 40^0.
\end{array}
$$

Zakaj ne moreš po pogojih *c)* trirobovnika napraviti?

§ 160. **V vsakem oglu je vsota vseh robovnih kotov manjša od štirih pravih.**

Ako položimo skoz $n$terorobovnik ravnino, katera seče vsak rob, stvorimo ob strani $n$trikotnikov, pri presečiščih ravnine z robi $n$trirobovnikov, in presečnice tvorijo $n$terokotnik.

Koti vseh trikotnikov znašajo $2nR$ in koti $n$terokotnika $2nR - 4R$. Ako tedaj zaznačimo vsoto vseh robovnih kotov pri vrhu ogla z v in vsoto kotov na osnovnicah trikotnikov z v', je

$$v + v' = 2nR,\ v' > 2nr - 4R \text{ (§ 159.)},$$

torej po odštevanji nejednačbe od jednačbe $v < 4R$.

Narisaj na lepenko razgrnen plašč peterorobovnika $S(ABCDE)$

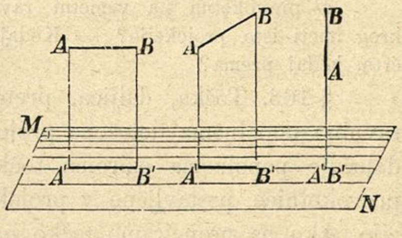
$$
\begin{array}{lllll}
ASB = & 40^0, & 60^0, & 90^0, & 75^0, \\
BSC = & 60^0, & 60^0, & 30^0, & 80^0, \\
CSD = & 100^0, & 60^0, & 150^0, & 120^0, \\
DSE = & 60^0, & 60^0, & 30^0, & 60^0, \\
ESA = & 40^0; & 60^0; & 60^0; & 45^0;
\end{array}
$$

in napravi potem ogel. — V katerem slučaji ne moreš napraviti ogla?

Projekcija na ravnine.

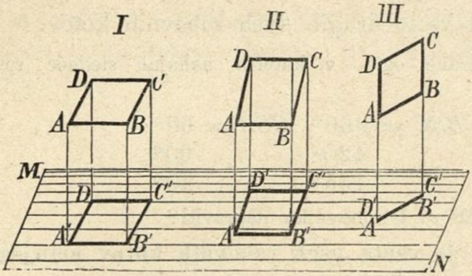
§ 161. Ako potegnemo pravokotnico od točke A (slika 152.) na ravnino MN, imenujemo podnožišče A' **projekcijo** točke A na ravnino M, ravnino pa **projekcijsko** ali **vzmetno ravnino** (vzmetnino).

Slika 152.



Projekcije daljic (premočrtnih likov) na ravnino načrtujemo, ako zvezujemo projekcije njih krajišč (oglišč) z daljicami. Glej sliko 152. in sliko 153., kjer je daljica (kvadrat) v raznih legah proti ravnini MN. Projekcijo drugih tvorov dobivamo takisto, ako zvezujemo zaporedoma projekcije vsake točke s črtami.

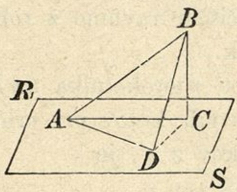
Slika 153.



§ 162. Kot, katerega tvori prema sè svojo projekcijo, imenujemo naklonski kot preme.

Naklonski kot preme je najmanjši izmed vseh kotov, katere tvori ona s premami, potegnenimi skoz njeno podnožišče v ravnini.

Slika 154.



Recimo, da je (slika 154.) $BC \perp RS$, torej AC projekcija preme AB na ravnino RS. Ako potegnemo skoz A v ravnini RS daljico $AD = AC$ in še CD in BD, je $BC > BD$, ker je $\sphericalangle BCD = 90^0$. In v trikotnikih BAC in BAD je $\sphericalangle BAC < BAD$ (§ 57.).

Ako je naklonski kot jednak o^0, t. j. ako je daljica vzporedna z ravnino, je projekcija jednaka daljici; z večjim naklonskim kotom postaje projekcija manjša, in ako je naklonski kot 90^0, t. j. ako stoji daljica pravokotno na ravnini, je njena projekcija le točka.

AA' je pravokotna na ravnino MN; kaj je skupna projekcija vseh toček te pravokotnice na ravnino MN? — Ali določuje projekcija točke tudi njeno lego? — Postavi $AA' \perp MN$ in $BB' \perp MN$ in potegni več daljic, katere imajo svoja krajišča v teh pravokotnicah; določi skupno projekcijo teh daljic na ravnino MN. Ali določi projekcija daljice nje kolikost in lego? — Določi projekcijo četvero-, petero-, šesterokotnika na ravnino MN.

Kakšen tvor je projekcija kroga, ako je krožna ploskev

a) vzporedna z vzmetno ravnino,

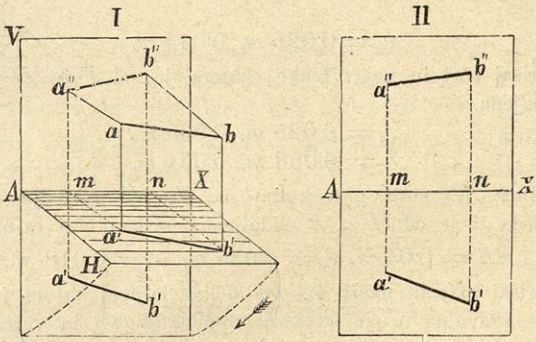
b) poševna proti vzmetni ravnini,

c) pravokotna na vzmetni ravnini? — Ali moreta mnogokotnik in krog imeti isto projekcijo? — Kedaj je projekcija krive črte zopet kriva črta, kedaj prema?

§ 163. Točka, daljica, premočrten lik i. t. d. imajo za dano ravnino popolnoma določene projekcije. Obratno pa projekcija še ne določuje popolnoma oziroma točke, daljice i. t. d. Kajti vse točke pravokotnice, postavljene v projekciji na ravnino, imajo isto projekcijo. Ako pa projiciramo točko na dve nevzporedni ravnini, dobimo dve projekciji, in pravokotnici, postavljeni v projekcijah na teh ravninah, se sečeta v točki ter jo določujeta popolnoma.

Za geometrijsko načrtovanje tvorov jemljemo zategadelj dve vzmetni ravnini, jedno horicontalno *H* (slika 155.) in jedno vertikalno *V*. Projekcijo na horicontalno ravnino imenujemo **horicontalno**

Slika 155.



projekcijo ali **očrt**, in projekcijo na vertikalno ravnino **vertikalno projekcijo** ali **načrt**; presečnico *AX* obeh vzmetnih ravnin pa njijino **os**.

V sliki 155. sta a' in a'' taki projekciji točke *a*, in sicer je prva očrt, druga pa načrt točke *a*, ker je $aa' \perp H$ in $aa'' \perp V$. Ravnina, katero položimo skoz pravokotnici aa' in aa'', seče vzmetni ravnini v premah $a'm$ in $a''m$, in projekciji sta nasprotni oglišči pravokotnika $aa''ma'$.

Tisto velja za vsako drugo točko, tako, da je v sliki 155. $a'b'$ očrt in $a''b''$ načrt daljice *ab*. Očrt in načrt določujeta lego in dolžino daljice popolnoma.

Kakšni projekciji ima daljica v prostoru, ako je *a)* z vertikalno, *b)* s horicontalno, *c)* z obema vzmetnima ravninama vzporedna; ako stoji *d)* na vertikalni, *e)* horicontalni vzmetni ravnini pravokotno; ako leži *f)* v vertikalni, *g)* v horicontalni vzmetni ravnini? — Kolika je daljica, ležeča v vertikalni vzmetni ravnini, ako sta njeni krajišči od horicontalne vzmetne ravnine za 30 *mm* in 48 *mm* oddaljeni, in ako je nje horicontalna projekcija 20 *mm*? — Kolika je projekcija 60 *dm* dolge daljice, ležeče v horicontalni vzmetni ravnini, ako sta nje krajišči 20 *dm* in 45 *dm* od vertikalne vzmetne ravnine oddaljeni?

Ker ležita pri risanji obe projekciji na papirji, t. j. v isti ravnini, si mislimo horicontalno vzmetno ravnino zavrteno okolo osi *AX* za 90° v ravnino vertikalne vzmetne ravnine. Po tem leži očrt pod in načrt nad osjo (slika 155., II); obe projekciji točke pa ležita v jedni in isti pravokotnici na os.

a) Narisaj projekcije daljic prejšnje vaje.

b) Narisaj očrt in načrt točke, katera leži v V in je od H za h oddaljena.

$$h = 0{\cdot}031\ m,\ 0{\cdot}051\ m.$$

c) Narisaj očrt in načrt točke, katera leži v H in je od V za v oddaljena.

$$v = 0{\cdot}025\ m,\ 0{\cdot}044\ m.$$

d) Narisaj očrt in načrt točke, katera je od V in H, oziroma za v in za h oddaljena.

$$v = 0{\cdot}025\ m,\ 0{\cdot}055\ m;$$
$$h = 0{\cdot}058\ m,\ 0{\cdot}031\ m.$$

e) Daljica AB stoji pravokotno na H; nje razdalja od V je v in spodnje krajišče A je od H za h oddaljeno; narisaj očrt in načrt te daljice.

$$AB = 0{\cdot}04\ m,\ v = 0{\cdot}025\ m,\ h = 0{\cdot}018\ m.$$

f) Narisaj očrt in načrt 45 *mm* dolge daljice, katera je vzporedna z vsako vzmetno ravnino in je od horicontalne 25 *mm* in vertikalne 33 *mm* oddaljena.

g) Daljica AB je vzporedna s H in poševna proti V; nje razdalja od H je h, razdalji A in B od V sta oziroma a in b; narisaj očrt in načrt te daljice.

$$AB = 0{\cdot}035\ m,\ h = 0{\cdot}022\ m,\ a = 0{\cdot}016\ m,\ b = 0{\cdot}025\ m.$$

h) Daljica AB je vzporedna z V in poševna proti H; njena razdalja od V je v, razdalji krajišč A in B od H sta oziroma a in b; narisaj nje očrt in načrt.

$$AB = 0{\cdot}035\ m,\ v = 0{\cdot}021\ m,\ a = 0{\cdot}021\ m,\ b = 0{\cdot}032\ m.$$

i) Daljica AB je poševna proti H in proti V; razdalji krajišč A in B od H sta oziroma a in b, od V a' in b' in dolžina nje horicontalne projekcije je $A'B'$; narisaj nje očrt in načrt.

$$A'B' = 0{\cdot}022\ m,\ a = 0{\cdot}008\ m,\ b = 0{\cdot}033\ m,\ a' = 0{\cdot}030\ m,$$
$$b' = 0{\cdot}040\ m.$$

Kakor pa narisujemo očrt in načrt daljic, takisto tudi posamezne stranice premočrtnega lika ter lik sam.

Kakšni projekciji ima krog v prostoru, ako je

a) vzporeden s horicontalno vzmetno ravnino;

b) vzporeden z vertikalno vzmetno ravnino;

c) pravokoten na obeh vzmetnih ravninah;

d) pravokoten na horicontalni vzmetni ravnini in poševen proti vertikalni;

e) pravokoten na vertikalni vzmetni ravnini in poševen proti horicontalni;

f) poševen proti vertikalni in horicontalni vzmetni ravnini?

---

a) Kvadrat sè stranico $s = 0{\cdot}023\ m$ je vzporeden z $V\ (H)$ in od te oddaljen za $a = 0{\cdot}03\ m$, stranica pa vzporedna s $H\ (V)$ je od te za $b = 0{\cdot}01\ m$ oddaljena. Narisaj njegov očrt in načrt.

b) Narisaj očrt in načrt taistega kvadrata, ako ni stranica, ampak diagonala s $H (V)$ vzporedna in od te za a oddaljena.

c) Narisaj očrt in načrt jednakostraničnega trikotnika sè stranico $s = 0·3$ *cm*. Recimo, da je vzporeden s $H (V)$ in od te za $m = 0·025$ *m* oddaljen, in da je stranica vzporedna s $V (H)$ in od te za $n = 0·1$ *cm* oddaljena.

d) Narisaj očrt in načrt pravilnega šesterokotnika sè stranico $s = 0·2$ *cm*. Šesterokotnik je vzporeden s H in od te za $h = 0·03$ *m* oddaljen, njega stranica je vzporedna z V in od te za $v = 0·1$ *cm* oddaljena.

e) Narisaj očrt in načrt romba z diagonalama $d = 3·5$ *cm* in $d_1 = 0·3$ *cm*. Romb je vzporeden z V in od te za $v = 2·1$ *cm* oddaljen, večja diagonala je vzporedna s H in od te za $h = 2·5$ *cm*.

Drugi oddelek.

O prostorih in telesih.

1. O prostorih.

§ 164. Ravnina meji prostor na jedno, klin na dve strani; stranske ploskve telesnega ogla pa prostora samo na jedno stran ne omejujejo; tak prostor imenujemo **piramidast**.

Piramidast prostor postaja, ako premikamo v mislih trak ob stranicah mnogokotnika tako, da gre ves čas skoz nepremično točko zunaj ravnine mnogokotnika. Premikan trak, tako imenovana **tvorna prema**, napisuje **stranske ploskve** piramidastega prostora. Obseg mnogokotnika imenujemo (črto) **vodnico**, nepremično točko **vrh** in vse stranske ploskve skupaj **obstransko površje** piramidastega prostora.

Vodnica more biti tudi pravilen mnogokotnik z brezkončno mnogo in brezkončno majhnimi stranicami, t. j. krog; potem je obstransko površje kriva ploskev. To krivo ploskev imenujemo **plašč** in od nje omejen prostor **stožkovit** (koničen).

Kolikokrat izpremeni tvorna prema med premikanjem svojo mer, ako je vodnica pravilen tri-, četvero-, šestero-, dvanajstero-, štiriindvajsetero-, petdesetero-, tisočerokotnik, krog?

Ako pa premikamo tvorno premo ob obsegu mnogokotnika (kroga) na okolo ves čas vzporedno s prvo lego, omejuje obstransko površje (plašč) **prizmatičen (valjast)** prostor.

Piramidast (koničen) prostor prehaja v prizmatičen (valjast), ako oddaljujemo vrh od ravnine vodnice zmerom bolj; vrh, odmaknen v brezkončno razdaljo od ravnine vodnice, izpremeni prva dva prostora v druga dva, katera nista na dveh stranéh omejena.

Trak, kateri gre skoz vrh koničnega prostora in skoz središče vodnice, je **os** tega prostora. Tudi valjast prostor ima os; ta je trak, kateri gre skoz središče vodnice, vzporedno s tvorno premo.

Na plašči koničnega ali valjastega prostora moremo le v meri tvorne preme narisati preme; te imenujemo **stranice** onih prostorov.

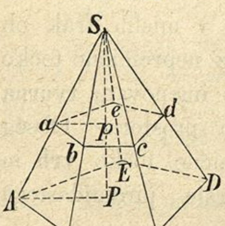
Na piramidastem in prizmatičnem prostoru nahajamo toliko robov, kolikor ima vodnica stranic.

Izvod. **Robi prizmatičnega ali stranice valjastega prostora so vzporedni.**

§ 165. 1.) **Ako sečemo piramidast prostor z dvema vzporednima ravninama tako, da sečeta te ravnini vse njegove robe, tvorijo** *a)* **presečnice dva podobna lika in** *b)* **ploščini teh likov sta si kakor kvadrata njijinih razdalj od vrha.**

a) Recimo, da je (slika 156.) ravnina $ACD \parallel$ z ravnino acd in $SP \perp ACD$ ter $Sp \perp acd$, potem je tudi $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$ i. t. d. (§ 147., 1.) in $\sphericalangle bae = \sphericalangle BAE$, $\sphericalangle cba = \sphericalangle CBA$, $\sphericalangle dcb = \sphericalangle DCB$ i. t. d. (§ 150.). Nadalje je $\triangle abS \sim \triangle ABS$, $\triangle bcS \sim = BCS$, $\triangle cdS \sim \triangle CDS$ i. t. d., torej $ab : AB = Sa : SA = bc : BC = Sc : SC = cd : CD$ i. t. d. in $abcd \ldots \sim ABCD \ldots$

Slika 156.



b) Ker je $ap \parallel AP$ (§ 147., 1.), je tudi $Sp : SP = Sa : SA = ab : AB$ ali $\overline{Sp}^2 : \overline{SP}^2 = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$; in ker sta si po § 94.

$abcd \ldots : ABCD \ldots = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$, sta si tudi

$abcd \ldots : ABCD \ldots = \overline{Sp}^2 : \overline{SP}^2$.

2.) **Ako sečemo plašč koničnega prostora z dvema vzporednima ravninama na okolo, tvorita presečnici dva podobna lika in njijini ploščini sta si kakor kvadrata njijinih razdalj od vrha.**

Sledi iz 1., ker si moremo koničen prostor misliti piramidast.

Izvod. Ako gre jedna vzporednih ravnin skoz ravnino vodnice, sta podobna lika kroga.

Opomnja. Okrog in okrog sklenjena presečnica, katera ni vzporedna z ravnino vodnice, je **elipsa**. Ako pa sečemo koničen prostor z ravnino, katera je sè stranico vzporedna, ne seče ona plašča okrog in okrog in presečnica je **parabola**; takisto seče ravnina plašč koničnega prostora v **hiperboli**, ako ga ne seče okrog in okrog in tudi ni vzporedna z nobedno stranico. Elipso, parabolo in hiperbolo imenujemo zategadelj **stožkosečnice**.

3.) **Ako sečemo prizmatičen prostor z dvema vzporednima ravninama tako, da sečeta ravnini vse njegove robe, tvorijo presečnice dva skladna lika.**

Kajti ona imata vse kote (§ 150.) in vse stranice (§ 61.) paroma jednake.

4.) **Ako sečemo plašč valjastega prostora na okolo z dvema vzporednima ravninama, tvorita presečnici dva skladna lika.**

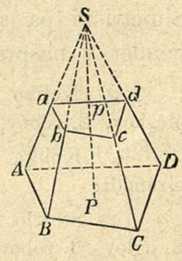
Sledi iz 3., ker si moremo valjast prostor misliti prizmatičen.

Izvod. Ako gre jedna vzporednih ravnin skoz ravnino vodnice, sta skladna lika kroga.

2. O telesih.

§ 166. Ravnina, katera seče piramidast prostor tako, da seče vse njegove robe, zapira tega na vse strani. Ta na vse strani omejen prostor imenujemo **piramido**. Telo *SABCD* (slika 157.) je piramida.

Slika 157.



Piramido omejujejo **trikotniki** sè skupnim vrhom v vrhu piramide in **mnogokotnik**, kateri ima osnovnice onih trikotnikov za stranice.

Trikotnike imenujemo **obstranske ploskve**, mnogokotnik **osnovno ploskev** (osnovnino) in razdaljo vrha od osnovne ploskve **višino** piramide. Stranice osnovne ploskve imenujemo **osnovne robe**, vse druge pa **obstranske robe**. Število obstranskih robov je jednako številu obstranskih ploskev in tudi jednako številu osnovnih robov.

Ravnino, katero položimo skoz vrh in skoz diagonalo osnovne ploskve, imenujemo **diagonalen presek** (diagonalno presečnino) piramide.

Diagonalni preseki piramide so trikotniki.

Presečne ploskve, vzporedne z osnovno ploskvijo, so tej podobne (§ 165., 1.) in one so v perspektivni legi (§ 87.).

§ 167. Po številu obstranskih ploskev razdeljujemo piramide na tri-, četvero-, petero-, . . . $n$terostrane. Tristrano piramido imenujemo tudi **četverec** (tetraeder); v ožjem smislu je pa tetraeder le ona tristrana piramida, katera je omejena le od jednakostraničnih trikotnikov.

Piramido imenujemo **pokončno**, ako so obstranski robi jednaki.

V pokončni piramidi ležé ogli osnovne ploskve v obodu kroga, kateri ima podnožišče višine za središče (primerjaj § 150., 6.). Ako je osnovna ploskev pokončne piramide pravilen mnogokotnik, imenujemo jo **pravilno** piramido. Piramido, katera ni pokončna, imenujemo **poševno**. Obstranske ploskve pokončne piramide so jednakokraki trikotniki; na pravilni piramidi so ti trikotniki tudi skladni. Razdaljo vrha od osnovnice takega trikotnika imenujemo **obstransko višino** pravilne piramide.

Diagonalni preseki pravilne piramide so tudi jednakokraki trikotniki; presečne ploskve, vzporedne z osnovno ploskvijo, so nji podobni pravilni mnogokotniki. Vsako piramido moremo z diagonalnimi preseki razdeliti na isto toliko visoke tristrane piramide.

Dve piramidi sta skladni, t. j. moremo ji v mislih tako jedno v drugo položiti, da se krijejo ploskve, katere ji mejé, ako imata vse robe, robovne in ploskvene kote v istem redu paroma jednake. Simetrični pa sta, ako imata sicer vse sestavine paroma jednake, vender v nasprotnem redu.

a) Koliko je v 3-, 4-, 5-, . . . $n$strani piramidi število 1. mejnih ploskev, 2. robov, 3. oglišč, 4. robovnih kotov?

b) Kolika je vsota vseh robovnih kotov v 3-, 5-, 8-, 20-, 25strani piramidi?

c) Število mejnih ploskev piramide je M; koliko je število 1. robov, 2. oglov, 3. robovnih kotov?

$$M = 4,\ 6,\ 10,\ 13,\ 19,\ m.$$

d) Število robov piramide je R; koliko je število 1. obstranskih ploskev, 2. oglov, 3. robovnih kotov?

e) Število oglov piramide je O; koliko je število 1. mejnih ploskev, 2. klinov, 3. robovnih kotov?

f) Ako pomenijo O, M, R oziroma število oglov, mejnih ploskev in robov, velja Eulerjev zakon $O + R = M + 2$. Izrazi ta zakon z besedami.

§ 168. Dve vzporedni presečni ploskvi piramidastega prostora zapirata z obstranskim površjem ta prostor na vse strani; ta prostor imenujemo **okrajšano piramido.** To telo je namreč piramida, okrajšana za manjšo, tako zvano **dopolnilno piramido.**

Okrajšano piramido omejujejo trapeci in dva vzporedna mnogokotnika; prve imenujemo nje **obstranske ploskve**, druga dva nje **osnovni ploskvi.**

Izvod. Osnovni ploskvi sta podobni (§ 165., 1.).

Takisto kakor pri piramidi razločujemo tudi pri okrajšani piramidi osnovne in obstranske robe, in takisto razdeljujemo okrajšane piramide na tri-, četvero-, petero-, . . . *n*terostrane, na pokončne in poševne. Razdaljo obeh osnovnin imenujemo višino okrajšane piramide.

Diagonalni preseki okrajšane piramide so trapeci, presečne ploskve, vzporedne z osnovnima ploskvama, so tema podobne.

Obstranske ploskve pokončne okrajšane piramide so jednakokraki trapeci; ti so na okrajšani pravilni piramidi tudi skladni.

Višina trapeca je obstranska višina pravilne okrajšane piramide.

O skladnosti in simetriji okrajšane piramide primerjaj § 167.

Dopolnilna piramida je celi piramidi podobna, ker sta obe v istem redu omejeni od podobnih ploskev in ker imata v istem redu jednake robovne in ploskvene kote. Ako nahajamo na dveh piramidah podobne ploskve in jednake kote pa v nasprotnem redu, **sta simetrično podobni.**

a) Recimo, da ima piramida višino $V = 0{\cdot}20\ m$, in obstranski rob $S = 0{\cdot}25\ m$; kolika je višina dopolnilne piramide, ako je nje istoležni rob $s = 0{\cdot}10\ m$?

b) Okrajšana piramida je $V = 0{\cdot}36\ m$ visoka in ima obstranski rob $s = 0{\cdot}45\ m$; kolika je višina cele piramide, ako je istoležni obstranski rob $S = 0{\cdot}60\ m$?

c) Višina dopolnilne piramide je $\frac{2}{5}$ višine cele piramide; kako sta si njijini osnovni ploskvi? (§ 165., 1.).

d) Osnovni ploskvi dveh piramid sta si kakor 9 : 16; kako sta si njijini višini?

e) Višini dveh podobnih piramid sta $V = 0{\cdot}25\ m$, $v = 0{\cdot}12\ m$; kolika je osnovna ploskev druge piramide, ako je ona prve $o = 2{\cdot}16\ cm^2$?

Geometrijski naris piramide.

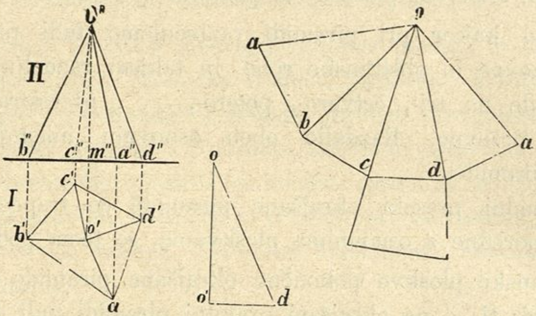
§ 169. Ako razgrnemo vse mejne ploskve (mejnine) telesa združema po jedni ravnini, dobimo njega **mrežo.**

Projekcijo telesa na ravnino dobivamo, ako vzmetamo vse njegove črte in ploskve na to ravnino.

Z očrtom in načrtom telesa so določene črte in ploskve, od katerih zavisi prostornina teles. Očrt in načrt torej opisujeta geometrijsko njegovo prostornino.

V sliki 158. vidimo v I očrt, v II načrt in v III mrežo četverostrane piramide.

Slika 158.



V očrtu je osnovna ploskev, v načrtu pa višina piramide tolika, kolikoršna je v resnici.

V mreži so obstranske ploskve sè skupnim vrhom jedna zraven druge in osnovna ploskev se drži spodej jednega trikotnika.

Projekciji okrajšane piramide dobimo, ako določimo projekciji nje osnovnih ploskev in njijinih oglišč, s katerimi so tudi uže določene projekcije obstranskih robov.

Ker so osnovni robi paroma vzporedni, so tudi njih projekcije.

1.) *a)* Načrtaj mrežo pravilne tri-, četvero-, petero-, šesterostrane piramide tako, da se vse obstranske ploskve držé osnovne ploskve.

b) Stvori iz lepenke take piramide. — Napravi takisto okrajšane piramide iz lepenke.

2.) *a)* Narisaj projekciji pravilne tri-, četvero-, šesterostrane piramide, ako je osnovni rob $s = 0{\cdot}02\ m$ in višina $v = 0{\cdot}053\ m$ in osnovna ploskev vzporedna s H v razdalji $a = 0{\cdot}01\ m$.

b) Pokončna piramida ima pravokotnik sè stranicama $a) = 0{\cdot}048\ m$, $b) = 0{\cdot}021\ m$ za osnovno ploskev in je visoka $0{\cdot}06\ m$; narisaj nje očrt in načrt, ako leži osnovna ploskev v H.

c) Narisaj projekciji piramide, kakor zahteva prejšnja naloga, in določi projekciji presečne ploskve, katera je vzporedna z osnovno ploskvijo in od vrha $0{\cdot}025\ m$ oddaljena.

d) Narisaj projekciji poševne piramide, katera ima katerikoli peterokotnik za osnovno ploskev v H.

e) Narisaj projekciji pokončne okrajšane piramide, katera ima pravilen s H vzporeden peterokotnik za osnovno ploskev, ako je višina $v = 0{\cdot}042\ m$ in rob zgornje osnovne ploskve polovica vsakega spodnje.

Prizma.

§ 170. Dve vzporedni presečni ploskvi prizmatičnega prostora omejujeta s obstranskim površjem vred prostor na vse strani, in ta prostor imenujemo **prizmo.**

Prizma je omejena od obstranskih ploskev in dveh osnovnih ploskev.

Presečnice po dveh obstranskih ploskev imenujemo **obstranske robe** in presečnice osnovne ploskve sè obstranskimi **osnovne robe**; razdaljo osnovnih ploskev pa **višino** prizme.

Izvodi. 1.) Osnovni ploskvi sta skladna mnogokotnika.

Sledi iz § 164., 3.

2.) Vse obstranske ploskve so paralelogrami (§ 164., izv., § 145., 1.)

3.) Vsi obstranski robi so jednaki.

Ravnino, katero položimo skoz dve istoležni diagonali osnovnih ploskev, imenujemo **diagonalen presek** prizme.

Izvodi. 1.) Vsak diagonalen presek prizme je paralelogram (§ 145., 1.).

2.) Vsaka presečna ploskev, vzporedna z osnovno, je s to skladna (§ 165., 1.).

3.) Vsako mnogostrano prizmo moremo z diagonalnimi preseki razdeliti na isto toliko visoke tristrane prizme.

§ 171. Število obstranskih robov prizme je jednako številu osnovnih robov.

Po številu obstranskih ploskev razdeljujemo prizme na tri-, četvero-, petero-, . . . *n* terostrane prizme.

Ako stojé obstranski robi pravokotno na osnovni ploskvi, je prizma **pokončna**, drugače pa **poševna**; pokončna prizma je **pravilna**, ako je osnovna ploskev pravilen mnogokotnik.

Prizmo, na kateri sta osnovni ploskvi paralelograma, imenujemo **paralelepiped**; pokončen paralelepiped pa, na katerem je osnovna ploskev pravokoten paralelogram, **pravokoten** paralelepiped. Pravokoten paralelepiped z jednakimi robi imenujemo **kocko** (kubus) in vsak nje rob **stranico** kocke. Vsak paralelepiped omejeva šest paralelogramov, vsak pravokoten paralelepiped šest pravokotnikov in vsako kocko šest kvadratov.

O skladnosti, simetriji in podobnosti prizem velja isto, kar smo o tem povedali pri piramidah (v § 167. in § 168.).

a) Koliko je v 3-, 4-, 5-, . . . $n$strani prizmi število 1. mejnih ploskev, 2. osnovnih robov (klinov), 3. obstranskih robov (klinov), 4. vseh robov (klinov), 5. oglišč (telesnih oglov), 6. robovnih kotov?

b) Število mejnih ploskev prizme je M; koliko je število 1. osnovnih robov, 2. obstranskih robov, 3. robov, 4. oglov, 5. robovnih kotov?

$$M = 11,\ 17,\ 23,\ 27,\ m.$$

c) Število osnovnih robov na prizmi je R_0; koliko je število 1. vseh robov, 2. obstranskih klinov, 3. oglov, 4. mejnih ploskev, 5. robovnih kotov?

$$R_0 = 8,\ 12,\ 28,\ 42,\ r.$$

d) Število obstranskih robov na prizmi je Rp; koliko je število 1. osnovnih klinov, 2. vseh klinov, 3. oglov, 4. robovnih kotov, 5. mejnih ploskev?

$$Rp = 5,\ 8,\ 13,\ 27,\ r.$$

e) Število vseh robov na prizmi je R; koliko je število 1. osnovnih robov, 2. obstranskih klinov, 3. telesnih oglov, 4. mejnih ploskev?

$$R = 9,\ 15,\ 21,\ 27,\ r.$$

f) Število oglov prizme je O; koliko je število 1. vseh klinov, 2. mejnih ploskev, 3. osnovnih robov?

$$O = 8,\ 24,\ 46,\ 52,\ o.$$

g) Število robovnih kotov prizme je K; koliko je število 1. obstranskih ploskev, 2. osnovnih klinov, 3. telesnih oglov?

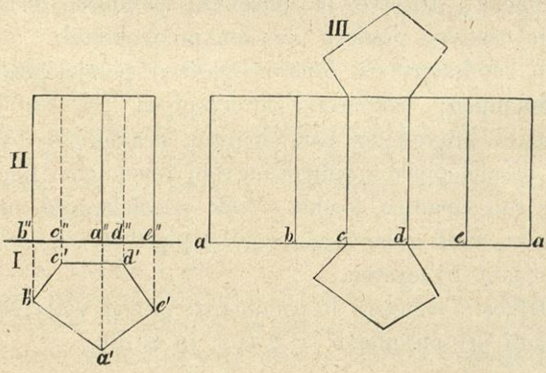
$$K = 18,\ 30,\ 48,\ 72,\ k.$$

h) Ako pomenijo O, M, R oziroma število oglov, mejnih ploskev in robov velja Eulerjev zakon $O + M = R + 2$. Izrazi ta zakon z besedami.

Geometrijski naris prizme.

§ 172. V sliki 159. I in II vidimo očrt in načrt, v III pa mrežo pokončne peterostrane prizme, katera stoji sè svojo osnovno

Slika 159.



ploskvijo na horicontalni ravnini in jedna njena obstranska ploskev je vzporedna z vertikalno ravnino. Očrt obeh osnovnih ploskev je z njima skladen, njijin načrt je pa daljica.

Ako zvežemo načrte pripadajočih oglišč, dobimo načrte obstranskih robov. V očrtu vidimo osnovno ploskev, v načrtu pa višino prizme, kakeršna je v resnici.

Mrežo prizme dobimo, ako načrtamo obstranske ploskve (paralelograme, pravokotnike), tako jedno zraven druge, da se držé skupaj, in osnovni ploskvi nad in pod jednim paralelogramom.

1.) *a)* Narisaj mrežo pokončne tri-, četvero-, petero-, šesterostrane prizme, na kateri sta osnovni ploskvi pravilna mnogokotnika.

b) Stvori iz lepenke take prizme.

2.) *a)* Načrtaj očrt in načrt pokončne prizme s kvadratno osnovno ploskvijo, ako je osnovni rob $s = 0{\cdot}054\ m$ in obstranski rob $v = 0{\cdot}065\ m$, in ako je diagonala osnovne ploskve naklonjena proti V za 60^0.

b) Narisaj očrt in načrt pravokotnega paralelepipeda, ako je jeden osnovni rob $a = 0{\cdot}055\ m$, drugi $b = 0{\cdot}065\ m$ in višina $v = 0{\cdot}073\ m$, in ako je osnovni rob naklonjen proti V za 45^0.

c) Osnovna ploskev pokončne $0{\cdot}070\ m$ visoke prizme je romb. Jedna diagonala osnovne ploskve je $d = 0{\cdot}061\ m$, druga $d' = 0{\cdot}045\ m$, in prva je naklonjena proti V za 30^0. Narisaj očrt in načrt te prizme.

d) Narisaj očrt in načrt pravilne 1. peterostrane, 2. šesterostrane prizme z osnovnim robom $s = 0{\cdot}030\ m$ in z višino $v = 0{\cdot}057\ m$.

Stožec.

§ 173. Ravnina, katera seče koničen prostor na okolo, zapira tega s plaščem vred na vse strani. Ta na vse strani omejen prostor imenujemo **stožec.**

Stožec, kakeršnega hočemo tu v mislih imeti, omejujeta kriva ploskev in krog; prvo imenujemo njega **plašč**, drugo pa njega **osnovno ploskev.** Razdaljo od vrha do osnovne ploskve imenujemo **višino**, daljico od vrha do središča osnovne ploskve **os** stožca. Stožec ima samo jeden rob in ta je meja osnovni ploskvi. Preme, katere moremo potegniti od vrha stožca do točke v obodu osnovne ploskve, imenujemo njega **stranice.**

Ako vrtímo pravokoten trikotnik okolo jedne katete, napisuje njegova ploskev stožec; os tega stožca stoji na osnovni ploskvi pravokotno; ako stoji os stožca pravokotno na osnovni ploskvi, je stožec **pokončen,** drugače pa **poševen.**

V pokončnem stožci sta os in višina ista daljica, in vse stranice so jednake. Pokončen stožec, na katerem je stranica jednaka premeru osnovne ploskve, imenujemo **jednakostran.**

§ 174. 1.) Presečne ploskve, vzporedne z osnovno ploskvijo stožca, so krogi (§ 165., izv. 2.), in vrh je vnanje podobnišče teh krogov. Kajti vsaka prema, katera gre skoz krajišči dveh vzporednih polumerov, gre tudi skoz vrh stožca.

2.) Presečna ploskev skoz os je trikotnik.

Kajti vsaka prema, položena skoz os, seče osnovno ploskev v premeru in plašč v dveh stranicah stožca.

Presečno ploskev skoz os in višino imenujemo **znamenljiv trikotnik**; njega ravnina stoji na osnovni ploskvi pokončnega stožca pravokotno (§ 153.) in razdeljuje stožec na dva simetrična dela.

Dve presečni ploskvi koničnega prostora, vzporedni z ravnino vodnice, zapirata s plaščem vred na vse strani omejen prostor, katerega imenujemo **okrajšan stožec.** To telo je namreč stožec, okrajšan za manjši tako zvani **dopolnilni stožec.** Okrajšan stožec omejujeta dva vzporedna nejednaka kroga, njega **osnovni ploskvi**, in kriva ploskev, njega **plašč.**

Razdaljo osnovnih ploskev imenujemo **višino** okrajšanega stožca.

Okrajšan stožec je pokončen ali poševen, kakor stožec sam.

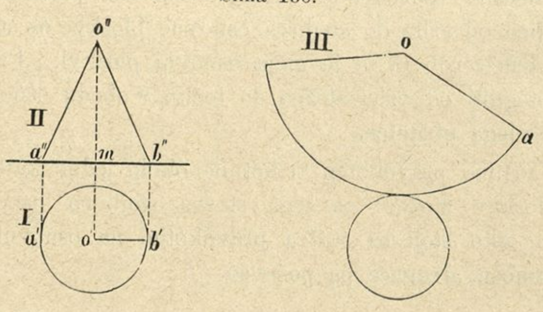
Diagonalni preseki okrajšanega stožca so trapeci; presečne ploskve, vzporedne z osnovnima ploskvama, so krogi.

O skladnosti in simetriji stožcev primerjaj § 167., o podobnosti § 168.

Geometrijski naris stožca.

§ 175. V sliki 160. I vidimo očrt, v II načrt pokončnega stožca; z očrtom je narisana osnovna ploskev (polumer), z načrtom višina in stranica stožca, kakeršni sta v resnici.

Slika 160.



Plašč pokončnega stožca, po ravnini razgrnen, je izsek kroga (slika III), v katerem je polumer *oa* stranica stožca in lok jednak obodu, t. j. $3\frac{1}{7}$krat tolik kakor premer osnovne ploskve. Ako narišemo še krog, ki je jednak osnovni ploskvi in z lokom v dotiki, napravili smo mrežo stožca (slika III).

1.) Narisaj mrežo *a)* pokončnega stožca, *b)* pokončnega okrajšanega stožca in napravi ji iz lepenke.

2.) *a)* Narisaj projekciji pokončnega stožca, na katerem je polumer osnovne ploskve $r = 0{\cdot}02\ m$ in višina $v = 0{\cdot}058\ m$, ako je: 1. Os stožca pravokotna na *H;* 2. os pravokotna na *V;* 3. os vzporedna s *V* in proti *H* naklonjena za 30^0; 4. os vzporedna s *H* in proti *V* naklonjena za 45^0. *b)* Načrtaj projekciji pokončnega stožca, na katerem je polumer osnovne ploskve $r = 0{\cdot}028\ m$ in višina $v = 0{\cdot}06\ m$, ako leži osnovna ploskev v *H;* potem narisaj projekciji 1. dveh presečnih ploskev, vzporednih z osnovno ploskvijo, 2. presečne ploskve, katera gre skoz sredo osi in stoji pravokotno na *V* in je proti *H* za 30^0 naklonjena, 3. presečne ploskve, katera gre vzporedno sè stranico skoz sredo osi in stoji pravokotno na *V*.

Cilinder.

§ 176. Dve presečni ploskvi valjastega prostora, vzporedni z ravnino vodnice, zapirata s plaščem vred na vse strani omejen prostor, katerega imenujemo **valj** (cilinder).

Cilinder omejujejo kriva ploskev in dva kroga; prvo imenujemo njega **plašč**, drugi dve pa njega **osnovni ploskvi.** Meji osnovnih ploskev sta jedina roba cilindra. Razdaljo osnovnih ploskev imenujemo **višino** in daljico med središčema osnovnih ploskev **os** cilindra. Preme, katere moremo potegniti na plašči od točke v obodu jedne osnovne ploskve do točke v obodu druge osnovne ploskve, imenujemo **stranice**; te so vzporedne in jednake.

Ako stoji os cilindra pravokotno na osnovnih ploskvah, je cilinder **pokončen**, drugače pa **poševen.** Pokončen cilinder, na katerem je stranica jednaka premeru osnovne ploskve, imenujemo **jednakostran.**

Pravokotnik, katerega vrtiš okolo jedne njegove nepremične stranice, napisuje tudi pokončen cilinder.

§ 177. 1.) Presečne ploskve, vzporedne z osnovnima ploskvama cilindra, so krogi, skladni z osnovnima ploskvama (§ 165., izv. 4.).

2.) Presečna ploskev, položena skoz os cilindra ali vzporedno z njo, je paralelogram.

Kajti vsaka ravnina, katera gre skoz os ali vzporedno z njo, seče plašč v dveh vzporednih in jednakih stranicah.

Presečna ploskev, položena skoz os pokončnega cilindra, je pravokotnik in skoz os jednakostranega cilindra kvadrat.

Znamenljiv paralelogram, t. j. presečna ploskev skoz os in višino pokončnega cilindra, razdeljuje tega na dva simetrična dela.

Ako sečemo cilinder z ravnino, katera ni vzporedna ne z osjo in ne z osnovnima ploskvama, je presečna ploskev elipsa.

a) Cilinder leži s plaščem na horicontalni ravnini; kakšno lego ima njega os proti isti ravnini in kakšno ploskev napiše ona, ako se cilinder potaka? — Kakšen lik napiše črta, v kateri se cilinder dotika ravnine?

b) Na koliko strani moreš 1. kocko, 2. pravilno *n*terostrano prizmo, 3. cilinder jednako lahko prevreči, ako stoji vsako teh teles na osnovni ploskvi?

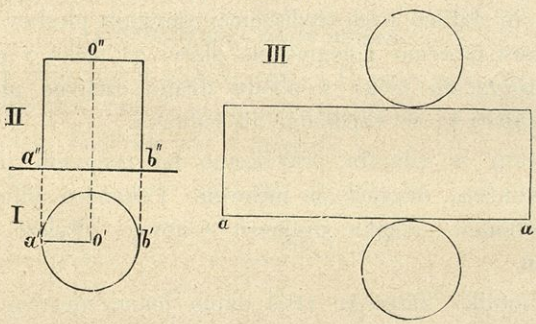
c) Koliko presečnih ploskev razdeljuje 1. pokončen, 2. poševen cilinder na dva simetrična dela?

O skladnosti in simetriji cilindrov primerjaj § 167.

Geometrijski naris cilindra.

§ 178. Plašč pokončnega cilindra, razgrnen po ravnini, je pravokotnik, v katerem je osnovnica jednaka obodu, t. j. $3\frac{1}{7}$krat tolika kakor premer osnovne ploskve, in višina jednaka višini cilindra. V mreži pokončnega cilindra (slika 161., III) vidiš zraven razgrnenega plašča še dva kroga (osnovni ploskvi), katera se dotikata osnovnice in tej nasprotne stranice pravokotnika.

Slika 161.



Z očrtom (slika I) je narisana osnovna ploskev (polumer), z načrtom (slika II) višina pokončnega cilindra, kakeršni sta v resnici.

Narisaj mrežo pokončnega cilindra in napravi ga iz lepenke.

a) Pokončen cilinder, na katerem je premer osnovne ploskve $2r = 0{\cdot}03\ m$ in višina $v = 0{\cdot}085\ m$, stoji na horicontalni vzmetni ravnini H;

narisaj očrt in načrt cilindra. Kaj je očrt in načrt 1. presečnih ploskev, vzporednih z osnovno ploskvijo, 2. presečne ploskve, katera gre skoz sredo osi in je naklonjena proti *H* za 45^0 (60^0)?

b) Narisaj projekciji jednakostranega cilindra z višino $v = 0{\cdot}032\ m$, ako je njega os vzporedna z *V* a proti *H* za 45^0 naklonjena.

c) Narisaj projekciji kocke sė stranico $a = 0{\cdot}05\ m$ in njej vpisanega jednakostranega cilindra, ako je os cilindra z *V* vzporedna in proti *H* za 45^0 naklonjena.

§ 179. Telesa, katera so samo od ravnin omejena, imenujemo **ravnoploska** ali **poliedre**, vsa druga pa **krivoploska**.

Poliedri so pravilni (v ožjem pomenu), ako so omejeni samo od pravilnih skladnih mnogokotnikov, kateri stvarjajo skladne ogle.

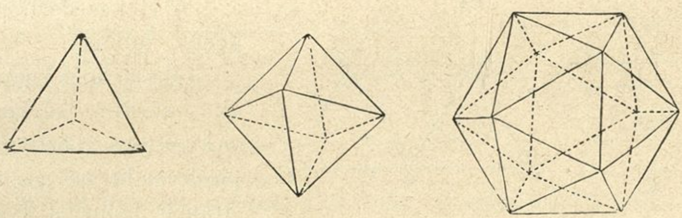
Pravilnih poliedrov je mogočih le pet.

Dokaz. Ker ima vsak ogel pravilnega telesa najmenj tri robovne kote, in ker je vsota teh kotov zmerom manjša od $4R$, moremo v jednem oglu nahajati le:

1.) 3 kote po 60^0 — to telo je (pravilni) **tetraeder** (slika 162., I);
2.) 4 kote po 60^0 — to telo je (pravilni) **oktaeder** (slika 162., II);
3.) 5 kotov po 60^0 — to telo je (pravilni) **ikozaeder** (slika 162., III);

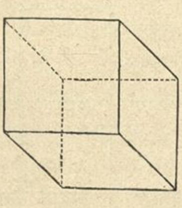
Slika 162.

I II III

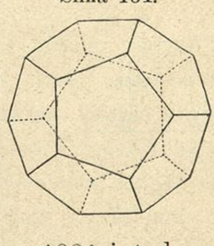


4.) 3 kote po 90^0 — to telo je (pravilni) **heksaeder** (slika 163.);
5.) 3 kote po 108^0 — to telo je (pravilni **dodekaeder** (slika 164.).

Slika 163.



Slika 164.



Šest kotov po 60^0, 4 po 90^0, 4 po 108^0 i. t. d. znašajo že $4R$ ali pa še več.

Tetraeder je omejen od 4 jednakostraničnih trikotnikov, ima 6 robov in 4 ogle.

Oktaeder je omejen od 8 jednakostraničnih trikotnikov, ima 12 robov in 6 oglov.

Ikozaeder je omejen od 20 jednakostraničnih trikotnikov, ima 30 robov in 12 oglov.

Heksaeder je omejen od 6 kvadratov, ima 12 robov in 8 oglov.

Dodekaeder je omejen od 12 pravilnih peterokotnikov, ima 30 robov in 20 oglov.

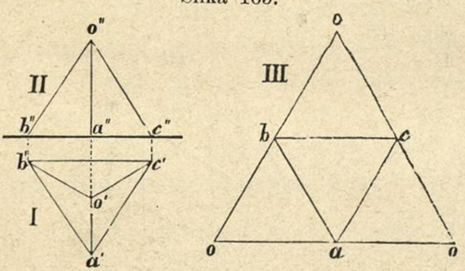
V vsakem pravilnem telesu je točka, katera je *a)* od vsake mejne ploskve, *b)* od vsakega ogla in *c)* od vsakega roba jednako oddaljena. To točko imenujemo **središče** telesa.

Geometrijski naris pravilnih teles.

§ 180. *a)* Tetraeder (četverec).

Mrežo tetraedra narediš, ako zvežeš polovišča stranic jednakostraničnega trikotnika (slika 165., III).

Slika 165.



Sliki 165., I in II, predstavljate očrt in načrt tetraedra.

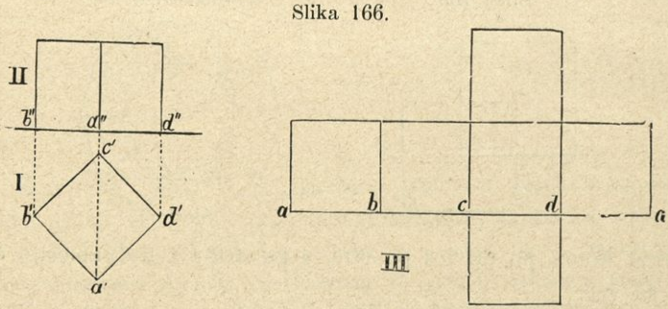
b) Heksaeder (šesterec, kocka, kubus).

Mrežo kocke napraviš, ako narišeš zdržema 4 kvadrate (obstranske ploskve) in na nasprotnih straneh jednega kvadrata še dva kvadrata (slika 166., III).

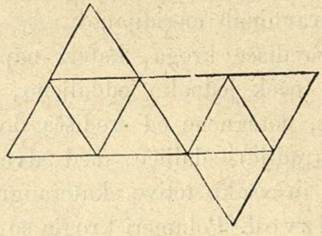
V sliki 166., I in II, vidiš očrt in načrt kocke.

c) Oktaeder (osmerec).

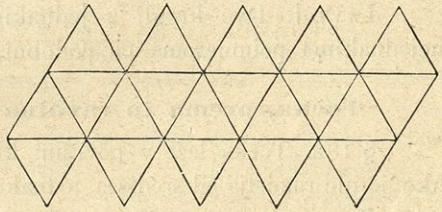
Slika 166.



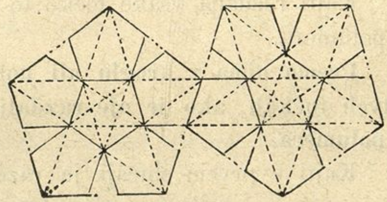
Slika 167.



Slika 168.



Slika 169.



Za to in za sledeča pravilna telesa hočemo narisati le mrežo.

Mreža oktaedra obstoji iz dveh skladnih mrež tetraedra, kateri se držita z jedno stranjo skupaj (slika 167.).

d) Ikozaeder (dvajseterec). Mrežo tega telesa vidiš v sliki 168.

e) Dodekaeder (dvanajsterec). Mrežo vidiš v pridejani sliki 169.

1.) Ali velja tudi za pravilna telesa Eulerjev zakon

$$O + M = R + 2?$$

2.) *a)* Povej ravnine, katere delé pravilna telesa simetrično.

b) Poišči na pravilnih telesih 1. vzporedne robe, 2. vzporedne ploskve.

c) Primerjaj dodekaeder z ikozaedrom, heksaeder z oktaedrom oziraje se na število oglov in ploskev.

3.) *a)* Narisaj na lepenko mrežo 1. tetraedra z robom $a = 1\ dm$; 2. oktaedra z robom $a = 5\ cm$; 3. dodekaedra z robom $2\ cm$; 4. ikozaedra z robom $a = 3\ cm$; 5. heksaedra z robom $a = 1\ dm$.

b) Napravi ta telesa iz njih mrež.

Krogla.

§ 181. Točke kroga, katerega vrtimo okolo nepremičnega premera, napisujejo **vzporedne kroge**, krog sam pa na vse strani zaprto ploskev, tako imenovano, **površino krogle** ali **obla** (oblino). Prostor, katerega omejuje površina krogle, imenujemo **kroglo** (oblo), nepremičen premer z ozirom na one vzporedne kroge **os**, nje krajišči **tečaja** in vrten krog v vsaki njegovi legi **meridijan**.

Vzporedni krogi so različni, največji je oni, kateri gre skoz središče vrtenega kroga. Ta največji krog imenujemo **ravnik** (ekvator).

Izvod. Ravnine vzporednih krogov stojé pravokotno na osi in na ravninah meridijanov.

Središče kroga, kateri napisuje površino krogle, je od vseh njenih toček jednako oddaljeno, in imenujemo ga **središče** krogle. Daljice, potegnene od središča do površine krogle, imenujemo **polumere** (radije), daljice med dvema poljubnima točkama površine **tetive**, in vsako tetivo, katera gre skoz središče, **premer** krogle.

Izvod. Polumeri krogle so jednaki; in vsak polumer je jednak polovici premera.

Središče določuje lego krogle, polumer pa njeno kolikost.

Izvod. Dve krogli z jednakima polumeroma sta skladni, z nejednakima polumeroma pa podobni.

Točka, prema in ravnina z ozirom na kroglo.

§ 182. Točka leži v površini krogle, ali znotraj ali zunaj nje, ako je nje razdalja od središča jednaka polumeru ali manjša ali večja.

Prema, katera stoji pravokotno na polumeru v njega krajišči, je tangenta krogle.

Kajti razdalja vsake točke te preme razun dotikališča je večja od polumera.

Prema nima z kroglo ali nobedne točke skupne, ali jo seče v dveh točkah, ako je nje razdalja od središča večja ali manjša od polumera.

Kajti v prvem slučaji je razdalja najbližje nje točke od središča večja od polumera; v drugem slučaji je razdalja najbližje njene točke manjša od polumera, ona torej leži znotraj površine, in na premi sta le dve točki, kateri sta od središča za polumer oddaljeni.

Ako si napravimo v mislih tri preme pravokotno na os, jedno zunaj kroga, drugo kakor tangento in tretjo kakor sekanto tega kroga, napisuje pri vrtenji krog kroglo, preme pa vzporedne ravnine. Prva ravnina leži popolnoma zunaj krogle, druga se je dotika le v jedni točki, tretja jo seče v krogu.

Ravnino, katera se krogle dotika le v jedni točki, imenujemo **dotikalno ravnino**; in ono, katera seče kroglo v krogu, **presečno ploskev.**

Ako si mislimo v vsaki točki krogle dotikalno ravnino, ga te obvijajo popolnoma. Površino krogle si torej smemo misliti obstoječo iz brezkončno mnogo, brezkončno majhnih ravnin.

Razdalja dotikališča, torej tudi dotikalne ravnine od središča je jednaka polumeru; vsaka druga točka te ravnine ima večjo razdaljo od središča.

a) Koliko tangent moreš potegniti na površino krogle v jedni njeni točki? — V kakšni ploskvi ležé vse te tangente?

b) Koliko tangent moreš potegniti na površino od točke zunaj nje? — V kakšni ploskvi ležé vse te tangente? — Kako poiščeš daljico med dano točko in dotikališčem take tangente? — V kakšni črti ležé vsa ta dotikališča?

c) Koliko tangent moreš potegniti na površino krogle, ako so vse z danim premerom vzporedne? — Kakšno ploskev stvarjajo te tangente? — V kakšni črti ležé vsa njih dotikališča?

d) Potegni v mislih polutrak iz središča krogle; v kakšnih ploskvah ležé tangente, katere potegneš zaporedoma od vsake njegove točke, začenši pri presečišči, do njegove točke v brezkončni razdalji? — V kakšnih črtah ležé dotikališča tangent od vsake točke, in kako se razločujejo te črte med seboj z ozirom na lego in kolikost?

e) Kolika je razdalja krogline tetive od središča krogle ($r = 0{\cdot}246\ m$), ako je jednaka polumeru krogle?

f) Kolika je tetiva, katera je od središča krogle ($r = 0{\cdot}246\ m$) za $\frac{2}{3}$ polumera oddaljena?

g) Kolik je polumer krogle, ako je tetiva $t = 0{\cdot}133\ m$ od središča za dvojno njeno dolžino oddaljena?

h) Koliko kroglinih površin more iti skoz dve točki v prostoru? — V kakšni ploskvi ležé središča vseh teh krogel? — Koliko krogel more iti skoz tri točke v prostoru? — V kakšni črti ležé središča vseh teh krogel? — Koliko krogel more iti skoz štiri točke, katere ne ležé vse v isti ravnini? — Koliko točk torej določuje kroglo popolnoma?

i) Koliko točk imata krogla in ravnina skupnih, ako leži prva na drugi? Koliko dotikalnih ravnin moreš položiti skoz jedno točko krogline površine?

k) Koliko dotikalnih ravnin moreš položiti na kroglo od točke zunaj nje? — V kakšni črti ležé dotikališča vseh teh dotikalnih ravnin?

l) Kako ležita dve ravnini, kateri se dotikata krogle v krajiščih premera, jedna proti drugi?

m) Recimo, da leži prema zunaj krogle; koliko dotikalnih ravnin moreš skoz njo položiti na kroglo?

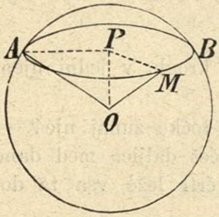
n) Koliko dotikalnih ravnin, vzporednih z dano ravnino, moreš položiti na kroglo?

o) Krogla se potaka po poševni ravnini takó, da napiše dotikališče premo; določi natančneje pot središča.

§ 183. **Vsak presek krogle z ravnino je krog.**

Recimo, da je *AMB* (slika 170.) presek krogle z ravnino, $OP \perp$ na ravnino *AMB*, potegnimo dve poljubni daljici *PA* in *PM*

Slika 170.



k obodu presečne ploskve in še polumera OA in OM, potem je $\triangle AOP \cong MOP$, torej $AP = MP$, t. j. vsaka točka presečnice je od točke P jednako oddaljena ali presečnica je krog.

Krog AMB zovemo **kroglin krog.**

Ako pomeni R kroglin polumer, r polumer presečne ploskve, d razdaljo presečne ploskve od središča krogle, je

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Kedar je $d = o$ ali $d = R$ ali $o < d < R$, je $r = R$ ali $r = o$ ali $r < R$, t. j.

1.) Krog, ki gre skoz središče krogle, je največji; imenujemo zategadelj take kroge **največje krogline kroge.** Njega polumer je jednak polumeru krogle.

2.) Kroglin krog je tem manjši, čim bolj je oddaljen od središča krogle.

3.) Kroglin krog preide v točko, ako je od središča krogle za polumer oddaljen.

4.) Kroglini krogi, jednako oddaljeni od središča krogle, so jednaki.

a) Ali določuje največji kroglin krog to popolnoma z ozirom na lego in na kolikost? — Ali to stori manjši krog?

b) Kako sta si razdalja presečne ploskve in polumer krogle, ako je presečna ploskev tretjina največjega kroga?

c) Recimo, da je obod kroglinega kroga $\frac{2}{3}$ oboda največjega kroga iste krogle; kolika je razdalja prvega od središča krogle, ako je polumer krogle $r = 0{\cdot}255\ m$?

d) Kako sta si razdalji dveh presečnih ploskev od središča krogle s polumerom $r = 0{\cdot}165\ m$, ako je obod prve dvakrat, druge štirikrat manjši od oboda največjega kroga?

e) Kolik je polumer, obod in ploščina presečne ploskve, katera je od središča za $d = \frac{r}{2}$ oddaljena?

f) Kolik je polumer krogle, ako je ploščina presečne ploskve $p = 0{\cdot}1\ m^2$ in nje razdalja od središča $d = 0{\cdot}245\ m$?

g) Kolik je polumer krogle, ako je obod presečne ploskve $o = 0{\cdot}434\ m$ in nje razdalja $d = 0{\cdot}075\ m$?

§ 184. Vsaka ravnina razdeljuje kroglo na dva dela, katera imenujemo **kroglina odseka.** Kroglin odsek je omejen od krožnine in krive ploskve, katero imenujemo **kroglino kapico.** Krog je osnovna ploskev kroglinega odseka, in daljica, katero postavimo pravokotno na osnovno ploskev od središča do kapice, njega **višina.**

Največji kroglin krog razdeljuje kroglo na dva jednaka kroglina odseka, katera **polukrogi** (poluobli) imenujemo.

Del krogle med dvema vzporednima presekoma imenujemo **kroglino plast.** Nje meji sta kroga (osnovni ploskvi) in kriva ploskev zvana **kroglin pas.** Razdalja osnovnih ploskev je višina krogline plasti.

Plašč stožca, kateri ima svoj vrh v središči krogle, seče nje površino v krogu. Prostor med plaščem imenujemo **kroglin** stožec ali **kroglin izsek**; on obstoji iz kroglinega odseka in pokončnega navadnega stožca.

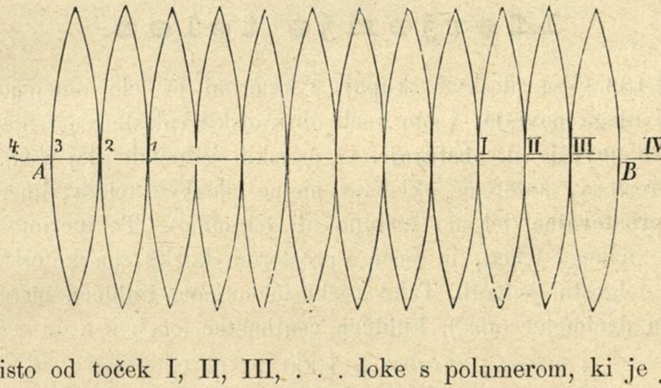
Geometrijski naris krogle.

§ 185. Plašč stožca ali cilindra moremo po ravnini razgrniti, krogline površine vender ne; prvi krivi ploskvi sta **jednojno**, druga pa **dvojno zavita.**

Natančne krogline mreže torej ne moremo napraviti; približno pa dobimo tako-le:

Razdeli daljico AB (slika 171.), katera je $3\frac{1}{7}$krat tolika kakor premer krogle, na 12 jednakih delov in vnesi na nje podaljška od A in B dalje še po 9 takih delov. Ako napišeš od toček 1, 2, 3, . . .

Slika 171.

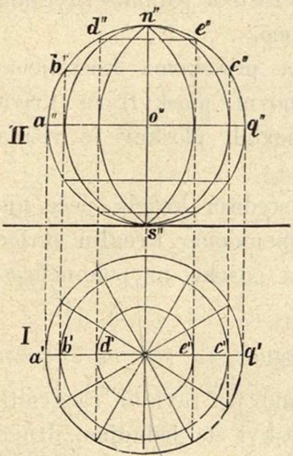


in takisto od toček I, II, III, . . . loke s polumerom, ki je jednak 10 takim delom, dobiš 12 jednakih dvokotnikov, iz katerih precej natančno napraviš kroglino površino, ako jih primerno zvežeš.

V sliki 172. I in II vidiš očrt in načrt krogle.

Očrt in načrt krogle sta kroga, jednaka največjemu kroglinemu krogu. Ako stoji kroglina os pravokotno na horicontalni vzmetni ravnini, je očrt vsakega meridijana premer, načrt jednega krog, druzega premer in ostalih elipse; očrt vzporednih krogov koncentrični krogi, načrt vzporedne tetive.

Slika 172.



a) Narisaj očrt in načrt globusa s polumerom r = 4 *cm*, ako stoji njega os pravokotno na *H* in ako je prvi meridijan vzporeden z *V*; in načrtaj še projekciji obeh povratnikov (krogov), tečajnikov in meridijana, kateri leži 60⁰ proti zahodu.

b) Narisaj projekciji krogle s polumerom $r = 0{\cdot}055\ m$ in potem projekciji onega preseka, kateri gre skoz središče, stoji pravokotno na *V* in je proti *H* za 45⁰ naklonjen.

c) Narisaj projekciji krogle s polumerom $r = 3\ cm$ in projekciji onega preseka, kateri je za $\frac{r}{2}$ od središča oddaljen, stoji na *V* pravokotno in je proti *H* za 30⁰ naklonjen.

Tretji oddelek.

Merjenje teles.

§ 186. Vse ploskve skupaj, s katerimi je telo omejeno, imenujemo njega **površje**, vsoto vseh obstranskih ploskev pa njega **obstransko površje** ali **obstranje**. O merskih jednotah glej § 68. Kolikost prostora, katerega oklepajo mejne ploskve telesa, imenujemo njega **prostornino** (telesno vsebino ali telesnino). To merimo s prostorom znanega telesa, in sicer s prostorom kocke, na kateri je rob jednak dolgostni jednoti. Tako kocko imenujemo **kubičen meter** (m^3), **kubičen decimeter** (dm^3), **kubičen centimeter** (cm^3) i. t. d.

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 \text{ à } 1000\ cm^3 \text{ à } 1000\ mm^3.$$

Posodo, zajemajočo jeden kubičen decimeter, imenujemo **liter**; 100 litrov = 1 hektoliter.

Telesa z jednako prostornino imenujemo **prostorno-jednaka.**

Površje in prostornina prizme in cilindra.

§ 187. Ako so a, b, p oziroma merska števila osnovne ploskve, obstranja in površja, je $p = 2a + b$ za prizme in za cilindre. Na prizmah je osnovna ploskev mnogokotnik, posamezne ploskve obstranja pa so paralelogrami.

Ploščino takih ploskev izračunamo, kakor smo osvetili v prvem delu. Za pokončno prizmo je

$$b = ov,$$

kjer pomeni o obseg osnovne ploskve in v višino prizme.

Kocka je prizma, omejena s 6 skladnimi kvadrati; za njo je

$$p = 6s^2,$$

kjer pomeni s mersko število nje stranice.

Na cilindru sta osnovni ploskvi kroga, plašč pokončnega cilindra, razgrnen po ravnini, pa pravokotnik, v katerem je osnovnica jednaka obodu osnovne ploskve, višina pa stranici cilindra.

Potem je

$$b = 2r\pi \,.\, v \text{ in } p = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi\,(r + v).$$

Ker je stranica s jednakostraničnega cilindra jednaka $2r$ je

$$b = 4r^2\pi \text{ in } p = 6r^2\pi.$$

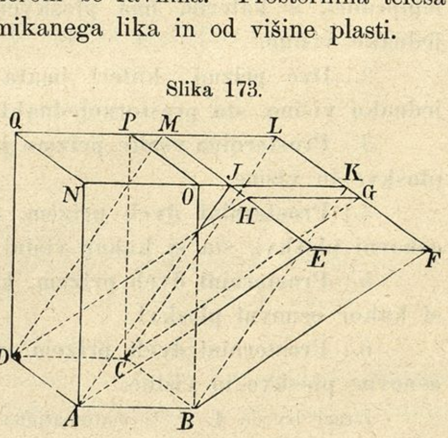
Primerjaj *a)* obstranje, *b)* površje jednakostraničnega cilindra z njega osnovno ploskvijo.

§ 188. Raven lik, katerega premikamo v mislih ves čas vzporedno s prvo lego, opisuje telo, katero je del plasti med ravninama, položenima skoz prvo in zadnjo lego; ako ga pa premikamo v njega lastni ravnini, je njega pot zmerom še ravnina. Prostornina telesa zavisi torej le od kolikosti premikanega lika in od višine plasti.

Prizme (cilindri) so torej prostornojednake(i), ako imajo jednake osnovne ploskve in jednake višine.

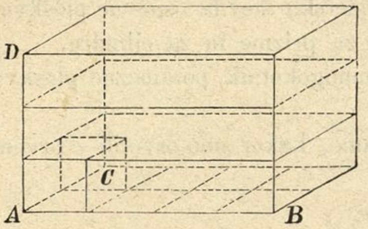
Tako so n. pr. prizme (slika 173.) prostornojednake.

Slika 173.



§ 189. Recimo, da je pravokoten paralelepiped $ABCD$ (slika 174.) a dolgostnih jednot dolg, b dol-

Slika 174.



gostnih jednot širok in c dolgostnih jednot visok. V tem moremo a kubičnih jednot položiti na osnovno ploskev poleg dolžine, na celo osnovno ploskev pa b takih vrst, torej $b$krat a ali ab in v celi paralelepiped c takih plasti, torej $c$krat ab, t. j. abc kubičnih jednot. Ako torej p prostornino pomeni, je

$$p = abc.$$

Prostornina pravokotnega paralelepipeda je jednaka produktu iz (merskih števil) dolžine, širine in višine.

Ker je ab ploščina osnovne ploskve, moremo tudi reči:

Prostornina pravokotnega paralelepipeda je jednaka produktu iz (merskih števil) osnovne ploskve in višine.

Za kocko je $a = b = c = s$, kjer pomeni s mersko število nje stranice, in

$$p = s^3.$$

Prostornina kocke je jednaka tretji potenci nje stranice.

Ako so p_1 in p_2, s_1 in s_2 oziroma merska števila prostornin in stranic dveh kocek, je

$$p_1 : p_2 = s_1{}^3 : s_2{}^3.$$

Prostornini dveh kocek sta si kakor tretji potenci njijinih stranic.

§ 190. Iz §§ 188., 189. sledi:

1.) **Vsaka prizma je prostornojednaka s pravokotnim paralelepipedom, s katerim ima ploskvenojednako osnovno ploskev in jednako višino.**

2.) **Dve prizmi, kateri imata jednako osnovno ploskev in jednako višino, sta prostornojednaki.**

3.) **Prostornina vsake prizme je jednaka produktu iz osnovne ploskve in višine.**

4.) **Prostornini dveh prizem, kateri imata ploskvenojednaki osnovni ploskvi, sta si kakor višini.**

5.) **Prostornini dveh prizem, kateri imata jednaki višini, sta si kakor osnovni ploskvi.**

6.) **Prostornini dveh prizem sploh sta si kakor produkta iz osnovne ploskve in višine.**

Izrazi izvode 4, 5, 6 matematično.

§ 191. Ker si cilinder moremo misliti kakor prizmo z brezkončno mnogo obstranskih ploskev, veljajo izreki prejšnjega paragrafa tudi za njega, torej je

$$p = r^2\pi v.$$

Prostornina cilindra je jednaka produktu iz (merskih števil) osnovne ploskve in višine.

Za jednakostran cilinder je $v = 2r$, torej

$$p = 2r^3\pi.$$

Površje in prostornina piramide, stožca, okrajšane piramide in okrajšanega stožca.

§ 192. Površje *(p)* piramide (stožca) je jednako vsoti iz osnovne ploskve *(a)* in obstranja *(b)*.

$$p = a + b.$$

Osnovna ploskev piramide je mnogokotnik, obstranske ploskve pa so trikotniki.

Na pokončni piramidi je obstranje jednako polovici produkta iz obsega *(o)* **osnovne ploskve in obstranske višine** (v_1)

$$b = \tfrac{1}{2} o v_1,$$

kajti obstranski trikotniki so jednakokraki in skladni ter vsakega višina jednaka obstranski višini piramide.

Plašč pokončnega stožca, razgrnen po ravnini, je krogov izsek, čegar polumer je jednak stranici *(s)* in lok jednak obsegu osnovne ploskve stožca. Potemtakem je

$$b = r\pi s.$$

Plašč pokončnega stožca je jednak produktu iz oboda osnovne ploskve in iz višine.

Površje pokončnega stožca je tedaj

$$p = r^2\pi + r\pi s = r\pi\,(r + s).$$

Za jednakostran stožec je

$$b = 2r^2\pi \text{ in } p = 3r^2\pi.$$

§ 193. Površje okrajšane piramide (okrajšanega stožca) je jednako vsoti obstranja in obeh osnovnih ploskev *(A* in *a)*.

$$p = b + A + a.$$

Obstranske ploskve pokončne okrajšane piramide so skladni jednakokraki trapeci; ploščina **jednega trapeca** je jednaka produktu iz (merskih števil) srednice in višine, **vseh trapecev**, t. j. obstranja jednaka produktu iz vseh srednic, t. j. iz obsega (o) srednjega preseka in iz skupne višine (v_1), katera je tudi obstranska višina okrajšane piramide. Potemtakem je

$$1.) \ldots b = ov_1.$$

Plašč pokončnega okrajšanega stožca, razgrnen po ravnini, je kolobarjev izsek, čegar širina je jednaka stranici (s) okrajšanega stožca in čegar loka sta oboda osnovnih ploskev. Potemtakem je

$$2.) \ldots b = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot s = (R + r)\, s\pi.$$

Dostavek. Za $r = o$ je $b = Rs\pi$, t. j. plašč pokončnega stožca, si moremo misliti kakor plašč okrajšanega stožca, pri katerem je polumer manjše osnovne ploskve jednak ničli.

Za $r = R$ je $b = 2R\pi s$, t. j. plašč pokončnega cilindra, si moremo misliti kakor plašč okrajšanega stožca, pri katerem sta polumera osnovnih ploskev jednaka.

Za celo površje pokončnega okrajšanega stožca pa veljá izraz

$$3.) \ldots p = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)\, s\pi,$$

kar si lahko sam raztolmačiš.

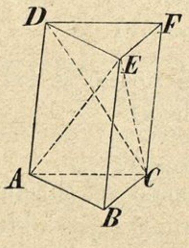
§ 194. Ako premikamo v mislih horicontalno osnovno ploskev piramide vzporedno s prvo lego do vrha, ter jo ves čas tako izpreminjajo, da ostajajo nje oglišča v robih piramide, napiše ona prostornino piramide. Prostornine bi pa ne napisala čisto nič, ko bi jo premikali v nje lastni ravnini.

Prostornino piramide določuje potemtakem kolikost premikane ploskve v vsakem trenotku premikanja in dolžina nje poti v navpični meri, torej višina piramide.

Ako pa imata dve piramidi ploskvenojednaki osnovni ploskvi in jednaki višini, sta tudi vsaki dve presečni ploskvi, vzporedni z osnovno ploskvijo v isti razdalji od vrha, ploskvenojednaki. (Sledi iz § 165., 1.) Iz vsega sledi:

Dve piramidi s ploskvenojednakima osnovnima ploskvama in z jednakima višinama sta prostornojednaki.

Slika 175.



§ 195. **Vsako tristrano prizmo moremo razsekati v tri prostornojednake piramide.**

Take piramide dobimo namreč, ako sečemo prizmo (slika 175.) z ravninama AEC in DEC.

Piramidi $ABCE$ in $DEFC$ sta prostornojednaki, ker imata isto višino in tudi isto osnovno ploskev (kakor prizma). Piramidi $DECA$ in $DEFC$ imata jednaki osnovni ploskvi in jednaki višini, torej sta tudi oni prostornojednaki in po prejšnjem vse tri.

Izvod. **Vsaka tristrana piramida je tretji del tristrane prizme z jednako osnovno ploskvijo in jednako višino.**

§ 196. Iz §§ 194 in 195 sledé ti-le izvodi:

1.) **Prostornina tristrane piramide je jednaka tretjemu delu produkta iz (merskih števil) osnovne ploskve in višine.**

2.) **Vsaka piramida je prostornojednaka s tristrano piramido, katera ima ploskvenojednako osnovno ploskev in jednako višino.**

3.) **Dve piramidi, kateri imata jednako osnovno ploskev in jednako višino, sta prostornojednaki.**

4.) **Prostornina vsake piramide je jednaka tretjemu delu produkta iz osnovne ploskve in višine.**

5.) **Prostornini dveh piramid, kateri imata jednaki višini, sta si kakor višini.**

6.) **Prostornini dveh piramid, kateri imata jednaki višini, sta si kakor osnovni ploskvi.**

7.) **Prostornini dveh piramid sploh sta si kakor produkta iz osnovnih ploskev in višine.**

Izrazi izvode 4, 5, 6, 7 matematično.

§ 197. Ker si moremo stožec misliti kakor piramido, veljajo izvodi 4, 5, 6, 7 prejšnjega paragrafa tudi za njega. Potemtakem je

$$p = \tfrac{1}{3} r^2 \pi v.$$

Prostornina stožca je jednaka tretjemu delu produkta iz osnovne ploskve in višine.

Za pokončen stožec je $v = \sqrt{s^2 - r^2}$, kjer pomeni s mersko število stranice, torej

$$p = \frac{r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}}{3}.$$

Za jednakostran stožec je $s = 2r$, torej

$$p = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}.$$

§ 198. Prostornina okrajšane piramide je jednaka prostornini cele piramide, zmanjšani za prostornino dopolnilne piramide,

$$p = \frac{AV}{3} - \frac{ax}{3},$$

kjer pomenijo A, a, V, x osnovno ploskev oziroma višino cele in dopolnilne piramide.

Ako pomeni v mersko število višine okrajšane piramide, je

$$V = v + x \text{ in } p = \frac{A(v+x)}{3} - \frac{ax}{3} = \frac{Av}{3} + \frac{A-a}{3}\,x.$$

Oziraje se na § 165., 1. je

$$A : a = (v+x)^2 : x^2 \text{ ali } \sqrt{A} : \sqrt{a} = (v+x) : x \text{ ali}$$

$$(\sqrt{A} - \sqrt{a}) : \sqrt{a} = v : x, \text{ iz česar sledi: } x = \frac{v\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}.$$

Potem pa je

$$p = \frac{Av}{3} + \frac{A-a}{3} \cdot \frac{v\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}} = \frac{Av}{3} + \frac{\sqrt{A}+\sqrt{a}}{3} \cdot v\sqrt{a} \text{ ali}$$

$$p = (A + \sqrt{Aa} + a)\,\frac{v}{3}.$$

Prostornina okrajšane piramide je jednaka s tretjim delom višine množeni vsoti obeh osnovnih ploskev in njijine srednje geometrijske proporcijonale.

Za okrajšan stožec, katerega si moremo misliti kakor okrajšano piramido, je potem

$$p = (R^2\pi + Rr\pi + r^2\pi)\,\frac{v}{3}.$$

Prostornina okrajšanega stožca je jednaka s tretjino višine množeni vsoti obeh osnovnih ploskev in njiju srednje geometrijske proporcijonale.

§ 199. Površje pravilnih teles izračunamo, ako množimo mersko število jedne obstranske ploskve z njih številom.

Prostornino pravilnih teles pa dobimo, ako množimo površje s tretjim delom razdalje središča od jedne obstranske ploskve. Kajti središče si moremo misliti kakor vrh piramid, katerim so obstranske ploskve pravilnih teles osnovne ploskve.

Pravilen tetraeder si pri tem izračunanji moremo tudi misliti kakor piramido, in kocko kakor prizmo.

Površje in prostornina krogle.

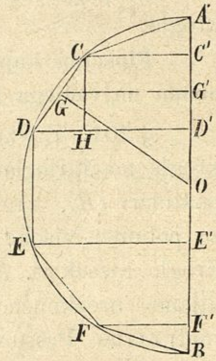
§ 200. Ako napravimo na površino krogle brezkončno mnogo vzporednih krogov, razdelimo njeno površje na brezkončno mnogo pasov in na dve brezkončno majhni kapici. Pase si moremo misliti kakor plašče pokončnih okrajšanih stožcev, takisto kapici (§ 193., dostavek), in površje krogle je jednako vsoti vseh teh plaščev.

Plašč (a) okrajšanega stožca je

$$a = (r + r')\, s\pi \quad (\S\ 193.,\ 2).$$

Ako si mislimo krogu, katerega vrtimo okolo osi AB (slika 176.), vpisan pravilen mnogokotnik z brezkončno mnogo brezkončno malimi stranicami, napiše krog, takisto tudi mnogokotnik kroglo in stranice mnogokotnika plašče onih okrajšanih stožcev.

Slika 176.



Te plašče moremo potem izraziti s polumerom krogle in z onim delom osi, kateri je jednak višini okrajšanega stožca.

Recimo, da je CD brezkončno majhna stranica (s) plašča (mnogokotnika), katero si večjo risati moramo, kakor si jo mislimo, $OG = R$ polumer krogle ali razdalja stranice CD od središča, $CC' = r$ in $DD' = r'$, GG' srednica trapeca CC', DD', t. j. njeno mersko število srednje število onih dveh polumerov, torej $GG' = \frac{r + r'}{2}$, in $C'D'$ višina (v) stožca. Potem je plašč okrajšanega stožca

$$a = (r + r')\, s\pi = 2\overline{GG'} \,.\, s\pi.$$

Ako napravimo $CH \perp DD'$, je $CH = C'D'$ in $\triangle DHC \sim \triangle GOG'$, torej $CD : CH = OG : GG'$ ali $s : v = R : \overline{GG'}$, iz česar sledi

$$s \,.\, \overline{GG'} = vR \text{ in } a = 2R\pi \,.\, v.$$

Plašč okrajšanega stožca je torej v tem slučaji jednak produktu iz oboda največjega kroglinega kroga in iz onega dela osi, kateri je jednak višini okrajšanega stožca.

Površje (p) krogle je jednako vsoti vseh onih plaščev ali produktu iz oboda največjega kroglinega kroga in iz vseh dotičnih delov osi skupaj, t. j. iz osi same, katera je pa kroglin premer. Potem je

$$p = 2R\pi \,.\, 2R = 4R^2\pi.$$

Površje krogle je jednako štirikratni ploščini največjega kroglinega kroga.

Ako pomenijo P, p, R, r oziroma merska števila površij in polumerov dveh krogel, je

$$P : p = R^2 : r^2.$$

Površji dveh krogel sta si kakor kvadrata njijinih polumerov.

Iz prejšnjega sledi kakor za kroglo tudi za kapico in pas krogle:

Ploščina kapice ali kroglinega pasa je jednaka produktu iz oboda največjega kroglinega kroga in iz nje (njega) višine.

§ 201. Z vzporednimi krogi in z meridijani razdelimo površje krogle na štirioglate (pri tečajih trioglate) like, kateri so krivi; in s polumeri (R), katere potegnemo do onih oglov, narišemo piramide za polumer visoke s krivimi osnovnimi ploskvami, v katere moremo kroglo razsekati. Ako si mislimo število vzporednih krogov in meridijanov brezkončno, misliti si smemo one like (osnovne ploskve piramid) ravne. Prostornina jedne piramide je pa jednaka tretjini z višino (polumerom) množene osnovne ploskve in prostornina (P) vseh piramid, t. j. prostornina krogle tretjini s polumerom množenih **vseh osnovnih** ploskev, t. j. tretjini s polumerom množenega **površja** O krogle.

$$P = \tfrac{1}{3} OR.$$

Prostornina krogle je jednaka tretjini s polumerom množenega površja.

Ker je $O = 4R^2\pi$, je tudi

$$P = \tfrac{4}{3} R^3\pi.$$

Dostavki. Ako pomenijo P, p, R, r oziroma merska števila prostornin in polumerov dveh krogel, je

$$P : p = R^3 : r^3.$$

1.) **Prostornini dveh krogel sta si kakor tretji potenci njijinih polumerov.**

2.) **Prostornina kroglinega izseka je jednaka tretjini s polumerom množene njega kapice.**

3.) Kroglin odsek, kateri je manjši ali večji od polukrogle, si moremo misliti kakor diferenco ali vsoto kroglinega izseka in pokončnega stožca, kateri ima z odsekom skupno osnovno ploskev in vrh v središči krogle, in takisto izračunjavamo tudi njega prostornino.

4.) Kroglino plast si mislimo kakor diferenco dveh kroglinih odsekov in takisto izračunjavamo njega prostornino.

Računske naloge.

1.) Merska števila stranice, površja in prostornine kocke so oziroma s, p in t; izračunaj iz jedne teh količin drugi dve.

$a)$ $s = 1\ m\ 4\ dm$, $b)$ $p = 50\ dm^2\ 80{\cdot}86\ cm^2$, $t = 12{\cdot}326391\ m^3$,
$s = 1{\cdot}375\ m$; $p = 50\ dm^2$; $t = 29791\ cm^3$.

2.) Kockasta, zgorej odprta posoda iz ploščevine zajema $8\ dm^3$; koliko ploščevine je bilo za njo potreba?

3.) Kolika je prostornina (stranica a) kocke, ako je nje stranica (prostornina) za m večja ali za n manjša od stranice (prostornine) druge kocke s telesnino t' (sè stranico a')?

$a)$ $t' = 125\ m^3$, $b)$ $a' = 12\ m$,
$m = 3\ cm$, $m = 1016\ m^3$,
$n = 4\ dm$; $n = 728\ m^3$.

4.) Stranici dveh kocek sta a in a'; kolika je stranica a'' tretje kocke, katera je jednaka vsoti (diferenci) prvih dveh kocek?

$a)$ $a = 5\ m$, $b)$ $a = 4\ m$,
$a' = 15\ dm$; $a' = 20\ dm$.

5.) Ako pretopiš tri svinčene kocke sè stranicama $a = 2\ m$, $a' = 25\ dm$, $a'' = 15\ dm$ v jedno kocko; kolika je stranica te kocke?

6.) Recimo, da je prostornina kocke t; kolikrat večja ali manjša je stranica druge kocke, ako je njena prostornina $m$krat večja ali $n$krat manjša?

$m = 27,\ 3\tfrac{3}{8},\ 0{\cdot}729,\ 0{\cdot}000512,\ a;$
$n = 8,\ 64,\ 2\tfrac{10}{27},\ 1728,\ b.$

7.) Stranica kocke je a; kolika je stranica druge kocke, ako je njena prostornina $m$krat večja ali $n$krat manjša?

$a = 4\ dm,\ 3\ cm,\ 6\ dm,\ p;$
$m = 27,\ 125,\ 27,\ r;$
$n = 8,\ 17,\ 642,\ s.$

8.) Kako sta si prostornini t in t' dveh kocek, ako sta si njijini stranici kakor $m : n$?

$m = 2,\ \tfrac{2}{3},\ 0{\cdot}5,\ a;$
$n = 3,\ \tfrac{3}{4},\ 1{\cdot}5,\ b.$

9.) Kako sta si stranici a in a' dveh kocek, ako sta si prostornini kakor $m : n$?

$$m = 27,\ \tfrac{8}{27},\ 3\tfrac{3}{8},\ a;$$
$$n = 8,\ \tfrac{125}{216},\ 2\tfrac{10}{27},\ b.$$

10.) Kako sta si površji p in p' dveh kocek, ako sta si njijini prostornini kakor $m : n$?

$$m = 27,\ 64,\ 0{\cdot}512,\ a;$$
$$n = 8,\ 125,\ 0{\cdot}125,\ b.$$

11.) Kako sta si prostornini t in t' dveh kocek, ako sta si njijini površji kakor $m : n$?

$$m = 4,\ 64,\ 1\tfrac{17}{46},\ a;$$
$$n = 19,\ 625,\ 7\tfrac{1}{9},\ b.$$

12.) Koliko kocek sè stranico s je v kocki sè stranico s'?

$$s = 2\ m,\ 1\tfrac{1}{2}\ m,\ 2{\cdot}5\ m,\ a;$$
$$s' = 4\ m,\ 3\ m,\ 50\ dm,\ b.$$

13.) Kolika je prostornina prizme z osnovno ploskvijo o in višino v?

$$o = 0{\cdot}128\ m^2,\ 110{\cdot}3\ m^2,\ a;$$
$$v = 0{\cdot}5\ m,\ 0{\cdot}75\ m,\ b.$$

14.) Izračunaj iz prostornine t in višine v prizme nje osnovno ploskev.

$$t = 462\ cm^3,\ 4{\cdot}375\ m^3,\ a;$$
$$v = 0{\cdot}04\ m,\ 0{\cdot}125\ m,\ b.$$

15.) Izračunaj iz prostornine t in osnovne ploskve o prizme nje višino.

$$t = 462\ cm^3,\ 4{\cdot}375\ m^3,\ a;$$
$$o = 77\ cm^2,\ 1{\cdot}25\ m^2,\ b.$$

16.) Kako sta si prostornini dveh prizem z osnovnima ploskvama o in o' in višinama v in v'?

$$o = 2{\cdot}33\ m^2,\ 7{\cdot}12\ dm^2,\ 115{\cdot}2\ m^2,\ a,\ a,\ a;$$
$$v = 0{\cdot}67\ m,\ 3{\cdot}5\ dm,\ 10{\cdot}5\ m,\ b,\ b,\ b;$$
$$o' = 4{\cdot}66\ m^2,\ 7{\cdot}12\ dm^2,\ 7{\cdot}2\ m^2,\ c,\ a,\ c;$$
$$v' = 0{\cdot}67\ m,\ 7\ dm,\ 5{\cdot}184\ m,\ b,\ c,\ d.$$

17.) Dana je pokončna prizma; kako izračunaš *a)* obseg osnovne ploskve, ako sta plašč in njega višina, *b)* višino, ako sta plašč in obseg osnovne ploskve znana?

18.) Kako sta si obstranski površji dveh pokončnih prizem, ako sta obsega njiju osnovnih ploskev o in o' in njiju višini v in v'?

$o = 0{\cdot}875\ m,\ 1{\cdot}35\ m,\ 10{\cdot}71\ m,\ a,\ a,\ a;$

$v = 0{\cdot}42\ m,\ 0{\cdot}91\ m,\ 0{\cdot}25\ m,\ b,\ b,\ b;$

$o' = 0{\cdot}125\ m,\ 1{\cdot}35\ m,\ 42{\cdot}50\ m,\ c,\ a,\ c;$

$v' = 0{\cdot}42\ m,\ 1{\cdot}82\ m,\ 0{\cdot}90\ m,\ b,\ c,\ d.$

19.) Kako sta si obstranski površji dveh pokončnih prizem, ako sta *a)* obsega osnovnih ploskev jednaka, *b)* višini jednaki, *c)* obsega in višini različni?

20.) Izračunaj površje in prostornino $0{\cdot}16\ m$ visoke pokončne prizme, na kateri je osnovna ploskev pravokoten trikotnik s katetama $a = 0{\cdot}14\ m$ in $b = 0{\cdot}26\ m$.

21.) Pokončna prizma, $3{\cdot}2\ dm$ visoka, ima prostornino $t = 3{\cdot}6\ dm^3$; koliki so osnovni robi, ako je osnovna ploskev jednakokrak pravokoten trikotnik?

22.) Koliki sta površje in prostornina pokončne $16\ dm$ visoke prizme, ako je nje osnovna ploskev jednakostraničen trikotnik sè stranico $s = 5\ dm$?

23.) Koliki sta površje in prostornina pravilne tristrane prizme, ako so vsi robi jednaki $r = 0{\cdot}164\ m$?

24.) Trostrana pravilna prizma ima prostornino $t = 0{\cdot}072\ m^3$; ako rase nje višina za $0{\cdot}04\ m$, rase prostornina za $0{\cdot}00288\ m^3$; koliki so nje robi od začetka?

25.) Robi trostrane pravilne prizme so vsi jednaki; koliki so ti robi, ako je prostornina $t = 0{\cdot}0735\ m^3$?

26.) Osnovna ploskev pokončne, $0{\cdot}2\ m$ visoke prizme je romb z diagonalama $d = 0{\cdot}18\ m$ in $d' = 0{\cdot}24\ m$; izračunaj nje površje in prostornino.

27.) Osnovna ploskev $0{\cdot}28\ m$ visoke prizme je jednakokrak trapec z vzporednicama $a = 0{\cdot}25\ m$, $b = 0{\cdot}15\ m$ in nevzporednico $c = 0{\cdot}13\ m$; koliko je nje površje in kolika prostornina?

28.) Koliko je površje in prostornina pravilne šesterostrane, $0{\cdot}32\ m$ visoke prizme, ako je *a)* osnoven rob $s = 0{\cdot}07\ m$, *b)* razdalja središča osnovne ploskve od nje stranice $r = 0{\cdot}1\ m$, *c)* razdalja središča od oglišča osnovne ploskve $R = 0{\cdot}2\ m$.

29.) Pravilna šesterostrana prizma, katera ima vse robe jednake, ima prostornino $t = 0{\cdot}3285\ m^3$; koliki so nje robi?

30.) V pokončnem pravokotnem paralelepipedu je razmerje v jednem oglu stikajočih se robov 3 : 4 : 18, njih vsota 50 *m*. *a)* Koliki sta njega površje in prostornina, *b)* kolik je rob prostornojednake kocke?

31.) Pokončna prizma ima 5·42 m^2 površine, za osnovno ploskev pa pravokotnik s stranicama $a = 7\ dm$, $b = 3\ dm$; koliko je površje prostornojednake kocke?

32.) Pokončna prizma ima 3·42 m^2 površine, za osnovno ploskev pa jednakostraničen trikotnik, čegar stranica meri 6 *dm*; kolika je nje prostornina?

33.) Osnovna ploskev pokončne 6 *dm* visoke prizme je kvadrat. Kolik je osnoven rob in koliko površje, ako znaša prostornina 37·5 dm^3?

34.) Recimo, da so r, v, p_1, p, t oziroma merska števila polumera, višine, plašča, površja, prostornine pokončnega cilindra; izračunaj iz dveh teh količin obe drugi.

a) $r = 2·5\ dm, a;$ *b)* $v = 1·5\ m, a;$ *c)* $r = 1·85\ m, a;$
$v = 3·5\ m, b.$ $p_1 = 1·1386\ dm^2, b.$ $t = 37·268\ m^3, b.$
d) $p_1 = 20\ dm^2, a;$ *e)* $p = 131·88\ dm^2, a;$ *f)* $p = 414·48\ mm^2, a;$
$t = 20\ dm^3, b.$ $p_1 = 75·36\ dm^2, b.$ $r = 6\ mm, b.$

35.) Ako je pokončen cilinder prejšnje naloge jednakostran, ali moraš tudi dve onih količin vedeti, da moreš izračunati druge? — Dana je jedna izmed količin r, v, p_1, p, t; izračunaj vsako drugo.

a) $r = 7·5\ dm;$ *b)* $v = 1·3\ m;$ *c)* $p = 38·1510\ m^2;$ *d)* $p_1 = 4\ dm^2;$
e) $t = 194·087\ dm^3.$

36.) Ako je prostornina pokončnega cilindra $p = 310\ cm^3$ in višina $v = 0·09\ m$; koliko je njega površje?

37.) Dan je plašč $o = 1·35\ m^2$ in polumer $r = 0·15\ m$ pokončnega cilindra; kolik je polumer r' prostornojednakega jednakostraničnega cilindra?

38.) Kako sta si dva cilindra, ako sta njiju polumera r in r' in njiju višini v in v'?

$r = 0·05\ m,\ 0·055\ m,\ 0·06,\ a,\ a,\ a;$
$v = 0·06\ m,\ 0·06\ m,\ 0·05\ m,\ b,\ b,\ b;$
$r' = 0·15\ m,\ 0·055\ m,\ 0·15\ m,\ c,\ a,\ c;$
$v' = 0·06\ m,\ 0·24\ m,\ 0·12\ m,\ b,\ c,\ d.$

39.) Kako sta si *a)* plašča, *b)* površje dveh pokončnih cilindrov, ako sta njiju polumera r in r' in njiju višini v in v'?

$r = 0{\cdot}06\ m,\ 0{\cdot}12\ m,\ 0{\cdot}04\ m,\ a,\ a,\ a;$

$v = 0{\cdot}09\ m,\ 0{\cdot}16\ m,\ 0{\cdot}03\ m,\ b,\ b,\ b;$

$r' = 0{\cdot}18\ m,\ 0{\cdot}12\ m,\ 0{\cdot}18\ m,\ a,\ c,\ c;$

$v' = 0{\cdot}09\ m,\ 0{\cdot}24\ m,\ 0{\cdot}20\ m,\ c,\ b,\ d.$

40.) Koliki sta površje in prostornina valjaste cevi, ako je $R = 0{\cdot}19\ m$, $r = 0{\cdot}17\ m$ in $v = 4\ m$? — Reši to nalogo tudi z občnimi števili.

41.) Valjasta posoda meri 36 litrov; koliko meri posoda, na kateri so razsežnosti dvakrat tolike?

42.) Ciment za liter ima valjasto obliko in njega višina je dvakrat tolika kakor premer; kolike so razsežnosti tega cimenta na milimetre?

43.) Valjasto deblo s premerom $d = 0{\cdot}5\ m$ in z dolžino $a = 15\ m$ si misli obtesano na kvadratno bruno; koliko lesa gre v treske?

44.) Železen cilinder, $1{\cdot}5\ m$ dolg, tehta $589{\cdot}05\ kg$; kolik je njega premer (spec. težkota $= 7{\cdot}78\ kg$)?

45.) Kolik je tlak 750 *mm* visokega živosrebrenega stolpa na krožnato osnovno ploskev s polumerom $r = 1\ cm$ (spec. težk. $13{\cdot}6\ g$)?

46.) Za vodovod potrebujejo 840 *m* dolgih svinčenih cevi, katere so 5 *cm* debele in imajo 2 *dm* svetlobe; koliko velja svinec, ako stane 1 *kg* 40 kr. (spec. težkota $= 11{\cdot}35\ g$).

47.) Koliko tehta 2 *m* dolg votel železen cilinder, ako znaša njega vnanji obseg $o = 2{\cdot}094\ m$ in debelost stene $0{\cdot}04\ m$?

48.) Prostornina 4 *dm* dolzega cilindra znaša $20\ dm^3$; izdolbi ga koncentrično tako, da je ostala prostornina le $\frac{1}{4}$ začetne; kolika je stena votlega cilindra debela?

49.) Površje jednakostranega cilindra je $p = 396\ cm^2$; računaj površje in prostornino najmanjše kocke, iz katere ga moreš izrezati.

50.) Premer in višina cilindra sta si kakor $3 : 5$; izračunaj *a)* iz njega površja $p = 1{\cdot}3\ m^2$ njega prostornino, *b)* iz njega prostornine $t = 35{\cdot}325\ dm^3$.

51.) Plašč cilindra je $p_1 = 1000\ cm^2$; kolik je njega premer in njega višina, ako je obod osnovne ploskve $1\frac{1}{2}$krat tolik kakor njega višina.

52.) *a)* Koliko je površje in kolika prostornina pravilne α) četverostrane, β) trostrane, γ) šesterostrane piramide, ako je osnoven rob $s = 0·4\ m$ in obstranska višina $v_1 = 0·6\ m$?
b) Koliko je površje in kolika telesnina teles prejšnje naloge, ako je dan namesto v_1 obstranski rob $s_1 = 0·8\ m$?

53.) Koliko je površje in prostornina pravilne *a)* trostrane, *b)* četverostrane piramide z osnovnim robom $s = 0·2\ m$, ako so vsi robi jednaki?

54.) Koliko je površje in kolika prostornina okrajšane pravilne *a)* trostrane, *b)* četverostrane, *c)* šesterostrane piramide, ako je spodnji osnovni rob $s = 5\ dm$, zgornji osnovni rob $s_1 = 3\ dm$ in obstranska višina $v_1 = 2·6\ m$?

55.) Kolika je prostornina piramide z osnovno ploskvijo b in višino v?

$$b = 1·2\ m^2,\ 0·05\ m^2,\ c;$$
$$v = 0·81\ m,\ 0·27\ m,\ d.$$

56.) Izračunaj višino piramide, ako sta nje prostornina t in osnovna ploskev b dani.

$$t = 0·36\ m^3,\ 1·728\ m^3,\ c;$$
$$b = 1·2\ m^2,\ 7·2\ m^2,\ d.$$

57.) Kako sta si prostornini dveh piramid z osnovnima ploskvama b in b' in višinama v in v'?

$$b = 0·17\ m^2,\ 1·27\ m^2,\ 100\ cm^2,\ c,\ c,\ c;$$
$$v = 1·2\ m,\ 1·75\ m,\ 8\ cm,\ d,\ d,\ d;$$
$$b' = 0·17\ m^2,\ 6·35\ m^2,\ 24\ cm^2,\ c,\ f,\ f;$$
$$v' = 0·6\ m,\ 1·75\ m,\ 10\ cm,\ f,\ d,\ g.$$

58.) Kako sta si prostornini dveh podobnih piramid *a)* z višinama $V = 0·25\ m$ in $v = 0·075\ m$, *b)* z istoležnima osnovnima roboma $S = 1·2\ m$ in $s = 0·84\ m$?

59.) Kako sta si višini ali dva istoležna roba podobnih piramid s prostorninama $T = 3·375$ in $p = 1·331$?

60.) Višina pravilne četverostrane piramide je dvakrat tolika kakor osnoven rob; koliki so robi, ako je prostornina $t = 0·3456\ m^3$?

61.) Robi pokončne trostrane piramide so vsi jednaki, kolika je prostornina, ako je površje $m = 0·224\ m^2$?

62.) Kolika je prostornina in koliko površje okrajšane piramide s kvadratnima osnovnima ploskvama, ako je spodnji rob $S = 3·5\ dm$, zgornji rob $s = 1·5\ dm$ in višina $v = 2·4\ dm$?

63.) Pravilna četverostrana piramida in pravilna trostrana piramida imata isto prostornino $V = 0{\cdot}125\ m^3$ in isto višino $v = 0{\cdot}6\ m$; primerjaj njiju površji.

64.) Piramida z osnovno ploskvijo $b = 0{\cdot}22\ m^2$ in z višino $v = 0{\cdot}36\ m$ je prostornojednaka s kocko; kolik je rob kocke?

65.) Napravi si iz pravilne četverostrane piramide z osnovnim robom $s = 0{\cdot}145\ m$ in z višino $v = 0{\cdot}21\ m$ okrajšano piramido s prostornino $t = 500\ cm^3$; kolika je razdalja preseka od vrha?

66.) Streha cerkvenega stolpa, katero hočejo pokriti s ploščevino, ima podobo pravilne šesterostrane piramide; recimo, da je obseg osnovne ploskve $o = 12{\cdot}5\ m$ in obstranska višina $v_1 = 7{\cdot}2\ m$; koliko $a = 0{\cdot}56\ m$ dolgih in $b = 0{\cdot}33\ m$ širokih ploščevin je potreba, ako se jih zarad stikanja ploščevin 5 % več porabi?

67.) Pokončna četverostrana piramida ima $3{\cdot}6\ dm^2$ površine, nje osnoven rob pa meri $1\ dm$; kolika je nje prostornina?

68.) Koliko je površje okrajšane pravilne *a)* trostrane, *b)* četverostrane, *c)* šesterostrane piramide, ako je spodenj osnoven rob $a = 5\ dm$, zgorenj osnoven rob $a_1 = 3\ dm$ in obstranska višina $v_1 = 2{\cdot}6\ m$?

69.) Pravilna četverostrana okrajšana piramida ima $2{\cdot}8\ dm^3$ prostornine, robova njenih osnovnih ploskev pa merita $2\ dm$ in $1\ dm$; koliko je nje površje?

70.) Recimo, da so r, v, s, p, p_1, t oziroma merska števila polumera, višine, stranice, površja, plašča, prostornine pokončnega stožca; izračunaj iz dveh teh količin vse druge.

a) $r = 3{\cdot}5\ dm,\ v = 8{\cdot}4\ dm$; *b)* $r = 0{\cdot}8\ m,\ s = 1\ m$;
c) $r = 0{\cdot}5\ m,\ p_1 = 2{\cdot}041\ m^2$; *d)* $r = 1{\cdot}76\ m,\ p_1 = 13{\cdot}56\ m^2$;
e) $r = 4{\cdot}21\ dm,\ t = 1137{\cdot}85\ dm^3$; *f)* $v = 0{\cdot}5\ m,\ s = 0{\cdot}8\ m$;
g) $v = 3{\cdot}5\ dm,\ t = 55{\cdot}195\ dm^3$; *h)* $p = 703{\cdot}36\ m^2,\ p_1 = 549{\cdot}5\ m^2$.

71.) Izračunaj površje in prostornino jednakostranega stožca, ako je *a)* višina $v = 0{\cdot}1\ m$, *b)* polumer osnovne ploskve $r = 0{\cdot}25\ m$, *c)* stranica $s = 0{\cdot}465\ m$.

72.) Izračunaj iz površja $p = 4310\ cm^2$ jednakostranega stožca njega prostornino.

73.) Prostornina jednakostranega stožca $t = 0{\cdot}156\ m^3$; koliko je njega površje?

74.) Kako sta si prostornini dveh stožcev, ako sta polumera osnovnih ploskev r in r' in višini v in v'?

$$r = 0{\cdot}75\,m,\ 0{\cdot}6\,m,\ 12\,cm,\ a,\ a,\ a;$$
$$v = 1{\cdot}2\,m,\ 0{\cdot}5\,m,\ 20\,cm,\ b,\ b,\ b;$$
$$r' = 0{\cdot}75\,m,\ 0{\cdot}9\,m,\ 8\,cm,\ a,\ c,\ c;$$
$$v' = 1{\cdot}8\,m,\ 0{\cdot}5\,m,\ 16\,cm,\ c,\ b,\ d.$$

75.) Kako sta si prostornini dveh podobnih stožcev z višinama v in v'?

$$v = 0{\cdot}1\,m,\ 0{\cdot}25\,m,\ a;$$
$$v' = 0{\cdot}12\,m,\ 0{\cdot}75\,m,\ b.$$

76.) Kako sta si višini dveh podobnih stožcev s prostorninama t in t'?

$$t = 0{\cdot}125\,m^3,\ 0{\cdot}334\,m^3,\ a;$$
$$t' = 0{\cdot}216\,m^3,\ 1\,m^3,\ b.$$

77.) Ako vrtiš pravokoten trikotnik s katetama $a = 3\,dm$ in $b = 4\,dm$ okolo njega hipotenuze, napišeš dvojen stožec; koliko je njega površje in prostornina?

78.) Plašč stožca, razgrnen po ravnini, je krogov izsek sè središnim kotom $\alpha = 120^0$ in s polumerom $r = 0{\cdot}144\,m$; kolika je prostornina stožca?

79.) Jednakostran železen stožec mora 10 kg tehtati; kolika je njega višina?

80.) Koliki sta površje in prostornina okrajšanega stožca s polumeroma R in r in z višino v?

$$R = 0{\cdot}5\,m,\ 0{\cdot}65\,m;$$
$$r = 0{\cdot}2\,m,\ 0{\cdot}45\,m;$$
$$v = 0{\cdot}3\,m,\ 0{\cdot}03\,m.$$

81.) Z vodo do vrha napolnjena čaša ima podobo okrajšanega stožca in je 12 cm visoka; gornji premer je $D = 6\,cm$, spodnji $d = 4\,cm$. Ako izpiješ vode do polovice višine, koliko tekočine ostane še v čaši?

82.) Ciment za 1 deciliter (posode za suhe stvari) ima obliko okrajšanega stožca, na katerem je gornji premer jednak premeru prostornojednakega jednakostranega cilindra, in spodnji premer $\frac{5}{4}$ gornjega; kolike so njega razsežnosti na milimetre? ($\pi = 3{\cdot}14159$.)

83.) Izračunaj $a)$ površje, $b)$ prostornino tetraedra z robom $a = 0{\cdot}34\,m$.

84.) Koliko je površje in kolika prostornina oktaedra z robom $a = 0{\cdot}05\ m$?

85.) Kolika je prostornina oktaedra s površjem $m = 1\ m^2$?

86.) Koliko je površje ikozaedra z robom $a = 0{\cdot}08\ m$?

87.) Kako so si površja tetraedra, oktaedra in ikozaedra, ako so njih robi jednaki?

88.) Merska števila polumera, površja, prostornine krogle so r, p, t; poišči iz vsake teh količin obe drugi.

$$a)\ r = 1{\cdot}5\ m,\ 1\ m\ 2\ dm\ 4\ cm,\ a;$$
$$b)\ p = 572{\cdot}555\ cm^2,\ 22{\cdot}1671\ dm^2,\ b;$$
$$c)\ t = 100\ dm^3,\ 5{\cdot}712\ m^3,\ c.$$

89.) Koliko je *a)* površje, *b)* prostornina naše zemlje, ako je nje polumer 6370 *km*? ($\pi = 3{\cdot}141593$.)

90.) Obod največjega kroglinega kroga je o; koliko je površje in prostornina krogle?

$$o = 0{\cdot}35\ m,\ 1\ m,\ a.$$

91.) Kako sta si *a)* površji, *b)* prostornini dveh krogel s polumeroma r in r'?

$$r = 0{\cdot}5\ m,\ 0{\cdot}36\ m,\ 1\ m,\ a;$$
$$r' = 0{\cdot}25\ m,\ 0{\cdot}48\ m,\ 0{\cdot}2\ m,\ b.$$

92.) Kako sta si polumera dveh krogel s površjema p in p'?

$$p = 0{\cdot}64\ m^2,\ 1\ m^2,\ a;$$
$$p' = 1{\cdot}44\ m^2,\ 1{\cdot}96\ m^2,\ b.$$

93.) Kako sta si polumera dveh krogel s prostorninama t in t'?

$$t = 0{\cdot}8\ m^3,\ 0{\cdot}039\ m^3,\ a;$$
$$t' = 2{\cdot}7\ m^3,\ 4{\cdot}875\ m^3,\ b.$$

94.) Kako sta si površji dveh krogel, ako sta si njiju površji kakor $m : n$?

$$m = 4,\ 36,\ 48,\ 275,\ a;$$
$$n = 9,\ 25,\ 75,\ 936,\ b.$$

95.) Kako sta si površji dveh krogel, ako sta si njiju prostornini kakor $m : n$?

$$m = 1,\ 27,\ 125,\ 243,\ a;$$
$$n = 8,\ 64,\ 343,\ 1125,\ b.$$

96.) Kolik premer bi moral imeti globus, na katerem bi bil 1 mm^2 jednak omaljenemu kvadratnemu mirijametru?

97.) Kolika je prostornina največje krogle, katero moreš napraviti iz kocke z robom $a = 0{\cdot}15\ m$? Kolik je odletek?

98.) Kolika je krogla, katera se natančno prilega mejnim ploskvam jednakostranega cilindra z višino $v = 2{\cdot}25\ m$? Kolik je prostor med cilindrom in kroglo?

99.) Iz polukrogle s polumerom $r = 0{\cdot}1\ m$ napravi stožec z jednako osnovno ploskvijo in jednako višino; kolik je odletek? Kako sta si prostornina stožca in prostornina polukrogle?

100.) Površje krogle je $p = 0{\cdot}28\ m^2$ (a); koliko je površje krogle z $2\frac{1}{2}$krat ($b$krat) tolikim polumerom?

101.) Valjast paren kotel s polukroglastima koncema je 1 m obširen in 4 m dolg, tako, da znaša dolžina cilindra 3 m; koliko je *a)* površje, *b)* prostornina kotla?

102.) Polumer osnovne ploskve pokončnega 0·8 m visokega stožca je $r = 0{\cdot}6\ m$; kolik je premer krogle, katere površje je toliko kakor plašč onega stožca?

103.) Vnanji polumer otle krogle je $r = 0{\cdot}35\ m$ in debelina stene $a = 0{\cdot}05\ m$; kolika je njena prostornina?

104.) Pokončen paralelepiped s kvadratno osnovno ploskvijo ima prostornino v, njega višina pa je 2krat tolika kakor osnovni rob; koliko je njega površje?

$$v = 3{\cdot}2\ m^3.$$

105.) Pravilna šesterostrana prizma, katere osnovni rob je 2krat tolik kakor višina, ima površino p; koliko je površje prostornojednake kocke?

$$p = 18{\cdot}441\ dm^2.$$

106.) Polumer osnovne ploskve pokončnega cilindra meri r dolgostnih, njega površje pa p ploskvenih jednot; za koliko je njega prostornina od prostornine včrtane šesterostrane pravilne prizme večja?

$$r = 4\ dm,\quad p = 188{\cdot}4\ dm^2.$$

107.) Prostornina pravilne šesterostrane piramide meri v kubičnih jednot, obstranski rob pa je 2krat tolik kakor osnoven rob; koliko je nje površje?

$$v = 96\ dm^3.$$

108.) Tetraedrova (oktaedrova) prostornina meri v kubičnih jednot; koliko je njegovo površje?

$$v = 203{\cdot}616\ dm^3\ (12{\cdot}726\ dm^3).$$

109.) Stožcu podobno jelkino deblo ima na spodnjem koncu 7 *dm* v premeru, visoka pa je 18 *m*; koliko kvadratnih metrov drv se iz nje nakolje, ako so polena po 75 *cm* dolga, ter je treba zaradi praznega prostora med poleni 25 % drv več računati?

110.) Plašč pokončnega okrajšanega stožca meri p ploskvenih, polumera osnovnih ploskev pa R in r dolgostnih jednot; kolik je polumer prostornojednakega jednakostraničnega stožca?

$$p = 16{\cdot}328\ dm^2, \quad R = 1{\cdot}5\ dm, \quad r = 0{\cdot}5\ dm.$$

111.) Prostornina krogle meri p kubičnih jednot; kolika je prostornina jednakostraničnega cilindra z istim površjem?

$$p = 113\ dm^3\ 40\ cm^3.$$

112.) Kako so si prostornine jednakostranemu cilindru včrtanega pokončnega stožca, včrtane krogle in onega cilindra?

113.) Recimo, da je krogli očrtan jednakostran cilinder in jednakostran stožec; kako so si *a)* površja, *b)* prostornine teh treh teles?

114.) Koliko debela mora biti stena otle krogle z vnanjim polumerom $R = 0{\cdot}335\ m$, da je notranje površje polovica vnanjega?

115.) Površje kocke je $p = 0{\cdot}24\ m^2$, koliko je površje krogle z jednako prostornino?

116.) Steklena krogla z notranjim površjem $p = 0{\cdot}325\ m^2$ tehta 2·8 *kg*; koliko tehta, ako je napolnjena z vodo?

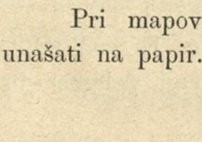
117.) Sveteča točka je od središča krogle s polumerom $r = 0{\cdot}45\ m$ oddaljena 4·05 *m*; kolik je polumer kroglinega kroga, kateri loči razsvetljen del krogle od nerazsvetljenega?

118.) Svinčena otla krogla 3 *kg* težka naj plava na vodi tako, da je gleda polovica iz vode; kolik mora biti vnanji polumer in koliko debela stena?

Dodatek.

Zemljišča niso vsa ravna in tudi ne horicontalno ležeča, ampak njih meje stvarjajo like, izmed katerih ne leži vsak popolnoma v jedni sami ravnini. Ako vežemo podnožišča navpičnic, katere spuščamo od vsake mejne točke zemljišča na katerokoli horicontalno ravnino s črtami, dobivamo njega **horicontalno projekcijo** ali **očrt**. Kolikost in obliko horicontalne projekcije zemljišča določevati se pravi njega **mapovati**; popolnoma izdelana osnova mapovanih zemljišč je njih **tlavid** (mapa, situacija).

Slika 177.



Zemljišča, katera mapujemo, vzmetavamo na horicontalne ravnine, ker horicontalno lego laglje določujemo in ker rastline vse kviško, t. j. v vertikalni meri rastejo, torej nima na strmih tleh AC več rastlin prostora nego na horicontalnih AB (na horicontalni projekciji prvih). Primerjaj pridjano sliko.

Pri mapovanji je treba meriti daljice in kote in izmerjeno unašati na papir.

I. Merjenje daljic na polji.

Pri merjenji daljic na polji je treba opravljati dvoje: **določevati njih merodajne točke** in jih v resnici tudi **meriti**.

A. Merodajne točke daljice so: nje mejišči, in ako je teh razdalja prevelika, več vmesnih toček, nadalje nje presečišča s potrebnimi pomočnimi črtami.

Za določevanje toček na polji se poslužujemo **kolčkov**, **merskih drogov** (iztaknjul) in **merskih praporcev**.

Merski drogi so 2 *m* do 3 *m* dolgi in 3 *cm* močni, zdolaj so okovani z železom na šilo (čevelj), in razdeljeni so na jednake dele, kateri so menjoma rudeči in beli. Takisto so ustrojeni merski praporci, samo da so še daljši in da imajo na gornjem koncu rudečebelo zastavo; te rabijo namesto merskih drogov za večje razdalje.

Naloga 1. **Izkolčevanje daljice na polji.**

Dve točki *A* in *B*, kateri sta na polji zaznamenovani z dvema navpičnima drogoma, določujeta popolnoma mer daljice. Ako je treba več toček te daljice ustanoviti, postavlja se merjevec za jeden drog *B* in gleda na drug drog *A* v meri obeh; med tem skuša pomočnik ravnaje se po mahljajih merjevčeve roke na ono mesto svoj med dvema prstoma prosto viseč drog postaviti, kjer namerava merjevec vmesno točko ustanoviti. Ko merjevec vidi, da se pokrivajo vsi trije krogi v meri daljice, t. j. ko ugleda pomočnikov drog v meri drogov *A* in *B*, izpusti drugi na dano znamenje prvega drog iz roke in ga utakne v tej legi v zemljo.

Tako postopanje imenujemo **ugledovanje**.

Kedar izkolčujemo dolge črte, ustanovljajo najpred bolj oddaljene vmesne točke.

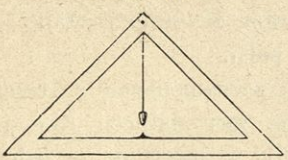
Naloga 2. **Podaljšanje na polji izkolčene daljice.**

Daljico *AB* podaljšaš do točke *C*, ako se vstopiš po meri na oko blizu tjà, kjer bi imela točka *C* biti, in ako ugledavaš drog, katerega držiš prosto med dvema prstoma, v mer drogov *B* in *A* toliko časa, dokler se ne pokrivajo vsi trije drogi; tu utakni drog v zemljo.

B. Za merjenje v resnici se poslužujejo ali **merske letve** po $2\frac{1}{2}$ *m* ali 5 *m* dolge, ali **merskega lanca** z dvema **lančevima drogoma** in z desetimi lančevimi **utikljaji** (zaznamenjevalkami). Merski lanec je dvajset metrov dolg in sestoji iz železnih šibic, katere so zvezane z okroglimi sklepi iz medi; na koncéh sta dva večja medena sklepa, skoz katera utikujejo lančeva droga. Ta dva sta okolo 1 *m* dolga in spodej z železom okovana na šilo. Utikljaji so 3 do 4 *dm* dolgi, narejeni iz železne žice blizo tako debele, kakor gosje pero, zgoraj imajo obročkast obešaj in spodaj so šiljaste. Razen tega mora imeti merjevec **meter** razdeljen na nižje dolgostne jednote ali **mersko vrvico.**

Za določevanje vertikalne meri se poslužujejo **svinčnice** ali tudi **pogreznjule**, t. j. okrogle $1\frac{1}{2}$ *m* dolge palice iz lahkega lesa, katera je spodaj okovana s težkim železom na šilo, da jo to spravlja v vertikalno mer, ako jo držiš prav rahlo med dvema prstoma.

Za določevanje horicontalnih meri se poslužujejo **grebljice** (razulje). Ona je lesen jednakokrak trikotnik (glej sliko 178.); na



Slika 178.

njega vrhu je pritrjena svinčnica, katera udarja sè svojo nitjo v žleb, izrezan od vrha do srede osnovnice, kedar je ta horicontalna. Uporaba tega orodja se uže spozna iz njega naprave.

Ako razuljo postaviš na daljico, da pozveš te lego, udarja svinčnica v žleb ali na stran, kedar je ta daljica horicontalna ali poševna.

Naloga 1. **Merjenje daljice na horicontalnih tleh.**

a) **Z merskima letvama.** Vzemi dve jednaki (n. pr. 5 *m*) dolgi merski letvi, položi jedno na daljico, začenši v te krajišči in drugo v isti meri tako k prvi, da se s koncema dotikata; potem poberi prvo letvo in jo položi h koncu druge in ponavljaj tako pokladanje do druzega krajišča daljice.

Merske letve štej glasno, ko jih pobiraš.

b) **Z merskim lancem.** Ako se ima črta *AB*, katera je zaznačena z merskima praporcema v *A* in *B*, počenši od *A* meriti, vzameta dva pomočnika merski lanec, katerega natakneta s končnima sklepoma na lančeva droga. Zadnji pomočnik postavi s svojim lančevim drogom v točko *A*; sprednji pa, kateri ima vse utikljaje, vleče lanec dalje v meri daljice proti *B*. Ko zadnji pomočnik lančev drog sprednjega v meri daljice *AB* ugleda, napne ta lanec, valovaje ž njim po zraku, dobro in točno s svojim drogom, ter utakne prvi utikljaj na koncu lanca v zemljo. Zdaj vleče sprednji pomočnik lanec toliko časa naprej, da pride zadnji do točke *C*. Tukaj pobere utikljaj, utakne na njega mesto svoj drog, ter ugledava spet drog sprednjega pomočnika, sploh ponavljata prejšnje postopanje toliko časa, da dospeta do druzega krajišča daljice *AB*. Od zadnjega utikljaja do krajišča *B* izmeriš dolgost z lancem, kateri je čez *B* razpet; dolžine krajše od decimetra meriš z merilom. Na zadnje prešteje zadnji pomočnik nabrane utikljaje, množi njih število z 20 in prišteje k produktu še dolžino med zadnjim utikljajem in drugim krajiščem daljice in izračuni s tem dolžino merjene daljice. Ako je daljica *AB* zelo dolga, zabijajo od 10 do 10 lančevih dolžin kolčke v zemljo, kateri so zaznačeni s tekočimi števili.

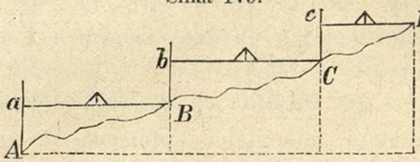
Tako merjenje moramo dvakrat ali večkrat ponavljati, ako hočemo dobiti zanesljive resultate; srednja vrednost je dolžina daljice.

Pri najpazljivejšem postopanji je na ravnih tleh pomota 0·001 cele razdalje, t. j. razdalja, katera je izmerjena na 1000 *m*, more biti ali 1001 *m* ali 999 *m* dolga.

Naloga 2. **Merjenje daljice na visečih tleh.**

Za merjenje daljic na tleh, katere več ali menj visé, se poslužujejo krajših ali daljših merskih letev in v obeh slučajih pogreznjule in grebljice. Delo izvršujejo od spodej navzgor.

Slika 179.



Ko je črta *AD* (glej sliko 179.) izkolčena, postavijo pogreznjulo v *A* vertikalno in položijo mersko letev s pomočjo merske grebljice horicontalno tako, da je z jednim koncem *B* na tleh z drugim pa pri pogreznjuli v točki *a*. Potem položijo prvo letvo na tla, vender tako, da njen konec *B* ostane na istem mestu in merijo od B dalje takisto z drugo mersko letvo. Tako postopanje ponavljajo od krajišča *D* daljice. Ako je zadnji razstoj krajši od merske letve, kakor n. pr. razstoj med *C* in *D* v pridjanem liku, pustijo, da sega letva čez točko *c* in preštejejo na njej dolžino *CD*.

Ako daljica ni na vseh krajih pristopna, moraš tako meriti, kakor smo učili v planimetriji pri uporabi izrekov o podobnosti.

II. Merjenje kotov na polji.

Pri merjenji kotov imamo dve glavni nalogi:

Določevanje pravih kotov, t. j. postavljanje in spuščanje **pravokotnic, in mapovanje kotov sploh.**

A. Za določevanje pravokotnic na polji se poslužujejo **pravokotnega križa.** Ta naprava je zbita iz dveh dobro presušenih orehovih diljic, kateri narejata prav kot in imata na koncch pravokotno postavljene osi iz rumene medi; pritrjen je horicontalno na stojalu.

Naloga 1. **Postavljanje pravokotnice v točki izkolčene daljice.**

Ako imamo v točki *C* daljice *AB* postaviti pravokotnico, zataknemo v točki *C* stojalo križa navpično tako, da pride jeden krak križa, t. j. glednica njega osti v mer daljice *AB*. Potem ugledavamo čez osti druzega kraka in zataknemo v njijini meri drog; na tem mestu je točka, skoz katero gre iskana pravokotnica.

Naloga 2. *AB* **Spuščanje pravokotnice od dane točke *C* zunaj izkolčene daljice *AB* na to.**

V to svrho postavimo križ v daljici *AB* tam, kjer presojamo, da bi moglo biti podnožišče pravokotnice. Recimo, da je ta po presojevanji izbrana točka *D*. Zdaj uravnamo jeden krak križa v mer daljice *AB*, z drugim pa ugledavamo čez njega osti.

Ako ni točka *C* v meri te glednice, premeščujemo križ, ne da bi izpreminjali mer prvega kraka, proti levi ali proti desni toliko časa v daljici *AB*, da gre ona glednica na ravnost skoz točko *C*; točka *E*, kjer je zdaj zataknen križ, je podnožišče iskane pravokotnice.

B. Priprave, s katerimi določujemo kolikost poljubnih kotov na polji, imenujemo **kotomere**; te so prav različno urejene. Najpriprostejši kotomer je **astrolab**. Na njem nahajamo tako zvano **ziralo.** Ono sestoji iz dobro in točno izdelanega ravnila iz medi in iz dveh navpičnih nastavkov na njega konceh Jeden teh nastavkov je zgorej prebit, da je prozoren in ima v sredi tega prozira napet las (žimo), od spodej pod prozirom je pa prav ozko izrezan; drug nastavek je takisto izdelan, samo da je prozir spodej in izreza zgorej. Prozir z napetim lasom imenujemo **predmetnico**, izrezo pa **očnico**, ker pri zadnji ugledavamo skoz prvo na predmet.

Tako ziralo je pritrjeno na premeru medenega polukroga, kateri je razdeljen na stopnje in njih dele. Na astrolabu je pa še drugo tako ziralo, katero je vrtljivo okolo središča onega polukroga.

Cela naprava stoji na trinogatem stojalu.

Naloga. 3. **Mapovanje kota na polji.**

a) **S kotomerom.** Ko je kot izkolčen, t. j. ko so postavljeni drogi v vrhu *A* (slika 180.) in v točkah *B* in *C*, postavimo astrolab z njega središčem v vrh kota, uravnamo ziralo v meri kraka *AB* torej proti točki *B*, in zavrtimo vrtljivo ziralo toliko, da ugledamo točko *C*. Potem preberemo kolikost kota na razdelitvi astrolaba.

Slika 180.

b) **Brez kotomera.** Stvori $AM = AN$ (slika 180.) in recimo vsako jednako 20 *m* in izmeri daljico *MN*. Narisaj potem na papirji ravnico *ab*, vnesi nanjo daljico $am = AM$ po omaljenem merilu;

napiši potem iz a lok s polumerom am in presekaj ga z drugim lokom, napisanim iz točke m s polumerom $mn = MN$ po istem omaljenem merilu. $\sphericalangle man = \sphericalangle MAN$. Na papir narisan kot moremo izmeriti s transporterjem.

III. Mapovanje zemljišč.

Preden začnemo ploskev mapovati, jo najpred obhodimo in zabijemo na vseh ogliščih takisto na vseh krajih, kjer je zakrivljena, kolčke v zemljo, kateri so zaznačeni s tekočimi števili. Lik obkolčene ploskve narišemo na oko s svinčnikom na papir, in zaznačimo si v tem črteži posamezne v zemljo zabite kolčke. Zraven narisanih črt in kotov zapisujemo njih resnično kolikost zaporedoma kakor jih izmerjavamo.

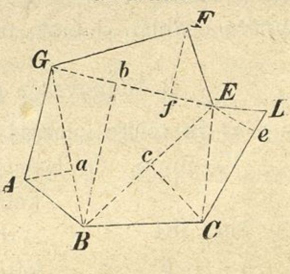
Po tem črteži izdeljujemo doma **mapo** zemljišča in izračunavamo njega **ploščino**.

1. Mapovanje ploskev na polji z lancem ali mersko letvo.

a) **Po raztvoritvi na trikotnike.**

Obkolčeno ploskev raztvorimo na trikotnike, merimo njih stranice in si zapomnimo teh merska števila v črteži, iz katerega narišemo doma ploskev natančno po omaljenem merilu.

Slika 181.

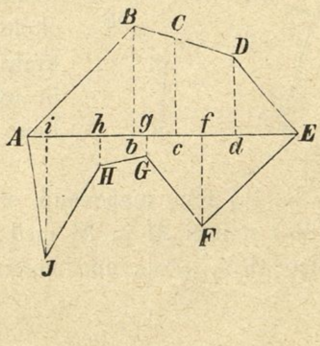


V pridjani sliki bi n. pr. začeli s trikotnikom ABG in bi stvarjali zaporedoma trikotnike BGE, EGF, BCE, CED.

V mapi moremo tudi izmeriti višine trikotnikov ter izračunati ploščino cele ploskve (I. del, § 72.); da se pa moremo na dobljene resultate bolje zanašati, izkolčujemo na polji tudi višine trikotnikov in jih merimo.

b) **Po koordinatnem načinu.**

Slika 182.

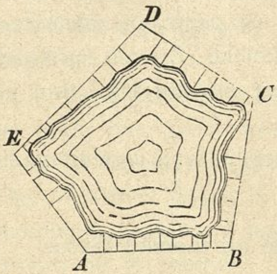


Ko smo lik obkolčili, izkolčimo daljico AE (slika 182.) med najbolj oddaljenima točkama. Na to daljico (črto-absciso) spuščamo pravokotnice (ordinate) od vseh zaznačenih točk na obsegu in merimo posamezne dele črte-abscise in vse ordinate. Doma moremo potem stvoriti mapo. Narišemo si najpred premo, na katero vnašamo abscise od *A* do *i, h, b* . . .; v teh točkah postavimo pravokotnice in vnašamo na nje ordinate v redu, kakor se nahajajo na polji. Ako na zadnje zvežemo vse dobljene točke obsega, stvorili smo mapo.

Izračunanje ploskve izvršujemo, kakor smo učili v prvem delu.

c) **Po oklepanji lika.**

Slika 183.



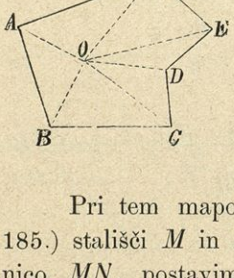
Meje nekaterih ploskev so jako zakrivljene, n. pr. meje potov; drugih ploskev zopet ne moremo meriti od znotraj, n. pr. ribnikov, potokov i. t. d. V tem slučaji oklepamo meje (slika 183.) s stranicami mnogokotnika *ABC* . . . . . (s črtami-abscisami) in spuščamo na te pravokotnice (ordinate) iz toček, v katerih je meja zakrivljena. Potem merimo posamezne abscise, pripadajoče ordinate in kote, katere stvarjajo črte-abscise med seboj. Doma narišemo na papir najpred črte-abscise $AB = ab$, $Bc = bc$, $CD = cd$ po omaljenem merilu in kote $A = a$, $B = b$ i. t. d. zaporedoma, kakor se nahajajo v prirodi; potem postavljamo ordinate v krajiščih vnešenih abscis po istem omaljenem merilu. Ako zvežemo krajišča ordinat, dobimo mapo ploskve v prirodi.

2. Mapovanje ploskve na polji s kotomerom.

a) **Iz točke znotraj ploskve.**

Vzemimo, da hočemo izmeriti lik *ABCDEF* iz točke *O,* od katere moremo meriti na vse strani. V to svrho postavimo kotomer v točki *O,* merimo kote *AOB, BOC, COD* i. t. d. in razdalje *OB, OC, OD* i. t. d. Doma narišemo na papir okolo *O* vse izmerjene kote, vnašamo na njih krakih izmerjene daljice po omaljenem merilu in zvežemo krajišča vnešenih daljic, da dobimo mapo ploskve na polji.

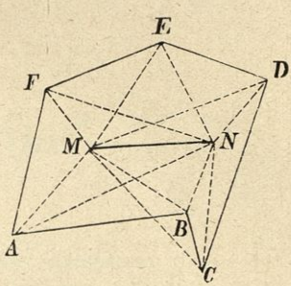
Slika 184.



b) **Iz dveh stališč.**

Pri tem mapovanji si izberemo v ploskvi *ABCD* . . . (slika 185.) stališči *M* in *N,* med katerima moremo meriti, izmerimo stalnico *MN,* postavimo kotomer v točki *M* in merimo kote *NMA,* *NMB, NMC*, . . .; potem gremo s kotomerom v točko *N* in merimo takisto kote *MNA, MNB, MNC* . . . Doma narišemo na papirji stalnico po omaljenem merilu in vnašamo zaporedoma izmerjene kote; ako zvežemo presečišča *a, b, c* . . . njih krakov, dobimo mapo ploskve na polji.

Slika 185.



Ako pripuščajo okolščine, jemljemo tudi za stališči dve ogliščí lika.

c) **Iz obsega.**

Vzemimo, da je *ABCDEF* (slika 185.) gozd, skoz katerega ne moremo meriti. Potem merimo obsežne črte *AB, BC, BD*, . . . in kote *A, B, C*, . . . Doma vnašamo te črte po omaljenem merilu in kote zaporedoma na papir, ter dobimo mapo ploskve na polji.

O izdelovanji map.

O izdelovanji mape z barvami in o označenji raznih kultur na tem mestu ne moremo obširnejše govoriti; pristaviti hočemo samo pravilo, po katerem se v obče ravnajo. To je:

Pri načrtovanji predmetov posnemajo njih podobo kolikor mogoče; drugače pa rabijo za nje označila, kakoršna so sploh v navadi.

V posebnih litografiranih pregledih nahajamo označene predmete in kulture: travnike, pašnike, močvirja, ograje, vinograde, polja, vrte, perivoje, hmeljnike, skalovje in pečine, jezera, reke, mostove i. t. d. In vse to je zadosten napotek za izdelovanje map.

Izmeri sobo, očrt hiše in drugo ter načrtaj to po omaljenem merilu.

Terminologija.*

A.

Abscisa, Abscisse.
Abstand, razdalja, razstoj.
Abstecken, izkolčiti*, iztikati.
Absteckstab, iztaknjula*.
Analiza, Analysis.
Anliegend, priležen.
Anwinkel, prikot*.
Astrolab, Astralabium.
Ausdehnung, obmer.

B.

Bestimmt, določen.
Betragen, znašati.
Bogen, lok.

C.

Centrale, središnica.
Centriwinkel*, središčen kot.
Centrum, središče.
Cilinder, Cylinder.
Complementwinkel*, komplementaren kot.
Congruent, skladen.

Č.

Četverokotnik, Viereck.
Četverorobovnik, Vierkant.
Četverostran, četverostraničen*, vierseitig.
Crta, Linie.
Črticast*, gestrichelt.
Črticast-pikičast, gestrichelt-punktiert.

D.

Daljica*, Strecke.
Determinacija*, Determination.
Diagonala, Diagonale.
Dodekaeder, dvanajsterec.
Določen, bestimmt.
Dolžina, Länge.
Dopolnilna piramida, Ergänzungspyramide.
Dopolnilen stožec, Ergänzungskegel.
Dostavek, Zusatz.
Dotikališče*, Berührungspunkt.
Dotikalna ravnina*, Berührungs-Ebene.
Dotikalna tetiva, Berührungs-Sehne.
Dotikalnica*, Berührungslinie.
Dreieck, trikotnik*.
Durchmesser, premer.
Durchschnittspunkt, presečišče.

E.

Ebene, ravnina.
Ebene Fläche, ravna ploskev.
Eckpunkt, oglišče.
Einheit, jednota*.
Endpunkt, krajišče.

F.

Fest, nepremičen*.
Figur, lik, figura.
Fläche, ploskev.
Flächengleich, ploskveno-jednak*.
Flächeneinheit, ploskvena jednota.
Flächeninhalt, ploščina.
Fusspunkt, podnožišče.

G.

Gebilde, tvor.
Gegenüberliegend, nasproten.
Gegenwinkel, protikot*.

* Izrazov, zaznačenih z zvezdicami, ne nahajamo v Cigaletovi terminologiji.

Geometrijsko mesto, geometrischer Ort.
Gerade, prema; pokončen*.
Geradlinig, premočrten.
Gestrichelt, črticast.
Gestrichelt-punktirt, črticast-pikičast.
Glavna funkcija, Hauptfunction.
Glednica, Visierlinie.
Gleichschenklig, jednakokrak.
Gleichseitig, jednakostraničen*, jednakostran.
Gleichwinklig, jednakokoten.
Gorišče,* Brennpunkt.
Grad, stopnja.
Greblica, Schrotwage.
Grenzpunkt, mejišče*.
Grundgebilde, osnoven tvor.
Grundlinie, osnovnica.

H.

Halbieren, razpoloviti, razpolavljati*.
Halbierungslinie, polovnica.
Halbierungspunkt, polovišče.
Halbkreis, polukrog.
Halbmesser, polumer.
Halbstrahl, polutrak*.
Hipotenuza, Hypotenuse.

I.

Ikozaeder, dvajsterec.
Indirekten, indirect.
Istoležen*, gleichliegend.
Istovrsten*, gleichartig.
Izhodišče, Anfangspunkt.
Izmeničen kot, Wechselwinkel.
Izrek*, Lehrsatz.
Izsek, Ausschnitt.

J.

Jednak, gleich.
Jednakokoten, gleichwinklig.
Jednakokrak, gleichschenklig.
Jednakostran, -straničen, gleichseitig.
Jednota, Einheit.

K.

Kateta, Kathete.
Klin, Keil.
Kocka, Würfel.
Körper, telo.
Količina, Grösse.
Kolček*, Pflock.
Kolobar, Ring.
Kot, Winkel.
Kot izbočen, erhabener Winkel.
Kot iztegnen, gestreckter Winkel.
Kot središčen, excentrischer Winkel.
Kot komplementaren, Complement-Winkel.
Kot naklonski, Neigungswinkel.
Kot nasproten, gegenüberliegender Winkel.
Kot notranji, innerer Winkel.
Kot oboden, Peripherie-Winkel.
Kot oster, spitzer Winkel.
Kot otel, hohler Winkel.
Kot ploskven, Flächenwinkel.
Kot poln, voller Winkel.
Kot prav, rechter Winkel.
Kot priležen, anliegender Winkel.
Kot roboven*, Kantenwinkel.
Kot središčen*, Centriwinkel
Kot suplementaren, Supplementwinkel.
Kot top, stumpfer Winkel.
Kot vnanj, äusserer Winkel.
Kot v polukrogu, Winkel im Halbkreise.
Koti nad premo, Winkel an einer Geraden.
Koti krog točke, Winkel um einen Punkt herum.
Kotna ploskev, kotnina*, Winkelfläche.
Kotomer, Winkelmesser.
Krajišče, Endpunkt.
Kračja ploskev*, krakina, Schenkelfläche.
Krak, Schenkel.
Krog, Kreis.
Krogla, Kugel.
Kroglin* izsek, Kugel-Ausschnitt.
Kroglin odsek, Kugel-Abschnitt.
Kroglin pas, Kugel-Zone.
Kroglina kapica, Kugel-Mütze.
Kroglina plast, Kugel-Schichte.
Krožnica*, Kreislinie.
Krožnina*, Kreisfläche.
Krumm, slok.
Kubičen, kubisch.
Kvadrat, Quadrat.
Kvadratni meter, Quadratmeter.
Kvadrant, Quadrant.

L.

Lančev drog, Kettenstab.
Linie, črta.
Lik, Figur.
Lok, Bogen.

M.

Mapa, Mappe.
Mapovati, aufnehmen.
Masseinheit, merska jednota.
Masszahl, mersko število.
Meja, Grenze.
Mejišče, Grenzpunkt.
Mejna ploskev, mejnina, Grenzfläche.
Mer, Richtung.
Mera, Mass.
Merska letva, Messlatte.
Merska vrvica, Messband.
Merski drog, Messtange.
Merski lanec, Messkette.
Merski praporec, Messfahne.
Minuta, Minute.
Mittelpunkt, središče.
Mittellinie, srednica*.
Mnogokotnik, Vieleck.
Mnogokotnik vpisan, eingeschrieben.
Mnogokotnik opisan, umgeschrieben.
Mreža, Netz.

N.

Načelo, Grundsatz, Axiom.
Načrt, Aufriss.
Naloga, Aufgabe.
Naloga za načrtovanje, Constructions-Aufgabe.
Nasproten, gegenüberliegend.
Naris*, Darstellung.
Navpičen, lothrecht.
Nebenwinkel, sokot.
Nedoločen, unbestimmt.
Nejednak, ungleich.
Nepravilen, unregelmässig.
Nepremičen, fest.
Nesomeren, incommensurabel.
Nevzporednica, eine nicht parallele Gerade.
Normalno, normal.

O.

Oberfläche, površje.
Oblo, Kugel.
Oblina*, Kugelfläche.
Obmer, Ausdehnung.
Obod, Kreisumfang.
Obrat, Umkehrung.
Obseg, Umfang.
Obstransko površje (obstranje*), Seitenoberfläche.
Obstranska višina, Seitenhöhe.
Očnica, Ocular.
Očrt, Grundriss.
Odmičen, divergent.
Odsek, Abschnitt.
Ogel, Ecke.
Ogel sovršen, Scheitelecke.
Oglišče, Eckpunkt.
Okrajšna* piramida, Pyramidalstumpf.
Okrajšan stožec, Kegelstumpf.
Octaeder, osmerec.
Omaljeno* merilo, verkleinerter Masstab.
Ordinata, Ordinate.
Os, Axe.
Os postranska, Nebenaxe.
Os glavna, Hauptaxe.
Os simetrije, Axe der Symmetrie.
Osnovna resnica, Grundwahrheit.
Osnovna ploskev (osnovina*), Grundfläche.
Osnovnica, Grundlinie.
Osnovni tvor, Grundgebilde.
Ostrokoten, spitzwinklig.

P.

Parallel, vzporeden.
Parallele, vzporednica.
Paralelepiped, Parallelepiped.
Paralelogram, Parallelogramm.
Periferija, Peripherie.
Perspektiven, perspectivisch.
Peterokotnik, Fünfeck.
Peterostran, -straničen, fünfseitig.
Pikičast, punktiert.
Piramida, Pyramide.
Piramidast, pyramidal.
Plast, Schichte.

Plašč, Mantel.
Ploskev, Fläche.
Ploskveno-jednak*, flächengleich.
Ploskvena vsebina*, ploščina*, Flächeninhalt.
Ploskvena jednota, Flächeneinheit.
Podaljšek*, Verlängerung.
Podnožišče, Fusspunkt.
Podobnišče*, Ähnlichkeitspunkt.
Pogoj, Bedingung, Voraussetzung.
Pogreznjula*, Senkelstok.
Pokončen*, gerade.
Polieder, Polyeder.
Poln, voll.
Polovišče, Halbierungspunkt.
Polovnica, Halbierungslinie.
Polukrog, Halbkreis.
Polokrogla*, Halbkugel.
Polumer, Halbmesser.
Poluravnina*, Halbebene.
Polutrak*, Halbstrahl.
Pomočna črta, Hilfslinie.
Poševen, schief.
Poševnokoten, schiefwinklig.
Povečati, vergrössern.
Površje, Oberfläche.
Pravilen, regelmässig.
Pravokoten, rechtwinklig.
Pravokotnica, senkrechte Linie.
Pravokotnik, Rechteck.
Pravokotni križ, Winkelkreuz.
Prečnica, Transversale.
Predmetnica, Objectiv.
Prekotnica, Diagonale.
Prema, Gerade.
Premer, Durchmesser.
Premo-črten, geradlinig.
Presečišče, Durchschnittspunkt.
Presečna ploskev (presečnina*), Schnittfläche.
Presek, Schnitt.
Pretvor, Verwandlung.
Pretvoriti, verwandeln.
Prevodnica, Leitstrahl.
Prikot*, Anwinkel.
Priležen, anliegend.
Primičen, convergent.
Prizma, Prisma.
Proga, Streifen.
Proizvodnica*, Resultatslinie.
Projicirati, projicieren.
Proportion, razmerje.
Proportioniert, sorazmeren.
Prostor, Raum.
Prostornina, Rauminhalt.
Protikot*, Gegenwinkel.
Protivorečje, Widerspruch.
Punkt, točka.

R.

Radij, Halbmesser.
Raumgrösse, prostorna količina.
Raven, eben.
Ravninje*, Ebenenbüschel.
Ravnoplosk*, ebenflächig.
Razdalja, razstoj, Abstand.
Razmerje, Verhältnis.
Raznokoten, ungleichwinklig.
Raznostran, -straničen, ungleichseitig.
Razpoloviti, razpolavljati, halbieren.
Razrešiti, razreševati, auflösen.
Razulja, Schrotwage.
Rechtwinklig, pravokoten.
Regelmässig, pravilni.
Resultatslinie, proizvodnica.
Richtung, mer.
Rob, Kante.
Romb, Rhombus.
Romboid, Rhomboid.

S.

Scheitel, vrh, teme.
Scheitelwinkel, sovršen kot.
Schenkel, krak.
Schief, poševen.
Schiefwinklig, poševnokoten.
Sečnica, Sekante.
Seite, stran, stranica, stranina.
Sekunda, Secunde.
Senkrecht, navpičen.
Simetrala, Symmetrale.
Simetričen, symmetrisch.
Simetrično-jednak, symmetrisch-gleich.
Skladen, congruent.

Skladnost, Congruenz.
Skupna mera, gemeinschaftliches Mass.
Slok, krumm.
Sokot, Nebenwinkel.
Sokotje*, Nebenwinkelgebilde.
Someren*, commensurabel.
Sorazmeren, proportioniert.
Sorazmerje, Proportion.
Sorazmerica, Proportionale.
Sosreden, concentrisch.
Spitzwinklig, ostrokoten.
Središče, Mittelpunkt.
Središčen* kot, Centriwinkel.
Središnica, Centrale.
Srednica*, Mittellinie.
Standpunkt, stališče.
Standlinie, stalnica.
Stopnja, Grad.
Stopnja ločna*, Bogengrad.
Stopnja kotna, Winkelgrad.
Stožec, Kegel.
Stožkovit, konisch.
Strahl, trak.
Strahlenbüschel, trakovje*.
Strahlenpunkt, tračišče.
Stran, stranica, stranina, Seite.
Stranska ploskev (stranina), Seitenfläche.
Strecke, daljica.
Stumpfwinklig, topokoten.
Supplementwinkel, suplementaren* kot.
Svinčnica, Senklot.

Š.

Šesterokotnik, Sechseck.
Šesterostran, -straničen, sechsseitig.
Šestilo, Cirkel.

T.

Tečaj, Pol.
Telo, Körper.
Teme, Scheitel.
Tetiva, Sehne.
Tetraeder, četverec.
Tisočdelno poprečno merilo, tausendtheiliger Transversal-Masstab.
Tlavid*, Mappe, Situation.
Točka, Punkt.
Topokoten, stumpfwinklig.
Tračišče, Strahlenpunkt.
Trak, Strahl.
Trakovje*, Strahlenbüschel.
Transversale, prečnica.
Trapec, Trapez.
Trapecoid, Trapezoid.
Trditev, Behauptung.
Trikotnik, Dreieck.
Trirobovnik, Dreikant.
Tristran, -straničen, dreiseitig.
Tvor, Gebilde.
Tvorna prema, erzeugende Gerade.

U.

Ugledavati*, einvisieren.
Umanjiti, verkleinern.
Umfang, obseg, Umfang des Kreises, obod.
Unašati, auftragen.
Unbestimmt, nedoločen.
Ungleichseitig, raznostran.
Ungleichwinklig, raznokoten.
Unregelmässig, nepravilen.
Utrkljaj, Kettennagel.

V.

Valj, Cylinder.
Verbindungslinie, (črta) zveznica.
Verhältnis, razmerje.
Verlängerung, podaljšek.
Vieleck, mnogokotnik.
Vierflächig, četveroplosk.
Vierseitig, čveterostran, -straničen.
Višina, Höhe.
Vodnica, Leitlinie.
Vodoraven, wagrecht.
Voll, poln.
Vrh, Scheitel.
Vrtenje, vrtnja, Drehung.
Vzmetna ravnina (vzmetnina), Projectionsebene.
Vzmetniti, projicieren.
Vzporeden, parallel.
Vzporednica, Parallele.
Vzporednik, Parallelogramm.

W.

Wagrecht, vodoraven.
Wechselwinkel, izmeničen kot.

Winkel, kot.
Winkelfläche, kotna ploskev (kotnina).

Z.

Zavit, gekrümmt.
Zavisen, abhängig.
Zavisnost, Abhängigkeit.
Zaznamenjevalka, Zeichenstab.
Znamenljiv, charakteristisch.
Zusatz, dostavek.
Zveznica, Verbindungslinie.

Ž.

Žarišče, Brennpunkt.

Kazalo.

Uvod.

Prvi del.

Planimetrija.

Prvi oddelek.

Preme in koti.

Drugi oddelek.

O premočrtnih likih v obče.

Tretji oddelek.

Skladnost premočrtnih likov.

Četrti oddelek.

Ploščina premočrtnih likov.

Peti oddelek.

O podobnosti premočrtnih likov.

Šesti oddelek.

Krog.

Sedmi oddelek.

Elipsa, hiperbola in parabola.

Osmi oddelek.

Simetrična lega, projekcija.

Drugi del.

Stereometrija.

Prvi oddelek.

Preme in ravnine v prostoru.

Drugi oddelek.

O prostorih in telesih.

Tretji oddelek.

Merjenje teles.

Dodatek.