Geometrie

für

Bürgerschulen

von

Dr. F. von Močnik.

4. Auflage.

80 kr.

Novoik Franz

Geometrie

in Verbindung mit dem Zeichnen

für

Bürgerschulen.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Mit 183 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Vierte unveränderte Auflage.

Preis 70 kr.

Prag: F. Tempsky. 1883. Leipzig: G. Freytag.

Druck von Heinr. Mercy in Prag.

Vorwort zur ersten Auflage.

Das von mir verfasste, bereits in 15. Auflage erschienene Lehrbuch „Anfangsgründe der Geometrie für Unterrealschulen“ ist bisher auch an den Bürgerschulen verwendet worden. Dabei mussten jedoch, da die Lehrpläne der beiden Gattungen von Schulen bezüglich der Anordnung des geometrischen Lehrstoffes wesentlich von einander abweichen, mehrere Partien aus ihrer Verbindung gerissen und an andere Stellen versetzt werden. Der Absicht, diesem Übelstande zu begegnen, verdankt das vorliegende Buch, das durch entsprechende Umarbeitung des obigen speciell für die Zwecke der Bürgerschulen eingerichtet wurde, seine Entstehung.

In der ersten Classe der Bürgerschule sollen den Schülern die ebenen Gebilde mit ihren charakteristischen Merkmalen vorgeführt werden; dazu dienen die ersten fünf Abschnitte des ersten Theiles dieses Buches, der die Planimetrie behandelt. Der sechste, siebente und achte Abschnitt, welche sich auf die Ähnlichkeit, auf die Berechnung des Umfanges und des Flächeninhaltes der ebenen Figuren beziehen, sowie der Anhang über kleine praktische Vermessungen und über das Situationszeichnen bilden den Lehrstoff für die zweite, die im zweiten Theile enthaltenen Lehren der Stereometrie den Lehrstoff für die dritte Classe.

Was die Darstellungsweise betrifft, suchte ich zwischen jenen Lehrbüchern, welche den Unterrichtsstoff mit ermüdender Breitspurigkeit vollständig ausgearbeitet enthallen, und zwischen solchen, welche ein bloßes Gerippe von Erklärungen, Lehrsätzen und Constructionsaufgaben bringen, die Mitte zu halten. Ich hoffe, dass das Buch in dieser Form sich am geeignetsten erweisen werde, die häusliche Wiederholung des in der Schule Gelernten zu unterstützen und dadurch das sichere und möglichst gleichmäßige Fortschreiten aller Schüler zu fördern.

Zu den einzelnen Lehrsätzen sind, wie der Lehrplan fordert, überall nur leichtfassliche Beweise gegeben worden, die theils auf ganz einfachen Schlüssen, theils auch unmittelbar auf den Beziehungen beruhen, welche sich aus der Entstehung der betreffenden Raumgebilde ergeben. An die Sätze über die Größenbestimmung der Flächen und Körper schließen sich zahlreiche Übungsaufgaben an, denen das metrische Maß zugrunde liegt.

Graz, im März 1874.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die gegenwärtige Auflage weiset in Vergleichung mit der früheren mehrseitige Verbesserungen bezüglich des Textes und dessen Anordnung nach. Die zum Verständnisse des Zeichnens einfacher Objecte des Bau- und Maschinenfaches erforderlichen, früher am Schlusse des Buches enthaltenen Grundlehren über die geometrische Darstellung der Raumgebilde auf einer Ebene sind, damit ihr inniger Zusammenhang mit den Sätzen der Stereometrie klarer hervortrete, hier bei der Behandlung der räumlichen Gebilde selbst an den geeigneten Stellen eingefügt worden. Einige Lehrstoffe, die der bestehende Lehrplan für Bürgerschulen nicht ausdrücklich vorschreibt, als die Aufnahme von Grundstücken mit dem Messtische und das Nivellieren, wurden in der vorliegenden Auflage gänzlich weggelassen; auch habe ich in dem Abschnitte über die Lage der Geraden gegen eine Ebene und der Ebenen gegen einander bedeutende Kürzungen vorgenommen.

Graz, im April 1877.

Der Verfasser.

Inhalt.

Zu Močnik's Geometrie für Bürgerschulen. 4. Auflage.

Berichtigung.

Da nach bereits beendigtem Drucke dieses Lehrbuches mit Erlasse des Herrn Ministers für Cultus und Unterricht vom 26. März 1883 Z. 5485 die Einführung gleicher, von den bisher gebrauchten theilweise abweichender Abkürzungszeichen für die metrischen Maß- und Gewichtsgrößen in den Schulen angeordnet wurde, so wird ersucht, in dem vorliegenden Buche in dieser Beziehung

für	Quadrat-Kilometer	anstatt	$\square Km$	durchgängig	km^2
„	Quadrat-Meter	„	$\square m$	„	m^2
„	Quadrat-Decimeter	„	$\square dm$	„	dm^2
„	Quadrat-Centimeter	„	$\square cm$	„	cm^2
„	Quadrat-Millimeter	„	$\square mm$	„	mm^2
„	Cubik-Kilometer	„	$\boxtimes Km$	„	km^3
„	Cubik-Meter	„	$\boxtimes m$	„	m^3
„	Cubik-Decimeter	„	$\boxtimes dm$	„	dm^3
„	Cubik-Centimeter	„	$\boxtimes cm$	„	cm^3
„	Cubik-Millimeter	„	$\boxtimes mm$	„	mm^3

zu setzen.

Einleitung.

Körper, Flächen, Linien und Punkte.

§. 1. Jedes Ding, das einen Raum einnimmt, heißt ein Körper. Jeden Körper kann man sich aus Theilen bestehend denken; er ist also eine Größe, und zwar, weil er sich im Raume ausdehnt, eine Raumgröße. Der Raum, den ein Körper einnimmt, ist nach allen Seiten hin begrenzt. Man sagt darum: Ein Körper ist ein nach allen Seiten begrenzter Raum.

Ein Körper, wie er in der Wirklichkeit vorkommt, besitzt außer der Eigenschaft, einen Raum einzunehmen, noch verschiedene andere Merkmale, als: Stoff, Farbe, Härte, Gewicht, u. dgl. Ein solcher Körper heißt ein physischer Körper. Denkt man sich von einem physischen Körper alle anderen Eigenschaften hinweg und betrachtet an ihm nur den Raum, den er einnimmt, so hat man die Vorstellung eines mathematischen Körpers. Das einzige Merkmal, das einem mathematischen Körper zukommen muss, ist also das Ausgedehntsein im Raume.

Jeder Körper dehnt sich nach drei Hauptrichtungen aus, in die Länge, Breite und Höhe, auch Tiefe oder Dicke.

§. 2. Die Grenzen der Körper heißen Flächen. Eine Fläche ist eine Raumgröße, welche nur zwei Ausdehnungen hat, Länge und Breite.

Die Fläche ist kein Theil eines Körpers, sie ist nur dessen Grenze. Wenn man noch so viele Flächen auf einander legt, so kann kein Körper entstehen, man erhält immer wieder eine Fläche.

§. 3. Die Grenzen der Flächen heißen Linien. Eine Linie ist eine Raumgröße, welche nur eine Ausdehnung hat, die Länge.

Die Linie ist weder ein Theil der Fläche, noch ein Theil des Körpers; sie ist bloß die Grenze einer Fläche. Wenn man noch so viele Linien an einander legt, so erhält man doch keine Fläche und keinen Körper, sondern immer nur wieder eine Linie.

§. 4. Die Grenzen der Linien heißen Punkte. Der Punkt ist weder lang, noch breit, noch dick, er hat keine Ausdehnung und ist daher keine Größe.

Ein Punkt ist kein Theil einer Linie, er ist nur die Grenze derselben. Wenn man noch so viele Punkte in einander legt, so erhält man doch keine Linie, sondern stets nur einen Punkt.

Entstehung und Eintheilung der Linien, Flächen und Körper.

§. 5. Wenn sich ein Punkt im Raume fortbewegt, so entsteht eine Linie.

Die Linien theilt man in gerade und krumme ein. Bewegt sich ein Punkt ununterbrochen in derselben Richtung fort, so heißt die dadurch entstehende Linie eine gerade Linie oder eine Gerade. Wenn aber der Punkt bei der Bewegung seine Richtung fortwährend ändert, so heißt die dadurch beschriebene Linie eine krumme Linie.

Ein Stein, den man frei fallen läßt, fällt in einer geraden Linie zur Erde; ein Stein, welcher seitwärts geworfen wird, beschreibt eine krumme Linie.

Eine Linie, welche aus lauter geraden Linien zusammengesetzt, aber selbst nicht gerade ist, heißt eine gebrochene Linie.

§. 6. Wenn sich eine Linie im Raume in einer anderen Richtung als in der ihrer Verlängerung fortbewegt, so entsteht eine Fläche.

Zur Versinnlichung dieser Bewegung kann man sich eines Stäbchens oder eines Drahtes bedienen.

Die Flächen theilt man in ebene und krumme ein. Eine Fläche, auf welcher nach jeder beliebigen Richtung eine gerade Linie gezogen werden kann, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene. Eine Fläche, auf welcher sich entweder nur nach einer oder nach gar keiner Richtung gerade Linien ziehen lassen, heißt eine krumme Fläche.

§. 7. Wenn sich eine Fläche in einer anderen Richtung als in der ihrer Erweiterung fortbewegt, so entsteht ein Körper.

Zur Versinnlichung dieser Bewegung kann man sich eines Papierblattes bedienen.

Die Körper theilt man in eckige und runde ein. Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein eckiger oder ebenflächiger Körper. Ein Körper, welcher nicht von lauter Ebenen, sondern entweder bloß von krummen oder theils von ebenen, theils von krummen Flächen begrenzt wird, heißt ein runder oder krummflächiger Körper.

Betrachte die Modelle der geometrischen Grundkörper und gib bei jedem derselben an, wie viele Punkte, wie viele nnd was für Linien, wie viele und was für Flächen daran vorkommen, ob daher der Körper ein eckiger oder ein runder ist.

Figuren oder Gebilde.

§. 8. Allseitig begrenzte Raumgrößen heißen Figuren oder Gebilde. Man unterscheidet ebene und räumliche Gebilde.

Jene liegen in einer und derselben Ebene, diese liegen nicht in einer und derselben Ebene.

Die ebenen Gebilde sind nach der Beschaffenheit ihrer Grenzen entweder geradlinig, oder krummlinig oder gemischtlinig.

Die räumlichen Gebilde sind nach der Beschaffenheit ihrer Grenzen entweder ebenflächig oder krummflächig oder gemischtflächig.

Größe und Gestalt der Raumgrößen.

§. 9. Bei jeder Raumgröße nimmt man insbesondere auf zwei Sachen Rücksicht, auf die Größe und auf die Form oder Gestalt.

Zwei Raumgrößen können verschiedene Gestalt, aber gleiche Größe haben. So kann eine krumme Linie dieselbe Länge haben, wie eine Gerade; eine rund begrenzte Wiese kann eben so viel Flächenraum einschließen, als eine viereckige; hier ist also die Gestalt verschieden, die Größe gleich. Raumgrößen, welche dieselbe Größe haben, heißen gleich. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$.

Umgekehrt können zwei Raumgrößen dieselbe Gestalt haben, während sie sich in der Größe unterscheiden, z. B. zwei Kreise, oder zwei Würfel, welche verschiedene Größen haben. Raumgrößen, welche dieselbe Gestalt haben, heißen ähnlich. Das Zeichen der Ähnlichkeit ist $\sim$.

Raumgrößen, welche dieselbe Größe und dieselbe Gestalt haben, heißen congruent. Zwischen zwei congruente Größen wird, da sie gleich und ähnlich sind, das Zeichen $\cong$ gesetzt. Zwei congruente Raumgrößen unterscheiden sich nur durch den Ort, in dem sie sich befinden; sie müssen daher, wenn die eine durch Verschieben oder durch Drehung an die Stelle der andern gelegt wird, sich vollständig decken.

Geometrie und ihre Eintheilung.

§. 10. Die Lehre von den Raumgrößen wird Geometrie genannt.

Sie zerfällt in zwei Haupttheile: in die Planimetrie und in die Stereometrie. Die Planimetrie handelt von jenen Raumgrößen, welche in einer und derselben Ebene liegen; die Stereometrie aber beschäftigt sich mit jenen Raumgrößen, welche sich nicht in einer und derselben Ebene, sondern im dreifach ausgedehnten Raume befinden.

Erster Theil.

Die Planimetrie.

I. Punkte, gerade Linien und Winkel.

1. Punkte.

Darstellung des Punktes.

§. **11.** Ein mathematischer Punkt kann, da er weder Länge, noch Breite, noch Dicke besitzt, nicht gesehen, sondern nur gedacht werden. Um nun die Stelle, wo man sich einen Punkt denkt, dem Auge sichtbar zu machen, bringt man dort mit dem Bleistifte, mit der Feder oder Kreide einen Tupfen an. Die materiellen Zeichen haben jedoch, wenn sie noch so fein gemacht werden, immer etwas Länge, Breite und Dicke, sind also Körper und nicht mathematische Punkte; sie sind nur Zeichen der Punkte. Je feiner das Punktzeichen gemacht wird, desto näher kommt es dem gedachten mathematischen Punkte.

Ein Punkt wird dadurch angegeben, dass man zu dem ihn versinnlichenden Tupfen einen Buchstaben oder eine Zahl setzt.

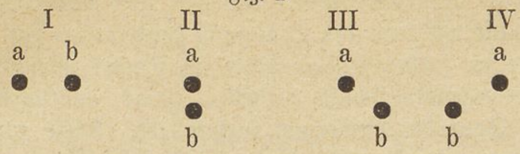
In der Wirklichkeit betrachtet man solche Örter oder Gegenstände, durch welche die Lage und Größe von Linien bestimmt wird, als bloße Punkte. Wenn man z. B. von der Entfernung zweier Städte von einander spricht, so wird jede Stadt nur als ein Punkt angesehen.

Auf dem Felde werden Punkte durch Pflöcke oder andere Merkmale kenntlich gemacht.

Gegenseitige Lage der Punkte.

§. **12.** Zwei Punkte a und b (Fig. 1) können entweder neben einander liegen, wie in I, wo der Punkt a links von dem Punkte b, und der Punkt b rechts von dem Punkt a liegt; oder sie können gerade über einander liegen, wie in II, wo a über b, und b unter a liegt; oder sie können schräg oberhalb oder unterhalb einander liegen, wie in III und IV.

Fig. 1.



Welche und wie viele Lagen sind bei drei Punkten möglich? Zeichne dieselben. Zeichne vier Punkte, welche a) nebeneinander, b) gerade über einander, c) in derselben Richtung schräg oberhalb einander liegen.

2. Gerade Linien.

Bestimmung der Geraden.

§. 13. Durch *einen* Punkt lassen sich unzählig viele gerade Linien in allen möglichen Richtungen ziehen. Ist noch ein *zweiter* Punkt gegeben, so wird es unter allen früheren Richtungen der Geraden eine einzige geben, in welcher die Gerade durch beide Punkte geht. *Durch zwei Punkte ist eine gerade Linie vollkommen bestimmt.*

Zwei Gerade, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen und bilden eine einzige Gerade.

Zwei von einander verschiedene Gerade können nur *einen* gemeinschaftlichen Punkt haben. Man sagt: sie *schneiden* sich in diesem Punkte, und nennt den gemeinschaftlichen Punkt ihren *Durchschnittspunkt*.

§. 14. Die *unbegrenzte* Gerade wird durch jeden in ihr liegenden Punkt in zwei Theile getheilt, deren jeder sich nur nach einer Richtung unbegrenzt ausdehnt. Eine durch einen Punkt *halb begrenzte* Gerade heißt *Strahl*. Eine durch zwei Punkte *ganz begrenzte* Gerade heißt *Strecke*; die beiden Grenzpunkte nennt man ihre *Endpunkte*.

Die Strecke zwischen zwei Punkten bestimmt die *Entfernung* oder den *Abstand* derselben.

Ein Strahl wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt, eine Strecke durch ihre Endpunkte bezeichnet.

Unbegrenzte oder halbbegrenzte gerade Linien lassen sich nur der Richtung nach, Strecken der Richtung und Länge nach bestimmen.

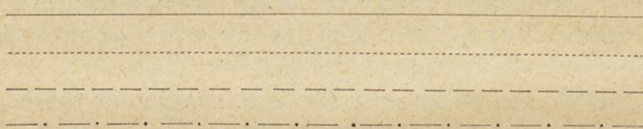
Darstellung der Geraden.

§. 15. Da eine Linie durch die stetige Bewegung eines Punktes entsteht, so ergibt sich daraus auch die Art und Weise, wie man eine

Linie sichtbar darstellen kann. Um den Weg kenntlich zu machen, den der Punkt während der Bewegung durchlaufen hat, muss man die Spitze einer farbelassenden Feder oder eines Bleistiftes, welche den sich bewegenden Punkt vorstellt, etwas andrücken, wodurch überall die Spur der Bewegung zurückbleibt. Diese zurückgelassene Spur ist dann, da sie nicht bloß die Länge, sondern auch immer etwas Breite und Dicke hat, zwar keine mathematische Linie, sie ist nur das *Zeichen* der Linie. Je feiner die Linie gezeichnet wird, desto mehr nähert sie sich der mathematischen Linie.

Die gezeichneten Linien heißen *volle*, *punktierte*, *gestrichelte* oder *gestrichelt punktierte*, je nachdem sie ohne Unterbrechung, oder durch Punkte, oder durch Striche, oder durch Striche und Punkte dargestellt sind (Fig. 2).

Fig. 2.



Es wird Anfängern angerathen, sich im Zeichnen sehr langer gerader Linien aus freier Hand fleißig zu üben. Dabei bestimmt man zwischen den beiden Endpunkten mehrere Zwischenpunkte und nimmt dann das Zeichnen der Linie stückweise vor.

Eben so wird das Verlängern einer Geraden über einen Endpunkt hinaus wesentlich erleichtert, wenn man vorerst einen oder mehrere Punkte bestimmt, welche mit den Endpunkten der gegebenen Geraden in derselben Richtung liegen.

Zum *geometrischen* Zeichnen gerader Linien bedient man sich des *Lineals*.

Wie prüft man die Richtigkeit eines Lineals?

Bauhandwerker bilden gerade Linien mittelst einer straff gespannten Schnur.

Aufgaben.

1. Bestimme zwei Punkte und verbinde sie aus freier Hand durch eine Strecke.
2. Verlängere diese Strecke über den einen Endpunkt hinaus.
3. Bestimme drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, und ziehe durch je zwei eine Gerade. Wie viele Gerade sind da möglich?
4. Wie viele Strecken sind zwischen einer bestimmten Anzahl von Punkten, von denen je drei nicht in einer geraden Linie liegen, möglich?

Zwischen 2 Punkten ist nur 1 Strecke möglich,
„ 3 „ sind $1+2=3$ Strecken möglich,
„ 4 „ „ $1+2+3=6$ „ „
„ 5 „ „ $1+2+3+4=10$ „ „ u. s. w.
Gesetz!

§. 16. Auf dem Felde werden gerade Linien durch eine zwischen zwei Pflöcken ausgespannte Schnur bezeichnet; häufig wird die Gerade zwischen zwei durch Pflöcke, Stäbe, Messfahnen oder andere Merkmale bezeichneten Punkten auch nur gedacht.

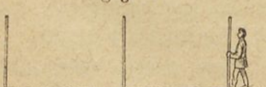
Wenn die Endpunkte einer Geraden auf dem Felde sehr weit von einander abstehen, so dass man von dem einen zu dem andern nicht deutlich genug sehen kann, so werden mehrere Zwischenpunkte bestimmt, welche mit den Endpunkten in gerader Linie liegen. Man nennt das Bestimmen solcher Zwischenpunkte das Abstecken der Geraden, und die dazu gebrauchten Stangen Absteckstäbe.

Um zwischen zwei Stäben A und B (Fig. 3) einen dritten C in gerade Linie zu bringen, trete man ein paar Schritte hinter den einen Stab B zurück, lasse durch einen Gehilfen den einzurichtenden Stab zwischen zwei Fingern frei halten und gebe ihm durch Zeichen mit der Hand zu verstehen, dass er seinen Stab so lange rechts oder links bewege, bis man ihn in der Richtung der beiden Stäbe B und A erblickt, indem man dabei immer an derselben Seite der Stäbe vorbeivisiert; ist dieses der Fall, so gibt man dem Gehilfen ein Zeichen, worauf er den Stab frei fallen läßt und in dieser Stellung in die Erde steckt. — Beim Abstecken einer langen Linie werden immer die entfernteren Stäbe früher eingerichtet, als die näheren.

Fig. 3.

Um eine Gerade AB (Fig. 4) auf dem Felde bis zum Punkte C zu verlängern, stelle man sich nach dem Augenmaße in der Gegend dieses Punktes auf, visiere an der Seite des Stabes, den man zwischen zwei Fingern frei hält, nach den beiden Stäben B und A, wodurch die zu verlängernde Gerade bezeichnet ist, und bewege sich mit seinem Stabe so lang rechts oder links, bis sich alle drei Stäbe decken; dann wird der Stab gehörig in die Erde gesteckt.

Fig. 4.



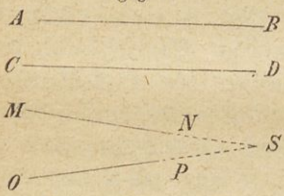
Parallele und nichtparallele Gerade.

§. 17. Bei den geraden Linien hat man auf zwei Sachen Rücksicht zu nehmen, auf die Richtung und auf die Länge derselben.

Zwei Gerade, welche in einer Ebene liegen, haben entweder dieselbe Richtung, oder sie weichen in ihren Richtungen von einander ab. Haben zwei gerade Linien dieselbe Richtung, so dass sie überall gleich weit von einander abstehen, so heißen sie parallel; wenn aber ihre Richtungen von einander abweichen, so daß sie sich auf der einen Seite nähern, auf der anderen entfernen, so heißen sie nichtparallel. Die nichtparallelen Geraden werden nach jener Seite hin, wo sie sich nähern, convergierend, nach der andern Seite divergierend genannt. So sind (Fig. 5) AB und CD parallele Linien, MN und OP convergierend, NM und PO divergierend.

Dass AB mit CD parallel ist, drückt man so aus: AB || CD.

Fig. 5.



Zwei parallele Gerade können, weil sie durchaus gleich weit von einander entfernt bleiben, nie zusammentreffen, wenn man sie auch noch so weit verlängert; zwei nichtparallele Gerade aber müssen, hinlänglich verlängert, in einem Punkte zusammentreffen, und zwar auf derjenigen Seite, nach welcher sie convergieren. Convergierende Gerade haben daher immer einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, aber auch nur einen einzigen.

In der Wirklichkeit pflegt man häufig auch solche Linien, welche nichtparallel sind, aber in ihrer Richtung so wenig abweichen, dass sie sich erst in einer sehr großen Entfernung schneiden würden, als parallel anzunehmen. Die Sonnenstrahlen fahren divergierend aus, aber wegen der sehr großen Entfernung der Sonne von der Erde kann man Sonnenstrahlen, welche auf zwei nahe liegende Orte der Erde auffallen, fast ohne Fehler als parallel betrachten. Wenn man einen Körper fallen läst, bewegt er sich in der Richtung gegen die Mitte unserer Erde; die Linien, in welchen zwei frei fallende Körper sich bewegen, würden also, wenn man sie verlängern könnte, im Mittelpunkte der Erde zusammentreffen, sind demnach convergierend; weil jedoch die Entfernung bis zur Mitte der Erde sehr groß ist, so ist für eine kleine Strecke der Erde die Abweichung in den Richtungen jener beiden Geraden so gering, dass man dieselben füglich als parallel annehmen darf.

Um zu einer schon gezeichneten Geraden eine Parallele aus freier Hand zu zeichnen, bestimme man zuerst zwei oder mehrere in gleicher Entfernung von der gegebenen Geraden liegende Punkte und ziehe dann durch dieselben eine gerade Linie.

Aufgaben.

1. Zeichne eine Gerade, und zu ihr in beliebiger Entfernung eine Parallele.
2. Zeichne eine Gerade, und zu ihr durch einen nicht in ihr liegenden Punkt eine Parallele.
3. Zeichne zwei Parallele, und zu ihnen noch eine dritte Parallele.
4. Zeichne eine Gerade in beliebiger Richtung, und zu ihr in gleichen Entfernungen drei Parallele.
5. In wie vielen Punkten können sich eine bestimmte Anzahl gerader Linien, von denen je zwei nicht parallel sind, schneiden?

2 Gerade haben 1 Durchschnittspunkt,
3 „ „ $1+2=3$ Durchschnittspunkte,
4 „ „ $1+2+3=6$ „
5 „ „ $1+2+3+4=10$ „ u. s. w.
Gesetz!

Verticale, horizontale und schräge Gerade.

§. 18. 1. Eine Gerade, welche die Richtung eines Bleilothes d. i. eines freihängenden, durch eine Bleikugel gespannten Fadens hat, heißt vertical oder lothrecht. Ein freifallender Körper fällt in verticaler Richtung.

Wird durch eine verticale Gerade eine Ebene gelegt, so heißt diese eine Vertical-Ebene.

Welche Handwerker bedienen sich des Lothes oder Senkbleies?
Wann stehet an einem Wagebalken das Zünglein vertical?

Beim Zeichnen wird die Verticale durch eine von oben nach unten oder umgekehrt gezogene Gerade dargestellt.

Um eine Verticale mit freier Hand zu zeichnen, bestimmt man mehrere Punkte, welche gerade über einander liegen, und zieht durch dieselben, wenn die Verticale lang sein soll, von oben nach unten, und wenn die Verticale nur kurz sein soll, von unten nach oben eine Gerade.

2. Eine Gerade, welche die Richtung eines am ruhigen Wasserspiegel schwimmenden Stäbchens oder eines auf beiden Seiten gleichbelasteten Wagebalkens hat, heißt horizontal oder wagrecht.

Eine Ebene, in welcher sich nach allen Richtungen horizontale Gerade ziehen lassen, heißt eine Horizontal-Ebene; z. B. die Oberfläche des Wassers, die Bodenfläche eines Zimmers.

Beim Zeichnen wird die Horizontale durch eine von der Linken gegen die Rechte gehende Gerade dargestellt.

Um eine Horizontale aus freier Hand zu zeichnen, bestimmt man mehrere neben einander liegende Punkte und zieht dann durch dieselben eine Gerade.

Eine gerade Linie, welche weder vertical noch horizontal ist, heißt schräge oder schief.

Aufgaben.

1. Wie viele verticale Linien sind durch einen Punkt möglich?
2. Wie viele horizontale Linien sind durch einen Punkt möglich?
3. Ziehe auf deiner Schreibtafel eine beliebige Gerade und bringe dann die Tafel in eine solche Lage, dass die Gerade a) eine verticale, b) eine horizontale, c) eine schräge Richtung hat.
4. Zeichne in gleichen Entfernungen fünf horizontale Linien.
5. Zeichne ebenso fünf verticale Linien.
6. Zeichne ebenso fünf schräge, zu einander parallele Linien a) von links unten nach rechts oben, b) von links oben nach rechts unten.

Gleiche und ungleiche Strecken.

§. 19. Um zwei Strecken hinsichtlich ihrer Länge zu vergleichen, lege man sie so auf einander, daß sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Fallen dann die anderen zwei Endpunkte ebenfalls zusammen, so sind die beiden Strecken gleich. Fallen aber die anderen Endpunkte der beiden Strecken nicht zusammen, so sind die Strecken ungleich, und zwar ist diejenige die kleinere, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der andern Strecke liegt, diese die größere.

Wenn zwei Strecken gleich sind, muss man sich dieselben auch so vorstellen können, dass sie auf einander gelegt sich decken.

Um anzuzeigen, daß die Strecken AB und CD ungleich sind, schreibt man

AB > CD, wenn AB größer ist als CD und

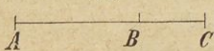
AB < CD, wenn AB kleiner ist als CD.

Zeichne in gleichen Entfernungen a) sechs horizontale, b) sechs verticale, c) sechs schräge Strecken, welche gleich lang sind.

Summe und Differenz der Strecken.

§. 20. 1. Zeichnet man (Fig. 6) eine Strecke AB und verlängert sie um die Strecke BC, so ist die verlängerte Strecke AC so groß, als AB und BC zusammengenommen, oder es ist AC die Summe der beiden Strecken AB und BC, was so angeschrieben wird:

Fig. 6.



AC = AB + BC.

2. Zeichnet man eine Strecke AC (Fig. 6) und trägt auf dieselbe eine kleinere Strecke BC von C aus bis B auf, so zeigt der unbedeckte Theil AB der größeren Strecke an, um wie viel diese länger ist als die kleinere Strecke; AB ist also die Differenz zwischen AC und BC, was so ausgedrückt wird:

AB = AC — BC.

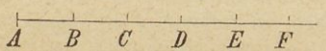
Aufgaben.

1. Zeichne eine Strecke AC, und nimm darin irgendwo zwischen den Endpunkten einen Punkt B an. Welche zwei Strecken sind dadurch entstanden? Was ist die ursprüngliche Strecke in Bezug auf dieselben? — Wie wird daher eine Strecke als Summe zweier Strecken dargestellt?
2. Zeichne eine Strecke AB, verlängere sie über B hinaus um ein beliebiges Stück BC. Um wieviel ist die verlängerte Strecke AC größer als die Verlängerung BC? — Wie kann man also eine Strecke als Differenz zweier Strecken darstellen?
3. Zeichne eine Strecke ab, verlängere sie über b hinaus, und bestimme zwei Punkte c und d so, daß $ab = bc + ac$ und $ab = ad - bd$ wird.

Vielfache und Theile der Strecken.

§. 21. 1. Trägt man (Fig. 7) auf eine Gerade von A aus die gleichen Stücke AB, BC, CD, DE, . . . auf, so ist

Fig. 7.



AC das Doppelte von AB,
AD das 3fache von AB,
AE das 4fache von AB, u. s. w.

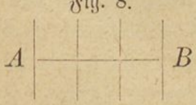
Die erhaltenen Strecken sind also **Vielfache** der Strecke AB.

2. Umgekehrt ist AB die Hälfte von AC, das Drittel von AD, der 4te Theil von AE, u. s. w. Die Strecke AC ist also durch den Punkt B in 2, AD durch die Punkte B und C in 3, AE durch die Punkte B, C und D in 4 gleiche **Theile** getheilt.

Aufgaben.

1. Zeichne eine Strecke und verlängere sie so, dass sie 3mal so lang wird, als sie ursprünglich war.
2. Zeichne zwei horizontale Strecken, von denen die zweite 5mal so groß ist als die erste.
3. Zeichne sechs parallele Strecken so, dass die zweite das Doppelte der ersten, die dritte das 3fache der ersten, . . . die sechste das 6fache der ersten sei.
4. **Eine gegebene Strecke aus freier Hand in 2 gleiche Theile zu theilen** oder **zu halbieren**. — Man bestimme in der Strecke einen Punkt so, dass er von den beiden Endpunkten derselben gleich weit entfernt ist.
5. Zeichne eine Strecke, theile sie in 2 gleiche Theile und dann jede Hälfte wieder in 2 gleiche Theile. Wie viele gleiche Theile erhältst du? — Wie wird also eine Strecke in 4 gleiche Theile getheilt?
6. Wie wird eine Strecke in 8, 16 gleiche Theile getheilt?
7. **Eine Strecke AB (Fig. 8) in 3 gleiche Theile zu theilen.** — Man bestimme in der Strecke zwei Punkte so, dass sie von einander und von den Endpunkten der Strecke gleich weit abstehen.

Fig. 8.



Im allgemeinen wird man bei der Theilung einer Strecke in gleiche Theile die beiläufig bestimmten

Theilungspunkte mit dem Bleistifte zuerst sehr fein bezeichnen, dann durch die Theilungspunkte und durch die Endpunkte kleine parallele Linien ziehen und ihre Abstände vergleichen. Sind diese gleich, so ist die Theilung richtig; sind sie ungleich, so müssen die etwa unrichtigen Theilungspunkte so lange nach rechts oder links verschoben werden, bis jene Abstände gleich groß erscheinen.

8. Theile eine gezeichnete Strecke in 2 gleiche Theile und dann jeden Theil wieder in 3 gleiche Theile. — Wie wird also eine Strecke in 6 gleiche Theile getheilt?
9. Wie wird eine Strecke in 12, 24, — in 9, 18 gleiche Theile getheilt?
10. Theile eine Strecke in 5, 7 gleiche Theile. (Der Vorgang ist ähnlich wie bei der Theilung einer Strecke in 3 gleiche Theile.)
11. Wie wird eine Strecke in 10, 15, 20, — in 14 gleiche Theile getheilt?

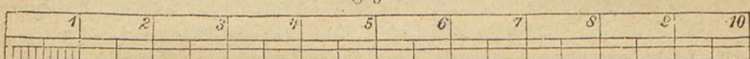
Messen der Strecken.

§. 22. Die Länge einer Strecke bestimmen, heißt dieselbe messen. Um eine Strecke zu messen, nimmt man irgend eine Strecke von bestimmter Länge als Einheit an, und untersucht, wie oft die als Einheit angenommene Strecke in der zu messenden enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die Maßzahl der Strecke.

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter (*m*), das in 10 Decimeter (*dm*) à 10 Centimeter (*cm*) à 10 Millimeter (*mm*) eingetheilt wird. 1000 Meter = 1 Kilometer (*Km*), 10 Kilometer = 1 Myriameter (*Mm*).

Zum Ausmessen der Längen dienen Stäbe von Holz oder Metall, worauf eine oder mehrere Längeneinheiten nebst den Untertheilungen aufgetragen sind; sie heißen Maßstäbe. Fig. 9 stellt die Länge eines Decimeters mit dessen Eintheilung in Centimeter und Millimeter vor.

Fig. 9.



Anfängern ist anzurathen, dass sie zur Übung des Augenmaßes verschiedene Längen zuerst annäherungsweise mit dem Auge abschätzen und dann mit dem Maßstabe genau messen.

Zum Messen der Strecken auf dem Felde bedient man sich der Messlatten oder der Messkette.

Verjüngte Maßstäbe.

§. 23. Wenn man eine in der Natur gemessene Strecke auf dem Papiere verzeichnen will, so geschieht dieses gewöhnlich nicht in der wahren Größe, sondern in einem kleineren, verjüngten Maße. Es wird nämlich angenommen, dass eine bestimmte Länge, z. B.

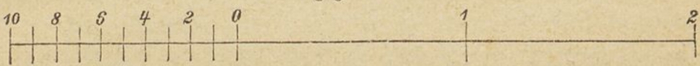
ein Centimeter auf dem Papiere, eine bestimmte Länge z. B. ein Meter oder 20 Meter in der Wirklichkeit vorstellen soll.

Ein Maßstab, auf welchem die in der Wirklichkeit üblichen Längenmaße verkleinert aufgetragen sind, heißt ein verjüngter Maßstab, im Gegensatze zu einem natürlichen Maßstabe, worauf die Längeneinheit in ihrer wahren Größe aufgetragen wird.

Einen Maßstab von 3 Meter, worauf man auch Decimeter entnehmen kann, in der Verjüngung $1\,m = 3\,cm$ natürlicher Größe zu zeichnen.

Man zeichne (Fig. 10) eine Gerade, trage darauf $3\,cm$ natürlicher Größe 3mal auf und theile dann den ersten Theil links in 10 gleiche Theile.

Fig. 10.



Aufgaben.

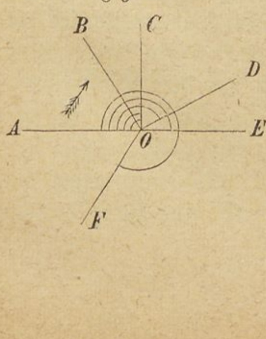
1. Ziehe drei parallele Gerade, und trage von dem obigen Maßstabe auf die erste $2\,m$, auf die zweite $1\,m\ 5\,dm$, auf die dritte $2\,m\ 7\,dm$ auf.
2. Ziehe drei Strecken und bestimme nach dem obigen Maßstabe, wie viel Meter und Decimeter die Länge einer jeden beträgt.
3. Zeichne einen Maßstab von $5\,m$, worauf $1\,m = 2\,cm$ des natürlichen Maßes ist und wovon man noch $5\,cm$ ablesen kann.
4. Zeichne mit beliebiger Verjüngung einen Maßstab von 400 Meter so, dass man noch die Zehner der Meter abnehmen kann.

3. Winkel.

Entstehung und Bezeichnung der Winkel.

§. 24. Dreht sich der Strahl OA (Fig. 11) in einer und derselben Ebene um den Grenzpunkt O in der Richtung des Pfeiles, so dass er nach und nach in die Lagen OB, OC, OD, . . . und zuletzt wieder in die ursprüngliche Lage zu stehen kommt, so weicht er bei dieser Drehung von seiner ursprünglichen Lage OA immer mehr ab.

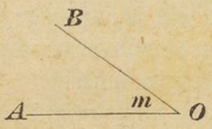
Fig. 11.



Die Abweichung der Richtungen zweier Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, heißt ein Winkel; die Strahlen, welche den Winkel bilden, nennt man die Schenkel, und ihren Durchschnittspunkt den Scheitel des Winkels.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch den Buchstaben am Scheitel, oder durch einen kleinen Buchstaben, den man in die Öffnung des Winkels setzt, oder durch drei Buchstaben, von denen zuerst der Buchstabe an dem einen Schenkel, dann der Buchstabe am Scheitel, und zuletzt der Buchstabe am andern Schenkel ausgesprochen wird. In dem Winkel (Fig. 12) ist O der Scheitel, OA und OB sind die Schenkel; der Winkel heißt daher: Winkel O, oder Winkel m, oder Winkel AOB oder BOA.

Fig. 12.



Auf dem Felde ist ein Winkel als bezeichnet anzusehen, wenn der Scheitelpunkt und irgend zwei in den Schenkeln liegende Punkte angegeben sind.

Ein Winkel wird desto größer, je mehr seine Schenkel von einander abweichen. Die Länge der Schenkel hat keinen Einfluss auf die Größe eines Winkels; denn wenn die Schenkel noch so weit verlängert werden, so behalten sie doch dieselben Richtungen, also bleibt auch die Abweichung ihrer Richtungen, d. i. der von ihnen gebildete Winkel unverändert.

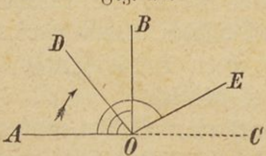
§. 25. Legt man die Flächen zweier Winkel so auf einander, dass die Scheitel und ein Paar Schenkel derselben zusammenfallen, so sind die beiden Winkel gleich, wenn das andere Paar Schenkel ebenfalls zusammenfällt, die Winkel sich also decken, und ungleich, wenn das andere Paar Schenkel nicht zusammenfällt. Im zweiten Falle ist derjenige Winkel der kleinere, dessen zweiter Schenkel zwischen den Schenkeln des andern Winkels liegt, dieser der größere.

Umgekehrt: Sind zwei Winkel gleich, so können sie mit den Winkelflächen so auf einander gelegt werden, dass, wenn der Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen, auch das andere Paar Schenkel zusammenfällt.

Arten der Winkel.

§. 26. 1. Dreht sich in einer Ebene der Strahl OA (Fig. 13) um den Grenzpunkt O, bis er den vierten Theil einer vollen Umdrehung gemacht hat, so heißt der dadurch erzeugte Winkel AOB ein rechter Winkel. Der rechte Winkel wird gewöhnlich mit dem Buchstaben R bezeichnet. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Fig. 13.

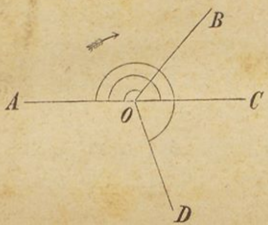


Ein Winkel AOD, zu dessen Entstehung weniger als eine Vierteldrehung erforderlich ist, heißt ein **spitzer** Winkel. Ein Winkel AOE, zu dessen Entstehung mehr als eine Viertel-, aber weniger als die halbe Umdrehung erfordert wird, heißt ein **stumpfer** Winkel. Ein spitzer Winkel ist also kleiner, ein stumpfer Winkel größer als ein rechter; beide werden auch **schiefe** Winkel genannt.

Um einen rechten Winkel zu erhalten, braucht man nur ein Stück Papier zweimal so zusammenzulegen, dass die Buglinien genau auf einander fallen.

2. Nach einer **halben Umdrehung** kommt der bewegliche Strahl in eine Richtung, welche seiner anfänglichen Richtung gerade entgegengesetzt ist. Der Winkel AOC (Fig. 14), welcher durch diese Drehung entsteht, heißt ein **gestreckter** Winkel. Seine Schenkel bilden eine gerade Linie. **Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei Rechten.**

Fig. 14.



Ein Winkel AOB, welcher kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein **hohler** Winkel. Ein Winkel AOD, welcher größer als ein gestreckter ist, heißt ein **erhabener** Winkel.

Der rechte, der spitze und der stumpfe Winkel sind hohle Winkel.

Von je zwei Strahlen werden immer zwei Winkel gebildet, ein hohler und ein erhabener; übrigens ist im allgemeinen immer der hohle zu verstehen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

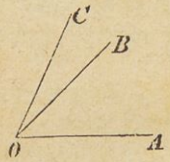
3. Nach einer **ganzen Umdrehung** gelangt der bewegliche Strahl wieder in seine ursprüngliche Lage. Der Winkel, der durch diese Drehung entsteht, heißt ein **voller** Winkel. Seine Schenkel fallen zusammen. **Ein voller Winkel ist gleich zwei gestreckten Winkeln oder vier Rechten.**

Aufgaben.

1. Was für einen Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 10, 15, 25, 30, 40 Minuten, in 1 Stunde?
2. Was für einen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr a) um 6, 3, 9 Uhr, b) um 2, 5, 10 Uhr?
3. Was für einen Winkel beschreibt die Windfahne, wenn sie sich a) von Nord nach Süd, b) von Ost nach Süd, c) von Süd durch West und Nord nach Ost, d) von Ost nach Südwest dreht?
4. Zeichne drei hohle Winkel, von denen der erste ein rechter, der zweite ein spitzer, der dritte ein stumpfer Winkel ist.
5. Zeichne a) einen gestreckten, b) einen erhabenen, c) einen vollen Winkel.

Summe und Differenz der Winkel.

Fig. 15.



§. 27. 1. Dreht man in dem Winkel AOB (Fig. 15) den Schenkel OB von OA weg, bis er in die Lage OC kommt, so entsteht der Winkel AOC, welcher so groß ist, als die beiden Winkel AOB und BOC zusammengenommen; der Winkel AOC ist also die Summe der Winkel AOB und BOC.

Folgende zwei Sätze können hiernach durch entsprechende Zeichnung zur Anschauung gebracht werden.

a) Die Summe aller Winkel, welche auf einer Seite einer geraden Linie liegen und einen gemeinschaftlichen in ihr liegenden Scheitel haben, ist gleich einem gestreckten Winkel oder zwei Rechten.

b) Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum neben einander liegen, ist gleich einem vollen Winkel oder vier Rechten.

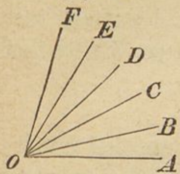
2. Wird in dem Winkel AOC (Fig. 15) der Schenkel OC um den Winkel COB gegen OA zurückgedreht, so daſs er in die Lage OB kommt, so entsteht der Winkel AOB, welcher die Differenz zwischen den Winkeln AOC und BOC ist.

Aufgaben.

1. Wie muſs man zwei Winkel an einander legen, um den Winkel zu erhalten, welcher ihre Summe ist?
2. Zeichne einen Winkel AOC und ziehe vom Scheitel O aus eine beliebige Gerade OB, die zwischen die Schenkel desselben fällt. Welche beiden Winkel sind dadurch entstanden? Was ist der ursprüngliche Winkel in Bezug auf dieselben?
3. Was für ein Winkel ist die Summe a) eines rechten und eines spitzen, b) eines rechten und eines stumpfen, c) eines gestreckten und eines hohlen Winkels?
4. Wie muſs man zwei Winkel an einander legen, um den Winkel zu erhalten, der ihre Differenz ist?
5. Zeichne einen Winkel AOB und ziehe vom Scheitel O aus eine beliebige Gerade OC, die nicht zwischen die Schenkel desselben fällt. Um wie viel ist der dadurch vergrößerte Winkel AOC größer als der Vergrößerungswinkel BOC?
6. Zeichne einen Winkel aob und ziehe vom Scheitel o aus zwei Gerade oc und od so, daſs aob = aoc + boc und aob = aod — bod wird.

Vielfache und Theile der Winkel.

Fig. 16.



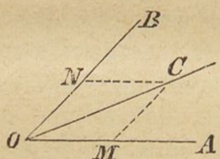
§. 28. 1. Sind (Fig. 16) die Winkel AOB, BOC, COD, DOE, . . . einander gleich, so ist der Winkel AOC das Doppelte des Winkels AOB, AOD das Dreifache, AOE das Vierfache von AOB, u. s. w. Die Winkel AOC, AOD, AOE, . . . sind also Vielfache des Winkels AOB.

2. Umgekehrt ist der Winkel AOB die Hälfte von AOC, der dritte Theil von AOD, der vierte Theil von AOE, u. s. w.

Aufgaben.

1. Zeichne nach dem Augenmaße drei Winkel, von denen der zweite 2mal, der dritte 3mal so groß ist als der erste.
2. Was für ein Winkel ist das Doppelte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten Winkels?
3. Was für ein Winkel ist die Hälfte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten, d) eines erhabenen, e) eines vollen Winkels?

Fig. 17.



4. Einen Winkel AOB (Fig. 17) in zwei gleiche Theile zu theilen, oder zu halbieren. — Man mache OM = ON und bestimme einen Punkt C so, dass er von M und N gleich weit entfernt ist; zieht man dann OC, so ist Winkel AOC = BOC = $\frac{1}{2}$ AOB.
5. Zeichne einen rechten Winkel und halbiere denselben.
6. Wie wird ein Winkel in 4, 8 gleiche Theile getheilt?
7. Versuche einen Winkel nach dem Augenmaße in 3, 5, 6 gleiche Theile zu theilen.

Das Winkelmaß.

§. 29. Zur Messung der Winkel nimmt man irgend einen bekannten Winkel als Einheit an und untersucht, wie oft derselbe in dem zu messenden Winkel enthalten ist.

Die Einheit des Winkelmaßes bildet wegen seiner unveränderlichen Größe der rechte Winkel. Man theilt ihn in 90 gleiche Winkel, welche Grade heißen; der 60ste Theil eines Grades heißt eine Minute, der 60ste Theil einer Minute eine Secunde.

Die Größe eines Winkels ist vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viel Grade und Gradtheile er enthält. Die Grade, Minuten und Secunden eines Winkels bezeichnet man durch ^{0}, $'$, $''$; z. B. 57 Grade 48 Minuten 15 Secunden = $57^0\ 48'\ 15''$.

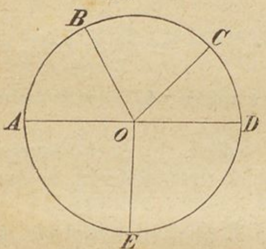
Aus den Erklärungen in §. 26 folgt:

Ein hohler Winkel enthält weniger als 180° und zwar insbesondere ein spitzer weniger als 90°, ein rechter 90°, ein stumpfer mehr als 90°. Ein gestreckter Winkel hat 180°, ein erhabener Winkel mehr als 180°, ein voller Winkel 360°.

Die Kreislinie.

§. 30. Dreht sich eine Strecke OA (Fig. 18) um den Punkt O in derselben Ebene so lange herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt während dieser Drehung der Punkt A eine krumme Linie ABCDEA, welche Kreislinie oder Kreis heißt. Die Kreislinie ist also eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, daß alle ihre Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit entfernt sind. Der Punkt O, von welchem alle Punkte der Kreislinie gleich weit abstehen, heißt der Mittelpunkt oder das Centrum; die ganze Kreislinie selbst wird auch Umfang oder Peripherie des Kreises genannt.

Fig. 18.



Eine Strecke, welche vom Mittelpunkte zu irgend einem Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Halbmesser (Radius) des Kreises, z. B. OA, OB, OC. Da alle Punkte der Peripherie vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, so sind alle Halbmesser eines Kreises einander gleich.

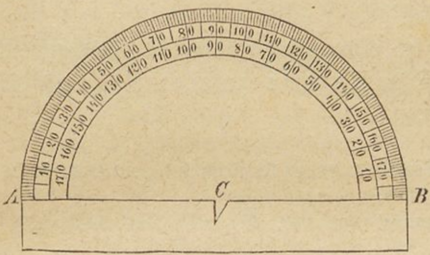
Eine Strecke AD, welche von einem Punkte des Umfanges durch den Mittelpunkt bis an die entgegengesetzte Seite des Umfanges gezogen wird, heißt ein Durchmesser (Diameter). Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als der Halbmesser desselben, daher sind auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleich.

Jeder Theil des Umfanges, wie AB, wird ein Kreisbogen genannt; die Hälfte des Umfanges heißt insbesondere ein Halbkreis, und der vierte Theil ein Quadrant.

Zum geometrischen Zeichnen des Kreises bedient man sich des Zirkels.

§. 31. Der Umfang eines jeden Kreises wird in 360 gleiche Bogen, welche man Bogengrade oder bloß Grade nennt, eingetheilt. Es kommen daher auf den Halbkreis 180, auf den Quadranten 90 Grade. Die Eintheilung des Halbkreises in Grade sieht man an dem Transporteur (Fig. 19), bei welchem die Kante AB den Durchmesser, und der Einschnitt C den Mittelpunkt vorstellt.

Fig. 19.



Jeder Grad wird in 60 gleiche Theile, Bogenminuten, und jede Minute in 60 Bogensecunden eingetheilt.

Man bezeichnet die Grade, Minuten und Secunden bei den Bogen auf gleiche Weise wie bei den Winkeln.

Messen der Winkel durch Kreisbogen.

§. 32. Theilt man die Peripherie eines Kreises in 360 Bogengrade und zieht von dem Mittelpunkte zu jedem Theilungspunkte einen Halbmesser, so entstehen um den Mittelpunkt 360 Winkel, welche alle unter einander gleich sind, weil bei je zweien, wenn sie gehörig auf einander gelegt werden, die Schenkel zusammenfallen. Die Summe aller dieser Winkel ist gleich 360 Winkelgraden; folglich ist einer derselben gleich einem Winkelgrade. Da hiernach ein Winkel am Mittelpunkte so viele Winkelgrade enthält, als der zugehörige Bogen Bogengrade hat, so kann jeder Winkel durch den Kreisbogen, welchen man aus dem Scheitel zwischen den Schenkeln beschreibt, gemessen werden.

Darauf beruht der Gebrauch des Transporteurs zum Messen gezeichneter Winkel, und zum Zeichnen in Graden angegebener Winkel.

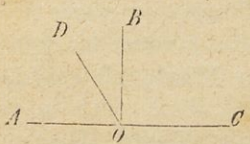
Aufgaben.

1. Zeichne beliebige Winkel, schätze zuerst ihre Größe nach dem Augenmaße ab, und miss sie dann mit dem Transporteur.
2. Zeichne zuerst nach dem Augenmaße aus freier Hand, und dann mit Hilfe des Transporteurs einen Winkel von 90°, 45°, 60°, 30°, 58°, 87°, 3°, 100°, 118°, 176°.

Nebenwinkel.

§. 33. Wird ein Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so entstehen zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide anderen

Fig. 20.



Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels in einer geraden Linie liegen. Solche Winkel heißen Nebenwinkel.

So ist AOB (Fig. 20) ein Nebenwinkel von BOC; ebenso sind AOD und COD Nebenwinkel.

Da je zwei Nebenwinkel zusammen genommen einen gestreckten Winkel geben, so folgt: Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Aufgaben.

1. Was für Winkel sind Nebenwinkel, wenn sie gleich sind, und was für Winkel sind sie, wenn sie ungleich sind?
2. Wie groß ist der Nebenwinkel von 20°, 35°, 64°, 100°, 148°, 55°, 40°, 115° 16′ 45″?

Senkrechte und schiefe Gerade.

§. 34. Bildet eine Gerade mit einer andern Geraden zwei gleiche Nebenwinkel, so sagt man: sie steht auf ihr senkrecht. Bildet eine Gerade mit einer andern Geraden zwei ungleiche Nebenwinkel, so steht sie auf ihr schief.

Eine Senkrechte bildet also mit der Geraden, worauf sie senkrecht steht, zwei rechte Winkel; eine Schiefe bildet mit der andern Geraden einen spitzen und einen stumpfen Winkel.

In Fig. 20 ist BO senkrecht auf AC, was man so bezeichnet: BO $\perp$ AC; dagegen steht DO auf AC schief.

Die Senkrechte wird auch Loth oder Perpendikel genannt.

Wenn sich eine horizontale und eine verticale Linie durchschneiden, so bilden sie stets einen rechten Winkel, stehen also immer senkrecht auf einander. Aber nicht von je zwei senkrechten Linien kann man sagen, dass die eine horizontal und die andere vertical ist. Bei der Wage steht immer das Zünglein senkrecht auf dem Wagebalken; jedoch ist das Zünglein nur dann vertical, und der Wagebalken horizontal, wenn die beiden Schalen leer oder gleich belastet sind; in jedem andern Falle sind sie schräge.

Übung im Zeichnen senkrechter Linien aus freier Hand.

Ziehe eine Gerade, nimm darin fünf Punkte an, und errichte in jedem derselben auf die Gerade eine Senkrechte. Welche Lage gegen einander haben diese Senkrechten?

Zeichne zwei parallele Gerade, nimm in der einen fünf Punkte an, und fälle aus jedem auf die andere Gerade eine Senkrechte. Wie verhalten sich diese Senkrechten in Bezug auf ihre Länge?

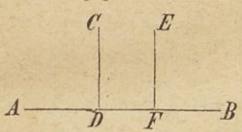
Zur Bestimmung der Senkrechten auf dem Felde dient das Winkelkreuz. Dieses besteht aus zwei unter rechten Winkeln zusammengefügten Brettchen, die an den Enden mit senkrechten Stiften versehen sind, und wird auf einem Stative horizontal befestigt.

Um auf dem Felde in einem Punkte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten, stelle man über den gegebenen Punkt den Mittelpunkt des Winkelkreuzes, und bringe die beiden Stifte des einen Brettchens in die Richtung der Geraden; dann visiere man über die beiden anderen Stifte, und lasse in ihrer Richtung einen Stab einsetzen; dieser gibt den Punkt an, durch welchen die gesuchte Senkrechte gehen soll.

Um mit Hilfe dieses Werkzeuges denjenigen Punkt O (Fig. 20) der Geraden AC zu bestimmen, in welchem die von B darauf gezogene Senkrechte eintrifft, lasse man in B einen Stab einstecken, und stelle sich mit dem Winkelkreuze in der Geraden AC dort auf, wo beiläufig die Senkrechte hinfallen dürfte; bringe die beiden Stifte des einen Brettchens in die Richtung der Geraden AC und visiere über die beiden anderen Stifte. Trifft die Visierlinie gerade auf den gegebenen Punkt B, so ist der Punkt unter der Mitte des Werkzeuges der Ort, wo die Senkrechte eintrifft; erscheint aber der gegebene Punkt B rechts oder links von der Visierlinie, so rücke man das Winkelkreuz nach der Seite desselben so lange, bis man ihn in der Richtung der Stifte erblickt, wobei übrigens die zwei anderen Stifte beständig in der Richtung der Geraden AC bleiben müssen.

§. 35. Es sei (Fig. 21) CD $\perp$ AB. Wenn die CD längs der AB mit sich selbst parallel fortschreitet, bis sie in die Lage EF kommt, so wird während dieser Bewegung die Lage der CD gegen die AB nicht geändert; es wird daher CD auch in der Lage EF auf AB senkrecht stehen. Daraus ersieht man:

Fig. 21.



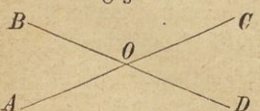
1. Steht eine Gerade auf einer andern Geraden senkrecht, so ist auch jede mit der ersteren Parallele auf der zweiten Geraden senkrecht.

2. Stehen zwei Gerade auf derselben dritten senkrecht, so sind sie unter einander parallel.

Scheitelwinkel.

§. 36. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels AOB (Fig. 22) über den Scheitel O hinaus, so heißt der von diesen Verlängerungen gebildete Winkel COD der Scheitelwinkel des gegebenen Winkels AOB. Scheitelwinkel werden also von denselben zwei geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten ihres Durchschnittspunktes gebildet.

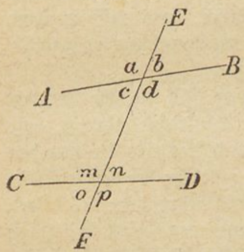
Fig. 22.



Da zwei sich schneidende Gerade auf beiden Seiten des Durchschnittspunktes ihre Richtungen beibehalten, so ist auch die Abweichung dieser Richtungen auf beiden Seiten dieselbe; d. h. je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel.

Fig. 23.



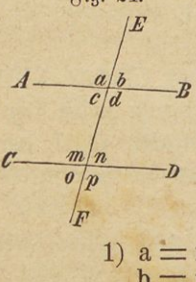
§. 37. Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so entstehen um die beiden Durchschnittspunkte acht Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere, die anderen vier äußere Winkel. In Fig. 23 sind AB und CD die beiden geschnittenen Geraden, EF ist die schneidende Gerade; c, d, m und n sind innere, a, b, o und p sind äußere Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen Gegenwinkel. Zwei äußere Winkel oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen, werden Wechselwinkel genannt. Zwei äußere, oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen Anwinkel.

Gegenwinkel	Wechselwinkel	Anwinkel
a und m,	a und p,	a und o,
b „ n,	b „ o,	b „ p,
c „ o,	c „ n,	c „ m,
d „ p,	d „ m,	d „ n.

§. 38. Schreitet (Fig. 24) die Gerade AB längs der EF mit sich selbst parallel fort, bis sie in die Lage CD kommt, so wird sie, da sich dabei ihre Lage gegen die EF nicht ändert, mit dieser stets dieselben vier Winkel bilden; es werden also, wenn AB nach CD gelangt, je zwei Gegenwinkel auf einander fallen, also einander gleich sein; je zwei Wechselwinkel werden in zwei Scheitelwinkel übergehen, also auch einander gleich sein; je zwei Anwinkel endlich werden zu Nebenwinkeln, also zusammen 180^0 betragen. Es ist also

Fig. 24.



1)	2)	3)
$a = m$,	$a = p$,	$a + o = 180^0$,
$b = n$,	$b = o$,	$b + p = 180^0$,
$c = o$,	$c = n$,	$c + m = 180^0$,
$d = p$,	$d = m$,	$d + n = 180^0$; d. h.

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so sind
1. je zwei Gegenwinkel einander gleich,
2. je zwei Wechselwinkel einander gleich,
3. je zwei Anwinkel zusammen gleich 180°.

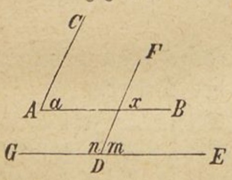
Umgekehrt folgt: Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daſs entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich sind, oder zwei Anwinkel zusammen 180° betragen, so müssen die geschnittenen Geraden parallel sein.

Aufgaben.

1. Zeichne zwei parallele Gerade AB und CD und durchschneide sie durch eine dritte Gerade EF, welche die anderen in G und H trifft. Benenne jeden der dadurch entstehenden Winkel mit drei Buchstaben. Gib alle Paare von Neben-, Scheitel-, Gegen-, Wechsel- und Anwinkeln an.
2. Es sei (Fig. 24) der Winkel a = 112°; wie groß ist b, c, d, m, n, o, p?
3. Welche Richtungen haben die Schenkel a) zweier gleicher Gegenwinkel, b) zweier gleicher Wechselwinkel?

§. 39. Ist (Fig. 25) DE ∥ AB und DF ∥ AC, so sind m und a zwei Winkel, deren parallele Schenkel nach derselben Seite gerichtet sind; sie sind einander gleich, weil beide dem gemeinschaftlichen Gegenwinkel x gleich sind; also m = a.

Fig. 25.



Die Schenkel der Winkel n und a sind auch paarweise parallel, es sind jedoch nur zwei parallele Schenkel nach derselben Seite, die beiden anderen aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; da n + m = 180° ist und statt m auch der Winkel a gesetzt werden kann, so ist auch n + a = 180°.

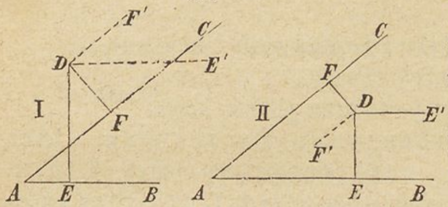
Daraus folgt

a) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, sind einander gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite gerichtet sind.

b) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, betragen zusammen 180°, wenn nur ein Paar der parallelen Schenkel nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.

§. 40. Es sei (Fig. 26) DE ⊥ AB und DF ⊥ AC. Man drehe die Schenkel DE und DF des Winkels EDF als eine feste

Fig. 26.



Verbindung um den Scheitel D um einen rechten Winkel, so dass sie in die Lage DE' und DF' kommen.

In I haben nun die Winkel E'DF' und BAC paarweise parallele und nach denselben Seiten gerichtete Schenkel; also ist Winkel E'DF' = BAC, folglich auch Winkel EDF = BAC. In II sind auch die Schenkel der Winkel E'DF' und BAC paarweise parallel, jedoch ein Paar nach derselben, das andere Paar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; also ist E'DF' + BAC = 180°, folglich auch Winkel EDF + BAC = 180°.

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise auf einander senkrecht stehen, sind entweder gleich, oder ihre Summe ist gleich 180°.

Wann findet die erste und wann die zweite Beziehung statt?

II. Geradlinige Figuren.

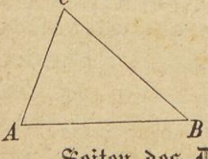
1. Dreiecke.

Bestandtheile der Dreiecke.

§. 41. Eine von drei Strecken begrenzte ebene Figur heißt ein Dreieck. Die drei Strecken heißen Seiten des Dreieckes.

Jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel. Jede Seite hat zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel. Jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen und die dritte liegt ihm gegenüber.

Fig. 27.



Nenne in dem Dreiecke ABC (Fig. 27) alle drei Seiten und alle drei Winkel.

Nenne zu jeder Seite die anliegenden Winkel und den gegenüberliegenden Winkel.

Nenne zu jedem Winkel die Seiten, von denen er eingeschlossen wird, und die Seite, welche ihm gegenüberliegt.

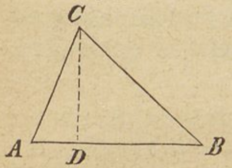
Seiten des Dreieckes.

§. 42. In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte; denn der Umweg über AC und

CB, um von A nach B zu gelangen, ist länger als der gerade Weg über AB.

Diejenige Seite, über welcher man sich das Dreieck errichtet denkt, heißt die Grundlinie. Da man sich über jeder Seite das Dreieck errichtet denken kann, so kann im allgemeinen auch jede Seite Grundlinie sein. Der Scheitel des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, wird die Spitze oder der Scheitel, und die Senkrechte, die von der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Dreieckes genannt.

Fig. 28.

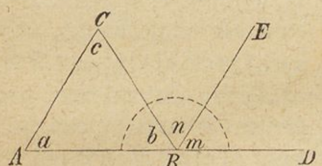


Nimmt man im Dreiecke ABC (Fig. 28) AB als Grundlinie an, so ist C der Scheitel und CD die Höhe.

Winkel des Dreieckes.

§. 43. Verlängert man eine Seite eines Dreieckes, so bildet die Verlängerung mit der anliegenden Seite einen Winkel, welcher ein Außenwinkel des Dreieckes heißt, während die drei Winkel im Dreiecke innere Winkel sind.

Fig. 29.



CBD (Fig. 29) ist ein Außenwinkel des Dreieckes ABC.

Verlängere jede Seite eines Dreieckes nach beiden Seiten. Wie viele Außenwinkel werden dadurch gebildet? Welche unter ihnen sind als Scheitelwinkel gleich? Nenne zu jedem Außenwinkel den inneren anliegenden, und die beiden nicht anliegenden Winkel.

§. 44. Wird in dem Dreiecke ABC (Fig. 29) die Seite AB verlängert und durch B die BE ∥ AC gezogen, so entstehen die zwei Winkel m und n, von denen m dem Winkel a als Gegenwinkel, n dem Winkel c als Wechselwinkel gleich ist. Die Summe der drei Winkel a, c, b, ist daher so groß, als die Summe der Winkel m, n, b. Die letztere Summe aber beträgt einen gestreckten Winkel oder zwei Rechte; also muss auch die Summe von a, c und b zwei Rechte betragen.

Die Summe der drei inneren Winkel eines Dreieckes ist also gleich zwei Rechten oder 180°.

Aus diesem Satze folgt:

1. Zwei Dreieckswinkel betragen zusammen weniger als 180°.

Können in einem Dreiecke zwei rechte Winkel, oder zwei stumpfe Winkel oder ein rechter und ein stumpfer Winkel vorkommen? Jedes Dreieck hat daher wenigstens zwei spitze Winkel.

2. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt sind, so findet man den dritten, indem man die beiden gegebenen Winkel addiert und ihre Summe von 180° subtrahiert.

Zwei Winkel eines Dreieckes sind: a) 65° und 87°; b) 43° 10′ und 102° 27′; c) 25° 46′ 21″ und 74° 48′ 49″; d) 57° 38′ 34″ und 61° 10′ 16″; wie groß ist der dritte Winkel?

3. Sind zwei Winkel eines Dreieckes gleich zwei Winkeln eines andern Dreieckes, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

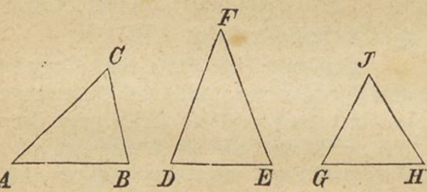
4. *Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.*

Denn der Außenwinkel CBD (Fig. 29) ist die Summe der Winkel m und n; diese sind aber den Winkeln a und c gleich.

Eintheilung der Dreiecke nach den Seiten.

§. 45. In Beziehung auf die *Länge der Seiten* unterscheidet man *ungleichseitige*, *gleichschenklige* und *gleichseitige* Dreiecke.

Fig. 30.



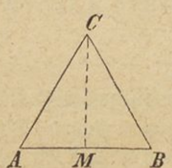
Ein Dreieck ABC (Fig. 30), in welchem alle drei Seiten einander ungleich sind, heißt *ungleichseitig*; ein Dreieck DEF, in welchem zwei Seiten einander gleich sind, heißt *gleichschenklig*; ein Dreieck GHJ, in welchem alle drei Seiten gleich sind, wird *gleichseitig* genannt.

Im *gleichschenkligen* Dreiecke heißen die gleichen Seiten *Schenkel*, die dritte Seite die *Grundlinie* und der ihr gegenüberliegende Eckpunkt der *Scheitel*.

Aufgaben.

1. *Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.*

Fig. 31.



Zeichne (Fig. 31) eine Strecke AB, errichte in der Mitte M derselben eine Senkrechte und bestimme in ihr den dritten Dreieckspunkt C so, dass er von A und von B so weit entfernt ist, wie A von B.

Um die Richtigkeit zu prüfen, drehe man das Zeichenblatt so, dass BC in die horizontale Lage kommt; dann sieht man sogleich, ob der dritte Punkt A über der Mitte der BC die bezeichnete Stellung hat.

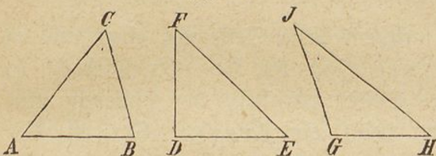
2. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen.

Errichte in der Mitte der Grundlinie eine Senkrechte und nimm einen beliebigen Punkt derselben als dritten Dreieckspunkt an.

Eintheilung der Dreiecke nach den Winkeln.

§. 46. Mit Rücksicht auf die Winkel gibt es spitzwinklige Dreiecke, in denen alle drei Winkel spitz sind; rechtwinklige, in denen ein rechter und zwei spitze Winkel vorkommen; und stumpfwinklige, in denen ein Winkel stumpf, die anderen zwei spitz sind.

Fig. 32.



In Fig. 32 ist ABC ein spitzwinkliges, FDE ein rechtwinkliges und JGH ein stumpfwinkliges Dreieck.

Im rechtwinkligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite EF die Hypotenuse; die beiden Seiten DE und DF, welche den rechten Winkel einschließen, werden Katheten genannt.

Aufgaben.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen.

Zeichne einen rechten Winkel und verbinde zwei Punkte der Schenkel durch eine Strecke.

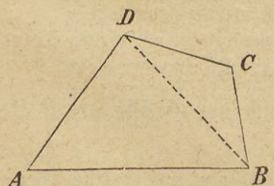
2. Zeichne a) einen spitzen, b) einen rechten, c) einen stumpfen Winkel, schneide von den Schenkeln gleiche Strecken ab und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke. Was für ein Dreieck erhältst du?

2. Vierecke.

Bestandtheile der Vierecke.

§. 47. Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur wird ein Viereck genannt.

Fig. 33.



Ein Viereck hat vier Seiten und vier Winkel.

Die Strecke, welche zwei gegenüberstehende Eckpunkte verbindet, heißt Diagonale.

Aufgaben.

2. Wie viele Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?

2. Nenne in dem Vierecke ABCD (Fig. 33) alle vier Seiten und alle vier Winkel. Nenne die Diagonale.

§. 48. Zieht man in einem Viereck eine Diagonale, so betragen alle Winkel des Viereckes eben so viel als die Winkel der beiden Dreiecke, in welche das Viereck zerlegt wird; die Winkel in jedem der zwei Dreiecke betragen nun zwei Rechte, daher die Winkel des Viereckes vier Rechte.

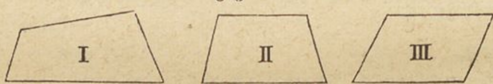
In einem Vierecke beträgt also die Summe aller Winkel vier Rechte oder 360°.

Wenn in einem Vierecke alle vier Winkel gleich sind, wie groß ist jeder?

Eintheilung der Vierecke nach den Richtungen der gegenüberliegenden Seiten.

§. 49. Ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ist, heißt ein Trapezoid (Fig. 34, I.). Ein Viereck, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten parallel, die anderen zwei Seiten aber nichtparallel sind, heißt ein Trapez (Fig. 34, II.). Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm (Fig. 34, III.).

Fig. 34.



Ein Trapez, in welchem die nichtparallelen Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenklig.

In einem Parallelogramme kann man was immer für eine Seite als Grundlinie annehmen; die Senkrechte, die darauf von der gegenüberliegenden Seite gefält wird, ist dann die Höhe.

In einem Trapeze versteht man unter der Höhe eine Senkrechte, welche von einem Punkte der einen parallelen Seite auf die andere parallele Seite gefällt wird.

Aufgaben.

1. Zeichne ein gleichschenkliges Trapez.
2. Zeichne zwei Parallele, dann eben so zwei andere Parallele, welche die früheren durchschneiden. Was für ein Viereck entsteht dadurch?

In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, und ebenso je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Eintheilung der Parallelogramme nach der Größe der Seiten und Winkel.

§. 50. Ein Parallelogramm, in welchem weder alle Seiten noch alle Winkel gleich sind, heißt ein Rhomboid (Fig. 35, I.); ein Parallelogramm, in welchem alle Seiten gleich sind, ein

Rhombus (Fig. 35, II.); ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel gleich sind, ein Rechteck (Fig. 35, III.); ein Parallelogramm endlich, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, ein Quadrat (Fig. 35, IV.).

Fig. 35.

Im Rechtecke und im Quadrate ist jeder Winkel ein rechter; im Rhomboid und im Rhombus kommen zwei gleiche spitze und zwei gleiche stumpfe Winkel vor. Darum werden das Rechteck und Quadrat auch rechtwinklige, das Rhomboid und der Rhombus schiefwinklige Parallelogramme genannt.

Aufgaben.

1. Ein schiefwinkliges Parallelogramm (Rhomboid oder Rhombus) zu zeichnen.

   Zeichne einen spitzen oder stumpfen Winkel a) mit ungleichen Schenkeln, b) mit gleichen Schenkeln und ziehe durch die Endpunkte Gerade, welche mit den Schenkeln parallel sind. Was für ein Viereck entsteht in jedem Falle?

2. Ein rechtwinkliges Parallelogramm (Rechteck oder Quadrat) zu zeichnen.

   Zeichne einen rechten Winkel a) mit ungleichen, b) mit gleichen Schenkeln, und ziehe durch die Endpunkte Gerade, welche mit den Schenkeln parallel sind. Was für ein Viereck entsteht in jedem Falle?

3. Vielecke.

Bestandtheile der Vielecke.

§. 51. Eine von mehreren Strecken begrenzte ebene Figur heißt Vieleck oder Polygon.

Jedes Vieleck hat so viele Seiten als Winkel; zwischen je zwei Seiten liegt ein Winkel, zwischen je zwei Winkeln eine Seite; ferner liegen an jeder Seite zwei Winkel und zwei Seiten.

Die Summe aller Seiten eines Vieleckes heißt der Umfang, und die Größe der von den Seiten eingeschlossenen Fläche der Flächeninhalt desselben.

Die Winkel eines Vieleckes können spitze, rechte, stumpfe, und selbst auch erhabene sein; die letzten nennt man auch einspringende Vieleckswinkel.

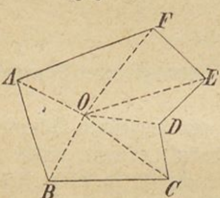
Zeichne ein Vieleck, in welchem ein rechter, ein stumpfer, ein einspringender und zwei spitze Winkel vorkommen.

Eine Strecke, welche zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Eckpunkte des Vieleckes verbindet, heißt Diagonale.

§. 52. In jedem Vieleck ist die Summe aller Winkel gleich so vielmal zwei Rechten, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechten.

Nimmt man innerhalb des Vieleckes ABCDEF (Fig. 36) einen beliebigen Punkt O an, und zieht von diesem zu allen Eckpunkten gerade Linien, so erhält man so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat; die Winkel eines solchen Dreieckes betragen zwei Rechte, daher die Winkel aller Dreiecke so vielmal 2 Rechte, als das Vieleck Seiten hat. Unter den Winkeln der Dreiecke kommen nun alle Vieleckswinkel vor, aber überdies auch noch die Winkel um den Punkt O herum, die nicht Vieleckswinkel sind und die zusammen 4 Rechte betragen. Um daher bloß die Summe der Vieleckswinkel zu erhalten, muss man von der Winkelsumme aller Dreiecke noch 4 Rechte subtrahieren.

Fig. 36.



Eintheilung der Vielecke nach der Anzahl der Seiten.

§. 53. Die Vielecke werden nach der Anzahl ihrer Seiten in dreiseitige oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke, u. s. w. eingetheilt.

Im engeren Sinne versteht man unter Vieleck eine Figur, welche mehr als vier Seiten hat.

Aufgaben.

1. Wie groß ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes? — eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehneckes?
2. Kann in einem Dreiecke eine Diagonale gezogen werden?
3. Wie viele Diagonalen können von einem Eckpunkte in einem Vier-, Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehnecke gezogen werden? In wie viele Dreiecke wird dadurch jedes der genannten Vielecke zerlegt?
4. Wie viele verschiedene Diagonalen sind überhaupt in einem Vielecke möglich?

Im Vierecke sind 2,
„ Fünfecke „ $2 + 3 = 5$,
„ Sechsecke „ $2 + 3 + 4 = 9$,
„ Siebenecke „ $2 + 3 + 4 + 5 = 14$,
„ Achtecke „ $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$.
Diagonalen möglich.
Gesetz!

Eintheilung der Vielecke nach der Größe der Seiten und Winkel.

§. 54. Ein Vieleck heißt gleichseitig, wenn alle Seiten einander gleich sind; sonst ungleichseitig. Ein Vieleck heißt gleichwinklig, wenn alle Winkel einander gleich sind; sonst ungleichwinklig. Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich und alle Winkel gleich sind; sonst unregelmäßig. So ist z. B. der Rhombus ein gleichseitiges, das Rechteck ein gleichwinkliges, das Quadrat ein regelmäßiges Viereck.

Da in einem regelmäßigen Vielecke alle Winkel gleich sind, so findet man die Größe eines derselben, wenn man zuerst die Summe aller Winkel bestimmt, und dieselbe durch die Anzahl der Winkel dividiert. So beträgt

ein Winkel des regelmäßigen Dreieckes . . $\frac{180^0}{3} = 60^0$,

" " " " Viereckes . . $\frac{360^0}{4} = 90^0$,

" " " " Fünfeckes . . $\frac{540^0}{5} = 108^0$,

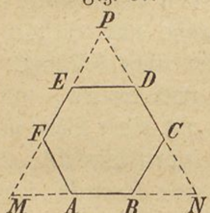
" " " " Sechseckes . . $\frac{720^0}{6} = 120^0$, u. s. w.

Aufgaben.

1. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen.

Bestimme die Größe eines Vieleckswinkels, zeichne eine Strecke, welche die Seite des Vieleckes vorstellt, und trage in den Endpunkten derselben den Vieleckswinkel auf; von den neuen Schenkeln schneide Stücke ab, welche der angenommenen Vielecksseite gleich sind, trage in den Endpunkten wieder den Vieleckswinkel auf und setze dieses Verfahren fort, bis das Vieleck geschlossen ist.

Fig. 37.



2. Zeichne ein regelmäßiges Fünfeck. (Die Prüfung geschieht, indem man alle Diagonalen zieht und nachsieht, ob je eine mit einer Seite parallel ist.)

3. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck. (Es müssen je zwei gegenüberliegende Seiten und eine Diagonale parallel sein.)

Das regelmäßige Sechseck kann auch auf folgende Art leicht gezeichnet werden: Verlängere die Seite AB (Fig. 37), über welcher das Sechseck beschrieben werden soll, nach M und N, mache AM = BN = AB, zeichne über MN das gleichseitige Dreieck MNP, theile die Seiten MP und NP in drei gleiche Theile und ziehe AF, BC und ED.

4. Zeichne ein regelmäßiges a) Achteck, b) Zehneck.

III. Congruenz der geradlinigen Figuren.

1. Congruenz der Dreiecke.

Construction und Congruenz der Dreiecke.

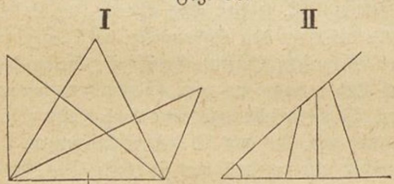
§. 55. Zwei Dreiecke sind congruent, d. i. sie haben dieselbe Größe und dieselbe Gestalt, wenn in denselben alle sechs Bestandstücke, die drei Seiten und die drei Winkel, paarweise gleich sind.

Da durch die Größe gewisser Seiten und Winkel eines Dreieckes auch die Größe der anderen, z. B. durch die Größe zweier Winkel die Größe des dritten Winkels, bestimmt ist, so kann man aus der Gleichheit von weniger als sechs Bestandstücken in zwei Dreiecken auf ihre Congruenz schließen.

Um zu sehen, wie viele und welche Bestandstücke in zwei Dreiecken paarweise gleich sein müssen, damit die Dreiecke congruent seien, braucht man nur zu untersuchen, wie viele und welche Stücke erforderlich sind, um mit denselben ein Dreieck von bestimmter Größe und Gestalt zu construieren, weil dann alle Dreiecke, welche in diesen Stücken übereinstimmen, congruent sein müssen.

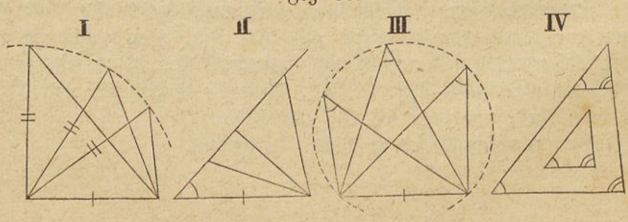
a) Ist nur ein Bestandstück, eine Seite oder ein Winkel gegeben, so lassen sich, wie man aus Fig. 38 I und II ersieht, unzählig viele verschiedene Dreiecke construieren, die alle jenes Stück enthalten. Durch ein Bestandstück ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

Fig. 38.



b) Auch mit zwei Bestandstücken: mit zwei Seiten, mit einer Seite und einem anliegenden Winkel, mit einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel oder mit zwei Winkeln, können, wie Fig. 39 I—IV zeigt, unzählig viele Dreiecke construiert

Fig. 39.



werden, welche die gegebenen Bestandstücke gleich, die anderen aber ungleich haben. Durch zwei Bestandstücke ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

c) Sind drei Bestandstücke gegeben, so können es sein:

1. alle drei Seiten,
2. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
3. zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel,
4. eine Seite und zwei Winkel,
5. alle drei Winkel.

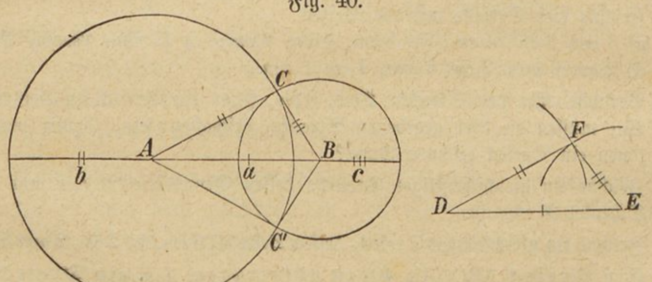
Da durch zwei Winkel eines Dreieckes auch der dritte Winkel bestimmt ist, mit zwei Winkeln aber, wie man aus Fig. 39 IV ersieht, sich kein bestimmtes Dreieck construieren läſst, so wird auch durch drei Winkel die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt. Der letzte der angeführten fünf Fälle liefert also keine bestimmte Construction.

Es bleiben demnach nur die ersten vier Fälle zu untersuchen übrig.

§. 56. Ein Dreieck zu construieren, wenn die drei Seiten gegeben sind.

Es seien (Fig. 40) a, b, c die Längen der drei Seiten. Trägt man die Strecke AB = a auf, so sind dadurch zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Soll die zweite Seite AC die Länge b haben, so muſs der dritte Eckpunkt C von A um die Strecke b entfernt sein; C muſs also in der Kreislinie liegen, welche aus A

Fig. 40.



mit dem Halbmesser b beschrieben wird. Soll die dritte Seite BC die Länge c haben, so muſs der Eckpunkt C auch in der Kreislinie liegen, welche aus B mit dem Halbmesser c beschrieben wird. Der dritte Eckpunkt C kann daher nur in dem Durchschnitte dieser beiden

Kreislinien liegen. Da sich aber die beiden Kreise in zwei Punkten C und C′ schneiden, so erhält man zwei Dreiecke ABC und ABC′, welche die gegebenen drei Seiten haben. Diese zwei Dreiecke haben jedoch dieselbe Größe und Gestalt, da sich, wenn das Dreieck ABC′ um die Seite AB gedreht und auf das Dreieck ABC gelegt wird, beide Dreiecke vollständig decken. Durch drei Seiten ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Für die vorliegende Aufgabe hat man demnach folgende Auflösung: Man mache AB = a, beschreibe aus A mit dem Halbmesser b und aus B mit dem Halbmesser c Kreisbogen, welche sich in C schneiden, und ziehe die Geraden AC und BC; dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Geschieht die Auflösung einer Aufgabe, wie hier, mittelst des Lineals und des Zirkels, und gründet sie sich auf die Lehren der Geometrie, so heißt die Zeichnung eine geometrische Construction.

Zeichnet man mit denselben drei Seiten a, b, c noch ein zweites Dreieck DEF, so muss dieses mit ABC gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben, also mit ihm congruent sein.

Daraus folgt:

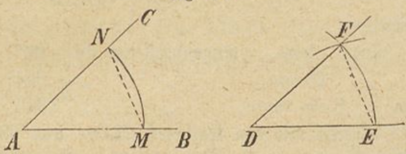
(I. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben alle drei Seiten paarweise gleich sind.

Aufgaben.

1. Zeichne vier Dreiecke mit den Seiten
   a) 3 *cm*, 2 *cm*, 4 *cm*; b) 5 *cm*, 4 *cm*, 3 *cm*; c) 17 *mm*, 24*mm*, 28 *mm*; d) 2 *cm* 6 *mm*, 3 *cm* 2 *mm*, 4 *cm* 1 *mm*.
2. Versuche mit den Strecken 2 *cm*, 3 *cm*, 6 *cm* ein Dreieck zu construieren. Wie müssen die drei gegebenen Strecken beschaffen sein, damit man mit ihnen ein Dreieck zeichnen könne?
3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie 25 *mm* und dessen Schenkel 31 *mm* ist.
4. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite a) 3 *cm*, b) 2 *cm* 2 *mm* beträgt.
5. Ein Dreieck ABC (Fig. 40) zu übertragen, d. i. ein Dreieck DEF zu zeichnen, welches mit dem Dreiecke ABC congruent ist.

   Mache DE = AB, beschreibe aus D mit dem Halbmesser AC, und aus E mit dem Halbmesser BC Kreisbogen, welche sich in F schneiden. Ziehe dann DF und EF, so entsteht das Dreieck DEF, welches mit ABC congruent ist.

Fig. 41.



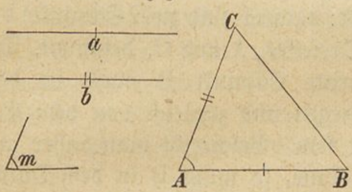
6. Einen Winkel BAC (Fig. 41) zu übertragen, d. i. einen Winkel zu zeichnen, welcher dem Winkel BAC gleich ist.

Ziehe DE; dann beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe auch aus D einen Bogen, welcher DE in E durchschneidet; endlich fasse mit dem Zirkel den Abstand MN, und durchschneide damit aus E den von D aus beschriebenen Bogen in F. Wird nun DF gezogen, so ist der Winkel EDF = BAC, da ⊿ DEF ≅ AMN ist.

Dasselbe Verfahren wird auch angewendet, um auf dem Felde einen Winkel abzustecken, der einem gegebenen Winkel gleich ist; nur bedient man sich statt des Zirkels einer gespannten Schnur oder der Messkette und zum Anreißen des Bogens eines Kettennagels.

§. 57. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 42.



Es seien (Fig. 42) a und b die zwei gegebenen Seiten und m der von ihnen eingeschlossene Winkel. Construiert man in A den gegebenen Winkel m und trägt auf dessen Schenkeln AB = a und AC = b auf, so ist dadurch die Lage der Eckpunkte B und C, daher auch die dritte Seite BC bestimmt. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel wird also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Construiert man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck, so muss es mit dem früheren in der Größe und Gestalt übereinstimmen, d. h. mit ihm congruent sein. Daraus folgt:

(II. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel paarweise gleich sind.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in denselben die Katheten paarweise gleich sind.

Aufgaben.

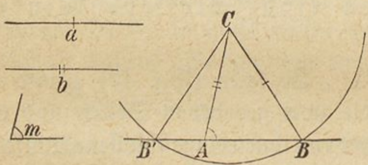
1. Construiere folgende Dreiecke:
   a) zwei Seiten 3*cm* und 4*cm*, eingeschlossener W. 82°;
   b) „ „ 15*mm* „ 23*mm*, „ „ 65°;
   c) „ „ 2*cm* 2*mm* „ 6*cm* 6*mm*, „ „ 124°.
2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 21*mm* und 29*mm*.
3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel 1*cm* 8*mm* und dessen Winkel am Scheitel 76° ist.

§. 58. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Der gegebene Winkel kann der größeren oder kleineren der beiden Seiten gegenüberliegen.

a) Es seien (Fig. 43) a und b die beiden gegebenen Seiten und zwar a größer als b; der der größeren Seite a gegenüberliegende Winkel sei m.

Fig. 43.

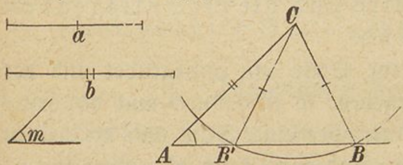


Man trage den Winkel m auf und mache den einen Schenkel AC gleich der Seite b, deren gegenüberliegender Winkel nicht gegeben ist; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und C, bestimmt. Der dritte Eckpunkt B muss in dem weiten Schenkel AB des Winkels liegen und zugleich von dem Eckpunkte C um die Strecke a entfernt sein. Beschreibt man daher aus C mit dem Halbmesser a eine Kreislinie, so muss B in dem Durchschnitte dieser Kreislinie mit dem Schenkel AB liegen. Die Kreislinie schneidet den Schenkel AB in zwei Punkten B und B′, und man erhält daher zwei Dreiecke ABC und AB′C. Von diesen enthält jedoch nur das erste Dreieck ABC die gegebenen drei Stücke; das zweite AB′C hat zwar auch die zwei gegebenen Seiten, aber nicht den gegebenen Winkel, sondern dessen Nebenwinkel, genügt somit der Aufgabe nicht. Durch zwei Seiten und den der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Zeichnet man mit denselben drei Stücken noch ein zweites Dreieck, so muss dieses mit dem früheren gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben. Daraus folgt:

(III. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel paarweise gleich sind.

Fig. 44.



b) Es seien (Fig. 44) a und b die zwei gegebenen Seiten und zwar a kleiner als b, und der Winkel, welcher der kleineren Seite a gegenüberliegt, sei m.

Durch das gleiche Verfahren, wie oben, erhält man zwei Dreiecke ABC und AB′C, welche beide die gegebenen drei Stücke enthalten, aber in der Größe und Gestalt verschieden sind. Durch zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

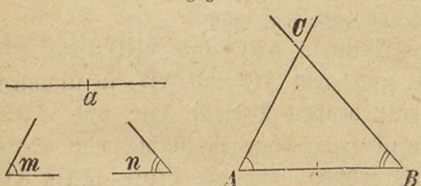
Zeichne ein Dreieck, in welchem zwei Seiten a) 4*cm* und 2*cm*, b) 3*cm* 2*mm* und 2*cm* 4*mm*, c) 28*mm* und 19*mm* sind, und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel m) 62°, n) 86°, p) 117° beträgt.

§. 59. Ein Dreieck zu construieren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Die zwei Winkel sind entweder die der gegebenen Seite anliegenden, oder es ist der eine ein anliegender, der andere der gegenüberliegende Winkel.

a) Es sei (Fig. 45) a die gegebene Seite und die Winkel m und n die ihr anliegenden Winkel.

Fig. 45.



Man ziehe AB = a; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Trägt man in A den Winkel m und in B den Winkel n auf, so muss der dritte Eckpunkt C in dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden AC und BC, welche mit der Seite AB die gegebenen Winkel bilden, liegen. Man erhält also das Dreieck ABC, welches eine völlig bestimmte Größe und Gestalt hat. Durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Wird mit denselben drei Stücken a, m und n noch ein zweites Dreieck gezeichnet, so muss es mit ABC gleiche Größe und gleiche Gestalt haben, also mit ihm congruent sein. Daraus folgt:

(IV. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben eine Seite und die ihr anliegenden Winkel paarweise gleich sind.

b) Sind von einem Dreiecke eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist dadurch auch der dritte Winkel bestimmt; dann sind aber eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt, und man kann allgemein sagen: Durch eine Seite und zwei Winkel wird ein Dreieck vollkommen bestimmt.

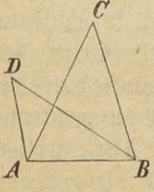
Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in denselben eine Kathete und ein spitzer Winkel, oder die Hypotenuse und ein spitzer Winkel paarweise gleich sind.

Aufgaben.

1. Zeichne folgende Dreiecke:
   a) eine Seite 4*cm*, anliegende Winkel 72° und 47°;
   b) „ „ 3*cm*, „ „ 65° „ 56°;
   c) „ „ 2·8*cm*, „ „ 102° „ 25°.
2. Versuche mit der Seite 2*dm* und den Winkeln 105° und 75° ein Dreieck zu zeichnen. Wie müssen die anliegenden Winkel beschaffen sein, damit die Construction des Dreieckes möglich sei?
3. Construiere ein Dreieck, in welchem eine Seite 27*mm*, ein anliegender Winkel 59° und der gegenüberliegende Winkel 72° beträgt.
4. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
   a) eine Kathete = 1*cm* 5*mm* und der anliegende spitze Winkel = 57°;
   b) eine Kathete = 3*cm* und der gegenüberliegende Winkel = 63°;
   c) die Hypotenuse = 2*cm* und ein anliegender Winkel = 42°.

§. 60. Nimmt man in den Winkeln ABC und ABD (Fig. 46) BC = BD an, und zieht AC und AD, so stimmen die dadurch entstehenden Dreiecke ABC und ABD in zwei Seiten überein; dagegen ist die dritte Seite AC im $\triangle$ ABC größer, als die dritte Seite AD im $\triangle$ ABD; zugleich ist der der Seite AC gegenüberliegende Winkel ABC im $\triangle$ ABC größer als der der Seite AD gegenüberliegende Winkel ABD im $\triangle$ ABD.

Fig. 46.



Daraus folgt:

1. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt

der größeren dieser Seiten auch ein größerer Winkel gegenüber.

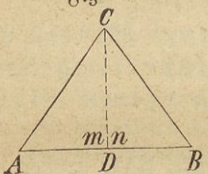
2. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größeren dieser Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

2. Anwendung der Congruenzsätze.

Lehrsätze über die Dreiecke.

§. 61. Es seien in dem Dreiecke ABC (Fig. 47) zwei Seiten AC und BC gleich. Man halbiere die Seite AB im Punkte D und

Fig. 47.



vergleiche die beiden Dreiecke ACD und BCD; es ist in denselben die Seite CD gemeinschaftlich, ferner AC = BC nach der Voraussetzung, und AD = BD vermöge der Construction; in den beiden Dreiecken sind also alle drei Seiten paarweise gleich, folglich sind die Dreiecke ACD und BCD congruent. In congruenten Dreiecken müssen die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich sein; der gemeinschaftlichen Seite CD liegt im Dreiecke ACD der Winkel A, im Dreiecke BCD der Winkel B gegenüber; also ist A = B. Wenn also im Dreiecke ABC die Seite AC = BC ist, so muss auch der Winkel B = A sein, d. h.

Sind in einem Dreiecke zwei Seiten gleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich.

In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich; ein gleichseitiges Dreieck ist also auch gleichwinklig.

Aufgaben.

1. Wie groß ist jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes?
2. Wie groß ist der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn ein Winkel an der Grundlinie a) 52^0, b) $37^0\ 12'\ 50''$ ist?
3. Wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel a) 71^0, b) $25^0\ 46'$, c) $59^0\ 19'\ 42''$ beträgt?
4. Wie groß ist jeder spitze Winkel in einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke?
5. Zeichne folgende gleichschenklige Dreiecke:
   a) Grundlinie = 3 *cm*, ein Winkel an der Grundlinie = 41^0;
   b) Grundlinie = 27 *mm*, Winkel am Scheitel = 68^0;

c) ein Schenkel = 35 *mm*, ein Winkel an der Grundlinie = 62°;
d) ein Schenkel = 2 *cm* 6 *mm*, Winkel am Scheitel = 84°.

6. Zeichne ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse 38 *mm* ist.

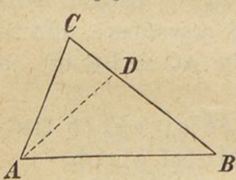
§. 62. Es sei umgekehrt in dem Dreiecke ABC (Fig. 47) der Winkel A = B, so läſst sich zeigen, daſs auch die Seite BC = AC sein müſſe. Fällt man nämlich von C auf AB die Senkrechte CD, so erhält man zwei Dreiecke, welche alle drei Winkel paarweise gleich, und überdies die Seite CD gemeinschaftlich haben, die also congruent sind; in diesen Dreiecken liegen den gleichen Winkeln m und n die Seiten AC und BC gegenüber, also ist AC = BC.

Sind also in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten gleich.

§. 63. Sind in einem Dreiecke zwei Winkel ungleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten ungleich, und zwar liegt dem größeren Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 48) der Winkel BAC größer als ABC; so läſst sich zeigen, daſs auch BC größer sein müſſe als AC.

Fig. 48.



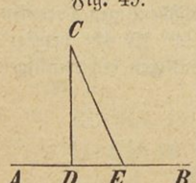
— Schneidet man von dem größeren Winkel bei A durch die Gerade AD einen Theil ab, so daſs der Rest BAD = ABD sei, so ist im Dreiecke ABD auch AD = BD. Es ist nun im Dreiecke ACD die Summe von AD und DC größer als AC; AD und DC ist aber so viel als BD und DC, folglich soviel als BC; also ist wirklich BC größer als AC.

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist also die Hypotenuse, im stumpfwinkligen die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite.

Aus dem III. Congruenzsatze (§. 58) folgt dann auch:

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in denselben die Hypotenuse und eine Kathete paarweise gleich sind.

Fig. 49.



§. 64. Zieht man vom Punkte C (Fig. 49) zu der Geraden AB die Senkrechte CD und überdies irgend eine andere Gerade z. B. CE, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck CDE, und es muſs darin die Hypotenuse CE größer sein, als die Kathete CD.

Die Senkrechte ist daher die kürzeste Gerade, die von einem Punkte zu einer geraden Linie gezogen werden kann.

Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade dient dazu, um die Entfernung jenes Punktes von der Geraden zu messen.

§. 65. Es sei in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 47) CD $\perp$ AB. Die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD haben die Hypotenuse gleich, und eine Kathete gemeinschaftlich, folglich sind sie congruent, und es müssen auch die zweiten Katheten darin gleich sein, nämlich AD = BD. Die Grundlinie AB ist also im Punkte D halbiert worden.

Zieht man daher in einem gleichschenkligen Dreiecke vom Scheitel eine Senkrechte auf die Grundlinie, so wird diese dadurch halbiert.

Der Beweis für diesen Lehrsatz ist auch noch giltig, wenn AB = AC = BC d. i. wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Im gleichschenkligen sowie im gleichseitigen Dreiecke wird also die Grundlinie von der Höhe halbiert.

Da nach dem obigen Satze die Strecke zwischen dem Scheitel und der Mitte der Grundlinie auf dieser senkrecht steht, durch die Mitte der Grundlinie aber auf dieselbe nur eine einzige Senkrechte gezogen werden kann, so ist auch der folgende Satz richtig:

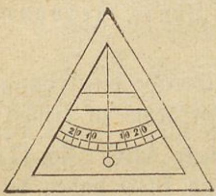
Die Senkrechte, welche man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes auf diese errichtet, geht durch den Scheitel.

§. 66. Es sei das Dreieck ABC (Fig. 47) gleichschenklig, nämlich AC = BC. Halbiert man die Grundlinie AB im Punkte D, und zieht die Strecke CD, so sind die zwei Dreiecke ACD und BCD congruent. Es müssen daher die Winkel m und n, welche in den congruenten Dreiecken den gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich sein; sind aber diese Winkel gleich, so steht CD senkrecht auf AB. Daraus folgt:

Verbindet man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel, so steht die Verbindungslinie auf der Grundlinie senkrecht.

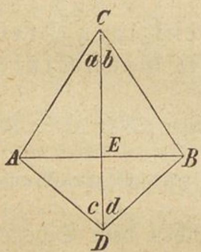
Auf diesem Lehrsatze beruhet die Einrichtung und der Gebrauch der Schrotwage (Fig. 50). Diese ist ein hölzernes gleichschenkliges Dreieck, in dessen

Fig. 50.



Spitze ein unten mit einer Kugel beschwerter Faden befestigt wird, und an dessen Grundlinie, oder einem damit verbundenen Gradbogen die Mitte durch einen Theilstrich bemerkt ist. Dieses Werkzeug dient dazu, um zu untersuchen, ob eine Gerade horizontal ist. Stellt man nämlich die Schrotwage mit der Grundlinie auf die zu prüfende Gerade, und spielt der beschwerte Faden genau in die Mitte der Grundlinie ein, so ist die Gerade horizontal, sonst steht sie gegen den Horizont geneigt. Denn der beschwerte Faden ist allezeit vertical; soll die Grundlinie, und die darunter befindliche Gerade horizontal sein, so muss sie auf den verticalen Faden senkrecht stehen; dies ist aber der Fall, wenn der Faden genau in die Mitte fällt.

Fig. 51.



§. 67. Zeichnet man über der Grundlinie AB (Fig. 51) zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD und zieht durch die Scheitel C und D die Strecke CD, so sind die Dreiecke ACD und BCD congruent (warum?); folglich müssen darin die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich sein. Den gleichen Seiten AD und BD liegen die Winkel a und b gegenüber, also ist $a = b$; den gleichen Seiten AC und BC liegen die Winkel c und d gegenüber, also ist $c = d$. Durch die Gerade CD wird also jeder Winkel am Scheitel halbiert.

Weil nun $AC = BC$, $CE = CE$ und $a = b$ ist, so ist $\triangle ACE \cong BCE$, daher $AE = BE$. Die Grundlinie AB wird also durch die Gerade CD im Punkte E halbiert.

Aus der Congruenz der Dreiecke ACE und BCE folgt ferner, dass auch die Winkel AEC und BEC gleich sind, oder dass $CE \perp AB$ ist.

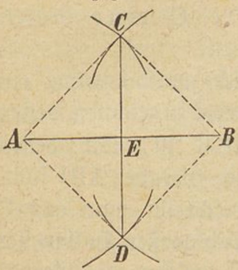
Zeichnet man daher über einer Strecke zwei gleichschenklige Dreiecke und zieht durch die Scheitel eine Gerade, so halbiert diese 1. die Winkel an den Scheiteln, sie halbiert 2. die gemeinschaftliche Grundlinie und steht 3. auf der Grundlinie senkrecht.

Constructionsaufgaben.

§. 68. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 52) zu halbieren.

Die Auflösung beruht auf dem Satze: Zeichnet man über einer Strecke zwei gleichschenklige Dreiecke und zieht durch die Scheitel eine Gerade, so halbiert diese die Grundlinie.

Fig. 52.



Man braucht daher nur über AB zwei gleichschenklige Dreiecke zu construieren und ihre Scheitel C und D durch eine Gerade zu verbinden. Dabei sind jedoch die Schenkel der gleichschenkligen Dreiecke für die Lösung der Aufgabe entbehrlich. Die Auflösung ist also:

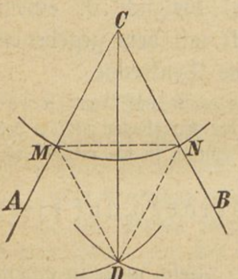
Um die Strecke zu halbieren, beschreibe man aus ihren Endpunkten mit gleicher Zirkelöffnung nach oben und unten Kreisbogen, welche sich in zwei Punkten schneiden, und ziehe durch die beiden Punkte eine Gerade; diese Gerade halbiert die gegebene Strecke.

Aufgaben.

1. Zeichne verschiedene Strecken und halbiere jede derselben.
2. Zeichne eine Strecke und theile sie in 4, 8 gleiche Theile.

§. 69. Einen gegebenen Winkel ACB (Fig. 53) zu halbieren.

Fig. 53.



Man mache zuerst den Winkel ACB zum Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, indem man von den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke CM und CN abschneidet. Dann braucht man nur noch über der Grundlinie MN ein zweites gleichschenkliges Dreieck MND zu construieren und durch die Scheitel beider Dreiecke die Gerade CD zu ziehen. Das Zeichnen der Grundlinie MN und der Schenkel MD und ND ist für die Lösung nicht nothwendig. Man hat demnach folgende Auflösung:

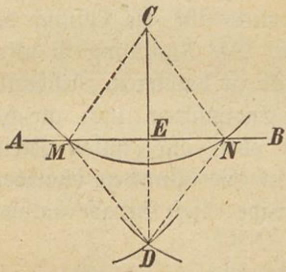
Um einen Winkel zu halbieren, beschreibe man aus dem Scheitel einen Bogen, welcher die beiden Schenkel schneidet; aus den Durchschnittspunkten beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bogen, welche sich in einem Punkte schneiden, und ziehe dann durch diesen Punkt und den Scheitel des Winkels eine Gerade; diese Gerade halbiert den gegebenen Winkel.

Aufgaben.

1. Zeichne verschiedene hohle Winkel und halbiere sie.
2. Zeichne einen Winkel und theile ihn in 4 gleiche Theile.

§. 70. Auf eine gegebene Gerade AB (Fig. 54) von einem außer ihr befindlichen Punkte C eine Senkrechte zu fällen.

Fig. 54.



Es handelt sich zuerst darum, ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Scheitel der Punkt C ist, und dessen Grundlinie in die Gerade AB fällt. Zu diesem Ende beschreibt man aus C mit einem hinlänglich großen Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Gerade AB in zwei Punkten M und N schneidet; dadurch ist die gemeinschaftliche Grundlinie MN bestimmt. Construiert man dann über dieser Grundlinie ein zweites gleichschenkliges Dreieck MND und zieht die Gerade CD, so muss diese auf MN, also auch auf AB senkrecht sein. Man hat daher folgende Auflösung:

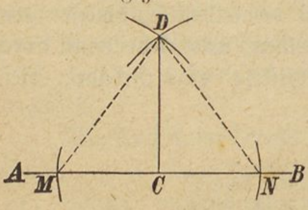
Um aus einem Punkte zu einer Geraden eine Senkrechte zu ziehen, beschreibe man aus jenem Punkte einen Kreisbogen, welcher die Gerade in zwei Punkten schneidet; aus diesen beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bogen, die sich in einem Punkte schneiden, und verbinde diesen Punkt mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade; diese ist die gesuchte Senkrechte.

Sowie auf dem Papiere, kann diese Aufgabe auch auf dem Felde gelöst werden; nur bedient man sich zum Beschreiben der Kreisbogen anstatt des Zirkels einer straff gespannten Schnur. — Eine andere Lösung ist die mittelst des Winkelkreuzes (§. 34).

§. 71. In einem Punkte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten.

a) Die Auflösung beruht auf dem Satze: Zieht man in einem gleichschenkligen Dreiecke vom Scheitel eine Gerade zu der Mitte der Grundlinie, so steht diese Gerade auf der Grundlinie senkrecht.

Fig. 55.

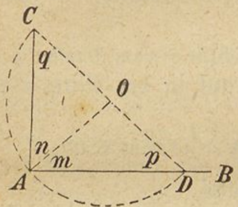


Es sei (Fig. 55) AB die gegebene Gerade und C ein Punkt derselben. Man braucht nur ein gleichschenkliges Dreieck MND zu construieren, dessen Grundlinie in die Gerade AB so hineinfällt, dass der Punkt C die Mitte der Grundlinie MN ist, und dann den Scheitel D mit dem Punkte C zu verbinden.

Um daher in einem Punkte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten, schneide man von jenem Punkte aus an der Geraden gleiche Stücke ab, beschreibe aus ihren Endpunkten mit demselben Halbmesser zwei Bogen, welche sich in einem Punkte schneiden, und ziehe durch diesen und den gegebenen Punkt eine Gerade; diese ist die gesuchte Senkrechte.

b) Liegt der gegebene Punkt in der Geraden so, daſs sich die Abschnitte zu beiden Seiten derselben nicht machen lassen, so verlängere man zuerst die Gerade, und verfahre dann nach der früheren Methode. Geht aber die Verlängerung nicht an, so nehme man (Fig. 56) über der Geraden AB einen Punkt O an, beschreibe aus demselben mit dem Halbmesser OA einen Kreisbogen CAD und ziehe durch D und O eine Gerade, welche jenen Bogen in C durchschneidet; verbindet man diesen Punkt C mit dem gegebenen Punkte A durch eine Gerade AC, so ist diese die verlangte Senkrechte.

Fig. 56.



Denn

im gleichschenkligen Δ ADO ist Winkel $m = p$,

" " Δ ACO ist Winkel $n = q$,

daher $m + n = p + q$.

Die Winkel m, n, p, q bilden nun die Winkel eines Dreieckes, also ist $m + n + p + q = 2$ R; folglich ist die halbe Summe $m + n =$ R, mithin AC $\perp$ AB.

Die Errichtung einer Senkrechten auf dem Felde kann auf dieselbe Art wie auf dem Papiere ausgeführt werden, nur daſs man sich statt des Zirkels einer Schnur bedient. — Die Lösung dieser Aufgabe mittelst des Winkelkreuzes ist in §. 34 angegeben worden.

§. 72. Übungsaufgaben.

1. Einen Winkel von a) 60°, b) 30°, c) 120°, d) 150° geometrisch zu construieren.
   a) Durch Construction eines gleichseitigen Dreieckes.
   b) Durch Halbierung des Winkels von 60°.
   c) und d) Durch Construction des Nebenwinkels von 60°, bezüglich von 30°.
2. Einen Winkel von a) 90°, b) 45°, c) 135° geometrisch zu construieren.
   a) Nach §. 70 oder §. 71.
   b) und c) Durch Halbierung des Winkels von 90°, und durch Construction des Nebenwinkels von 45°.

3. Die vier merkwürdigen Punkte eines Dreieckes zu bestimmen.

a) Fälle von jedem Eckpunkte eines Dreieckes eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Seite — eine Höhe.

Die drei Höhen eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte.

b) Ziehe von jedem Eckpunkte eines Dreieckes eine Gerade, welche den Winkel an jener Ecke halbiert — eine Winkelhalbierungslinie.

Die drei Winkelhalbierungslinien eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte.

c) Halbiere jede Seite eines Dreieckes und ziehe von jeder Mitte eine Strecke zu dem gegenüberliegenden Eckpunkte — eine Mittellinie.

Die drei Mittellinien eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte.

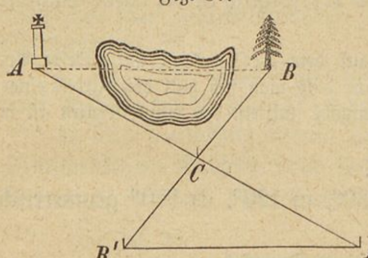
d) Halbiere jede Seite, und errichte darauf in der Mitte eine Senkrechte — ein Mittelloth.

Die drei Mittellothe eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte.

Praktische Anwendung der Congruenzsätze.

§. 73. Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läſst, wenn man aber von einem dritten Punkte aus zu beiden hin messen kann.

Fig. 57.

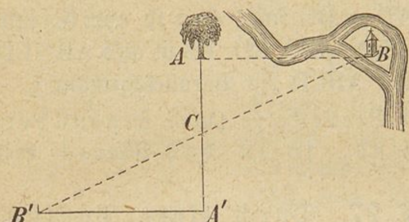


Es seien A und B (Fig. 57) die beiden Punkte, deren Entfernung man wissen will, zwischen welchen aber z. B. ein Teich liegt, so daſs eine unmittelbare Messung nicht stattfinden kann. Man wähle einen solchen Standpunkt C, daſs man von ihm nach den beiden anderen Punkten in gerader Linie messen kann, messe die Strecken CA und CB mit den Meterstäben oder mit der Meſskette, verlängere dieselben über den Scheitel C hinaus, und trage die gemessenen Längen auf die entsprechenden Verlängerungen bis A′ und B′ auf. Da nun das Dreieck $A'B'C \cong ABC$, und daher $A'B' = AB$ ist, so braucht man nur die Entfernung A′ B′ zu messen; diese stellt auch die gesuchte Länge AB vor.

Eine einfachere Lösung dieser Aufgabe wird im §. 132 angegeben werden.

§. 74. Die Entfernung zweier Punkte A und B auf dem Felde zu bestimmen, wenn man nur zu einem derselben gelangen kann.

Fig. 58.



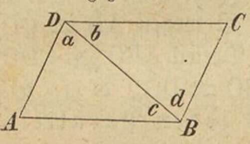
Man errichte in dem zugänglichen Punkte A (Fig. 58) mittelst des Winkelkreuzes auf AB eine Senkrechte AA′, wähle darin einen Punkt C, von dem aus man nach B sehen kann, und mache CA′ = CA, sodann errichte man in A′ auf AA′ eine Senkrechte, und suche darin denjenigen Punkt B′, welcher mit B und C in einer geraden Linie liegt. Wird nun A′B′ gemessen, so gibt die gefundene Länge (wegen der Congruenz der Dreiecke ABC und A′B′C) zugleich die gesuchte Entfernung AB an.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe wird unter §. 133 folgen.

3. Congruenz der Vierecke.

Lehrsätze über die Parallelogramme.

Fig. 59.



§. 75. Es sei (Fig. 59) AB ∥ CD und AD ∥ BC. Zieht man die Diagonale BD, so sind die Wechselwinkel a und d, und eben so die Wechselwinkel c und b einander gleich; daher ist $\triangle$ ABD $\cong$ BCD, und folglich AB = CD, AD = BC.

Daraus folgt:

1. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.

2. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten gleich; oder

Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

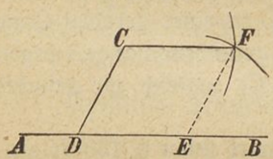
Aus dem letzten Satze folgt auch:

Senkrechte zwischen Parallelen sind einander gleich.

§. 76. Es seien in dem Vierecke ABCD (Fig. 59) die Seiten AB = CD und AD = BC. Zieht man die Diagonale BD, so erhält man die Dreiecke ABD und BCD, welche congruent sind, weil sie alle drei Seiten paarweise gleich haben; es müssen daher die den gleichen Seiten AB und CD gegenüberliegenden Winkel a und d gleich, daher, weil diese Winkel Wechselwinkel sind, die Geraden AD und BC parallel sein; wegen AD = BC folgt eben so c = b, und weil diese Winkel Wechselwinkel sind, AB || CD. Es ist also AB || CD und AD || BC, mithin das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

Wenn daher in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Fig. 60.

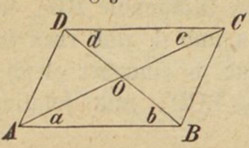


§. 77. Durch einen Punkt C (Fig. 60) mit einer Geraden AB eine Parallele zu ziehen.

Ziehe von C zu der AB eine beliebige Strecke CD, schneide von D aus das Stück DE ab, beschreibe aus C mit dem Halbmesser DE, aus E mit dem Halbmesser DC Kreisbogen, welche sich in F schneiden, und ziehe CF. Dann ist CDEF ein Parallelogramm, daher CF || DE, oder CF || AB.

§. 78. Es sei ABCD (Fig. 61) ein Parallelogramm, also AB || CD, AD || BC. Zieht man die Diagonalen AC und BD, so ist wegen AB = CD, a = c und b = d das Dreieck ABO $\cong$ CDO, folglich AO = CO, BO = DO; d. i. die Diagonalen eines jeden Parallelogrammes halbieren einander.

Fig. 61.



Zusatz. Von den Diagonalen der Parallelogramme gelten noch folgende Sätze:

1. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

   Kann unter Anwendung des II. Congruenzsatzes (§. 57) bewiesen werden.

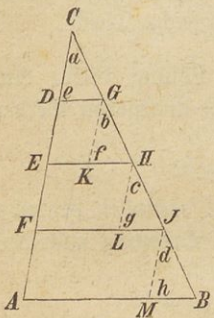
2. Die Diagonalen eines Rhombus stehen senkrecht auf einander.

   Die Wahrheit dieses Satzes beruht auf §. 67.

3. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und stehen senkrecht aufeinander.

§. 79. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 62) die Seite AC in mehrere, z. B. 4 gleiche Theile getheilt, also CD = DE = EF = FA, und man ziehe DG, EH und FJ sämmtlich parallel mit der Seite AB; dann läſst sich beweisen, daſs dadurch auch CB in 4 gleiche Theile getheilt wird. — Man ziehe die Linien GK, HL und JM parallel mit AC. Weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind, so ist GK = DE, HL = EF und JM = FA. Nach der Voraussetzung sind die Strecken CD, DE, EF und FA gleich, daher müssen auch die Strecken CD, GK, HL und JM gleich sein; in den Dreiecken CDG, GKH, HLJ und JMB sind überdies die Winkel a, b, c und d als Gegenwinkel gleich, ferner die Winkel e, f, g und h gleich, weil ihre Schenkel parallel sind. Die genannten vier Dreiecke haben also eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln gleich, sind folglich congruent; den gleichen Winkeln e, f, g und h stehen in diesen Dreiecken die Seiten CG, GH, HJ und JB gegenüber, also ist CG = GH = HJ = JB. Die dritte Seite CB ist somit wirklich in 4 gleiche Theile getheilt worden.

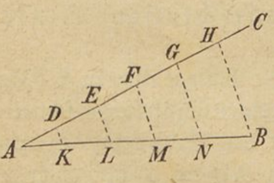
Fig. 62.



Wenn also in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt ist, und man zieht durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit einer zweiten Seite, so wird dadurch auch die dritte Seite in ebenso viele unter einander gleiche Theile getheilt.

§. 80. *Eine gegebene Strecke in beliebig viele gleiche Theile zu theilen.*

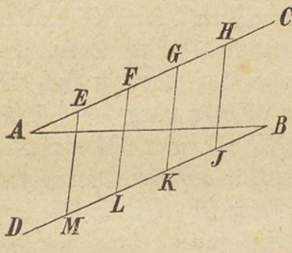
Fig. 63.



a) Es sei die Strecke AB (Fig. 63) z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe durch A eine andere Gerade AC von beliebiger Richtung und Länge, und trage darauf von A aus 5 beliebige gleiche Theile. Verbindet man den Endpunkt H des fünften Theiles mit B durch die HB, und zieht durch D, E, F, G Parallele mit HB, so theilen diese auch die AB in 5 gleiche Theile AK, KL, LM, MN, NB (§. 79).

b) Um die vielen Parallelen zu vermeiden, lege man an AB (Fig. 64) durch A die beliebige Gerade AC, und durch B die

Fig. 64.



BD || CA, trage sowohl auf die AC als BC 4 gleiche Theile auf, und ziehe durch die Theilungspunkte die geraden Linien EM, FL, GK, HJ, so theilen diese die AB in 5 gleiche Theile.

Eine andere Lösung dieser Aufgabe wird in §. 129 angegeben werden.

Congruenz und Construction der Vierecke.

§. 81. Zwei Vierecke sind congruent, wenn in denselben alle vier Seiten und alle vier Winkel nach der Ordnung paarweise gleich sind.

Hieraus folgt:

1. Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel paarweise gleich sind.

2. Zwei Rechtecke sind congruent, wenn in denselben zwei anstoßende Seiten paarweise gleich sind.

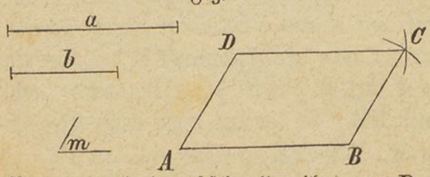
3. Zwei Quadrate sind congruent, wenn sie eine Seite gleich haben.

Ein Parallelogramm ist demnach durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, ein Rechteck durch zwei anstoßende Seiten, ein Quadrat durch eine Seite unzweideutig bestimmt.

§. 82. Constructionsaufgaben.

1. Ein Parallelogramm zu construieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 65.



Man zeichne in A (Fig. 65) einen Winkel = m, schneide von den Schenkeln AB = a und AD = b ab; hierauf beschreibe man aus B mit dem Halbmesser AD einen Bogen, und durchschneide ihn aus D mit dem Halbmesser AB; dann ist ABCD das verlangte Parallelogramm.

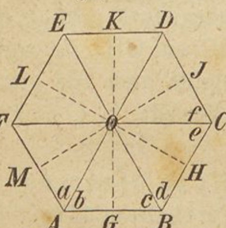
2. Ein Quadrat zu construieren, wenn gegeben ist:
   a) die Seite (26 *mm*);
   b) die Diagonale (32 *mm*).
3. Ein Rechteck zu construieren, wenn gegeben sind:
   a) zwei Seiten (28 *mm* und 19 *mm*);
   b) eine Seite und die Diagonale (25 *mm*, 35 *mm*).
4. Einen Rhombus zu construieren, wenn gegeben sind:
   a) eine Seite und ein Winkel (38 *mm*, 45°);
   b) die Grundlinie und die Höhe (32 *mm*, 24 *mm*).
5. Ein Trapez zu construieren, wenn gegeben sind:
   a) eine Parallelseite mit den ihr anliegenden Winkeln und eine der nicht parallelen Seiten (35 *mm*, 60°, 45° und 12 *mm*);
   b) drei Seiten und die Höhe.
6. Ein gleichschenkliges Trapez zu zeichnen, wenn die Parallelseiten (26 *mm*, 22 *mm*) und die Höhe (18 *mm*) gegeben sind.

4. Congruenz der Vielecke und symmetrische Gebilde.

Lehrsätze von den regelmäßigen Vielecken.

§. 83. Es sei das Vieleck ABCDEF (Fig. 66) regelmäßig, also AB = BC = CD = DE = EF = FA,
und A = B = C = D = E = F.

Fig. 66.



Halbiert man zwei Winkel A und B, die an einer Seite liegen, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ABO. Zieht man von dem Scheitel O desselben zu den übrigen Eckpunkten die Strecken OC, OD, OE, . . . so wird dadurch das Vieleck in lauter congruente gleichschenklige Dreiecke getheilt; denn legt man das erste Dreieck ABO um die Seite OB, so deckt es das Dreieck BCO, dieses kann ebenso mit dem nächsten zur Deckung gebracht werden, u. s. f. Die Strecken OA, OB, OC, . . . sind also einander gleich.

Da congruente gleichschenklige Dreiecke auch gleiche Höhen haben, so sind auch die von O auf die Seiten gefällten Senkrechten OG, OH, OJ, . . . einander gleich.

Daraus folgt:

1. Halbiert man in einem regelmäßigen Vielecke zwei auf einander folgende Umfangswinkel, und verbindet den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien mit den übrigen Eckpunkten des Vieleckes durch Strecken, so wird dadurch das Vieleck in lauter congruente gleichschenklige Dreiecke getheilt.

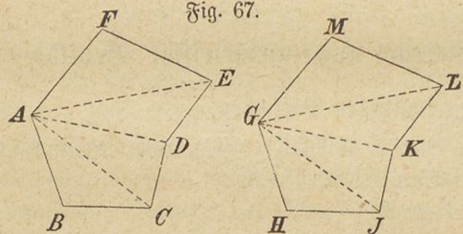
2. In jedem regelmäßigen Vieleck gibt es einen Punkt, der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit entfernt ist.

Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes. Man findet ihn, indem man zwei auf einander folgende Vieleckswinkel halbiert.

Congruenz der Vielecke.

§. 84. Zwei Vielecke sind congruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung paarweise gleich haben.

Fig. 67.



Zwei Vielecke ABCDEF und GHJKLM (Fig. 67), welche aus gleich vielen der Ordnung nach congruenten Dreiecken zusammengesetzt sind, sind selbst congruent.

Denn legt man beide Vielecke so aufeinander, dass zwei gleichliegende Dreiecke auf einander fallen, z. B. ABC auf GHJ, so muss auch das zweite Paar Dreiecke sich decken, folglich auch das dritte Paar, . . .; daher decken sich auch die ganzen Vielecke, d. i. sie sind congruent.

§. 85. Ein Vieleck ABCDEF (Fig. 67) zu übertragen, d. i. ein Vieleck zu zeichnen, welches mit dem Vielecke ABCDEF congruent ist.

Man zerlege das gegebene Vieleck von A aus durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen so viele in derselben Ordnung liegende Dreiecke, welche mit denen des gegebenen Vieleckes congruent sind. Die dadurch entstehende Figur GHJKLM ist mit der gegebenen congruent. Es ist hier nicht nöthig die Diagonalen wirklich zu ziehen; dieselben können in dem gegebenen wie in dem neu entstehenden Vielecke bloß gedacht werden.

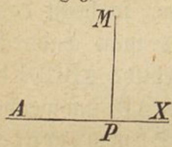
§. 86. Auf dem Zeichnen congruenter Vielecke beruht das geometrische Copieren der Gebilde in gleicher Größe.

Dabei können die Hauptpunkte des Gebildes, wie bei der Lösung der Aufgabe in §. 85, mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen bestimmt werden.

Ein anderes geometrisches Verfahren beim Copieren besteht in der Bestimmung der Hauptpunkte durch Coordinaten.

Zieht man in einer Ebene von einem bestimmten Punkte A (Fig. 68) einen Strahl AX, und fällt von irgend einem Punkte M auf diesen Strahl eine Senkrechte MP, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück AP des Strahls die Abscisse, die Senkrechte MP selbst aber die Ordinate, und beide zusammen die Coordinaten jenes Punktes M. Der Strahl AX heißt die Abscissenlinie, der Punkt A der Anfangspunkt.

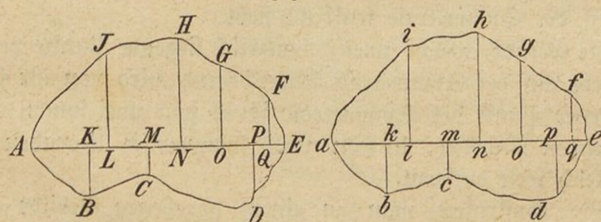
Fig. 68.



Wenn der Anfangspunkt A und die Richtung der Abscissenlinie AX gegeben sind, so ist die Lage eines jeden Punktes M vollkommen bestimmt, wenn dessen Coordinaten AP und MP bekannt sind; denn man braucht nur von A aus an der Abscissenlinie ein Stück abzuschneiden, welches der Abscisse AP gleich ist, dann im Punkte P eine Senkrechte zu errichten, und die Ordinate PM darauf aufzutragen; der Endpunkt ist der gesuchte Punkt M.

Um mittelst der Coordinaten ein Gebilde ABCDE . . . . (Fig. 69) zu copieren, nehme man im Originale irgend eine Gerade AE als

Fig. 69.



Abscissenlinie, und A als Anfangspunkt derselben an, und fälle von allen Hauptpunkten Senkrechte auf die Abscissenlinie. Sodann ziehe man auf dem Copierblatte die Abscissenlinie ae in schicklicher Lage, trage darauf in der Ordnung alle Abscissen von a bis k, l, m, n, . . .

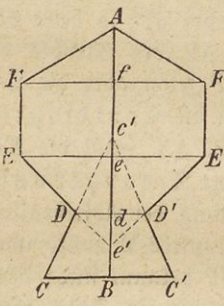
auf, errichte in diesen Punkten Senkrechte, und trage auf ihnen die entsprechenden Ordinaten von k bis b, von l bis i, von m bis c, ... auf, so ist dadurch die Lage aller Punkte in der Copie bestimmt; man braucht sie dann nur gehörig durch Linien zu verbinden.

Mechanische Methoden des Copierens: das Pikieren (Durchstechen des Originals), das Durchzeichnen, besonders auf durchscheinendem Papier, das Copieren mittelst der Quadratnetze, u. s. w.

Symmetrische Gebilde.

§. 87. Fällt man in der Figur ABCDEF (Fig. 80) von den Eckpunkten die Senkrechten Dd, Ee, Ff auf AB und wendet die Figur als eine feste Verbindung um AB als Axe um, so heißt das Gebilde ABC'D'E'F, welches man dadurch erhält, mit dem gegebenen Gebilde ABCDEF symmetrisch, und die Gerade AB, um welche die Umwendung geschieht, die Symmetrale.

Fig. 70.



Zwei symmetrische ebene Gebilde sind immer auch congruent; ihre gleichen Bestandstücke folgen jedoch in Beziehung auf die Symmetrale in entgegengesetzter Ordnung auf einander.

Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften der symmetrischen Gebilde:

1. Zwei symmetrisch liegende Seiten sind gleich.
2. Zwei symmetrisch liegende Winkel sind gleich.
3. Zwei symmetrisch liegende Seiten schneiden sich auf der Symmetrale, oder sind ihr parallel, oder bilden eine Gerade, welche auf der Symmetrale senkrecht steht.
4. Die Gerade, welche zwei symmetrisch liegende Punkte verbindet, steht auf der Symmetrale senkrecht und wird von ihr halbiert.
5. Jeder Punkt der Symmetrale ist a) von zwei symmetrisch liegenden Punkten, b) von zwei symmetrisch liegenden Seiten gleich weit entfernt.

Wie construiert man zu einem gegebenen Gebilde ein ihm symmetrisches?

§. 88. Aus dem Begriffe der Symmetrie folgt:

a) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Höhe, in einem gleichseitigen Dreiecke jede der drei Höhen eine Symmetrale.

b) In einem Quadrate ist sowohl jede Diagonale, als auch jede Gerade, welche zwei gegenüberliegende Seiten halbiert, eine Symmetrale.

c) In einem gleichschenkligen Trapeze ist die Gerade, welche die zwei parallelen Seiten halbiert, eine Symmetrale.

d) In einem regelmäßigen Vielecke ist jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt und entweder durch einen Eckpunkt oder durch die Mitte einer Seite geht, eine Symmetrale.

IV. Der Kreis.

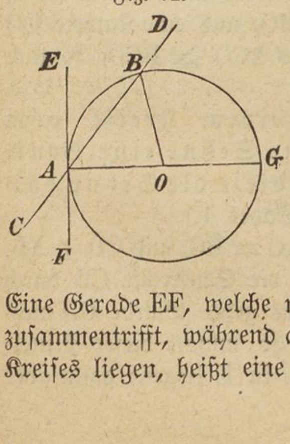
1. Der Punkt und der Kreis.

§. 89. Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, oder in dem Umfange desselben, oder außerhalb des Kreises, je nachdem die Entfernung des Punktes vom Kreismittelpunkte kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser des Kreises.

2. Die Gerade und der Kreis.

§. 90. Eine Gerade hat mit der Kreislinie zwei Punkte, oder nur einen Punkt, oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich, je nachdem ihre Entfernung vom Kreismittelpunkte kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser des Kreises.

Fig. 71.



Eine Strecke AB (Fig. 71), welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt eine Sehne. Eine Sehne ist um so größer, je näher sie dem Mittelpunkte liegt; die längste Sehne ist daher diejenige, welche durch den Mittelpunkt selbst geht, nämlich der Durchmesser, wie AG.

Eine Gerade CD, welche durch die Verlängerung einer Sehne AB über ihre Endpunkte hinausgeht, heißt eine Secante. Eine Gerade EF, welche mit der Kreislinie nur in einem Punkte A zusammentrifft, während alle andern Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen, heißt eine Berührungslinie oder Tangente.

Durch den Schnitt des Kreises mit der Geraden entstehen folgende Figuren:

1. Der Kreisabschnitt oder das Kreissegment, d. i. ein Theil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne AB und dem dazu gehörigen Bogen AB begrenzt wird;

2. der Kreisausschnitt oder Kreissector, d. i. ein Theil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem dazwischenliegenden Bogen begrenzt wird, wie AOBA.

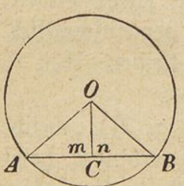
Lehrsätze über die Geraden im Kreise.

§. 91. Zu gleichen Sehnen gehören in demselben Kreise auch gleiche Bogen; und umgekehrt: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Sehnen.

Von der Richtigkeit dieser zwei Sätze kann man sich überzeugen, indem man die betreffenden Kreisabschnitte übereinander legt; man findet, dass unter jeder der zwei obigen Voraussetzungen die beiden Kreisabschnitte vollkommen übereinander fallen, folglich im ersten Falle auch die Bogen, im zweiten auch die Sehnen sich decken.

§. 92. 1. Es sei die Sehne AB (Fig. 72) im Punkte C halbiert, also $AC = BC$. Da auf $AO = BO$ und $CO = CO$, so ist $\triangle ACO \cong BCO$, also Winkel $m = n$, folglich $CO \perp AB$; d. h.

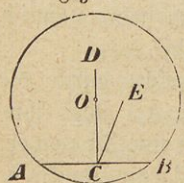
Fig. 72.



Die Gerade, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit der Mitte einer Sehne verbindet, steht auf der Sehne senkrecht.

2. Es sei (Fig. 72) $OC \perp AB$. Man ziehe die Halbmesser AO und BO, wodurch zwei rechtwinklige Dreiecke ACO und BCO entstehen: in diesen ist die Hypotenuse $AO = BO$, und eine Kathete CO gemeinschaftlich; also ist $\triangle ACO \cong BCO$, folglich auch $AC = BC$; d. h.

Fig. 73.



Zieht man in einem Kreise vom Mittelpunkte auf eine Sehne eine Senkrechte, so wird durch diese die Sehne halbiert. (Umkehrung des Satzes 1.)

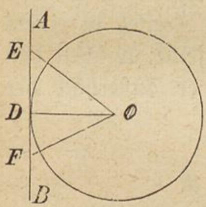
3. Es sei (Fig. 73) $AC = BC$, und $CD \perp AB$, so läſst sich zeigen, dass die Senkrechte CD durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Würde CD nicht durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, so müsste dieser Mittelpunkt außerhalb der Senkrechten CD, z. B. in E liegen; dann aber

müſste die Gerade EC, da ſie das angenommene Centrum E mit der Mitte der Sehne verbindet, auf dieſer Sehne AB ſenkrecht ſtehen, was jedoch nicht ſein kann, da durch einen Punkt C auf eine Gerade AB nur eine Senkrechte gezogen werden kann. Da aus der Annahme, daſs der Mittelpunkt nicht in der CD liege, ein Widerſpruch hervor geht, ſo iſt die Annahme ſelbſt falſch; folglich iſt das Gegentheil wahr: DC geht durch den Mittelpunkt des Kreiſes.

Halbiert man alſo in einem Kreiſe eine Sehne und errichtet im Halbierungspunkte auf dieſelbe eine Senkrechte, ſo muſs dieſe durch den Mittelpunkt des Kreiſes gehen. (Umkehrung des Satzes 1.)

§. 93. Errichtet man in dem Endpunkte eines Halbmeſſers auf denſelben eine Senkrechte, ſo iſt dieſe eine Tangente des Kreiſes.

Fig. 74.



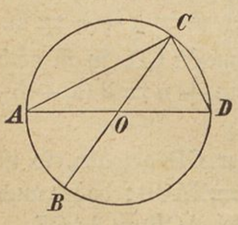
Es ſei (Fig. 74) AB $\perp$ OD. Jede ſchiefe Strecke wie OE, OF, . . . iſt länger als die Senkrechte OD; alſo liegen die Punkte E, F . . . außerhalb der Kreislinie. Die Gerade AB hat daher mit der Kreislinie nur den Punkt D gemeinſchaftlich, alle anderen Punkte liegen außerhalb des Kreiſes; AB iſt alſo eine Tangente des Kreiſes.

3. Der Winkel und der Kreis.

§. 94. Ein Winkel, deſſen Scheitel im Mittelpunkte eines Kreiſes liegt, deſſen Schenkel daher Halbmeſſer des Kreiſes ſind, heißt ein Centriwinkel.

Ein Winkel, deſſen Scheitel in der Peripherie eines Kreiſes liegt und deſſen Schenkel Sehnen des Kreiſes ſind, heißt ein Peripheriewinkel.

Fig. 75.



AOB (Fig. 75) iſt ein Centriwinkel, der auf dem Bogen AB aufſteht; ACB iſt ein Peripheriewinkel, der auf demſelben Bogen AB aufſteht.

Gehen die Schenkel eines Peripheriewinkels durch die Endpunkte eines Durchmeſſers, wie bei dem Winkel ACD, ſo heißt derſelbe ein Winkel im Halbkreiſe.

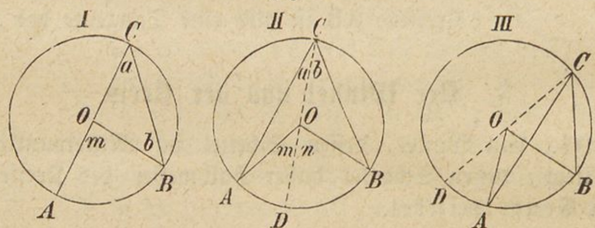
Lehrsätze über die Winkel im Kreise.

§. 95. Zu gleichen Centriwinkeln gehören auch gleiche Sehnen und Bogen; umgekehrt: zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel, und: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Centriwinkel.

Von der Richtigkeit dieser drei Sätze überzeugt man sich, wenn man entweder zwei gleiche Centriwinkel, oder zwei gleiche Sehnen, oder im dritten Satze zwei gleiche Bogen annimmt, und dann die betreffenden Kreisausschnitte über einander gelegt denkt; man findet, dass sich unter jeder dieser Voraussetzungen die beiden Kreisausschnitte vollkommen decken, dass also für jede Voraussetzung auch die angeführten Behauptungen richtig sind.

§. 96. Vergleicht man einen Centri- und einen Peripheriewinkel, welche beide auf demselben Bogen eines Kreises stehen, so sind in Bezug auf die Lage der Schenkel des Peripheriewinkels drei Fälle möglich: entweder liegt der Mittelpunkt des Kreises in einem Schenkel des Winkels (Fig. 76, I), oder liegt derselbe zwischen den Schenkeln des Winkels (Fig. 76, II), oder liegt er außerhalb der Winkelfläche (Fig. 76, III).

Fig. 76.



a) In Figur 76, I ist m als ein Außenwinkel des Dreieckes BOC gleich der Summe der innern entgegengesetzten Winkel, also $m = a + b$; aber b und a sind als Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes einander gleich, daher $m = a + a = 2a$.

b) Zieht man in Figur 76, II den Durchmesser CD, so ist nach a) der Winkel $m = 2a$, $n = 2b$, daher auch $m + n = 2(a + b)$, d. i. der Winkel $AOB = 2\,ACB$.

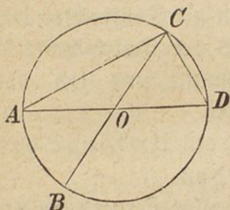
c) Wird in Figur 76, III der Durchmesser CD gezogen, so ist nach a) der Winkel $BOD = 2BCD$, ferner $AOD = 2ACD$; daher auch $BOD - AOD = 2\,(BCD - ACD)$, d. i. Winkel $AOB = 2\,ACB$.

Es findet somit allgemein der Satz statt:

Wenn ein Centri- und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen aufstehen, so ist der Centriwinkel doppelt so groß, als der Peripheriewinkel.

Daraus folgt: *Peripheriewinkel, welche in demselben Kreise auf gleichen Bogen aufstehen, sind einander gleich.*

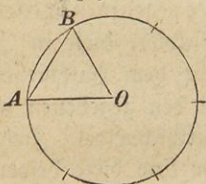
Fig. 77.



§. 97. ACD (Fig. 77) ist ein Winkel im Halbkreise. Zieht man den Durchmesser CB, so sind nach dem vorhergehenden Satze die Peripheriewinkel ACB und DCB einzeln die Hälfte der Centriwinkel AOB und DOB, daher muss auch die Summe der ersteren die Hälfte von der Summe der letzteren sein. Allein AOB und DOB betragen zusammen zwei Rechte, also muss die Summe ACD + DCB, d. i. der Winkel ACD im Halbkreise, gleich einem Rechten sein.

Der Winkel im Halbkreise ist also ein Rechter.

Fig. 78.

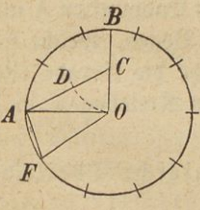


§. 98. Es sei (Fig. 78) O der Mittelpunkt eines Kreises und AB = AO. Das Dreieck ABO ist gleichseitig, daher jeder Winkel desselben gleich 60^0.

Schneidet man also in einem Kreise mit dem Halbmesser als Sehne einen Bogen ab, so beträgt der dazu gehörige Centriwinkel 60^0.

§. 99. Es sei (Fig. 79) O der Mittelpunkt eines Kreises und

Fig. 79.



BO ⊥ AO, ferner C die Mitte der BO. Zieht man AC, schneidet CD = CO ab, und beschreibt mit dem Reste AD den Kreisbogen AF, so läſst sich die Sehne AF genau 10mal im Kreise herumtragen; es ist also der Mittelpunktswinkel AOF der 10te Theil von 360^0 d. i. 36^0.

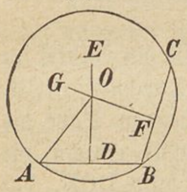
Wenn man also in einem Kreise zwei auf einander senkrechte Halbmesser zieht und die Mitte des einen mit dem Endpunkte des andern durch eine Strecke verbindet, sodann auf dieser die Hälfte des Halbmessers auf-

trägt und mit dem Reste einen Bogen abschneidet, so beträgt der zu diesem Bogen gehörige Centriwinkel 36°.

Constructionsaufgaben.

§. 100. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 80), welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Fig. 80.



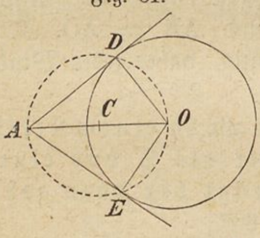
Man ziehe die Strecken AB und BC und errichte in den Mitten derselben die Senkrechten DE und FG, so ist nach §. 92, 3 der Durchschnitt O dieser Senkrechten der Mittelpunkt und OA der Halbmesser des gesuchten Kreises.

§. 101. 1. Durch einen Punkt in dem Umfange des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Man ziehe zu dem gegebenen Punkte einen Halbmesser und errichte darauf eine Senkrechte, so ist diese die verlangte Tangente (§. 93).

2. Durch einen Punkt A (Fig. 81) außerhalb des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

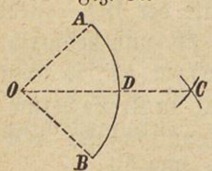
Fig. 81.



Man verbinde den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises durch die Strecke AO, halbiere diese in C, und beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten D und E durchschneidet. Zieht man nun AD und AE, so sind diese beiden Geraden Tangenten des Kreises (§. 97).

§. 102. Einen Kreisbogen AB (Fig. 82) zu halbieren.

Fig. 82.



Man beschreibe aus den Endpunkten A und B mit demselben Halbmesser Bogen, welche sich in C durchschneiden, und ziehe die Gerade CO; diese halbiert den gegebenen Kreisbogen in D (§. 95).

§. 103. Die Kreislinie in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man bestimme die Größe eines Centriwinkels, indem man 360° durch die Anzahl solcher Winkel d. i. durch die Zahl der verlangten gleichen Theile des Kreises dividiert, construiere den gefundenen Winkel am Mittelpunkte, und trage die durch seine Schenkel abgeschnittene Sehne in der Peripherie herum.

Mechanisch kann die Construction der Winkel und daher die Kreistheilung mit Hilfe des Transporteurs jedesmal vorgenommen werden.

Geometrisch lassen sich nur diejenigen Theilungen der Kreislinie ausführen, bei denen der entsprechende Centriwinkel geometrisch construiert werden kann. Hierher gehören folgende Aufgaben:

a) Die Kreislinie in 2 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe einen Durchmesser.

Durch Halbierung der Bogen erhält man dann 4, 8, 16, . . . gleiche Theile.

b) Die Kreislinie in 6 gleiche Theile zu theilen. Man trage den Halbmesser als Sehne im Kreise herum (§. 98).

Nimmt man zwei solche Theile für einen einzigen, so ist die Kreislinie in 3 gleiche Theile getheilt.

Wie wird man die Peripherie in 12, 24 gleiche Theile theilen?

c) Die Kreislinie in 10 gleiche Theile zu theilen.

Die Auflösung ist in dem Lehrsatze §. 99 enthalten.

Betrachtet man zwei Theile zusammen für einen, so ist die Kreislinie in 5 gleiche Theile getheilt.

Wie wird der Kreisumfang in 20, 40 gleiche Theile getheilt?

d) Die Kreislinie in 15 gleiche Theile zu theilen. Man schneide vom 6ten Theile der Peripherie den 10ten Theil derselben ab, so ist der Rest der 15te Theil.

Durch Halbieren der Bogen kann man dann 30, 60, ... gleiche Theile erhalten.

4. Das Vieleck und der Kreis.

§. 104. Ein Vieleck, dessen alle Eckpunkte in dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben und der Kreis heißt um das Vieleck beschrieben.

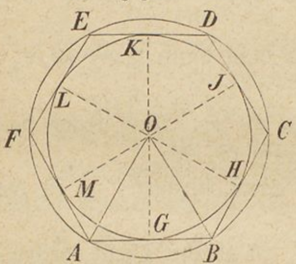
Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umgeschrieben und der Kreis heißt in das Vieleck beschrieben.

Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck heißt auch ein Sehnenvieleck, ein dem Kreise umgeschriebenes Vieleck ein Tangentenvieleck.

Lehrsätze über die regelmäßigen Sehnen- und Tangentenvielecke.

§. 105. Jedem regelmäßigen Vielecke lässt sich ein Kreis ein- und umschreiben.

Fig. 83.



Es sei ABCDEF (Fig. 83) ein regelmäßiges Vieleck. Halbiert man zwei Winkel, z. B. A und B, so besitzt der Durchschnittspunkt O der beiden Halbierungslinien die Eigenschaft, dass er von allen Seiten und eben so von allen Eckpunkten gleichweit absteht. Beschreibt man daher aus O mit der auf AB Senkrechten OG als Halbmesser einen Kreis, so muss der Umfang desselben durch die Punkte G, H, I, K, L, M gehen, und da die Seiten des Vieleckes Tangenten zu diesem Kreise sind, so ist dieser dem Vielecke eingeschrieben. Beschreibt man ebenso aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO einen Kreis, so muss derselbe durch alle Eckpunkte A, B, C, D, E, F gehen, und ist somit dem Vielecke umgeschrieben.

§. 106. 1. Theilt man den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Theile und zieht durch je zwei auf einander folgende Theilungspunkte eine Sehne, so ist das von diesen Sehnen gebildete Vieleck regelmäßig.

Ist (Fig. 83) die aus O mit dem Halbmesser OA beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Theile getheilt, und zieht man die Sehnen AB, BC, CD, DE, EF, FA, so sind in dem Vielecke ABCDEF die Seiten als Sehnen des Kreises, welche zu gleichen Bogen gehören, und die Vieleckswinkel als Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen aufstehen, einander gleich. Das Vieleck ist daher gleichseitig und gleichwinklig, also regelmäßig.

Zusatz. Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises. (§. 98.)

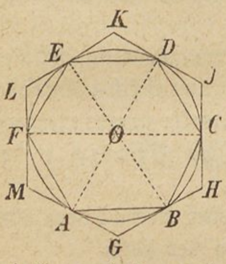
2. Theilt man einen Kreis in mehrere gleiche Theile und zieht durch jeden Theilungspunkt eine Tangente, so wird von diesen Tangenten ein regelmäßiges Vieleck eingeschlossen.

Ist (Fig. 83) die aus O mit dem Halbmesser OG beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Theile getheilt, und errichtet man in den Punkten G, H, I, J, K, L, M auf die zu denselben gezogenen Halbmesser Senkrechte, so erhält man das dem Kreise umgeschriebene Vieleck ABCDEF; und es ist zu beweisen, dass dieses gleichseitig und gleichwinklig sei. Da die Centriwinkel des Kreises nach der Annahme gleich sind, so ist leicht einzusehen, dass die Vierecke GOMA, GOHB, HOJC, ... über einander gelegt sich vollkommen decken, also congruent sind. Aus dieser Congruenz aber folgt erstlich, dass der Winkel A = B = C ... ist, ferner dass sowohl GB = HG = JD = ... als auch AG = BH = CJ = ... ist, somit auch die Summen dieser gleichen Stücke, nämlich die Vieleckseiten AB, BC, CD .... gleich sind.

Constructionsaufgaben.

§. 107. 1. Einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck a) einzuschreiben, b) umzuschreiben. (Fig. 84.)

Fig 84.



Man theile die Kreislinie in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten haben soll, und ziehe durch die Theilungspunkte a) Sehnen, b) Tangenten des Kreises.

Beschreibe in einen Kreis ein regelmäßiges Vier-, Fünf-, Sechs-, Acht-, Zwölfeck.

Wenn man in denselben Kreis verschiedene regelmäßige Vielecke beschreibt, so sieht man, dass, je mehr Seiten ein Vieleck hat, die Seiten desselben um so weiter vom Mittelpunkte abstehen, also desto näher an der Kreislinie liegen; dass zwar der Umfang und Flächenraum des eingeschriebenen Vieleckes stets kleiner ist als der Umfang und der Inhalt des Kreises, dass aber der Unterschied zwischen beiden um so geringer wird, je mehr Seiten das Vieleck hat.

Beschreibe um den Kreis ein regelmäßiges Drei-, Fünf-, Sechs-, Acht-, Zwölfeck.

Je mehr Seiten das umgeschriebene regelmäßige Vieleck hat, desto näher liegen die Eckpunkte desselben an der Kreislinie. Der Umfang und der Flächenraum des umgeschriebenen Vieleckes sind zwar stets größer als der Umfang und der Inhalt des Kreises, aber der Unterschied zwischen beiden wird um so kleiner, je mehr Seiten das Vieleck hat.

Man kann demnach den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten.

2. Um ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Man halbiere (Fig. 83) zwei Vieleckswinkel A und B, die einen Schenkel gemein haben; aus dem Durchschnittspunkte O der beiden Halbierungslinien beschreibe man mit dem Halbmesser OA einen Kreis, welcher durch alle Eckpunkte des Vieleckes geht und somit um das Vieleck umgeschrieben ist.

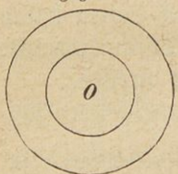
3. In ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Man halbiere (Fig. 83) zwei auf einander folgende Seiten AB und BC, errichte in den Halbierungspunkten G und H Senkrechte, welche sich in O durchschneiden. Der aus O mit dem Halbmesser OG beschriebene Kreis wird alle Seiten des gegebenen Vieleckes berühren und daher dem Vielecke eingeschrieben sein.

5. Lage der Kreise gegen einander.

§. 108. Zwei Kreise, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen concentrische Kreise, wie Fig. 85.

Fig. 85.



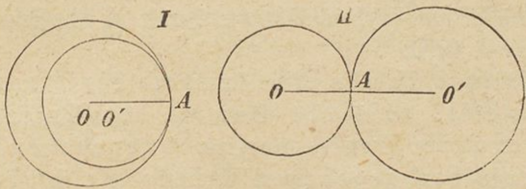
Die zwischen ihren Peripherien liegende Fläche heißt Kreisring.

Zwei Kreise, welche keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen excentrische Kreise. Die Strecke, welche die Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise verbindet, heißt die Centrale der beiden Kreise.

Zwei excentrische Kreise können sich entweder berühren oder schneiden, oder es ist keines von beiden der Fall.

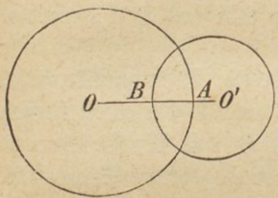
Zwei Kreise berühren sich, wenn ihre Umfänge nur einen Punkt gemeinschaftlich haben. Die Berührung geschieht von innen (Fig. 86 I), oder von außen (Fig. 86 II), je nachdem der eine Kreis innerhalb oder außerhalb des andern liegt. Bei der inneren Berührung zweier Kreise ist die Centrale OO′ gleich der Differenz der Halbmesser AO — AO′; bei der äußeren Berührung ist die Centrale OO′ gleich der Summe der Halbmesser AO + AO′. In beiden Fällen liegt der Berührungspunkt auf der Centrale.

Fig. 86.



Zwei Kreise schneiden sich, wenn ihre Peripherien (Fig. 87) zwei Punkte gemeinschaftlich haben. Das gemeinschaftliche Stück der beiden Kreisflächen heißt eine Linse, jedes der nicht gemeinschaftlichen Stücke ein Mond.

Fig. 87.



Beim Durchschnitte zweier Kreise ist die Centrale OO′ größer als die Differenz der Halbmesser AO — BO′, aber kleiner als die Summe derselben AO + BO′.

Zwei excentrische Kreise, welche sich weder berühren noch schneiden, können entweder ganz in einander oder ganz außer einander liegen. Die Centrale ist im ersten Falle kleiner als die Differenz, im zweiten Falle größer als die Summe der Halbmesser.

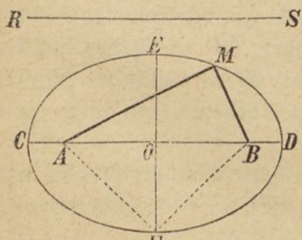
Welche Fälle sind in Beziehung auf die gegenseitige Lage bei drei Kreisen möglich?

Wie viele Punkte haben drei sich schneidende Kreise mit einander gemeinschaftlich?

V. Die Ellipse, Hyperbel und Parabel.

1. Die Ellipse.

Fig. 88.



§. 109. Es seien in einer Geraden zwei Punkte A und B (Fig. 88) gegeben. Befestigt man in A und B Stifte und legt um dieselben einen an den Enden zusammen gebundenen Faden, der um die gegebene Strecke RS länger ist als der Abstand AB der beiden Punkte A und B, spannt sodann den Faden mittelst eines Zeichenstiftes M und führt diesen so, dass der Faden immer straff gespannt bleibt, um die beiden Punkte herum, so beschreibt der Punkt M eine krumme Linie, welche Ellipse heißt.

Die Ellipse ist also eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, dass die Summe der Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten immer derselben gegebenen Strecke gleich ist. Sie ist, wie der Kreis, eine geschlossene krumme Linie.

Die zwei gegebenen Punkte A und B heißen die Brennpunkte der Ellipse; die Entfernungen eines Punktes M von den beiden Brennpunkten, nämlich die Strecken AM und BM, werden Leitstrahlen jenes Punktes genannt.

Die Strecke CD, welche durch die beiden Brennpunkte geht, heißt die große Achse. Die Endpunkte C und D derselben heißen die Scheitel, und der Halbierungspunkt O der Mittelpunkt der Ellipse. Die große Achse CD ist gleich der gegebenen Strecke RS. Man kann daher sagen:

Die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist der großen Achse gleich.

Die Strecke EF, welche im Mittelpunkte O auf die große Achse senkrecht steht, heißt die kleine Achse der Ellipse.

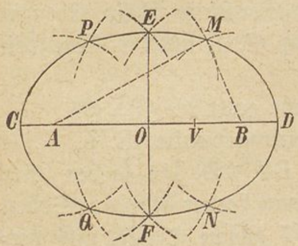
Die Entfernung eines Brennpunktes der Ellipse von dem Mittelpunkte derselben heißt die Excentricität der Ellipse. Je kleiner die Excentricität ist, desto mehr nähert sich die Ellipse einem Kreise.

Die Ellipse ist in der Anwendung von großer Wichtigkeit; man baut z. B. Gewölbe, Wasserbehälter, Rasenplätze, Blumenbeete u. dgl. von elliptischer Form; am wichtigsten aber ist diese Linie in der Astronomie, indem unsere Erde und alle Planeten unseres Sonnensystems in mehr oder weniger gestreckten Ellipsen sich um die Sonne bewegen, die sich in einem der Brennpunkte aller jener elliptischen Bahnen befindet.

In dem rechtwinkligen Dreiecke AOF ist die Hypotenuse AF gleich der halben großen Achse, die Kathete OF gleich der halben kleinen Achse und die Kathete AO gleich der Excentricität der Ellipse. Sind daher von diesen drei Größen zwei gegeben, so kann man aus denselben die dritte bestimmen.

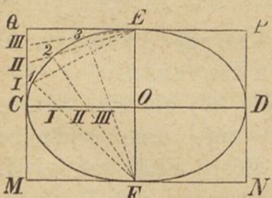
§. **110.** Wenn die große Achse und die Entfernung der beiden Brennpunkte gegeben sind, beliebig viele Punkte der Ellipse zu bestimmen.

Fig. 89.



Es seien (Fig. 89) A und B die beiden Brennpunkte. Man ziehe durch dieselben eine Gerade, halbiere den Abstand AB in O, und trage von O aus bis C und D die halbe Länge der gegebenen großen Achse auf; CD ist nun die große Achse der Ellipse, C und D sind ihre Scheitel. Beschreibt man ferner mit der halben großen Achse aus beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen, so liegen die Durchschnittspunkte E und F in der Ellipse. Zieht man durch diese Punkte die Strecke EF, so muſs dieselbe, weil über AB als Grundlinie nach oben und unten ein gleichschenkliges Dreieck gedacht werden kann, durch den Punkt O gehen, und auf AB senkrecht stehen; EF ist also die kleine Achse der Ellipse. Nun nehme man in der Strecke AB irgend einen Punkt V an, so wird dadurch die große Achse in zwei Abschnitte getheilt; beschreibt man zuerst mit dem größeren CV aus beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen, und dann ebenso mit dem kleineren Abschnitte DV, so sind die vier Durchschnittspunkte M, N, P und Q Punkte der Ellipse, weil für jeden derselben der eine Leitstrahl dem Abschnitte CV der großen Achse und der andere Leitstrahl dem Abschnitte DV, also ihre Summe der ganzen großen Achse gleich ist. Auf diese Art werden, wenn man in der Strecke AB verschiedene Punkte annimmt, beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmt werden. Verbindet man diese Punkte durch eine stetig gekrümmte Linie, so erhält man dadurch die verlangte Ellipse, und zwar um so genauer, je mehr Punkte derselben man bestimmt hat.

Fig. 90.



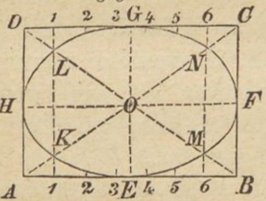
§. 111. 1. In ein gegebenes Rechteck MNPQ (Fig. 90) eine Ellipse zu beschreiben.

Man ziehe durch die Mitten der Seiten die Strecken CD und EF, so sind diese bezüglich die große und die kleine Achse und ihr Durchschnitt O der Mittelpunkt der Ellipse. Theilt man nun sowohl die CQ als die CO in gleich viele z. B. in vier gleiche Theile, und verbindet die Theilungspunkte I, II, III der CQ mit E, die Theilungspunkte I, II, III der CO mit F durch gerade Linien, so geben die Durchschnitte

1, 2, 3 dieser Strecken Punkte der Ellipse, durch deren Verbindung man den zwischen C und E liegenden Ast dieser Linie erhält. Eben so kann man die zwischen E und D, D und F, F und C liegenden Punkte der Ellipse bestimmen.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe zeigt die Fig. 91.

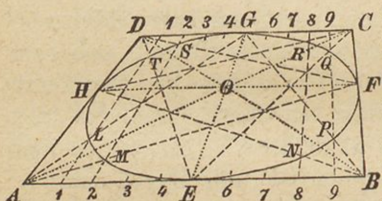
Fig. 91.



Die Halbierungspunkte E, F, G, H der Seiten AB, BC, CD, DA geben vier Punkte. Theilt man ferner jede der Seiten AB und CD in 7 gleiche Theile, und verbindet die ersten und sechsten Theilungspunkte durch Strecken, so sind auch ihre Durchschnitte mit den Diagonalen, nämlich K, L, M, N Punkte der Ellipse. Man hat somit zur Bestimmung der Ellipse acht Punkte.

2. Einem Trapeze eine Ellipse einzuschreiben.

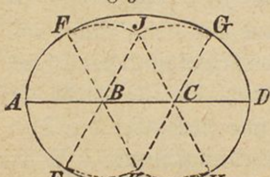
Fig. 92.



Die Mitten E und G (Fig. 92) der beiden Parallelseiten sind Punkte der Ellipse; ebenso die Punkte F und H, welche man erhält, wenn man durch den Durchschnitt O der Diagonalen die HF || AB zieht. Theilt man dann jede der zwei Parallelseiten in 10 gleiche Theile, verbindet die ersten zwei und die letzten zwei Theilungspunkte durch Strecken, und zieht auch von den Punkten E, F, G, H zu den gegenüberstehenden Eckpunkten des Trapezes Strecken, so liegen die Durchschnitte L, M, N, P, Q, R, S, T dieser und der früher gezogenen Strecken in der Ellipse. Man hat also zur Bestimmung der Ellipse zwölf Punkte.

3. Eine angenäherte Ellipse durch Zusammensetzung mehrerer Kreisbogen zu construieren.

Fig. 93.

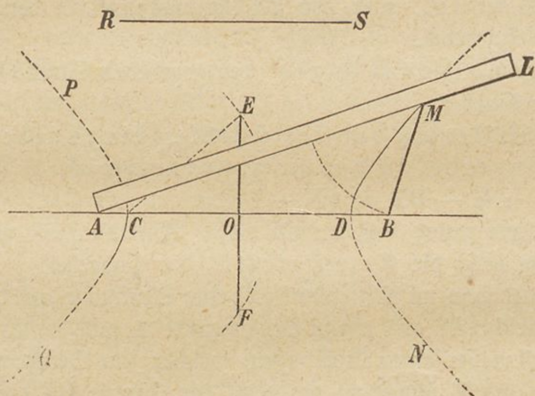


Man trage (Fig. 93) auf eine Gerade AB = BC = CD auf, und beschreibe aus B und C die Bogen EAF und GDH, welche sich verlängert in I und K durchschneiden. Durch diese Punkte I und K und durch die Mittelpunkte B und C ziehe man vier Gerade, welche die vorhin beschriebenen Bogen in vier Punkten E, F, G und H schneiden. Beschreibt man nun aus K den Bogen FG, und aus I den Bogen EH, so erhält man die krumme Linie AEHDGF, deren Gestalt einer Ellipse ähnlich ist.

2. Die Hyperbel.

§. **112.** Es seien in einer Geraden zwei Punkte A und B (Fig. 94) gegeben. Man befestige in A die eine Kantenecke eines Lineals AL, so daß es um diesen Punkt gedreht werden kann. Sodann befestige man das eine Ende eines Fadens, welcher um

Fig. 94.



eine gegebene Strecke RS kürzer als AL ist, in L und das andere in B. Dreht man nun das Lineal um die Kantenecke A und führt dabei im Innern des Fadens einen Zeichenstift M so an der Kante AL, daß dabei der Faden stets gespannt bleibt, so beschreibt der Stift einen Ast DM einer krummen Linie, welche Hyperbel heißt. Wendet man das Lineal AL nach unten, so erhält man durch das eben beschriebene Verfahren den unteren Ast DN der Hyperbel, welcher mit dem oberen Aste DM congruent ist. Wird dann die Kantenecke des Lineals in B angebracht und das zweite Ende des Fadens, welches früher in B war, nun in A befestiget, so kann auf gleiche Weise durch die Drehung des Lineals und die Bewegung des Stiftes die krumme Linie PCQ erzeugt werden, welche den zweiten ebenfalls aus zwei Ästen bestehenden Theil der Hyperbel bildet und mit MDN congruent ist.

Die Hyperbel ist demnach eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, dass die Differenz der Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten immer derselben gegebenen Strecke gleich ist. Sie besteht aus zwei getrennten Theilen und erstreckt sich mit vier Ästen ins Unendliche.

Die zwei gegebenen Punkte A und B heißen die Brennpunkte der Hyperbel, die Strecken AM und BM Leitstrahlen des Punktes M.

Die Strecke CD, deren Verlängerung durch die Brennpunkte geht, nennt man die Hauptachse, die Endpunkte C und D derselben die Scheitel, und den Halbierungspunkt O den Mittelpunkt der Hyperbel.

Die Hauptachse CD ist gleich der gegebenen Strecke RS. Man kann daher sagen:

Die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Hyperbel ist der Hauptachse gleich.

$$AM - BM = AN - BN = \ldots = CD.$$

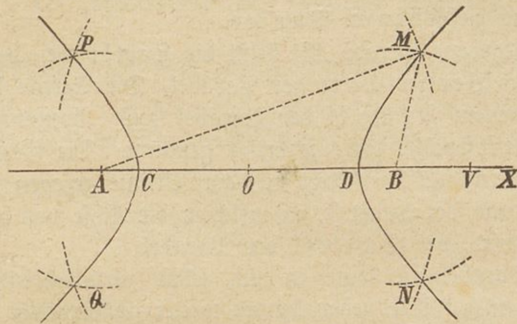
Die Entfernung $OA = OB$ des Mittelpunktes von jedem Brennpunkte heißt die Excentricität der Hyperbel.

Errichtet man im Mittelpunkte O eine Senkrechte auf die Hauptachse und beschreibt aus einem Brennpunkte A mit der Excentricität OA als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher jene Senkrechte in den Punkten E und F schneidet, so heißt die Strecke EF die Nebenachse der Hyperbel.

§. 113. Wenn die Hauptachse und die Entfernung der beiden Brennpunkte gegeben sind, beliebig viele Punkte der Hyperbel zu bestimmen.

Es seien (Fig. 95) A und B die beiden Brennpunkte. Man verbinde dieselben durch die Strecke AB, halbiere diese in O, und trage von O aus bis C und D die halbe Länge der gegebenen Hauptachse auf; CD ist nun die Hauptachse der Hyperbel, C und D sind ihre Scheitel. Nun nehme man in der Geraden BX irgend einen Punkt V an, und beschreibe mit dem Halbmesser CV aus den beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen, hierauf ebenso mit dem Halbmesser DV, so werden die Durchschnittspunkte M, N, P, Q dieser Bogen in der Hyperbel liegen; denn es ist für jeden derselben der eine Leitstrahl gleich der Strecke CV, der andere der

Fig. 95.

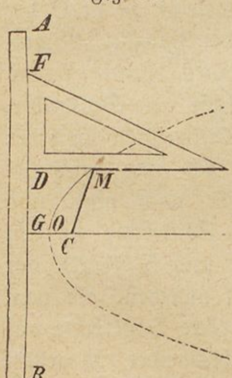


Strecke DV, also ihr Unterschied gleich CV — DV = CD. Nimmt man in der Geraden BX verschiedene andere Punkte und verfährt auf die eben angegebene Weise, so kann man dadurch beliebig viele Punkte erhalten, welche, durch eine stetige Linie verbunden, die verlangte Hyperbel geben.

3. Die Parabel.

§. **114.** Es seien (Fig. 96) die Gerade AB und der außer ihr liegende Punkt C gegeben. Man nehme ein bei D rechtwinkliges hölzernes Dreieck EDF und einen Faden von der Länge DE, befestige das eine Ende des Fadens im Punkte C und das andere in E. Läßt man dann das Dreieck mit der Kathete DF längs der Geraden AB fortgleiten, und führt zugleich den Zeichenstift M längs der Kathete DE so fort, daß dabei der Faden immer straff gespannt bleibt, so beschreibt der Stift M den oberen Ast einer krummen Linie, welche **Parabel** heißt. Dreht man das Dreieck so um, daß die Kante DF in die Richtung GB fällt, und verfährt dann wie vorhin, so erhält man den unteren Ast der Parabel, welcher mit dem oberen congruent ist.

Fig. 96.



Die **Parabel** ist demnach eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, daß jeder ihrer Punkte von einer gegebenen Geraden eben so weit entfernt ist als von einem gegebenen Punkte.

Die gegebene Gerade AB heißt die Leitlinie, der gegebene Punkt C der Brennpunkt der Parabel. Die Strecke MC, welche man von einem Punkte M der Parabel zum Brennpunkte zieht, wird der Leitstrahl jenes Punktes genannt. Die Gerade, welche durch den Brennpunkt senkrecht auf die Leitlinie gezogen wird, heißt die Achse, und der Punkt O, in welchem die Achse von der Parabel geschnitten wird, der Scheitel der Parabel.

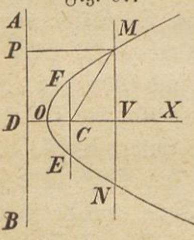
Die Parabel ist keine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie; ihre beiden Äste gehen immer weiter auseinander, je weiter sie sich vom Scheitel entfernen.

Die Parabel findet häufige Anwendung. Eine schief gegen den Horizont oder auch horizontal abgeschossene Kugel beschreibt eine Parabel; ein aus einer Röhre horizontal hervorschießender Wasserstrahl beschreibt einen parabolischen Bogen. Die Parabel wird selbst in den Künsten und Gewerben mannigfaltig angewendet; auf den Eigenschaften dieser krummen Linie beruhen die Reverberen bei Lampen, der Gebrauch der Hohlspiegel, der Hör- und Sprachrohre u. dgl.

§. 115. Wenn der Brennpunkt und die Leitlinie gegeben sind, beliebig viele Punkte der Parabel zu bestimmen.

Es sei (Fig. 97) AB die Leitlinie, und C der Brennpunkt. Man ziehe vom Brennpunkte auf die Leitlinie eine Senkrechte CD, und verlängere diese über den Brennpunkt hinaus. Halbiert man

Fig. 97.



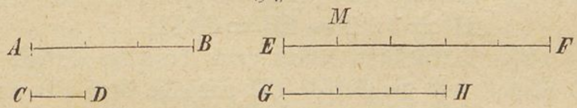
nun den Abstand CD im Punkte O, so ist O der Scheitel und OX die Achse der Parabel. Nimmt man in der Achse irgend einen Punkt V an, errichtet in diesem auf die Achse eine Senkrechte, misst den Abstand dieser Senkrechten von der Leitlinie, d. i. die Strecke VD und beschreibt damit aus dem Brennpunkte nach oben und unten Bogen, welche jene Senkrechte in den Punkten M und N durchschneiden, so sind M und N Punkte der Parabel, weil sie von der Leitlinie eben so weit abstehen, als vom Brennpunkte. Wenn man auf diese Weise sehr viele Senkrechte auf der großen Achse errichtet, und sie gehörig durchschneidet, so erhält man beliebig viele Punkte der Parabel. Liegen diese sehr nahe an einander, so gibt ihre Verbindung mit einem freien Zuge die verlangte Parabel.

VI. Ähnlichkeit der ebenen Figuren.

1. Verhältnisse und Proportionen der Strecken.

§. 116. Vergleicht man (Fig. 98) die zwei Strecken AB und CD mit einander, so sieht man, dass CD in AB 3mal enthalten ist.

Fig. 98.



Diese Vergleichung gibt das *Verhältnis* von AB zu CD, welches man so anschreibt AB : CD; AB heißt das *Vorderglied* CD das *Hinterglied*. Da CD in AB 3mal, in CD aber 1mal enthalten ist, so verhalten sich die zwei Strecken AB und CD so wie die Zahlen 3 und 1, oder sie haben das Verhältnis 3 : 1, und umgekehrt verhält sich CD zu AB wie 1 : 3. Man sagt: die Strecke AB wird von der CD *gemessen* und nennt darum CD ein *Maß* von AB.

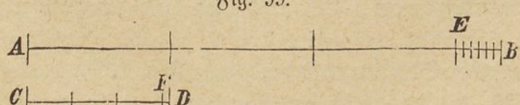
Ist ferner die Strecke EM in der EF 5mal, in der GH 3mal enthalten, so haben die Strecken EF und GH das Verhältnis 5 : 3; die Strecke EM ist ein *gemeinschaftliches Maß* von EF und GH.

§. 117. *Um das gemeinschaftliche Maß zweier Strecken zu finden*, trage man die kleinere Strecke auf die größere so oft auf, als es angeht.

a) Ist die kleinere Strecke CD (Fig. 98) in der größeren AB mehrmal, z. B. 3mal, enthalten, so dass kein Rest übrig bleibt, so ist CD selbst das gemeinschaftliche Maß zwischen AB und CD; das Verhältnis dieser Strecken ist in diesem Falle gleich 3 : 1.

b) Lässt sich aber die kleinere Strecke auf der andern nicht genau auftragen, ist z. B. die Strecke CD (Fig. 99) in der AB 3mal enthalten, und es bleibt noch ein Rest EB übrig, so trage man den Rest EB auf CD so oft auf, als es angeht; es sei EB in

Fig. 99.



CD 3mal enthalten, und es bleibe noch die Strecke FD übrig. Diesen Rest wird man wieder auf den nächst vorhergehenden EB auftragen, und es sei FD in EB genau 6mal enthalten. FD ist dann das gemeinschaftliche Maß von AB und CD; denn man hat

$$EB = 6\ FD,$$
$$CD = 3\ EB + FD = 19\ FD,$$
$$AB = 3\ CD + EB = 63\ FD.$$

Aus dieser Darstellung ersieht man, dass die Strecke AB das Maß FD 63mal, und die Strecke CD dasselbe Maß FD nur 19mal enthält; die Längen dieser beiden Strecken verhalten sich also wie die Zahlen 63 und 19, oder, das Verhältnis von AB zu CD ist 63 : 19.

Anfänger sollen sich in der Auffassung der Verhältnisse nach dem Augenmaße besonders fleißig üben.

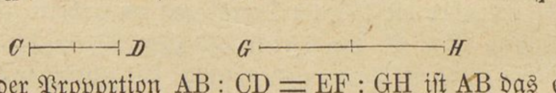
Aufgaben.

1. Bestimme das Verhältnis a) zwischen der Länge und der Höhe der Schultafel, b) zwischen der Breite und Höhe des Fensters.
2. Zeichne mehrere Strecken und bestimme das Verhältnis zwischen je zweien zuerst nach dem Augenmaße und dann mittelst des Messens durch ein gemeinschaftliches Maß.

§. 118. Die Gleichheit zweier Verhältnisse wird eine **Proportion** genannt.

Haben (Fig. 100) sowohl die Strecken AB und CD als die Strecken EF und GH das Verhältnis 3 : 2, so sind die zwei Verhältnisse AB : CD und EF : GH gleich, und geben die Proportion AB : CD = EF : GH, welche so gelesen wird: AB verhält sich zu CD, wie sich EF zu GH verhält. Man sagt in diesem Falle auch: die Strecken AB und EF sind den Strecken CD und GH **proportioniert** oder **proportional**.

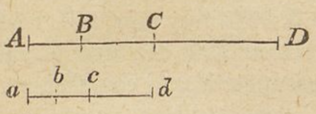
Fig. 100.



In der Proportion AB : CD = EF : GH ist AB das erste, CD das zweite, EF das dritte, GH das vierte Glied; auch heißen AB und GH die **äußeren**, CD und EF die **inneren** Glieder der Proportion.

Wenn zwei Strecken AD und ad (Fig. 101), die erstere in den Punkten B, C, die letztere in den Punkten b, c so getheilt sind, dass

Fig. 101.



AB : ab = BC : bc = CD : cd oder AB : BC : CD = ab : bc : cd ist, so sagt man, die zwei Strecken AD und ad sind einander proportional getheilt.

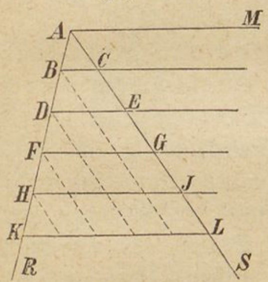
Eine Proportion, in welcher die inneren Glieder gleich sind, z. B. KL : MN = MN : PQ, heißt eine stetige Proportion. MN heißt dann die mittlere geometrische Proportionale zwischen KL und PQ.

2. Ähnlichkeit der Dreiecke.

Ähnlichkeitssätze.

§. 119. Zwei Dreiecke, welche dieselbe Gestalt haben und sich nur durch die Größe unterscheiden, heißen ähnlich.

Fig. 102.



Um die Merkmale zweier ähnlicher Dreiecke anschaulich darzustellen, lasse man eine Gerade AM (Fig. 102) auf einem Schenkel AR des Winkels RAS parallel zu ihrer ersten Lage so fortschreiten, dass sie auf jenem Schenkel gleiche Stücke AB, BD, DF, FH, HK abschneidet; dann werden auch die Abschnitte des zweiten Schenkels AC, CE, GJ, JL unter einander gleich, und es entstehen die Dreiecke ABC, ADE, AFG, AHJ, AKL, welche zwar verschiedene Größe haben, in der Gestalt jedoch übereinstimmen, somit ähnlich sind.

Vergleicht man nun irgend zwei dieser Dreiecke, z. B. ADE und AKL, so findet man, dass sie erstlich paarweise gleiche Winkel haben; denn der Winkel am Scheitel A ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich, die anderen zwei Winkel aber sind als Gegenwinkel paarweise gleich. Vergleicht man ferner die Seiten der beiden Dreiecke, so sieht man, dass AD 2 solche Theile enthält, als deren auf AK 5 kommen; die Seiten AD und AK haben also das Verhältnis 2 : 5. Ebenso enthält AE 2 solche Theile, von denen AL 5 enthält; es haben also auch die Seiten AE und AL das Verhältnis 2 : 5. Dasselbe Verhältnis haben auch die Seiten DE und KL; denn zieht man durch jeden Theilungspunkt der Seite AK eine Parallele mit AL, so wird dadurch DE in 2, und KL in 5 Theile getheilt, welche alle untereinander gleich sind, so dass sich auch die Seiten DE und KL so verhalten wie 2 : 5. Es ist also AD : AK = AE : AL = DE : KL, d. i. in den beiden Dreiecken sind je zwei Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander proportional. Daraus folgt:

In ähnlichen Dreiecken sind alle drei Winkel paarweise gleich und die gleichliegenden Seiten proportional.

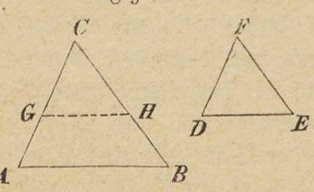
Aus der vorstehenden Darstellung ergeben sich noch folgende Sätze:

1. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so werden durch dieselbe die beiden anderen Seiten proportional geschnitten.
2. Umgekehrt: Werden zwei Seiten eines Dreieckes von einer Geraden proportional geschnitten, so ist dieselbe mit der dritten Seite parallel.
3. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck dem durch die Parallele abgeschnittenen Dreiecke ähnlich.

Aus der obigen Erklärung ähnlicher Dreiecke ergibt sich, dass zur Ähnlichkeit zweier Dreiecke sechs Bedingungen erforderlich sind: die Gleichheit dreier Paare von Winkeln, und die Gleichheit der Verhältnisse zwischen je zwei Paaren von Seiten. So wie man jedoch auf die Congruenz zweier Dreiecke meistens schon aus der Gleichheit dreier Bestandstücke derselben schließen kann, so kann auch schon aus dem Eintreffen einiger von den zur Ähnlichkeit erforderlichen Bedingungen auf die Ähnlichkeit zweier Dreiecke geschlossen werden. Die Fälle, in denen dieses geschehen darf, enthalten die folgenden Sätze.

§. 120. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben alle drei Winkel wechselseitig gleich sind.

Fig. 103.



Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 103) der Winkel A = D, B = E, und C = F. Man schneide von der AC ein Stück CG ab, welches der DF gleich ist, und ziehe GH ∥ AB, so ist das Dreieck ABC $\sim$ GHC. Das letztere Dreieck

GHC ist nun mit DEF congruent, denn die Seite CG = DF, der Winkel G = D, weil beide dem Winkel A gleich sind, und der Winkel C = F. Wenn aber das Dreieck ABC mit GHC ähnlich, und GHC mit DEF congruent ist, so muss auch ABC $\backsim$ DEF sein.

Da in zwei Dreiecken, welche zwei Winkel wechselseitig gleich haben, auch die dritten Winkel gleich sein müssen, so folgt, dass man schon aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken auf die Ähnlichkeit derselben schließen kann.

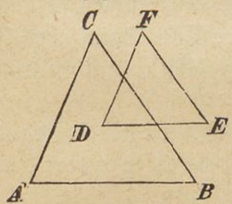
Aufgabe. Über einer Geraden DE (Fig. 103) ein Dreieck zu construieren, welches mit einem gegebenen Dreiecke ABC ähnlich ist.

Man trage in D den Winkel EDF = BAC und in E den Winkel DEF = ABC auf; ihre Schenkel schneiden sich im Punkte F, und es ist $\triangle$ DEF $\backsim$ ABC.

§. 121. Auf dem vorhergehenden Ähnlichkeitssatze beruhen auch folgende zwei Sätze:

1. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen mit den Seiten des andern parallel sind.

Fig. 104.

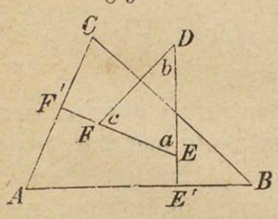


Es sei (Fig. 104) AB ∥ DE; AC ∥ DF und BC ∥ EF. — Winkel, deren Schenkel parallel sind, sind einander gleich; also ist der Winkel A = D, B = E und C = F, mithin sind die Dreiecke ABC und DEF ähnlich.

Welche Seiten sind in zwei solchen Dreiecken proportional?

2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht stehen.

Fig. 105.



Es sei (Fig. 105) DE $\perp$ AB, DF $\perp$ BC und EF $\perp$ AC. Nach §. 40 ist der Winkel B = b, A = a, C = c, folglich ist $\triangle$ ABC $\backsim$ DEF.

Welche Seiten sind in zwei solchen Dreiecken proportional?

§. 122. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportional, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Es sei (Fig. 103) AC : DF = BC : EF und C = F. Man mache CG = DF, und ziehe GH ∥ AB, so ist das Dreieck

ABC $\sim$ GHC. Man braucht nur noch zu zeigen, dass das Dreieck GHC $\cong$ DEF ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und GHC folgt AC : CG = BC : CH. Diese und die in der Voraussetzung enthaltene Proportion haben die ersten drei Glieder gleich, also müssen sie auch das vierte Glied gleich haben, folglich CH = EF. Da nun die zwei Dreiecke GHC und DEF zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wechselseitig gleich haben, so sind sie congruent. Das Dreieck ABC, welches mit GHC congruent ist, muss daher auch mit DEF ähnlich sein.

§. **123.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportional, und die den größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich sind.

Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 103) AC : DF = BC : EF, AC > BC, DF > EF, und B = E.

Man mache CG = DF und ziehe GH $\parallel$ AB, so ist das Dreieck ABC $\sim$ GHC, daher AC : CG = BC : CH. Diese und die frühere Proportion haben die ersten drei Glieder gleich, also müssen sie auch die vierten Glieder gleich haben, folglich CH = EF. Dann aber ist $\triangle$ GHC $\cong$ $\triangle$ DEF; allein $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ GHC, mithin auch $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ DEF.

§. **124.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben die drei Seiten des einen den drei Seiten des andern proportional sind.

Es sei (Fig. 103) AC : DF = BC : EF,
und AC : DF = AB : DE.

Man mache CG = DF, und ziehe GH $\parallel$ AB, so ist das Dreieck ABC $\sim$ GHC, daher

AC : CG = BC : CH,
und AC : CG = AB : GH.

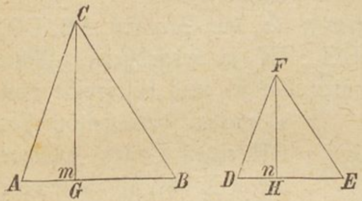
In der dritten und ersten der hier vorkommenden Proportionen sind die drei ersten Glieder gleich, also muss darin auch das vierte Glied gleich sein, nämlich CH = EF; ebenso haben die vierte und zweite Proportion drei Glieder gleich, also muss in denselben auch das vierte Glied gleich sein, nämlich GH = DE. Die beiden Dreiecke GHC und DEF haben also alle drei Seiten gleich, folglich sind sie congruent. Weil nun das Dreieck ABC mit GHC ähnlich ist, so muss es auch mit dem Dreiecke DEF ähnlich sein.

3. Anwendung der Ähnlichkeitssätze.

Lehrsätze.

§. **125.** Es sei (Fig. 106) das Dreieck $ABC \sim DEF$; ferner seien AB und DE die Grundlinien, CG und FH die Höhen dieser Dreiecke.

Fig. 106.

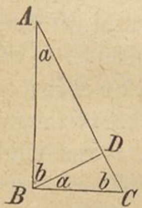


Weil nach der Voraussetzung der Winkel $A = D$ und $m = n$ ist, so ist $\triangle ACG \sim \triangle DFH$, und daher $CG : FH = AC : DF$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und DEF ist aber auch $AB : DE = AC : DF$; daher ist auch $CG : FH = AB : DE$, d. h.

In zwei ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen so wie die Grundlinien.

§. **126.** Es sei ABC (Fig. 107) ein rechtwinkliges Dreieck.

Fig. 107.



Fällt man von B eine Senkrechte BD auf die Hypotenuse, so haben, wie man aus der Figur sieht, die dadurch entstehenden kleineren Dreiecke ABD und BCD mit dem gegebenen Dreiecke ABC und unter einander gleiche Winkel; es ist daher

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \sim ABD, \text{ also } AC : AB = AB : AD, \\ \triangle ABC \sim BCD, \quad \text{„} \quad AC : BC = BC : CD, \end{array}\right\} \ldots 1)$$

$$\triangle ABD \sim BCD, \quad \text{„} \quad AD : BD = BD : CD. \;.\;.\;.\; 2)$$

Zieht man also in einem rechtwinkligen Dreiecke von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Senkrechte, so ist

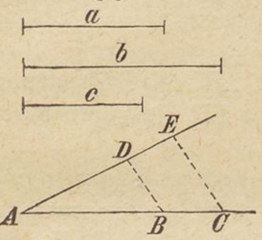
1. jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte derselben;
2. die Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Constructionsaufgaben.

§. **127.** Zu drei gegebenen Strecken a, b, c (Fig. 108) die vierte Proportionale zu finden.

Construiere einen beliebigen Winkel A, schneide auf dessen Schenkeln $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ ab und ziehe $CE \parallel BD$.

Fig. 108.



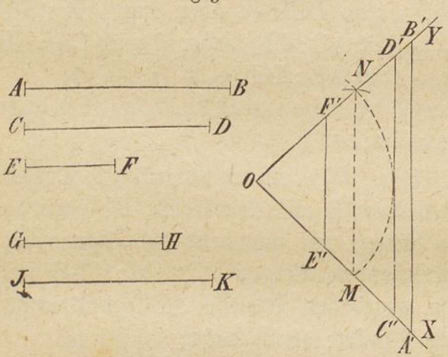
Dann ist $\triangle$ ABD $\sim$ ACE, daher AB : AC = AD : AE, oder a : b = c : AE.

§. 128. Mehrere Strecken nach einem gegebenen Verhältnisse zu vergrößern oder zu verkleinern.

a) Mittelst des Proportional- oder Reductionswinkels.

Es seien z. B. die Strecken AB, CD, EF (Fig. 109) in dem Verhältnisse GH : IK zu vergrößern. Man ziehe eine Gerade OX von unbestimmter Länge, und beschreibe von O aus mit dem Halbmesser GH einen Bogen, welcher die OX in M schneidet; aus M beschreibt man mit IK als Halbmesser einen Bogen, welcher den früheren in N durchschneidet; zieht man nun durch O und N die Gerade OY von unbestimmter Länge, so ist XOY der Reductionswinkel für die verlangte Vergrößerung. Trägt man auf beide Schenkel AB auf, indem man OA′ = OB′ = AB macht, so ist A′B′ die für AB gesuchte vergrößerte Strecke. Macht man eben so OC′ = OD′ = CD, OE′ = OF′ = EF, so sind C′D′ und E′F′ die zu den Linien CD, EF gehörigen vergrößerten Strecken.

Fig. 109.



Wäre das Verhältnis nicht in Linien, sondern in Zahlen angegeben, so würde man auf einer Geraden so viel gleiche Theile auftragen, als die größere Verhältniszahl anzeigt; von diesen würde man mit dem Zirkel zuerst so viele abfassen, als die erste Verhältniszahl anzeigt, und mit diesem Halbmesser aus O einen Bogen MN beschreiben; dann würde man mit dem Zirkel so viele Theile abnehmen, als die zweite Verhältniszahl anzeigt und damit aus M den früheren Bogen durchschneiden; durch die Schenkel OM und ON ist nun der Reductionswinkel bestimmt.

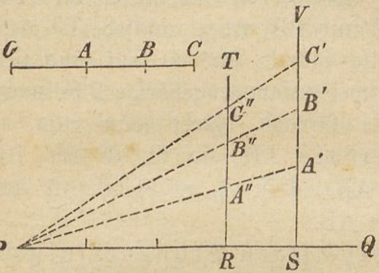
Aufgaben.

1. Zeichne vier Strecken und verkleinere sie in dem Verhältnisse 5 : 2.
2. Zeichne drei Strecken und vergrößere dieselben in dem Verhältnisse 2 : 3.

Der Reductionswinkel ist für jede Verkleinerung anwendbar, für Vergrößerungen aber nur dann, wenn die Linien nicht über das zweifache vergrößert werden sollen.

b) Man kann auch folgendes Verfahren anwenden:

Fig. 110.



Um die gegebenen Strecken OA, OB, OC (Fig. 110) z. B. in dem Verhältnisse 4 : 3 zu verkleinern, ziehe man eine Gerade PQ, trage von P aus 3, und ebenso von P aus 4 gleiche Theile auf; in den Endpunkten R und S errichte man die Senkrechten RT und SV, trage auf die entferntere Senkrechte SV die gegebenen Strecken von S bis A′, B′, C′ auf, und ziehe durch den Punkt P und die Punkte A′, B′, C′ gerade Linien, welche die nähere Senkrechte in den Punkten A″, B″, C″ treffen; die Geraden RA″, RB″, RC″ sind dann die gesuchten verhältnismäßig verkleinerten Strecken.

Wären die gegebenen Strecken in dem Verhältnisse 3 : 4 zu vergrößern, so würde man sie auf die nähere Senkrechte RT auftragen; auf der Senkrechten SV erhielte man dann die verhältnismäßig vergrößerten Strecken.

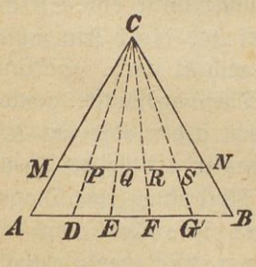
Aufgaben.

Zeichne drei Strecken und verkleinere sie in dem Verhältnisse a) 2 : 1, b) 3 : 2.

Zeichne eine Strecke und vergrößere sie in dem Verhältnisse a) 1 : 2, b) 3 : 5.

§. 129. Eine gegebene Strecke in mehrere gleiche Theile zu theilen.

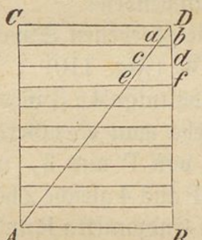
Fig. 111.



a) Es sei die Strecke MN (Fig. 111) z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe eine beliebige Gerade AB, trage darauf von A aus 5 gleiche Theile bis B auf, beschreibe aus A und B mit dem Halbmesser AB zwei Kreisbogen, welche sich in C schneiden, und ziehe AC und BC. Trägt man nun die gegebene Strecke von C aus bis M und N auf, zieht MN und von C aus die Geraden CD, CE, CF, CG, so wird durch diese die MN in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt.

b) Wenn sehr kleine Theile z. B. 10 gleiche Theile der Strecke AB (Fig. 112) zu bestimmen sind, welche bei der vorhergehenden Construction undeutlich erscheinen würden, so wende man folgendes Verfahren an: Man errichte auf AB in den Endpunkten die Senkrechten AC und BD, trage auf jede 10 gleich große Theile bis C und D auf und ziehe durch je zwei zusammengehörige Theilungspunkte eine Gerade. Zieht man nun die Transversale AD, so ist ab der 10te Theil von AB, cd ist $\frac{2}{10}$, ef $\frac{3}{10}$ u. s. w. von der Strecke AB.

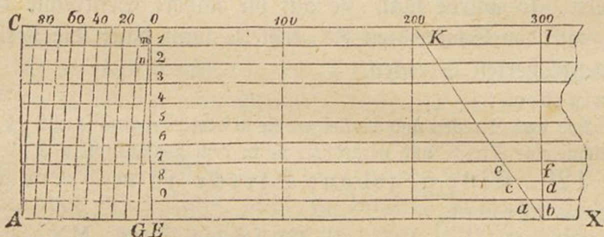
Fig. 112.



§. 130. Einen tausendtheiligen Transversalmaßstab anzufertigen.

Man trage auf eine Gerade AEX (Fig. 113) 10 gleiche Theile auf, deren jeder 100 Einheiten vorstellen soll, so dass auf die ganze Linie 1000 Einheiten kommen. In den Endpunkten errichte man zwei Senkrechte, trage darauf wieder 10 beliebig große, jedoch gleiche

Fig. 113.



Theile auf, und ziehe durch die letzten Theilungspunkte eine Strecke, welche der zuerst gezogenen Geraden parallel und gleich sein muss, und welche ebenfalls in 10 gleiche Theile getheilt wird. Sodann ziehe man durch die gegenüberstehenden Theilungspunkte gerade Linien, welche alle entweder auf AX senkrecht stehen oder mit AX parallel sind. Um nun einen Theil AE wieder in 10 gleiche Theile zu theilen, braucht man nur in irgend einer Abtheilung eine Diagonale b 200 zu ziehen. Es ist dann ab der 10te Theil von der Strecke zwischen 200 und 300, folglich auch von AE; ebenso enthält cd 2 solche Theile, ef 3 Theile u. s. w. Diese Theile trägt man nun sowohl auf AE als CO auf, zieht dann durch 0 und G, sowie durch je zwei folgende Theilungspunkte Transversalen und schreibt an die Theilungspunkte die Zahlen so hin, wie man sie an der Figur sieht.

Die ganze Strecke AEX enthält 1000 Theile; AE ist der 10te Theil davon und enthält somit 100 Theile; EG ist der 10te Theil von AE, enthält demnach 10 solche Theile; m1 endlich ist der 10te Theil von EG, enthält also einen solchen Theil, wie deren auf die ganze Linie 1000 kommen, m1 ist also der 1000ste Theil derselben; n2 enthält zwei solche Theile u. s. w.

Stellt z. B. AE ein Decimeter vor, so ist GE ein Centimeter, m1 ein Millimeter des verjüngten Decimalmaßes.

Aufgaben.

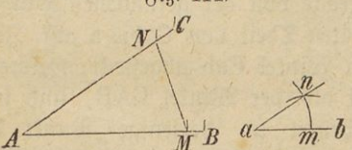
1. Eine auf dem Papiere verzeichnete Strecke zu messen.
2. Verzeichne ein 3=, 4=, 5=, 6=, 7=, 8seitiges Vieleck, und bestimme die Länge der einzelnen Seiten.
3. Eine Strecke von bestimmter Länge auf dem Papiere zu zeichnen.
4. Construiere ein Dreieck, dessen Seiten 137, 160, 185 sind.
5. Zeichne mit der Seite 209 ein Quadrat.
6. Zeichne ein Rechteck, dessen Seiten 271 und 80 sind.

Praktische Anwendung der Ähnlichkeitssätze.

§. 131. Einen Winkel auf dem Papiere zu zeichnen, der einem gegebenen Winkel auf dem Felde gleich ist.

Man trage auf dem Felde, von dem Scheitel A (Fig. 114) aus, auf beiden Schenkeln dieselbe Länge z. B. 10 Meter bis M und N auf, und messe dann die Gerade MN. Nun ziehe man auf dem Papiere eine Gerade ab, trage darauf nach einem verjüngten Maßstabe am gleich AM auf, beschreibe aus a mit dem Halbmesser am einen Kreisbogen und durchschneide denselben aus m mit der Zirkelöffnung mn, welche nach demselben Maßstabe gleich MN ist; zieht man an, so ist der Winkel man = MAN.

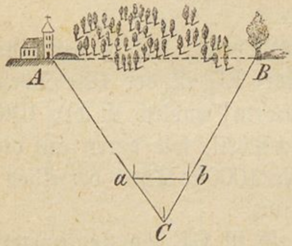
Fig. 114.



§. 132. Die Länge einer Strecke zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines zwischen ihren Endpunkten befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt.

Für diese Aufgabe ist bereits in §. 73 eine Auflösung angeführt worden, die jedoch nicht anwendbar ist, wenn der Boden keine Verlängerung der Geraden AC und BC gestattet. In diesem Falle messe man ebenfalls (Fig. 115) die Strecken CA und CB, trage aber dann nur einen bestimmten, z. B. den 4ten Theil der erhaltenen Länge CA von C bis a, und ebenso den 4ten Theil der CB von C bis b auf; in a und b schlage man Pflöcke ein. Misst man nun die Entfernung ab, so ist diese wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke Cab und CAB der 4te Theil der gesuchten Entfernung AB; man braucht daher die gefundene Länge ab nur noch mit 4 zu multiplicieren, um AB zu erhalten.

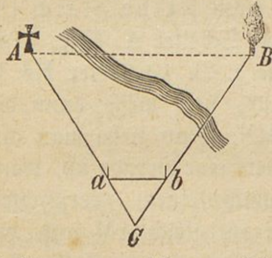
Fig. 115.



§. 133. Die Länge einer Strecke zu bestimmen, wenn man nur zu einem Endpunkte derselben gelangen kann.

Die für diese Aufgabe in §. 74 angegebene Auflösung kann nur dann angewendet werden, wenn die Beschaffenheit des Bodens das Ausstecken und Messen der Geraden DF möglich macht. Ist dieses nicht der Fall, so führt folgendes Verfahren zum Ziele:

Fig. 116.



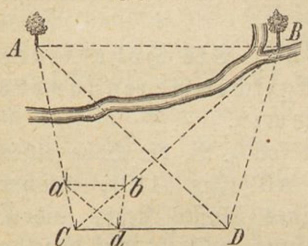
Man wähle zuerst einen dritten Standpunkt C (Fig. 116), von dem man zu einem der beiden Punkte A und B hin messen kann, messe wirklich zu dem zugänglichen Punkte A hin, und trage von der gefundenen Länge z. B. den 4ten Theil von C bis a auf. In a wird ein Winkel Cab abgesteckt, welcher so groß ist als der Winkel CAB, und in dessen Schenkel ab derjenige Punkt b bestimmt, welcher zugleich in der CB liegt. Misst man dann die Entfernung ab, so darf man nur dieselbe mit 4 multiplicieren, um die verlangte Länge AB zu finden.

§. 134. Die Länge einer Strecke zu bestimmen, die an ihren beiden Endpunkten unzugänglich ist.

Es sei z. B. die Entfernung der beiden Bäume A und B (Fig. 117), welche sich jenseits eines Flusses befinden, zu bestimmen.

Man wähle zwei solche Standpunkte C und D, dass man zwischen ihnen unmittelbar messen, und von ihnen aus nach den beiden gegebenen Punkten A und B sehen kann. Man messe die Standlinie CD, und trage darauf von C aus z. B. ihren 4ten Theil bis d auf. In dem Punkte d steckt man einen Winkel Cda aus, welcher dem Winkel CDA gleich ist, und geht auf dem Schenkel da so weit fort, bis man in die Richtung CA nach a kommt. Eben so steckt man in d einen Winkel Cdb ab, welcher eben so groß ist als der Winkel CDB, und geht auf dem Schenkel db so weit, bis man in die Richtung CB nach b kommt. Endlich messe man ab, und multipliciere die erhaltene Länge mit 4, so hat man den gesuchten Abstand AB.

Fig. 117.

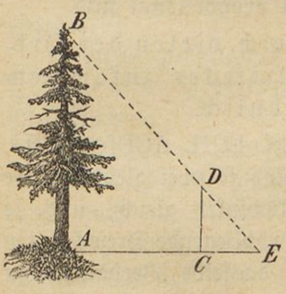


§. 135. **Die Höhe eines zugänglichen Gegenstandes zu bestimmen.**

a) Es sei z. B. die Höhe eines Baumes AB (Fig. 118) zu finden.

Man wählt einen Punkt C, von dem man in gerader Linie zu A hin messen kann, steckt in C einen Stab CD vertical ein und legt sich hinter demselben in einer solchen Lage auf den Rücken, dass man die Spitze D des Stabes mit der Spitze B des Baumes in gerader Richtung erblickt; den Ort E, wo sich das Auge befunden hat, und wo die Verlängerung der Geraden BD hinfällt, bezeichnet man mit einem Pflocke, und misst die Entfernungen EC und EA, so wie die Länge des Stabes CD. Nun hat man zwei ähnliche Dreiecke ABE und CDE, daher ist AB : CD = AE : CE, woraus man das unbekannte Glied AB finden kann.

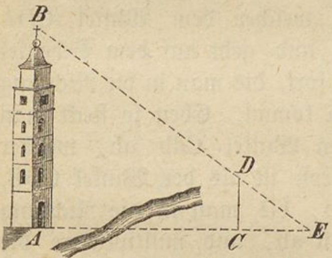
Fig. 118.



Wäre z. B. CD = 2*m*, CE = 3*m*, AE = 9*m*, so hätte man die Proportion AB : 2 = 9 : 3, woraus AB = 6*m* folgt.

b) Auch aus dem Schatten eines Gegenstandes kann dessen Höhe gefunden werden. Man misst nämlich die Länge des Schattens, welche der Gegenstand wirft, und auch die Länge des Schattens, den zu derselben Zeit ein vertical stehender Stab wirft; hierauf misst man noch die Höhe des Stabes und schließt: die Höhe des Gegenstandes verhält sich zur Höhe des Stabes, wie sich die Länge des Schattens des Gegenstandes zur Länge des Schattens des Stabes verhält. Aus dieser Proportion wird dann die verlangte Höhe gefunden.

Fig. 119.



§. 136. **Die Höhe eines unzugänglichen Gegenstandes zu bestimmen.**

Man soll z. B. die Höhe eines Thurmes AB (Fig. 119), welcher jenseits eines Flusses liegt, finden. Die Auflösung geschieht auf dieselbe Art wie bei der Bestimmung der Höhe eines zugänglichen Gegenstandes, nur muss die Entfernung EA, weil man sie nicht unmittelbar messen kann, nach der Auflösung in §. 133 mittelbar bestimmt werden.

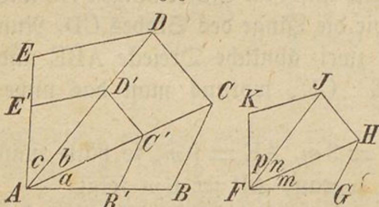
4. Ähnlichkeit der Vielecke.

§. 137. Zwei Vielecke sind **ähnlich**, wenn ihre Winkel paarweise gleich, und die gleichliegenden Seiten proportional sind.

Zwei Vielecke, welche aus gleich vielen der Ordnung nach einander ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt sind, sind selbst einander ähnlich.

Es sei (Fig. 120) das Dreieck ABC $\sim$ FGH, ACD $\sim$ FHJ, ADE $\sim$ FJK. Nach dieser Voraussetzung sind je zwei gleichliegende Dreieckswinkel gleich, und je zwei gleichliegende Dreiecksseiten haben dasselbe Verhältnis zu einander. — Es ist zuerst zu beweisen, dass auch je zwei gleichliegende Vieleckswinkel einander gleich sind. Weil die Winkel a, b, c einzeln den Winkeln m, n, p gleich sind, so müssen auch ihre Summen gleich sein, nämlich A = F. Die Winkel B und G sind nach der Annahme gleich. Ferner ist der Winkel C = H, weil beide aus gleich großen

Fig. 120.



Winkeln zusammengesetzt sind; und aus demselben Grunde D = J. Endlich ist nach der Annahme auch E = K. Nun ist noch zu zeigen, dass die gleichliegenden Seiten der beiden Vielecke proportional sind. Nach der Voraussetzung ist AB : FG = BC : GH. Ferner sind die Verhältnisse BC : GH und CD : HJ gleich, weil sie beide einem dritten Verhältnisse AC : FH gleich sind. Wegen CD : HJ = AD : FJ, und DE : JK = AD : FJ folgt eben so CD : HJ = DE : JK. Endlich ist nach der Annahme DE : JK = EA : KF. Es ist also AB : FG = BC : GH = CD : HJ = DE : JK = EA : KF. Die beiden Vielecke ABCDE und FGHJK haben also in der Ordnung gleiche Winkel und proportionierte Seiten; sie sind demnach ähnlich.

§. 138. Aufgabe. Über einer gegebenen Strecke FG (Fig. 120) ein Vieleck zu construieren, welches einem gegebenen Vielecke ABCDE ähnlich ist.

Man ziehe die Diagonalen AC, AD, mache AB′ = FG, und iehe B′C′ ∥ BC, C′D′ ∥ CD, D′E′ ∥ DE; so ist das Vieleck AB′C′D′E′ ∾ ABCDE. Construiert man nun über FG ein Vieleck FGHJK, welches mit AB′C′D′E′ congruent ist, so ist dasselbe das verlangte Vieleck.

Zeichne ein beliebiges Sechseck und dann ein zweites ihm ähnliches, so dass sich die Seiten des ersten Sechseckes zu jenem des zweiten wie 10 : 3 verhalten.

Zeichne zwei ähnliche Achtecke, deren gleichliegende Seiten sich wie 4 : 5 verhalten.

Auf der Lösung der obigen Aufgabe beruht das Copieren der Figuren nach einem vergrößerten oder verkleinerten Maßstabe.

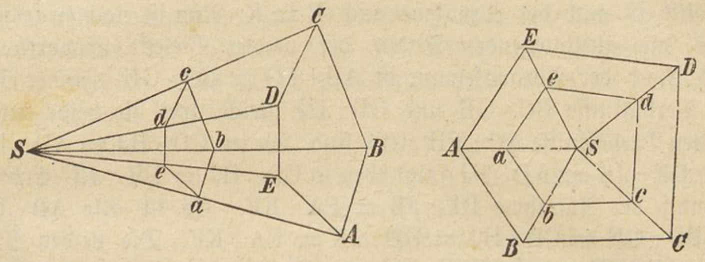
§. 139. Wenn jede Seite eines Vieleckes 2mal, 3mal, 4mal so groß ist als die gleichliegende Seite eines ähnlichen Vieleckes, so wird auch die Summe aller Seiten, d. i. der Umfang des ersten Vieleckes, 2mal, 3mal, 4mal so groß sein als der Umfang des zweiten Vieleckes.

Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich also wie je zwei gleichliegende Seiten.

Wie verhalten sich die Umfänge zweier regelmäßiger Vielecke von gleich vielen Seiten?

§. 140. Werden die von einem Punkte S (Fig. 121) gezogenen Strahlen in den Punkten A und a, B und b, C und c, . . . proportional geschnitten, so sind die Vielecke ABCD . . und abcd . . ähnlich.

Fig. 121.



Es sei SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc . .; dann sind die Dreiecke SAB und Sab, SBC und Sbc, SCD und Scd, . . . ähnlich, daher AB : ab = BC : bc, weil beide Verhältnisse dem Verhältnisse SB : Sb gleich sind. Eben so folgt BC : bc = CD : cd, . . . In den Vielecken ABCD . . und abcd . . sind also die gleichliegenden Seiten proportional.

Weil ferner AB ‖ ab, BC ‖ bc, CD ‖ cd, . . ist, so sind auch die Winkel A und a, B und b, C und c, . . paarweise gleich.

Die beiden Vielecke sind demnach ähnlich.

Zwei ähnliche Vielecke können durch entsprechende Verschiebung immer in eine solche Lage gebracht werden, dass von ihren Umfangspunkten die von einem Punkte ausgehenden Strahlen proportional geschnitten werden.

Diese Lage zweier ähnlicher Gebilde nennt man die perspectivische Lage; der Punkt S heißt der Ähnlichkeitspunkt der ähnlichen Gebilde.

VII. Umfang der ebenen Figuren.

1. Umfang der geradlinigen Figuren.

§. **141**. Alle Grenzlinien einer Figur zusammengenommen nennt man den Umfang.

Um den Umfang einer geradlinigen Figur zu bestimmen, darf man nur die Seiten derselben messen und die gefundenen Maßzahlen, die sich offenbar auf das Längenmaß beziehen, addieren. Ist die Figur gleichseitig, so ist der Umfang gleich der Länge einer Seite multipliciert mit der Anzahl der Seiten.

Die Bestimmung des Umfanges einer geradlinigen Figur unterliegt daher keiner weiteren Schwierigkeit.

§. 142. Aufgaben.

1. Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen Seiten 38 *m* 7 *dm*, 25 *m* 4 *dm*, 31 *m* 5 *dm* sind?

2. Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes ist a) 2·3 *m*, b) 1 *m* 5 *dm* 2 *cm*, c) $97\frac{3}{4}$ *cm*; wie groß ist der Umfang?

3. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Umfang 10 *m* 3 *dm* 5 *cm* beträgt?

4. Die Seite eines Quadrates ist a) 18 *m*, b) 7 *m* 1 *dm*, c) 3·138 *m*; wie groß ist der Umfang?

5. Der Umfang eines Quadrates ist 9·2 *m*; wie groß ist eine Seite?

6. In einem Rechtecke ist die Grundlinie 37·2 *m*, die Höhe 14·8 *m*; wie groß ist der Umfang?

7. Der Umfang eines Rechteckes beträgt 43·8 *m*, die Länge 12·4 *m*; wie groß ist die Breite?

8. Der Umfang eines Rechteckes misst 100 *m*, die Länge ist doppelt so groß als die Breite; wie groß ist die Länge, wie groß die Breite?

9. Ein Spiegel mit Rahmen ist 5 *dm* 8 *cm* breit und 8 *dm* 2 *cm* hoch; wie groß ist der Umfang?

10. Längs der Hecke eines Gartens, welcher 33 *m* lang und 21 *m* breit ist, werden ringsum Maulbeerbäume, welche 3 *m* von einander abstehen, gepflanzt; wie viel Maulbeerbäume sind dazu erforderlich?

11. Ein rechteckiger Acker hat einen Umfang von 163·2 *m*; wie groß sind die Seiten desselben, wenn sich die kleinere Seite zur größeren wie 3 : 5 verhält?

12. Wie groß ist der Umfang eines regelmäßigen Sechseckes, dessen Seite 1 *m* 2 *dm* 5 *cm* ist?

13. In einem regelmäßigen Achtecke beträgt der Umfang 1 *m*; wie groß ist eine Seite?

2. Umfang des Kreises.

§. 143. Das einem Kreise eingeschriebene regelmäßige Sechseck hat einen kleineren, das umgeschriebene regelmäßige Sechseck einen größeren Umfang als der Kreis. Bestimmt man daher die Umfänge dieser Sechsecke, so erhält man zwei Werte, zwischen denen der

Umfang des Kreises liegt. In noch engere Grenzen wird die Kreislinie durch zwei dem Kreise eingeschriebene und umgeschriebene regelmäßige 12-, 24-, 48-, . . . Ecke eingeschlossen. Durch Berechnung der Umfänge solcher Vielecke, deren Seitenzahl immer um das Doppelte zunimmt, hat man näherungsweise die Länge des Kreisumfanges bestimmt, und gefunden, dass der Umfang eines Kreises 3·14159 . . . mal so groß ist, als der Durchmesser.

Die Zahl, welche das Verhältnis zwischen dem Umfange eines Kreises und dem Durchmesser angibt, heißt die *Ludolfische Zahl* und wird mit dem griechischen Buchstaben π bezeichnet. Es ist also $\pi = 3{\cdot}14159 \ldots$. In vielen Fällen ist der Näherungsbruch $\pi = 3\frac{1}{7}$ oder $\pi = 3{\cdot}14$ ausreichend.

Zur Veranschaulichung nehme man einen aus Holz gefertigten Kreis, dessen Durchmesser 1 Decimeter beträgt, umspanne den Umfang möglichst genau mit einem Faden und messe dann die Länge dieses Fadens. Man findet, dass der Faden, also auch der Umfang des Kreises 3 Decimeter und nahe 14 Millimeter, d. i. nahe 3·14 Decimeter lang ist.

Bezeichnet r den Halbmesser, d den Durchmesser und u den Umfang eines Kreises, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$u = d\pi \text{ oder } u = 2r\pi, \text{ daher}$$

$$d = \frac{u}{\pi} \text{ und } r = \frac{u}{2\pi}; \text{ d. h.}$$

1) *Der Umfang eines Kreises ist gleich dem Durchmesser oder dem doppelten Halbmesser, multipliciert mit der Ludolfischen Zahl.*

2) *Der Durchmesser eines Kreises ist gleich dem Umfange, dividiert durch die Ludolfische Zahl.*

3) *Der Halbmesser eines Kreises ist gleich dem Umfange, dividiert durch die doppelte Ludolfische Zahl.*

Heißt U der Umfang eines zweiten Kreises, welcher den Halbmesser R und den Durchmesser D hat, so ist

$$U : u = D\pi : d\pi = D : d, \text{ und}$$

$$U : u = 2R\pi : 2r\pi = R : r; \text{ d. h.}$$

die Umfänge zweier Kreise verhalten sich so wie ihre Durchmesser oder Halbmesser.

§. **144.** Aufgaben.

1. Der Durchmesser eines Kreises beträgt 6 *dm*; wie groß ist der Umfang?

$$\frac{6\,dm \times 3\tfrac{1}{7}}{18\tfrac{6}{7}\,dm} \quad \text{oder} \quad \frac{6\,dm \times 3{\cdot}14}{18{\cdot}84\,dm} \quad \text{genauer} \quad \frac{6\,dm \times 3.1416}{18{\cdot}8496\,dm.}$$

2. Der Durchmesser d eines Kreises ist a) 5·8 *m*, b) 3·85 *m*, c) 5 *m* 8 *dm* 3 *cm*; wie groß ist der Umfang u?

3. Wie groß ist der Umfang u eines Kreises, dessen Halbmesser r = 1 *m* 8 *dm* ist?

4. Wie groß ist der Kreisumfang, wenn der Halbmesser a) 2 *m*, b) 3·84 *m*, c) 715 *cm* beträgt?

5. Wie groß ist a) der Durchmesser, b) der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang 20 *m* beträgt?

6. Wie groß ist r für
a) u = 2·5 *m*, b) u = 131·95 *dm*; c) u = 18 *m* 3 *dm* 4·69 *cm*?

7. Der Minutenzeiger einer Uhr ist 14 *cm* lang; welche Länge hat der Weg, den seine Spitze in einer Stunde beschreibt?

8. Das Schwungrad an einer Maschine hat 2 *m* 5 *dm* Durchmesser; wie groß ist sein Umfang?

9. Der Umfang eines Baumes ist 8 *dm* 6 *cm*; wie groß ist der Durchmesser?

10. Der Drechsler soll einen Haspel von 2 *m* 2 *dm* Umfang anfertigen; wie groß muss er den Durchmesser annehmen?

11. Jeder Grad des Erdäquators ist 15 geographische Meilen lang; wie groß ist a) der Umfang, b) der Halbmesser des Äquators?

12. Von einem gezahnten Rade von 1 *m* 3 *dm* Durchmesser soll die Entfernung der Zähne von Mitte zu Mitte 2 *dm* 2 *cm* betragen; wie viele Zähne wird das Rad erhalten?

13. Ein Wagenrad, dessen Durchmesser 1·1 *m* beträgt, hat auf einer zurückgelegten Strecke 240 Umläufe gemacht; wie lange war die Strecke?

14. An einem Wagen hat jedes Vorderrad 1 *m*, und jedes Hinterrad 1·4 *m* Durchmesser; wie viele Umläufe hat jedes Rad gemacht, wenn der Wagen eine Strecke von 1 Kilometer zurückgelegt hat?

15. Welchen Durchmesser hat ein Locomotivrad, das sich auf einem Schienenwege von 990 *m* 315mal umdreht?

16. Ein Mühlstein von 1·4 *m* Durchmesser macht in jeder Minute 100 Umdrehungen; welche Geschwindigkeit hat dabei ein Punkt des Umfanges; d. h. wie lang ist der Weg, den ein Punkt des Umfanges in 1 Secunde durchläuft?

17. Von zwei Rollen, welche durch dieselbe Schnur in Umlauf gesetzt werden, hat die eine 2·4 *dm* im Durchmesser und dreht sich 8mal, während die andere 3 Umdrehungen macht; welchen Durchmesser hat die zweite Rolle?

18. Man will einen kreisrunden Tisch auf 8 Personen machen; wie groß wird man den Durchmesser dazu nehmen, wenn man auf eine Person 8 *dm* des Umfanges rechnet?

19. Ein kreisrundes Wasserbecken (Bassin) hat im Umfange 42 Steine, deren jeder an der inneren Seite 29 *cm* lang ist; wie lang muss ein Balken sein, damit er genau über die Mitte reiche und auf jeder Seite noch 6 *dm* hervorstehe?

20. Der Durchmesser der Winde bei einem Brunnen ist 37 *cm*; wie tief ist der Brunnen, wenn das Seil, das bis auf den Boden reicht, 12mal um die Winde geht?

21. Wie lang ist ein Bogen von 35° bei einem Kreise, dessen Halbmesser 2 *dm* ist?

Umfang $= 4 \times 3{\cdot}14 = 12{\cdot}56\,dm$,

$12{\cdot}56 : x = 360 : 35$,

woraus die gesuchte Bogenlänge $x = 1{\cdot}22\,dm$.

22. Bestimme die Bogenlänge von a) 56°, b) 120°, c) 180° in einem Kreise vom Halbmesser 1 *m*.

23. Der Durchmesser eines Kreises ist a) 1 *m*, b) 2 *m*, c) 3 *m*; welche Länge hat in jedem Kreise ein Bogen von 60°?

24. Ein Bogen von 48° hat 1·26 *m* Länge; wie groß ist der Halbmesser dieses Kreises?

25. Welchen Durchmesser hat ein Kreis, in welchem ein Bogen von 15° a) 3 *dm*, b) 7·5 *dm*, c) 25·2 *dm*, d) 4·5 *m* lang ist?

26. Wie viel Grade hat ein Bogen von 7·853 *dm* Länge, wenn der Kreisdurchmesser 2 *m* beträgt?

VIII. Flächeninhalt der ebenen Figuren.

§. 145. Der Flächenraum, welchen die Grenzlinien einer ebenen Figur einschließen, heißt der Flächeninhalt der Figur.

Zwei Figuren, welche gleichen Flächeninhalt haben, heißen flächengleich.

So wie eine Linie nur durch eine Linie, eben so kann eine Fläche nur durch eine Fläche gemessen werden. Um daher den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, muss man irgend eine bestimmte Fläche als Einheit annehmen und untersuchen, wie oft dieselbe in der gegebenen Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt, heißt die Maßzahl der Fläche.

Als Einheit des Flächenmaßes nimmt man ein Quadrat an, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, von welcher dann das Quadrat den Namen erhält. Ein solches Quadrat heißt ein Quadratmeter ($\square m$), ein Quadratdecimeter ($\square dm$), . . ., je nachdem die Seite einem Meter, Decimeter . . . gleich ist.

Eine Fläche messen heißt demnach untersuchen, wie viele Quadratmeter, Quadratdecimeter, . . . die Fläche enthält.

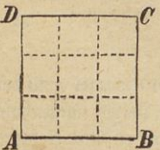
Die Bestimmung des Flächeninhaltes geschieht übrigens nicht durch unmittelbares Auftragen der genannten Quadratmaße auf die zu messende Fläche, da dieses sehr mühsam und meistens auch unausführbar wäre. Man bestimmt vielmehr den Flächeninhalt mittelbar, indem man diejenigen Strecken, von denen die Größe der Figur abhängt, mit dem Längenmaße misst und aus den Maßzahlen dieser Strecken den Inhalt der Fläche durch Rechnung findet.

1. Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

Flächeninhalt eines Quadrates.

§. 146. Es sei eine Seite des Quadrates ABCD (Fig. 122) $3\,dm$. Theilt man jede Seite in 3 gleiche Theile, deren jeder $1\,dm$ lang ist und verbindet dann die gegenüberstehenden Theilungspunkte durch gerade Linien, so zerfällt das gegebene Quadrat in lauter kleinere Quadrate, deren jedes $1\,\square dm$ vorstellt; und zwar enthält der Streifen längs der Seite AB $3\,\square dm$, der darüber befindliche Streifen ebenfalls $3\,\square dm$, und der dritte Streifen auch $3\,\square dm$. Man hat also im ganzen 3mal $3\,\square dm = 9\,\square dm$.

Fig. 122.



Zeichne ein Quadrat, dessen Seite 4 *cm* ist, und bestimme auf gleiche Weise, wie viel □ *cm* dasselbe enthält.

Der Flächeninhalt eines Quadrates wird also gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliciert, d. i. zur zweiten Potenz erhebt.

Daher kommt es, dass man auch im Rechnen die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben nennt.

Bezeichnet man die Maßzahl der Seite eines Quadrates durch s, und den Flächeninhalt desselben durch f, so ist $f = s^2$.

Heißen S und F die Seite und der Flächeninhalt eines zweiten Quadrates, so ist ebenso $F = S^2$; daher

$$F : f = S^2 : s^2, \text{ d. h.}$$

die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten.

Die Benennung des Flächeninhaltes hängt von der Benennung der Seiten ab; ist z. B. die Seite in Metern ausgedrückt, so wird die Zahl, welche man als Flächeninhalt bekommt, Quadratmeter anzeigen; ist die Seite des Quadrates in Decimetern angegeben, so erhält man auch den Flächeninhalt in Quadratdecimetern.

Wenn der Flächeninhalt eines Quadrates bekannt ist und man die Länge einer Seite finden will, so braucht man nur eine Zahl zu suchen, welche mit sich selbst multipliciert den gegebenen Flächeninhalt gibt, d. h. man darf nur aus dem bekannten Flächeninhalt die Quadratwurzel ausziehen *). Es ist also $s = \sqrt{f}$.

Z. B. der Flächeninhalt eines Quadrates beträgt 10 □*m* 75 □*dm* 84 □*cm*; wie groß ist eine Seite?

10 □*m* 75 □*dm* 84 □*cm* = 10·7584 □*m*.

$\sqrt{10{\cdot}7584} = 3{\cdot}28\,m = 3\,m\ 2\,dm\ 8\,cm.$

§. **147.** Ein Quadrat, dessen Seite 10 *dm* beträgt, hat 10 × 10 □*dm* = 100 □*dm* Inhalt. Ein solches Quadrat ist nun 1 □*m*, also ist

1 □*m* = 100 □*dm*.

*) Die Aufgaben, welche sich auf das Ausziehen der Quadratwurzel gründen, werden, wenn die Schüler damit noch nicht vertraut sind, später nachzuholen sein; sie sind hier zur Unterscheidung von anderen Aufgaben mit kleineren Lettern gedruckt.

Eben so folgt:

$1\,\square dm = 100\,\square cm \qquad 1\,\square Km = 1000000\,\square m$

$1\,\square cm = 100\,\square mm \qquad 1\,\square Mm = 100\,\square Km.$

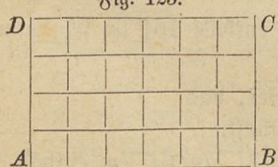
Beim *Bodenflächenmaße* heißt eine Fläche von $100\,\square m$ ein *Ar*, eine Fläche von 100 Ar ein *Hektar*; daher ist $1\,\square Mm = 10000$ Hektar.

§. 148. *Aufgaben.*

1. Die Seite eines Quadrates ist a) $21\,m$, b) $5\,m\ 4\,dm$, c) $3\,m\ 5\,dm\ 9\,cm$, d) $0{\cdot}715\,m$; wie groß ist der Flächeninhalt?
2. Zeichne mit Hilfe eines verjüngten Maßstabes ein Quadrat, dessen Seite $2\,m\ 35\,cm$ ist, und berechne dessen Flächeninhalt.
3. Der Umfang eines Quadrates ist $23\,m\ 2\,dm$; wie groß ist der Flächeninhalt?
4. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist $15\,\square m\ 12\,\square dm\ 34\,\square cm$; wie groß ist die Seite?
5. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt a) $376{\cdot}36\,\square dm$, b) $2\,\square m\ 15\,\square dm\ 16\,\square cm$, c) $12{\cdot}3201\,\square m$ ist.
6. Wie viel kostet ein quadratischer Bauplatz von $36\,m$ Seitenlänge, wenn man das $\square m$ mit 5 fl. 50 kr. bezahlt?
7. An der Fläche eines Quadrates, dessen Seite $48\,cm$ ist, wird der Rand $3\,cm$ breit vergoldet; wie viel $\square dm$ beträgt die Vergoldung?
8. Man will in einem quadratförmigen Garten, dessen Seite $58\,m\ 5\,dm$ ist, ringsherum einen Weg machen, der eine Breite von $1\,m\ 2\,dm$ haben soll; welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?
9. Es ist ein Quadrat zu construieren, welches so groß ist, als zwei Quadrate zusammengenommen, deren Seiten $2\,dm\ 5\,cm\ 10\,mm$ und $9\,dm\ 3\,cm\ 4\,mm$ sind; welche Länge wird man zur Seite des verlangten Quadrates annehmen müssen?
10. Zeichne ein Quadrat, welches gleich ist der Summe dreier Quadrate mit den Seiten $1\,dm\ 2\,cm$, $2\,dm\ 4\,cm$ und $2\,dm\ 6\,cm$.

Flächeninhalt eines Rechteckes.

Fig. 123.



§. 149. Es sei in dem Rechtecke ABCD (Fig. 123) die Grundlinie AB $= 6\,cm$, und die Höhe AD $= 4\,cm$. Theilt man die AB in 6, die AD in 4 gleiche Theile, und zieht mit denselben durch die Theilungspunkte parallele Linien, so ist ein jedes der dadurch entstehenden Quadrate 1 □*cm*, und man hat 4 Streifen solcher Quadrate, je von 6 □*cm*; der Flächeninhalt des Rechteckes ABCD beträgt daher 4mal 6 □*cm* = 24 □*cm*.

Durch ähnliche Zeichnungen und Schlüsse findet man, dass ein Rechteck, welches 7*m* lang und 3*m* breit ist, $7 \times 3 = 21$ □*m* enthält; dass die Fläche eines Rechteckes, dessen Grundlinie und Höhe 8*dm* und 5*dm* sind, $8 \times 5 = 40$ □*dm* beträgt.

Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird also gefunden, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe (oder die Länge mit der Breite) multipliciert.

Man pflegt diesen Satz kürzer so auszudrücken:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Ist der Flächeninhalt eines Rechteckes und zugleich die Grundlinie bekannt, so findet man die Höhe, indem man den Flächeninhalt durch die Grundlinie dividiert. Eben so wird die Grundlinie gefunden, indem man den Flächeninhalt durch die Höhe dividiert.

Bezeichnet g die Grundlinie, h die Höhe eines Rechteckes, und f den Flächeninhalt desselben, so ist

$$f = g \, . \, h, \; g = \frac{f}{h}, \; h = \frac{f}{g}.$$

§. 150. Aufgaben.

1. Wie groß ist der Flächeninhalt f eines Rechteckes, dessen Grundlinie g = 18*m*, und dessen Höhe h = 12*m* ist?
2. Bestimme den Flächeninhalt eines Rechteckes für
   a) g = 9·2*m*, h = 5·8*m*, b) g = 12*m* 3*dm* 3*cm*, h = 9*m* 2*cm*; c) g = 3·215*m*, h = 1·064*m*.
3. Der Umfang eines Rechteckes beträgt 87*m* 4*dm*, die kürzere Seite 18*m* 4*dm*; wie groß ist der Flächeninhalt?
4. Der Inhalt eines Rechteckes ist 34·2 □*m*, die Grundlinie 9*m*; wie groß ist die Höhe?
5. Ein Rechteck ist 2*m* 8*dm* breit und enthält 16 □*m* 91 □*dm* 20 □*cm*; wie lang ist dasselbe?
6. Wie groß ist die Breite eines Rechteckes, das
   a) 5·28*m* lang ist und 21·56 □*m* enthält,
   b) 2*m* 3*dm* 4*cm* lang ist und 3 □*m* 72 □*dm* 6 □*cm* enthält?

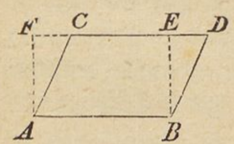
7. Miss die Länge, Breite und Höhe des Schulzimmers und berechne, wie viel Flächenraum der Boden, die Decke und die vier Wände (Thür und Fenster mitgerechnet) haben.
8. Eine Tischplatte ist 1·4 *m* lang und 1·2 *m* breit; wie groß ist ihre Fläche?
9. Ein Spiegel mit Rahmen hat 6 *dm* 3 *cm* Breite und 8 *cm* 5 *cm* Höhe; wie groß ist der Inhalt der sichtbaren Spiegelfläche, wenn der Rahmen 5 *cm* breit ist?
10. Wie viel Ar hat ein rechteckiger Garten von 38 *m* Länge und 32 *m* Breite?
11. Ein Acker enthält 71·74 Ar, seine Länge ist 425·6 *m*; wie groß ist seine Breite?
12. Jemand vertauscht einen Acker, welcher 746 □*m* 20 □*dm* Flächeninhalt hat, gegen einen andern von gleichem Inhalte, welcher 18 *m* 2 *dm* breit ist; wie lang muss dieser Acker sein?
13. Jemand kauft einen Bauplatz von der Form eines Rechteckes, 34 *m* 4 *dm* lang und 19 *m* 2 *dm* breit, und bezahlt das Quadratmeter zu $5\frac{1}{2}$ fl.; wie viel kostet der Bauplatz?
14. Ein Saal ist 4·4 *m* lang und 3·5 *m* breit; wie viel Bretter braucht man, um den Fußboden dieses Saales zu dielen, wenn jedes Brett 2·5 *m* lang und 3·1 *dm* breit ist?
15. Ein Acker ist 116 *m* lang und 18 *m* 5 *dm* breit; wie viel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf ein Ar $2\frac{1}{2}$ Liter Weizen aussäet?
16. Wie viel kosten 8 Fenster, jedes 1 *m* 8 *dm* hoch und 1 *m* 1 *dm* breit, wenn das Quadratmeter zu 9 fl. 40 kr. gerechnet wird?
17. Durch eine Wiese, welche 43 *m* lang und 12 *m* 3 *dm* breit ist, wird der Länge nach ein 2 *m* breiter Graben gelegt; wie viel Flächenraum enthält noch die Wiese?
18. Jemand besitzt einen Garten in der Form eines Rechteckes, welcher 68·4 *m* lang und 42·5 *m* breit ist; er will denselben mit einer 8 *dm* breiten Mauer umfassen; wie viel Raum wird diese Mauer wegnehmen?
19. Wenn man zur Bekleidung einer Seitenwand in einem Saale 54 Meter 125 *cm* breites Tuch braucht, wie viel wird man für die gleiche gegenüberstehende Wand brauchen, wenn das Tuch 150 *cm* breit ist?

20. Zeichne mit Hilfe eines verjüngten Maßstabes ein Rechteck, welches 2*m* 1*dm* 8*cm* breit ist, und denselben Inhalt hat als ein Quadrat, dessen Seite 5*m* 8*dm* ist.
21. Ein Cassatisch, der 2·3*m* lang und 1·2*m* breit ist, soll eine Steinplatte erhalten, die 1*dm* Holzrand stehen läßt; wie viel kostet die Platte, wenn das □*m* mit $8\frac{1}{2}$ fl. bezahlt wird?
22. Ein Hof von 18*m* Länge und 12*m* Breite soll mit Steinplatten belegt werden, welche 3*dm* lang und eben so breit sind; a) wie viel Platten sind erforderlich, b) wie hoch kommt die Pflasterung, das □*m* zu $\frac{2}{5}$ fl. gerechnet?
23. A hat zwei Gärten von gleicher Größe, einen quadratischen von 56*m* Seitenlänge und einen rechteckigen von 42*m* Breite; um jeden dieser Gärten will er eine Hecke anpflanzen lassen; wie viel Meter wird die Hecke um den rechteckigen Garten länger sein als die um den quadratischen?
24. 6 größere Thüren, jede 2·3*m* hoch und 1·3*m* breit, und 4 kleinere Thüren, jede 1·9*m* hoch und 1*m* breit, sollen von innen und außen mit Ölfarbe angestrichen werden; wie theuer kommt der Anstrich, wenn das □*m* 85 kr. kostet?
25. Ein ebenes Dach von 7·4*m* Länge und 5·8*m* Breite soll mit Zinkplatten belegt werden; a) wie viel Platten von 1·5*m* Länge und 8*dm* Breite sind dazu erforderlich, wenn an jeder Seite der Platte 3*cm* durch die Falze verloren gehen; b) wie viel kosten dieselben, wenn jede Platte 6 Kilogramm wiegt und 1 Kilogramm Zinkplatte mit 48 kr. bezahlt wird?

Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms.

§. **151**. Jedes schiefwinklige Parallelogramm ABDC (Fig. 124) kann in ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe verwandelt werden, indem man das rechtwinklige Dreieck BDE an die Stelle von ACF überträgt. Um den Inhalt des Rechteckes zu finden, muss man die Grundlinie mit der Höhe multiplicieren; daher ist auch der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Fig. 124.



Ist z. B. die Grundlinie AB = 10*m*, die Höhe BE = 4*m*, so ist 10 × 4 = 40 □*m* der Flächeninhalt des Parallelogramms.

Folgesätze.

1. Zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.
2. Zwei Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.
3. Zwei Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

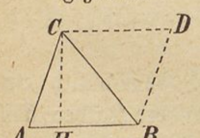
§. 152. Aufgaben.

1. Wie groß ist die Fläche eines Parallelogramms, in welchem die Grundlinie 4 *m* 3 *dm* 4 *cm* und die Höhe 2 *m* 3 *dm* 2 *cm* beträgt?
2. In einem Rhomboid ist
   die Grundlinie a) 108 *dm*, b) 17·7 *m*, c) 8 *m* 5 *dm* 1 *cm*;
   die Höhe a) 64 *dm*, b) 9·3 *dm*, c) 7 *m* 4 *dm* 8 *cm*;
   wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Der Flächeninhalt eines schiefen Parallelogramms beträgt 18 □*m* 81 □*dm*, die Höhe ist $3\frac{9}{16}$ *m*; wie groß ist die Grundlinie?
4. Wie groß ist der Inhalt eines rautenförmigen Platzes, dessen Grundlinie 47·2 *m* und dessen Höhe 28·5 *m* ist?
5. Ein Acker hat die Gestalt eines schiefwinkligen Parallelogramms von 8 Hektar 32 Ar Inhalt und 225 *m* Höhe; wie groß ist die Grundlinie?
6. Von einer Wiese, welche die Form eines Rhomboids hat, worin die Grundlinie 66·4 *m* und die Höhe 45·2 *m* beträgt, wird ein Stück von 14 *m* Höhe parallel mit der Grundlinie abgeschnitten und zu Ackerland gemacht; a) wie groß war die Wiese, b) wie groß ist das übrig bleibende Stück derselben?

Flächeninhalt eines Dreieckes.

§. 153. Jedes Dreieck ABC (Fig. 125) kann als die Hälfte eines Parallelogramms dargestellt werden, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat; man braucht nur durch zwei Scheitelpunkte B und C mit den gegenliegenden Seiten parallele Linien zu ziehen. Um den Flächeninhalt des Parallelogramms zu erhalten, muss man die Grundlinie mit der Höhe multiplicieren; zur Bestimmung der Dreiecksfläche wird man daher auch die Grundlinie mit der Höhe multiplicieren, aber von diesem Producte nur die Hälfte nehmen.

Fig. 125.



Der Flächeninhalt eines Dreieckes wird also gefunden, indem man das Product aus der Grundlinie und Höhe durch 2 dividiert.

Wird der doppelte Flächeninhalt eines Dreieckes durch die Grundlinie dividiert, so erhält man die Höhe; wird er durch die Höhe dividiert, so erhält man die Grundlinie.

Bezeichnet g die Grundlinie, h die Höhe und f den Flächeninhalt eines Dreieckes, so ist

$$f = \frac{g \cdot h}{2},\ g = \frac{2f}{h},\ h = \frac{2f}{g}.$$

Folgesätze.

1. Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.
2. Zwei Dreiecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.
3. Zwei Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Sind die drei Seiten a, b, c eines Dreieckes gegeben und bezeichnet s die halbe Summe derselben, also $s = \frac{a + b + c}{2}$, so wird, was aber hier noch nicht nachgewiesen werden kann, zur Berechnung des Flächeninhaltes f des Dreieckes aus dessen drei Seiten folgende Formel angewendet:

$$f = \sqrt{s \times (s - a) \times (s - b) \times (s - c)}.$$

Drücke diese Formel mit Worten aus.

Ist z. B. $a = 9m$, $b = 6m$, $c = 5m$, so hat man

$$\begin{aligned} a + b + c &= 20m, & f &= \sqrt{10 . 1 . 4 . 5} = \sqrt{200}; \\ s &= 10m, & & \\ s - a &= 1m, & f &= 14{\cdot}14 \square m. \\ s - b &= 4m, & & \\ s - c &= 5m; & & \end{aligned}$$

Zusätze.

1. In einem rechtwinkligen Dreiecke wird gewöhnlich eine Kathete als Grundlinie angenommen; die andere Kathete stellt dann die Höhe vor. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist daher gleich dem halben Producte der beiden Katheten.

2. Jedes Quadrat, wie auch jeder Rhombus, kann in zwei Dreiecke zerlegt werden, deren gemeinschaftliche Grundlinie die eine Diagonale und deren Höhen die Hälften der anderen Diagonalen sind (§. 78, 2 und 3). Daraus folgt:

Der Flächeninhalt eines Quadrates oder eines Rhombus ist gleich dem halben Producte der beiden Diagonalen.

3. Der Flächeninhalt eines Trapezoides wird berechnet, indem man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, von diesen die Flächeninhalte bestimmt und addiert.

§. 154. Aufgaben.

1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreieckes, worin die Grundlinie 10 *m* und die Höhe 6 *m* beträgt?
2. Berechne den Flächeninhalt f eines Dreieckes für
   a) g = 3·5 *m*, h = 3·2 *m*, b) g = 1 *m* 4 *dm* 2 *cm*, h = 5 *dm* 9 *cm*; c) g = 7 *m* 9 *dm* 4 *cm*, h = 5 *m* 6 *dm* 3 *cm*.
3. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete 29 *m* 3 *dm*, die andere 18 *m* 4 *dm*; wie groß ist der Inhalt?
4. Wie groß ist die Grundlinie eines Dreieckes, dessen Höhe 5·6 *m*, und dessen Inhalt 40·32 □*m* beträgt?
5. Ein Dreieck hat 20 □*m* 67 □*dm* Inhalt, und 5 *m* 3 *dm* zur Grundlinie; wie groß ist die Höhe?
6. In einem rechtwinkligen Dreiecke, welches 21 □*m* 5 □*dm* enthält, ist eine Kathete 7 *m* 4 *dm*; wie groß ist die zweite Kathete?
7. Wie groß ist der Inhalt eines Rhombus, dessen Diagonalen 2·26 *m* und 1·75 *m* betragen?
8. Die Diagonale eines Quadrates ist 3 *m* 4 *dm* 2 *cm*; wie groß ist der Inhalt desselben?
9. Ein Dreieck hat die Seiten a = 4 *m* 3 *dm*, b = 5 *m* 2 *dm*, c = 3 *m* 5 *dm*, wie groß ist der Flächeninhalt f desselben?
10. Bestimme f, wenn gegeben sind
    m) a = 57 *m*, b = 73 *m*, c = 64 *m*, n) a = 7·35 *m*, b = 13·43 *m*, c = 8·04 *m*, p) a = 7 *m* 3 *dm* 5 *cm*, b = 20 *m* 5 *dm* 5 *cm*, c = 15 *m* 2 *dm* 9 *cm*.
11. Ein Stück Land von der Gestalt eines Dreieckes hat 108 *m* zur Grundlinie und 72 *m* zur Höhe; wie viel ist es wert, wenn das Hektar zu 1015 fl. gerechnet wird?

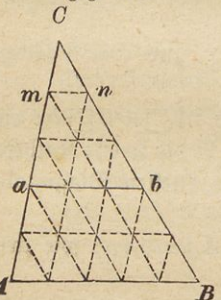
12. Die Seite eines Quadrates ist 4 *m* 4 *dm* 4 *cm*. Zeichne verjüngt ein rechtwinkliges Dreieck, welches eben so groß ist als jenes Quadrat, und dessen eine Kathete 5 *m* 5 *dm* 8 *cm* ist.
13. Ein Thurmdach besteht aus 4 gleichschenkligen Dreiecken. Wie viel □*m* Blech braucht man zu dessen Deckung, wenn die Grundlinie eines solchen Dreieckes 2 *m* 2 *dm* und die Höhe 4 *m* 5 *dm* beträgt, und wenn für Verschnitt und Falze 6% hinzugerechnet werden?
14. Ein Acker hat die Form eines Trapezoides, worin eine Diagonale 73·4 *m* lang ist und von den beiden anderen Eckpunkten um 28·2 *m* und 33·7 *m* absteht; wie groß ist der Inhalt des Ackers?
15. Ein rautenförmiger Garten enthält 2 Ar; wie groß ist darin die kürzere Diagonale, wenn die längere 25 *m* beträgt?
16. Eine Tischplatte von 12 *dm* Länge und 9 *dm* Breite enthält in der Mitte als Verzierung einen Rhombus, dessen Diagonalen 4 *dm* und 3 *dm* sind; um wie viel ist die Tischfläche größer als der Inhalt dieses Rhombus?

§. **155.** Es seien (Fig. 126) ABC und abC zwei ähnliche Dreiecke, deren gleichliegende Seiten sich wie 5 : 3 verhalten. Theilt man AC in 5 gleiche Theile, von denen auf aC 3 kommen, und zieht durch die Theilungspunkte der AC Parallele mit AB und BC, so zerfallen die gegebenen Dreiecke in lauter congruente und mit mnC gleiche Dreiecke, und zwar ist $\triangle$ ABC = 25 mnC, $\triangle$ abC = 9 mnC, daher

$$ABC : abC = 25 : 9.$$

Dasselbe Verhältnis 25 : 9 haben aber auch die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten.

Fig. 126.



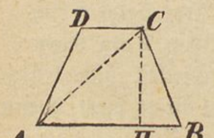
Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich also wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Flächeninhalt eines Trapezes.

§. **156.** Um den Flächeninhalt des Trapezes ABCD (Fig. 127) zu erhalten, braucht man es nur durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zu zerlegen. Man erhält dadurch

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} AB \,.\, CH,$$
$$\triangle ACD = \tfrac{1}{2} CD \,.\, CH, \text{ also}$$
$$\text{Trapez } ABCD = \tfrac{1}{2} (AB + CD) \,.\, CH; \text{ d. h.}$$

Fig. 127.



der Flächeninhalt eines Trapezes wird gefunden, indem man die halbe Summe der beiden parallelen Seiten mit der Höhe des Trapezes multipliciert.

Heißt die eine der Parallelseiten a, die andere b, und die Höhe h, so ist der Flächeninhalt

$$f = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

§. 157. Aufgaben.

1. In einem Trapeze betragen die parallelen Seiten 36 *m* und 27 *m*, die Höhe ist 18 *m*; wie groß ist der Flächeninhalt?
2. Berechne den Flächeninhalt folgender Trapeze:
   a) Parallelseiten 5 *m* und 6 *m*, Höhe 4 *m*;
   b) „ 3·5 *m* und 2·8 *m*, Höhe 1·6 *m*;
   c) „ 2 *m* 5 *dm* 4 *cm* und 5 *m* 3 *dm* 9 *cm*, Höhe 4 *m* 2 *dm* 8 *cm*.
3. In einem Trapeze, dessen Parallelseiten $5\frac{1}{2}$ *m* und $4\frac{2}{5}$ *m* sind, beträgt der Flächenraum 18 □*m* 81 □*dm*; wie groß ist der Abstand der beiden parallelen Seiten?
4. Ein Platz hat die Form eines Trapezes, worin die Parallelseiten 185 *m* 5 *dm* und 140 *m* 5 *dm* betragen und 25 *m* 2 *dm* von einander abstehen; welchen Flächenraum hat dieser Platz?
5. In einem Trapeze betragen die Parallelseiten 3 *m* 3 *dm* und 1 *m* 5 *dm*, die Höhe 1 *m* 3 *dm*; wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches mit diesem Trapeze gleichen Flächeninhalt hat?
6. In einem trapezförmigen Garten betragen die Parallelseiten 58·4 *m* und 46·8 *m*, ihr Abstand ist 34·5 *m*; wie viel ist der Garten wert, das Ar zu 25 fl. gerechnet?
7. Wie viel kostet die Pflasterung eines Hofes von der Form eines Trapezes mit den Parallelseiten 27·6 *m* und 24·5 *m*, die 11·2 *m* von einander abstehen, wenn 1 □*m* Pflaster mit 3 fl. 10 kr. bezahlt wird?
8. Ein Walmdach soll mit Blech gedeckt werden. Die obere Länge des Daches (Firstlänge) beträgt 25 *m* 4 *dm*, die untere 30 *m* 2 *dm*, die Dachbreite 7 *m* 2 *dm*, der Abstand des Firstes von der Traufe 8 *m* 2 *dm* und die Walmhöhe 7 *m* 7·5 *dm*. Wie viele Blechtafeln braucht man zur Deckung dieses Daches, wenn eine solche Tafel 3 *dm* lang und 2·7 *dm* breit ist; und wie hoch

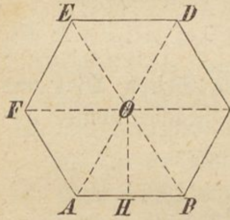
kommt das ganze Blech zu stehen, wenn eine Blechtafel 25 kr. kostet und man für Falze und Verschnitt 5% hinzurechnet?

Zwei Dachflächen sind Trapeze, die beiden anderen Dreiecke.

Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes.

§. 158. Die Fläche eines regelmäßigen Vieleckes ABCDEF (Fig. 128) findet man am leichtesten, indem man von der Mitte zu allen Eckpunkten gerade Linien zieht und die dadurch entstehenden Dreiecke berechnet; da aber diese Dreiecke congruent sind, so braucht man nur eines zu bestimmen, und die gefundene Fläche mit der Anzahl der Dreiecke zu multiplicieren. Der Flächeninhalt eines Dreieckes AOB ist gleich der Grundlinie AB multipliciert mit der halben Höhe OH; daher die Fläche aller 6 Dreiecke 6mal AB, multipliciert mit der halben Höhe OH; 6mal AB ist der Umfang des Vieleckes, OH ist der Abstand des Mittelpunktes von der Seite des Vieleckes. Daher gilt der Satz:

Fig. 128.



Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Umfange multipliciert mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Wie der Mittelpunkt eines Vieleckes bestimmt wird, ist §. 60 angegeben.

Bezeichnet u den Umfang, a den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite und f den Flächeninhalt, so ist

$$f = u \cdot \frac{a}{2}.$$

Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt auf eine ganz bestimmte Weise von der Länge der Seite ab. Um nämlich die Maßzahl für den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite zu finden, muss man, wie in der geometrischen Wissenschaftslehre bewiesen wird, die Maßzahl der gegebenen Seite

in	einem	gleichseitigen	Dreiecke	mit	0·28868,
„	„	„	Quadrate	„	0·50000,
„	„	regelmäßigen	Fünfecke	„	0·68819,
„	„	„	Sechsecke	„	0·86603,
„	„	„	Achtecke	„	1·20711,

in einem regelmäßigen Zehnecke mit 1·53884,
„ „ „ Zwölfecke „ 1·86603
multiplicieren.

§. 159. Aufgaben.

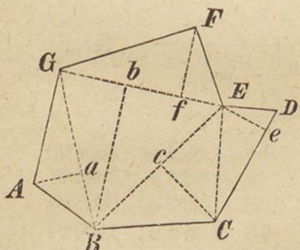
1. Wie groß ist in jedem der eben angeführten regelmäßigen Vielecke a) der Umfang, b) der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite, c) der Flächeninhalt, wenn eine Seite 12·54 *cm* beträgt?
2. Der Umfang eines regelmäßigen Fünfeckes ist 21·5 *dm*; wie groß ist der Flächeninhalt?
3. Es soll eine regelmäßig achtseitige Laube, deren Seite 2 *m* lang ist, ausgesteckt werden; wie groß ist der dazu erforderliche Flächenraum?

Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes.

§. 160. Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes kann man vorzüglich auf folgende zwei Arten bestimmen.

a) Durch Zerlegung in Dreiecke.

Fig. 129.



Zerlege die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, berechne jedes derselben und addiere alle Dreiecksflächen.

Es sei die Fläche des Vieleckes ABCDEFG (Fig. 129) auszurechnen. Man zerlege das Vieleck in Dreiecke, und es sei BG $= 39\,m$, BE $= 42·5\,m$, CD $= 31·5\,m$, GE $= 39·5\,m$, Aa $= 11·6\,m$, Cc $= 19·7\,m$, Ee $= 12·1\,m$, Bb $= 35·4\,m$, Ff $= 16·4\,m$. Man hat nun

$$\text{Dreieck ABG} = \frac{BG \times Aa}{2} = \frac{39 \times 11·6}{2} = 226·2 \ \square m$$

$$\text{„ BEG} = \frac{GE \times Bb}{2} = \frac{39·5 \times 35·4}{2} = 699·15 \text{ „}$$

$$\text{„ BCE} = \frac{BE \times Cc}{2} = \frac{42·5 \times 19·7}{2} = 418·62 \text{ „}$$

$$\text{„ CDE} = \frac{CD \times Ee}{2} = \frac{31·5 \times 12·1}{2} = 190·58 \text{ „}$$

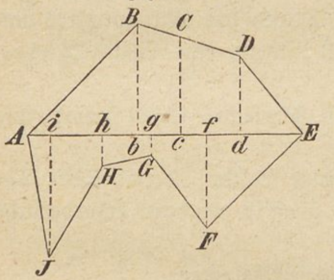
$$\text{„ EFG} = \frac{GE \times Ff}{2} = \frac{39·5 \times 16·4}{2} = 323·9 \text{ „}$$

$$\text{Vieleck ABCDEFG} = 1858·45 \ \square m.$$

b) Mittelst Abscissen und Ordinaten.

Ziehe durch zwei Eckpunkte eine Gerade als Abscissenlinie und fälle darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte; dadurch zerfällt die Figur in lauter rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und addiert werden. Dabei werden die Ordinaten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abscissentheile als Höhen betrachtet.

Fig. 130.



Es sei (Fig. 130) Bb = 60·5 *m*, Cc = 57·2 *m*, Dd = 46 *m*, Ff = 52·3 *m*, Gg = 12·1 *m*, Hh = 17·1 *m*, Ji = 63·4 *m*, ferner Ai = 9·1 *m*, ih = 29·2 *m*, hb = 22·1 *m*, bg = 3·1 *m*, gc = 19·2 *m*, cf = 15·4 *m*, fd = 16·8 *m*, dE = 34·8 *m*.

Die Rechnung kann in folgender Tabelle zusammengestellt werden:

Bestandtheile der Figur	Factoren: Grundlinien oder Summen der Parallelseiten	Factoren: Höhen	Producte
⊿ ABb	Bb = 60 5 *m*	Ab = 60·4 *m*	3654·20
Trap. BbcC	Bb + Cc = 117·7 *m*	bc = 22·3 *m*	2624·71
„ CcdD	Cc + Dd = 103·2 *m*	cd = 32·2 *m*	3323·04
⊿ DdE	Dd = 46 *m*	dE = 34·8 *m*	1600·80
⊿ FfE	Ff = 52·3 *m*	Ef = 51·6 *m*	2698·68
„ FfgG	Ff + Gg = 64·4 *m*	fg = 34·6 *m*	2228·24
„ GghH	Gg + Hh = 29·2 *m*	gh = 25·2 *m*	735·84
„ HhiI	Hh + Ii = 80·5 *m*	hi = 29·2 *m*	2350·60
⊿ AIi	Ii = 63·4 *m*	Ai = 9·1 *m*	576·94
			19793·05
	Fläche ABCDEFGHJ = 9896·52 □*m*		

Hier hat man, anstatt die Producte einzeln durch 2 zu dividieren, dieselben früher addiert und erst die Summe durch 2 dividiert.

Zeichne irgend eine vielseitige unregelmäßige geradlinige Figur, construiere ferner ein damit congruentes Vieleck und bestimme den

Flächeninhalt der einen Figur nach der ersten, den Inhalt der andern nach der zweiten hier angeführten Methode.

§. **161**. Zerlegt man zwei ähnliche Vielecke, deren Seiten sich z. B. wie 5 : 3 verhalten, durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke, so verhalten sich nach §. 155 je zwei gleichliegende Dreiecke der beiden Vielecke wie 25 : 9; es müssen sich demnach auch die Summen aller dieser Dreiecke, d. i. die beiden Vielecke selbst wie 25 : 9 verhalten.

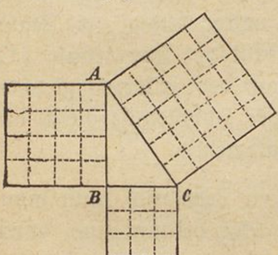
Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Vielecke verhalten sich also wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Wird daher eine in der Wirklichkeit aufgenommene Figur im verjüngten Maße auf das Papier gezeichnet, so dass jede Linie auf dem Papiere nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, . . . von der wirklich gemessenen Länge beträgt, so ist der Flächeninhalt der Figur auf dem Papiere $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{100}$, . . . von dem Flächeninhalte der ähnlichen, in der Wirklichkeit aufgenommenen Figur.

2. Pythagoräischer Lehrsatz.

§. **162**. Zeichne einen rechten Winkel ABC (Fig. 131), trage auf den einen Schenkel 3, auf den andern 4 gleiche Theile, z. B. Centimeter auf, und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke AC; die Hypotenuse des dadurch entstehenden Dreieckes wird genau 5 Centimeter enthalten. Das Quadrat von 3 ist 9, das Quadrat von 4 ist 16, und die Summe der Quadrate 25; das Quadrat der Hypotenuse 5 ist auch 25. Es ist also das Quadrat der Hypotenuse so groß, als die Summe aus den Quadraten der beiden Katheten. Dieses läſst sich auch geometrisch ableiten. Beschreibt man nämlich sowohl über der Hypotenuse, als über den Katheten Quadrate, und zerlegt jedes derselben in Quadratcentimeter, so sieht man, dass in dem Quadrate der Hypotenuse eben so viele Quadratcentimeter vorkommen, als in den Quadraten der beiden Katheten zusammengenommen. Durch diese Betrachtungen wird man auf den Satz geführt:

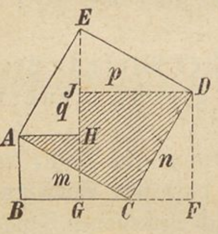
Fig. 131.



In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

Um zu zeigen, dass dieser Satz für irgend ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 132) giltig ist, errichte man über der Hypotenuse AC das Quadrat ACDE, verlängere BC und fälle darauf die Senkrechten DF und EG; eben so fälle man auf EG die Senkrechten AH und DI. Die rechtwinkligen Dreiecke ABC, CDF, DEI und EAH, die wir kürzer durch m, n, p und q bezeichnen wollen, haben nun eine Seite, nämlich die Hypotenuse, gleich; ferner haben sie außer dem rechten Winkel auch die spitzen Winkel wechselseitig gleich, weil ihre Schenkel beziehungsweise entweder parallel oder aufeinander senkrecht sind; jene vier Dreiecke sind demnach congruent. Aus der Congruenz dieser Dreiecke folgt, dass AH = AB, dass also ABGH das Quadrat über der Kathete AB ist; ferner, dass DF = DI = BC, dass also DFGI das Quadrat der Kathete BC ist. — Betrachtet man nun die Figur ABFDIH, so sieht man, dass sie die Quadrate der beiden Katheten enthält; man erhält aber offenbar denselben Flächenraum, wenn man von dieser Figur die zwei Dreiecke m und n unten wegnimmt, und sie oben an die Stelle der Dreiecke p und q anlegt; die Figur ACDE, die dadurch entsteht, ist das Quadrat der Hypotenuse AC. Da nun diese neu entstandene Figur mit der früheren gleichen Flächenraum enthält, so ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

Fig. 132.



§. 163. Mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes kann man, wenn zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bekannt sind, durch Rechnung die dritte Seite finden.

1. Sind die beiden Katheten bekannt, so erhebt man jede Kathete zum Quadrate und addiert die Quadrate, diese Summe gibt das Quadrat der Hypotenuse; um die Hypotenuse selbst zu erhalten, braucht man nur aus jener Summe die Quadratwurzel auszuziehen.

Es sei z. B. die eine Kathete 36 Centimeter, die andere 160 Centimeter; wie groß ist die Hypotenuse?

36	160	1296
36	160	25600
216	96	$\sqrt{26896} = 164\,cm$ Hypot.
108	16	168 : 26
1296	25600	1296 : 324

2. Sind die Hypotenuse und eine Kathete bekannt, so erhebe man beide zum Quadrate, subtrahiere vom Quadrate der Hypotenuse das Quadrat der bekannten Kathete, der Rest gibt das Quadrat der andern noch unbekannten Kathete; will man diese Kathete selbst finden, so darf man nur aus jenem Reste die Quadratwurzel ausziehen.

Es sei z. B. die Hypotenuse $2\,m$ $8\,cm$, eine Kathete $8\,dm$; wie groß ist die andere Kathete?

Hyp. $= 2\,m\ 8\,cm = 208\,cm$
Kath. $= 8\,dm \quad = \ 80\,cm$
$208^2 = 43264$
$80^2 = \ \ 6400$
$\sqrt{36864} = 192\,cm = 1\,m\ 9\,dm\ 2\,cm$ die zweite Kathete.
268 : 29
764 : 382.

§. 164. Aufgaben.

1. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind a) $35\,m$ und $12\,m$, b) $5{\cdot}1\,m$ und $6{\cdot}8\,m$, c) $1\,m$ $4\,dm$ $7\,cm$ und $1\,m$ $4\,dm$; wie groß ist die Hypotenuse, wie groß der Flächeninhalt?
2. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist a) die Hypotenuse $78\,dm$, eine Kathete $30\,dm$; b) die Hypotenuse $2{\cdot}08\,m$, eine Kathete $0{\cdot}8\,m$; c) die Hypotenuse $3\,m$ $4\,dm$ $8\,cm$, eine Kathete $2\,m$ $2\,dm$ $9\,cm$; wie groß ist die andere Kathete, wie groß der Flächeninhalt?
3. Es soll eine Leiter gemacht werden, welche, wenn sie unten $2\,m$ weit von dem Hause an dasselbe angelegt wird, daran $5\,m$ hoch reicht; wie lang wird die Leiter sein müssen? — (Die Leiter kann als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes angesehen werden, der Abstand vom Hause $2\,m$ bildet die eine Kathete, die Höhe $5\,m$ die andere.)
4. Bei einem gewöhnlichen Hausdache ist der Dachstuhl $14\,m$ breit; wie lang müssen die Dachsparren werden, wenn der Dachstuhl $6\,m$ hoch werden soll? — (Die Länge eines Dachsparrens bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Höhe und die halbe Breite des Dachstuhles sind.)
5. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt eine Seite $8\,dm$; wie groß ist a) die Höhe, b) der Flächeninhalt? — (Die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes bildet die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, worin als Hypotenuse die ganze Seite, als zweite Kathete die halbe Seite des gleichseitigen Dreieckes vorkommt.)

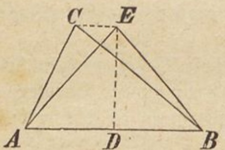
6. Berechne die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a) 2*dm* 4*cm*, b) 4*m* 2*dm* 6*cm* beträgt.
7. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 3*m* 4*dm* 6*cm* und die Höhe 4*m* 2*dm* 4*cm*; wie groß ist ein Schenkel?
8. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 4·8*dm* und jede der gleichen Seiten 5·2*dm*; wie groß ist die Höhe, und wie groß der Flächeninhalt?
9. Wie groß ist die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite 1*m* ist?
10. Der Halbmesser eines Kreises ist 6*dm*; wie groß ist der Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes? (§. 106, Zusatz.)
11. Zeichne ein Quadrat, welches so groß ist, als die Summe zweier anderen Quadrate.
12. Zeichne ein Quadrat, welches gleich ist dem Unterschiede zweier gegebener Quadrate.

3. Verwandlung und Theilung geradliniger Figuren.

Verwandlung geradliniger Figuren.

§. 165. Eine Figur in eine andere verwandeln, heißt eine Figur construieren, welche mit der ersten flächengleich ist.

Fig. 133.

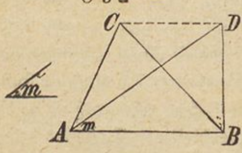


1. Ein ungleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 133) in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Man halbiere die AB in D, ziehe DE $\perp$ AB und CE $\parallel$ AB; verbindet man den Durchschnittspunkt E mit A und B, so ist ABE das verlangte gleichschenklige Dreieck.

2. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 134) in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel m enthält.

Fig. 134.



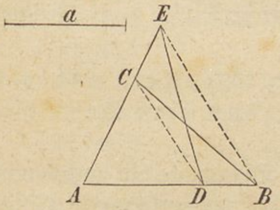
Man construiere den Winkel BAD = m und ziehe CD $\parallel$ AB; zieht man noch DB, so ist ABD das verlangte Dreieck.

3. Ein schiefwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

Die Auflösung wie bei der Aufgabe 2., worin jedoch m als rechter Winkel angenommen werden muss.

4. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 135) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

Fig. 135.

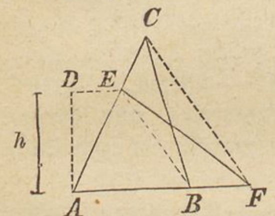


Man mache AD = a, ziehe DC und damit parallel die BE, welche die verlängerte AC in E trifft; ADE ist nun das verlangte Dreieck. Denn es ist

$$\triangle\, ACD = ACD,$$
$$\triangle\, CDE = CDB, \text{ also}$$
$$\triangle\, ACD + CDE = \triangle\, ACD + CDB, \text{ oder}$$
$$\triangle\, ADE = ABC.$$

5. Ein Dreieck ABC (Fig. 136) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Fig. 136.

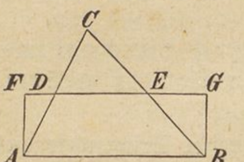


Man errichte AD = h senkrecht auf AB, ziehe DE || AB, dann die EB, und damit parallel die CF. Verbindet man nun E und F durch eine Strecke, so ist $\triangle$ AEF = ABC.

Beweis wie bei der Aufgabe 4.

6. Ein Dreieck ABC (Fig. 137) in ein Rechteck zu verwandeln.

Fig. 137.



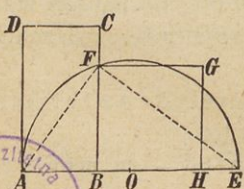
Man halbiere die Seiten AC und BC in D und E, ziehe durch diese Punkte eine Gerade, und errichte in A und B die Senkrechten AF und BG, so ist ABGF das gesuchte Rechteck.

§. 166. 1. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Die Auflösung wurde in §. 151 angeführt.

2. Ein Rechteck ABCD (Fig. 138) in ein Quadrat zu verwandeln.

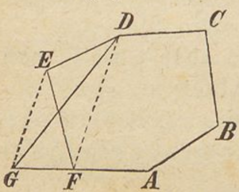
Fig. 138.



Verlängere die kleinere Seite AB bis E, so daß BE = AD wird, beschreibe über AE als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Seite BC in F schneidet, und construiere über BF das Quadrat BFGH; dieses ist dann dem gegebenen Rechtecke gleich. Denn zieht man AF und EF, so ist AFE als Winkel im Halbkreise ein rechter, daher in dem rechtwinkligen Dreiecke AFE die Senkrechte FB die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten AB und BE der Hypotenuse. Man hat also $AB : FB = FB : BE$ oder $AB : FB = FB : AD$, daher $AB \times AD = FB^2$, d. i. Rechteck ABCD = Quadrat BFGH.

§. 167. Ein Vieleck ABCDEF (Fig. 139) in ein anderes zu verwandeln, das eine Seite weniger hat.

Fig. 139.



Man ziehe die Diagonale DF und damit parallel die EG, welche die verlängerte AF in G trifft. Zieht man DG, so ist das Vieleck ABCDG gleich dem Vielecke ABCDEF, weil beide aus gleichen Theilen bestehen.

Zeichne ein Viereck und verwandle es in ein Dreieck.

Verwandle ein Sechseck in ein Fünfeck, — Viereck, — Dreieck, Rechteck, Quadrat; miss die Seite dieses Quadrates, und berechne daraus den Flächeninhalt desselben, welcher zugleich der Inhalt des gegebenen Sechseckes ist.

Zeichne drei congruente Siebenecke, und bestimme den Flächeninhalt bei dem ersten und zweiten nach den in §. 160 unter a) und b) angegebenen Methoden, bei dem dritten aber mittelst Verwandlung in ein Quadrat.

Theilung geradliniger Figuren.

§. 168. 1. Ein gegebenes Dreieck durch gerade Linien, welche durch einen Eckpunkt gehen, in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Theile die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite in so viele gleiche Theile, als verlangt werden, und verbinde die Theilungspunkte durch Strecken mit jedem Eckpunkte.

Wäre das gegebene Dreieck in Theile zu theilen, welche unter einander in einem gegebenen Verhältnisse stehen, so müsste man auch die Dreieckseite nach dem gegebenen Verhältnisse theilen und weiter wie vorhin verfahren.

2. Ein Dreieck in vier congruente Dreiecke zu theilen.
Verbinde die Halbierungspunkte der Seiten.

3. Ein Parallelogramm — ein Rechteck — in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Theile zwei Gegenseiten in die verlangte Anzahl gleicher Theile, und verbinde je zwei gegenüberliegende Theilungspunkte durch eine Strecke.

Zieht man in jedem der dadurch entstehenden Parallelogramme eine Diagonale, so erhält man doppelt so viele gleiche Theile.

4. Ein Quadrat in mehrere gleiche Theile so zu theilen, dass alle Theilungslinien a) aus dem Mittelpunkte, b) aus einem Eckpunkte des Quadrates gehen.

5. Ein Trapezoid in beliebig viele gleiche Theile zu theilen.

Ziehe eine Diagonale, theile dieselbe in die verlangte Anzahl gleicher Theile, und ziehe von den Theilungspunkten gerade Linien zu den der Diagonale gegenüberliegenden Eckpunkten.

4. Flächeninhalt des Kreises.

§. 169. Denkt man sich in einem Kreise unzählig viele Halbmesser gezogen, so zerfällt die Kreisfläche in unzählig viele Kreisausschnitte; diese kann man als Dreiecke ansehen, deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser ist, und deren Grundlinien zusammen den Umfang geben. Um also die Fläche des Kreises zu erhalten, wird man alle Dreiecksflächen berechnen und addieren; den Flächeninhalt eines Dreieckes findet man, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe multipliciert; man wird also alle Grundlinien addieren, und ihre Summe, d. i. den Kreisumfang mit der halben gemeinschaftlichen Höhe d. i. mit dem halben Halbmesser multiplicieren.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist also gleich dem Umfange, multipliciert mit dem halben Halbmesser.

Bezeichnet f den Flächeninhalt und u den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, so ist

$$f = u \cdot \frac{r}{2}.$$

Da aber $u = 2r\pi$ ist, so ist auch $f = 2r\pi \cdot \frac{r}{2}$, oder

$$f = r^2\pi, \text{ d. i.}$$

der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Quadrate des Halbmessers, multipliciert mit der Ludolfischen Zahl.

Bezeichnet F den Flächeninhalt eines zweiten Kreises, dessen Halbmesser R ist, so hat man eben so $F = R^2\pi$; daher

$$F : f = R^2\pi : r^2\pi = R^2 : r^2,$$ d. h.

die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Ist umgekehrt der Flächeninhalt eines Kreises bekannt, und die Länge des Halbmessers zu suchen, so braucht man nur den Flächeninhalt durch die Ludolfische Zahl zu dividieren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers vor; zieht man daraus die Quadratwurzel, so hat man den Halbmesser selbst; folglich

$$r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}.$$

§. 170. Da die ganze Kreisfläche gleich ist dem ganzen Umfange multipliciert mit dem halben Halbmesser, so ist offenbar der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes gleich der Länge des dazu gehörigen Bogens multipliciert mit dem halben Halbmesser.

Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden, berechnet man den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes und subtrahiert davon den Inhalt des Dreieckes, um welches der Ausschnitt größer als der Abschnitt ist.

Den Flächeninhalt eines Kreisringes findet man, indem man die Flächen der beiden Kreise, deren Unterschied der Ring ist, berechnet und von einander subtrahiert.

§. 171. Aufgaben.

1. Der Halbmesser eines Kreises ist 10*m*; wie groß ist der Flächeninhalt?

Halbm. =	10*m*	oder 10×10
Durchm. =	20*m*	$100 \times 3{\cdot}1416$
Umfang =	62·832	314·16 □*m*.
halb. Halbm. =	5*m*	
Flächeninhalt =	314·16 □*m*.	

2. In einem Kreise ist der Halbmesser

a) $r = 2{\cdot}65\,m$, b) $r = 1\,m\ 7\,dm\ 8\,cm$, c) $r = 35\tfrac{1}{2}\,dm$; wie groß ist der Flächeninhalt f?

3. Wie groß ist f, wenn der Durchmesser d

a) 13 *m*, b) 5·135 *m*, c) 8 *dm* 3 *cm* 4 *mm*

beträgt?

4. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt 7 □*m* 76 □*dm* beträgt?

7 □*m* 76 □*dm* = 776 □*dm*   776 : 3·14 = 247·14

$\sqrt{247·14}$ = 15·7 *dm* = 1 *m* 5 *dm* 7 *cm*

147 : 25
22·14 : 307
65

5. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt a) 6·59736 □*m*, b) 3 □*m* 86 □*dm* 41·68 □*cm* beträgt?

6. Ein kreisrunder Saal hat 8 *m* 5 *dm* im Durchmesser; wie groß ist der Flächeninhalt?

7. Eine Scheibe hat 1 *m* 48 *cm* im Umfange; wie groß ist a) ihr Durchmesser, b) ihr Flächeninhalt?

8. Der Umfang eines Baumes ist $2\frac{2}{3}$ *m*; wie groß ist der Flächeninhalt eines Querschnittes?

9. Wie viel Menschen haben in einem kreisrunden Saale Platz, dessen Durchmesser 14 *m* ist, wenn ein Mensch $17\frac{1}{2}$ □*dm* einnimmt?

10. Auf einem Anger ist eine Kuh mit einem 2·8 *m* langen Stricke angebunden; wie viel □*m* Weide sind ihr zugemessen?

11. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Inhalt gleich ist der Fläche eines Kreises vom Halbmesser 8 *dm*?

12. Bestimme den Halbmesser eines Kreises, der an Inhalt gleich ist einem Quadrate mit der Seite 2 *m* 3 *dm*.

13. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisausschnittes, dessen Halbmesser 5·8 *m* und dessen Bogenlänge 8·2 *m* ist?

14. Ein Kreisausschnitt von 4·52 *dm* Halbmesser hat a) 18°, b) 40°, c) 106° 30′; wie groß ist die Länge des Bogens, wie groß der Inhalt des Ausschnittes?

15. Wie viel Grade umfasst der Bogen eines Kreisausschnittes, dessen Fläche $74\frac{3}{3}\frac{5}{6}$ □*dm* und dessen Halbmesser 7 *dm* beträgt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

16. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisabschnittes, dessen Sehne = 2 *m* 5 *dm* dem Halbmesser des Kreises gleich ist?

17. Wie groß ist die Fläche eines Kreisringes, wenn die zwei concentrischen Kreise 3 *m* 6 *dm* und 4 *m* 4 *dm* zu Durchmessern haben?

18. Bestimme den Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die ihn einschließenden Kreisumfänge 315·8 *mm* und 410·5 *mm* betragen.

19. Wie groß ist der längere Halbmesser eines Kreisringes von 50·24 □*cm*, wenn der kürzere Halbmesser 3 *cm* beträgt?

20. Auf einer Schießscheibe beträgt der Durchmesser des innern schwarzen Ringes 0·25 *m* und die Breite des weißen Ringes 0·3 *m*; wie groß ist der weiße Ring?

21. Die Fläche eines Kreises beträgt 72·9 □*dm*, die Fläche eines kleineren concentrischen Kreises 49·134 □*dm*; wie groß ist die Breite des Kreisringes?

22. Ein kreisrunder Grasplatz von 18 *m* Durchmesser ist mit einem 2 *m* breiten Wege umzogen; wie viel Flächenraum nimmt dieser Weg ein?

23. Um einen kreisrunden Thurm von 32 *m* Umfang wird ein 3 *m* breiter Graben gezogen; welche Fläche nimmt dieser ein?

24. Ein Garten ist 68 *m* 2 *dm* lang, 41 *m* 3 *dm* breit; in der Mitte desselben befindet sich ein kreisrunder Teich, welcher sammt der ihn einschließenden Mauer 12 *m* 4 *dm* im Durchmesser hat; wie groß ist die Landfläche des Gartens?

25. In einen Kreis, dessen Halbmesser 2 *m* 4 *dm* ist, wird ein regelmäßiges Sechseck beschrieben; um wie viel ist die Fläche dieses Sechseckes kleiner als die Fläche des Kreises?

5. Flächeninhalt einer Ellipse.

§. **172**. Man hat gefunden, dass eine Ellipse eben so viel Flächenraum einschließt, als ein Kreis, in welchem das Quadrat des Halbmessers gleich ist dem Producte aus den beiden Halbachsen der Ellipse. Da nun der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist dem Quadrate des Halbmessers, multipliciert mit der Ludolfischen Zahl, so folgt:

Der Flächeninhalt einer Ellipse wird gefunden, indem man das Product der beiden halben Achsen mit der Ludolfischen Zahl multipliciert.

Z. B. wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren Achsen 11 *m* und 7 *m* sind?

Product der Halbachsen $= \frac{11}{2} \times \frac{7}{2} = 19\frac{1}{4}$.

Flächeninhalt $= 19\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{7} = 60\frac{1}{2}$ □*m*.

Aufgaben.

1. Die halbe große Achse einer Ellipse ist 29 dm, die halbe kleine Achse 22 dm; wie groß ist der Flächeninhalt?

2. Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren Achsen 4·35 m und 3·02 m betragen?

3. Ein Blumenbeet hat die Form einer Ellipse von $6\frac{1}{2}\,m$ Länge und $4\frac{3}{4}\,m$ Breite; wie groß ist der Flächenraum?

4. Die Grundfläche eines Gefäßes von elliptischer Form soll 10 □dm betragen. Wie lang muss die große Achse genommen werden, wenn die kleine Achse eine Länge von 15 cm hat?

5. Die kleine Achse einer Ellipse ist 1·24 m, die Excentricität 0·95 m; wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, der mit der Ellipse gleichen Inhalt hat?

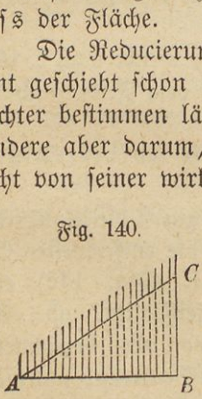
Anhang.

1. Aufnahme kleiner Flächen auf dem Felde.

§. 173. Eine Figur auf dem Felde aufnehmen heißt, ihre horizontale Ausdehnung nach Größe und Gestalt bestimmen. Man denkt sich dabei durch irgend einen Punkt der Figur eine Horizontalebene gelegt und auf diese von allen Grenzpunkten der Figur Senkrechte gefällt; verbindet man die Fußpunkte der Senkrechten gehörig durch Linien, so ist die dadurch entstehende Figur die auf den Horizont reducierte Fläche oder der Grundriss der Fläche.

Die Reducierung der zu messenden Grundstücke auf den Horizont geschieht schon darum, weil sich die horizontale Lage viel leichter bestimmen lässt, als die Lage jeder anderen Fläche, insbesondere aber darum, weil die Ertragsfähigkeit eines Grundstückes nicht von seiner wirklichen Größe, sondern von seiner horizontalen Ausdehnung abhängt. Da nämlich alle Pflanzen in verticaler Richtung wachsen, so können, wenn AC (Fig. 140) den Durchschnitt einer schiefen Fläche und AB den Durchschnitt ihrer horizontalen Ausdehnung vorstellt, auf der schiefen Fläche von A nach C nicht mehr Pflanzen stehen, als auf der horizontalen Fläche AB.

Fig. 140.



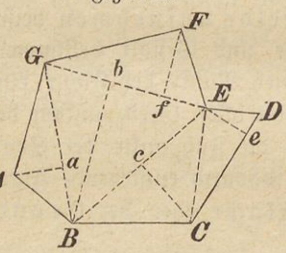
Bevor man zur Aufnahme einer Fläche schreitet, geht man um dieselbe an ihrem Umfange herum, schlägt in allen Eck- und Krümmungspunkten Pflöcke ein, welche mit fortlaufenden Nummern oder Buchstaben bezeichnet sind, und entwirft sich zugleich von dem Umfange der Figur sammt der Bezeichnung der eingeschlagenen Pflöcke nach dem Augenmaße eine Handzeichnung oder Handskizze mit Bleistift, in welcher dann an jede wirklich gemessene Linie das gefundene Maß eingetragen wird. Nach dieser Handzeichnung fertigt man später zu Hause den Plan an und nimmt die Flächenberechnung vor.

§. **174.** Aufnahme einer Figur mit Messplatten oder mit der Messkette.

a) Durch Zerlegung in Dreiecke.

Man umgehe die Figur und entwerfe eine Handskizze derselben, denke sich durch je zwei Punkte ein Dreieck gelegt, und messe dessen drei Seiten. Hierauf zeichne man die Dreiecke in der gehörigen Ordnung auf dem Papiere, indem man die gemessenen Seiten nach einem verjüngten Maßstabe aufträgt. Die dadurch erhaltenen Punkte haben dieselbe Lage gegen einander, wie die entsprechenden Punkte auf dem Felde; man braucht sie nur noch gehörig durch Linien zu verbinden. In Fig. 141 würde man mit dem Dreiecke ABG beginnen und dann folgeweise die Dreiecke BGE, GEF, BEC, CED construieren.

Fig. 141.

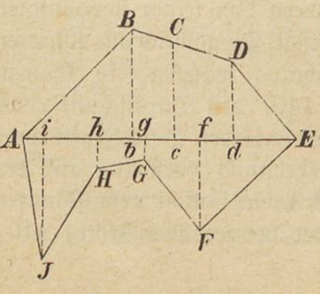


Wegen der Berechnung des Flächeninhaltes, welche nach §. 160, a) geschieht, muss man in jedem Dreiecke auf dem Felde auch die Höhe ausstecken und messen.

b) Mittelst Abscissen und Ordinaten.

Man pflöcke zuerst die Figur aus, und stecke durch die entferntesten Eckpunkte A und E (Fig. 142) eine Strecke als Abscissenlinie ab. Auf diese fälle man von allen bezeichneten Umfangspunkten Senkrechte, und messe die einzelnen Stücke der Abscissenlinie

Fig. 142.



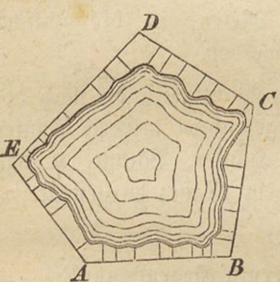
und alle Ordinaten. Auf dem Papiere trägt man nun an einer Geraden nach einem verjüngten Maßstabe zuerst die Abscissen von A bis i, h, b, . . . auf; in diesen Punkten errichtet man Senkrechte, und trägt darauf die Ordinaten gehörig auf. Endlich braucht man nur zwischen den dadurch erhaltenen Punkten die entsprechenden Linien zu ziehen.

Die Flächenberechnung wird nach §. 160, b) vorgenommen.

c) Durch das Einschließen der Figur.

Wenn sich im Innern der aufzunehmenden Figur Hindernisse der Messung befinden, so sind die zwei eben angegebenen Methoden nicht anwendbar. In diesem Falle führt folgendes Verfahren zum Ziele. Es sei z. B. ein Teich (Fig. 143) aufzunehmen. Man umgebe die Figur mit mehreren gegen einander geneigten Abscissenlinien, die zusammen ein Vieleck ABCDE bilden, und fälle darauf von allen Biegungspunkten Senkrechte; man messe die Abscissentheile und die Ordinaten, und nehme zugleich die Winkel, welche die einzelnen Abscissenlinien mit einander bilden, nach §. 131, auf. Dann zieht man auf dem Papiere eine Gerade, und trägt darauf die Theile der Abscissenlinie AB verjüngt auf; im Endpunkte B construiert man einen Winkel, welcher so groß ist als der Winkel B auf dem Felde, und trägt auf den neuen Schenkel die Stücke der Abscissenlinie BC auf, u. s. w. Hierauf errichtet man in den einzelnen Punkten der Abscissenlinien Senkrechte, und trägt darauf die entsprechenden Ordinaten auf. Werden nun die dadurch erhaltenen Punkte mit freier Hand gehörig verbunden, so hat man die verlangte Zeichnung des Teiches.

Fig. 143.



Einfacher gestaltet sich die Aufnahme, wenn man, wo es der Boden gestattet, um die Figur anstatt eines Vieleckes ein Rechteck aussteckt, dessen Seiten die Abscissenlinien bilden.

2. Grundsätze des Situationszeichnens.

§. 175. Das Situationszeichnen lehrt einen nicht sehr ausgedehnten Abschnitt der Erdoberfläche mit den darauf befindlichen

Gegenständen in ihrer Horizontalansicht (§. 173) nach einem verjüngten Maßstabe auf dem Papier darstellen. Eine solche Darstellung eines Terrain-Abschnittes heißt ein Situationsplan.

Die Größe des verjüngten Maßstabes hängt von dem Zwecke ab, zu welchem ein solcher Plan entworfen wird. Soll die Zeichnung nur eine allgemeine Übersicht einer Gegend gewähren und bloß die merkwürdigsten Punkte, Hügel oder Berge, Wege, Bäche u. d. gl. enthalten, so wird die Größe des verjüngten Maßstabes so gewählt, dass nur die genannten Gegenstände noch deutlich genug darauf erscheinen. Größer muss der Maßstab angenommen werden, wenn die Aufnahme zum ökonomischen Gebrauche geschieht, und der Plan zur genauen Bestimmung des Flächeninhaltes der aufgenommenen Gegenstände dienen soll. Für Übersichtskarten einzelner Güter und Herrschaften kann 1 *cm* = 150 bis 400 Meter, in ökonomischen Plänen 1 *cm* = 30 Meter angenommen werden.

Schmale und kleine Gegenstände von Wichtigkeit, die nach dem gegebenen Verjüngungsverhältnisse nicht gezeichnet werden könnten, z. B. Straßen, Brücken, einzeln stehende Häuser, Bäume, u. dgl., werden unverhältnismäßig größer (über dem Maße) dargestellt.

Darstellung der verschiedenen Terrain-Gegenstände.

§. 176. Man ist übereingekommen, die einzelnen auf der Erdoberfläche befindlichen Gegenstände durch eine bestimmte Bezeichnung und durch die verschiedene Farbenanlegung, welche beide mit den vorgestellten Objecten in einem möglichst naturgemäßen Zusammenhange sind, in Plänen sichtbar darzustellen. Über diese conventionelle Darstellungsweise sollen hier einige Andeutungen folgen.

1. Wege und Straßen.

Diese werden durch fortlaufende Linien, welche die Richtung derselben anzeigen, dargestellt; und zwar Fuß- und Saumwege durch punktierte oder gestrichelte Linien, Straßen durch zwei volle Parallellinien oder durch eine volle und eine damit parallele punktierte Linie, Eisenbahnen durch drei parallele, unterbrochen durch schwarze Striche ausgefüllte Linien. Die Farbe für Straßen ist Karmin, für Fuß- und Fahrwege Chromgelb.

2. Bäume und Sträuche.

Dieselben machen in ihrer Darstellung von anderen Terrain-Gegenständen eine Ausnahme. Während diese in ihren horizontalen Ausdehnungen in Grund gelegt werden, zeichnet man die Bäume und Sträuche nach ihrer Verticalansicht, und es werden dabei häufig sogar die Schatten ersichtlich gemacht. Die Form der Bezeichnung hängt von der Art dieser Gewächse ab, wobei in der Darstellung insbesondere Laub- und Nadelholz, Oliven- und Kastanienbäume und Sträuche zu unterscheiden kommen. In Waldungen und Gestrüppen werden sie mit dunkler Tusche, sonst mit einer grünen Farbe angelegt.

3. Der productive Boden nach den Hauptculturgattungen.

Die Äcker werden braun angelegt, und an den Grenzen mit feinen schwarzen Linien bezeichnet.

Weingärten erhalten eine gelbrothe Farbe und nur im Innern mehrere gerade Strichlein, welche mit schraubenförmig gewundenen Linien durchzogen und grün getupft werden.

Gärten bezeichnet man durch fein punktierte parallele Linien, und legt sie mit Gartengrün an.

Zur Bezeichnung der Wiesen und Hutweiden dienen abwechselnd stärkere und schwächere bogenförmige Gruppen von feinen Strichlein oder Punkten; die Farbenanlage geschieht mit Wiesen- oder Hutweidengrün. Auf ähnliche Art wird auch das Weichland (eine nasse Wiese) dargestellt, nur kommt noch die Wasserbezeichnung dazu, wovon später Erwähnung geschehen wird.

Wälder und Gestrüppe werden blauschwarz angelegt, und mit Bäumen und Sträuchen entsprechend besetzt.

4. Gewässer.

Flächen, welche mit Gewässern bedeckt sind, werden an den Ufern mit Berlinerblau ausgezogen; scharf, wo die Wasserbegrenzung bestimmt und unveränderlich ist; wo diese unbestimmt und einem Wechsel unterworfen ist, wird dieselbe nur mit einem blassen Striche angedeutet. Im Innern werden Wasserflächen mit derselben Farbe laviert, d. i. mit einem vom Dunkel nach und nach zum Hellen übergehenden Tone verwaschen.

Sümpfe und Moräste bezeichnet man durch horizontale, flammenförmige blaue Striche, zwischen denen hie und da geradestehende Strichlein, welche das Rohr vorstellen, angebracht werden; die Fläche selbst wird grün angelegt.

Sandflächen werden mit der Sandfarbe (rothgelb) angelegt.

5. Baugegenstände.

Bei diesen wird allgemein das Mauerwerk mit Karmin, das Holzwerk aber gelb oder braun angelegt.

Einzelne Häuser und Häuserinseln werden saftigroth ausgezogen und blassroth angelegt. Öffentliche Gebäude werden mit dunklerem Karmin angelegt, als Privathäuser; Kirchen erhalten zur Unterscheidung überdies noch ein schwarzes Kreuz in der Mitte.

Stege werden durch einfache, Brücken durch doppelte Linien bezeichnet, und letztere mit Karmin oder dunkler Farbe angelegt, je nachdem sie von Stein oder Holz sind.

Canäle und Wasserleitungen werden, je nachdem sie mit Mauer oder Holz bekleidet sind, mit Karmin oder dunkler Farbe contouriert; erstere werden dann mit Berlinerblau laviert und erhalten auf der Schattenseite einen starken Strich von derselben Farbe; in den letzteren wird nach der Mitte ein dünner flammenförmiger blauer Strich gezogen.

6. Unebenheiten des Terrains.

Da der Situationsplan die aufgenommene Fläche in ihrer Horizontalansicht darstellt, so kann man daraus die Unebenheiten des Terrains, Abdachungen, Gräben, Thäler und Berge nicht unmittelbar ersehen. Um nun aus dem Plane selbst nicht nur die horizontalen Ausdehnungen der Flächen, sondern auch die Steigung und den Fall der verschiedenen Partien beurtheilen und abnehmen zu können, hat man eine Darstellungsweise der Unebenheiten des Bodens eingeführt, welche die Bergschraffierung heißt, und deren Wesen aus dem Folgenden klar werden soll.

Die Lage der Flächen wird uns durch ihre Beleuchtung ersichtlich gemacht; nimmt man diese für eine Horizontalansicht vertical an, so werden uns horizontale Ebenen in vollem Lichte, schiefe Flächen aber um so dunkler erscheinen, je steiler sie sind, und es wird jeder bestimmten Steile auch ein bestimmter Grad von

Dunkel entsprechen. Eine weitere Beurtheilung für die Beschaffenheit einer schiefen Fläche liegt in der Linie des stärksten Falles d. i. in der Richtung, in welcher das Wasser davon abläuft. Diesen beiden Rücksichten wird nun entsprochen, wenn man in der Terrain-Darstellung die horizontale Ebene weiß läſst, jede geneigte Fläche aber durch Striche schraffiert, welche nach der Richtung des Wasserablaufes gelegt werden, und deren Dicke mit den dazwischen befindlichen weißen Zwischenräumen jenen Grad von Dunkel erzeugt, welcher der Steile dieser Fläche entspricht.

Diese Schraffier-Methode wird nicht nur bei der Darstellung der Berge, sondern auch beim Zeichnen der Gräben, schiefen Ufer, Hohlwege und Felsen angewendet; bei den letzteren werden überdies die Risse, Kanten und Wände mittelst der Feder mit dunkler Sepia ausgezogen, und da, wo sie in Flächen übergehen, mit dem Pinsel verwaschen.

Ausführung von Situationsplänen.

§. 177. Die über die Darstellung der verschiedenen Terrain-Gegenstände gegebenen Andeutungen enthalten auch die Winke für die wirkliche Ausführung eines Situationsplanes; die dabei vorkommenden Arbeiten sind in folgender Reihenfolge vorzunehmen:

1. Das erste Geschäft besteht darin, die in Blei gelegten Contouren mittelst der Feder mit Tusche oder Karmin auszuziehen. Man zieht zuerst die Gewässer, als: Bäche, Fluſs- und Seeufer, die in Sümpfen vorkommenden Gerinne u. dgl. mit Berlinerblau, die Wege, Umzäunungen und Brücken mit dunkler Tusche, die Straßen, Häuser und andere Baugegenstände von Stein mit Karmin aus. Endlich werden noch die Grenzen der Bodengattungen mit blasser Tusche ausgezogen; mit feinen Linien bei Äckern, Gärten, Wiesen und Weiden, mit breiteren bei Gestrüppen und Waldungen.

2. Auf das Ausziehen der Contouren folgt zum Theile das Anlegen der einzelnen Partien mit den oben angegebenen Farben; dabei hat man darauf zu sehen, daſs die angelegte Fläche durchaus gleichen Ton hat.

Man beginnt mit den Hutweiden, legt dann die Wiesen und das Weichland, die Weingärten, Obst- und Gemüsegärten und sodann die Landflächen an.

3. Nach dieser Arbeit schreitet man zur Schraffierung der Terrain-Erhöhungen, wobei zugleich die Felsen zur bessern Unterscheidung braun mittelst Sepia auszudrücken sind.

4. Erst nach dem Schraffieren werden die Gewässer gehörig laviert, und an der Schattenseite mit einem dunkleren Striche versehen; sodann die Wege, Straßen, Brücken und Gebäude mit den entsprechenden Farben angelegt.

5. Nun folgt noch das Einzeichnen der Sträuche, Bäume, des Rohrwerkes und anderer im Innern der Partien anzubringenden Merkmale.

6. Den Beschluss macht die Beschreibung des Planes, indem man einzelnen Gegenständen zur Vervollständigung die ihnen entsprechenden Namen beisetzt. Die Planschrift, wozu man sich der lateinischen Buchstaben bedient, muss übrigens so angebracht werden, dass sie die Zeichnung so wenig als möglich bedeckt.

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

I. Gerade Linien und Ebenen im Raume.

Bestimmung der Ebenen.

§. 178. Durch zwei Punkte wird eine Gerade vollkommen bestimmt, d. h. es läßt sich durch zwei Punkte eine einzige gerade Linie ziehen. Legt man nun durch diese Gerade eine Ebene, so kann man dieselbe rings um die Gerade herumdrehen, wodurch sie unzählig viele verschiedenen Lagen einnimmt. Durch zwei Punkte oder durch eine gerade Linie ist demnach eine Ebene nicht bestimmt. Nimmt man aber außer der Geraden noch einen dritten Punkt an, so wird es unter jenen unzählig vielen Lagen, welche die Ebene während ihrer Umdrehung annehmen kann, eine einzige geben, in welcher die Ebene durch die gerade Linie und den außer ihr liegenden Punkt geht. Durch eine Gerade und einen außer ihr liegenden Punkt oder durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte kann demnach eine einzige Ebene gelegt werden.

Eine Ebene ist ferner vollkommen bestimmt:

1) durch zwei sich schneidende gerade Linien,
2) durch ein Dreieck,
3) durch einen Kreis,
4) durch zwei parallele Linien.

1. Lage der Geraden im Raume.

§. 179. Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegen einander haben; entweder sind sie parallel, oder sie schneiden sich in einem Punkte, oder es ist keines von beiden der Fall, die Linien gehen nämlich an einander vorbei. In den zwei ersten Fällen liegen die beiden Geraden in derselben Ebene, im dritten Falle lassen sie sich nicht in einer und derselben Ebene vorstellen.

Aufgaben.

1. Gib gerade Linien im Schulzimmer an, welche parallel sind; ferner solche, welche sich schneiden; und endlich auch solche, welche sich kreuzen.
2. Welche Lage gegen einander können oder müssen a) zwei verticale, b) eine verticale und eine horizontale, c) eine verticale und eine schiefe, d) zwei horizontale, e) eine horizontale und eine schiefe, f) zwei schiefe Gerade haben?

§. 180. Eine Gerade ist mit einer Ebene parallel, wenn alle ihre Punkte von der Ebene gleichweit abstehen, so dass die Gerade nach beiden Seiten beliebig verlängert, mit der ebenfalls nach allen Richtungen erweiterten Ebene nicht zusammentrifft; im entgegengesetzten Falle ist die Gerade gegen die Ebene geneigt, und schneidet dieselbe, wenn beide erweitert werden, in einem Punkte.

Der Punkt, in welchem eine Gerade mit einer Ebene zusammentrifft, wird der Fußpunkt der Geraden in dieser Ebene genannt.

Eine gegen die Ebene geneigte Gerade kann auf derselben senkrecht oder schief aufstehen. Eine gerade Linie heißt auf einer Ebene senkrecht, wenn sie sich nach keiner Seite hin gegen die Ebene mehr neigt als nach einer andern Seite; sonst heißt sie auf der Ebene schief.

Eine auf der Ebene senkrechte Gerade steht auf allen geraden Linien, welche durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogen werden, senkrecht; eine schiefe Gerade dagegen bildet mit einer einzigen durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden rechte Winkel, während sie mit allen übrigen schiefe Winkel bildet.

Zur Versinnlichung dieser Begriffe kann ein dünnes Holz- oder Drahtstäbchen dienen, das man gegen den Tisch, die Schultafel oder den Boden hält.

Aufgaben.

1. Welche Linien im Zimmer sind mit dem Fußboden parallel, welche mit einer Wand?
2. Nenne gerade Linien im Schulzimmer, die auf dem Fußboden, und solche, die auf den Wänden senkrecht stehen.
3. Welche Lage gegen einander haben eine verticale Gerade und a) eine verticale, b) eine horizontale, c) eine schiefe Ebene?
4. Welche Lage gegen einander können oder müssen eine horizontale Gerade und a) eine verticale, b) eine horizontale, c) eine schiefe Ebene haben?
5. Welche Lage gegen einander können oder müssen eine schiefe Gerade und a) eine verticale, b) eine horizontale, c) eine schiefe Ebene haben?

§. 181. Zieht man von einem Punkte A (Fig. 144) im Raume eine Senkrechte AA′ auf die Ebene MN, so heißt der Fußpunkt A′ dieser Senkrechten die Projection des Punktes A auf die Ebene, und die Ebene selbst die Projectionsebene.

Liegt der gegebene Punkt in der Projectionsebene, so fällt er mit seiner Projection zusammen.

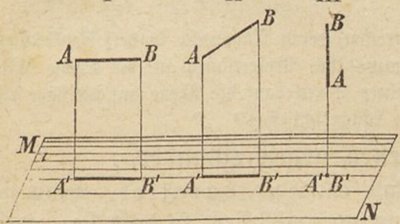


Fig. 144.

Unter der Projection einer Strecke auf eine Ebene versteht man die Strecke zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte auf diese Ebene. Ist A′ die Projection des Punktes A, und B′ die Projection des Punktes B auf die Ebene MN, so ist die Strecke A′ B′ die Projection der Strecke AB auf diese Ebene.

Ist eine Strecke zur Projectionsebene parallel (wie in I), so ist ihre Projection mit der Strecke gleich lang. Ist eine Strecke gegen die Projectionsebene schief (II), so ist ihre Projection kleiner als die Strecke. Ist eine Strecke auf der Projectionsebene senkrecht (III), so ist ihre Projection ein Punkt.

Liegt die gegebene Strecke in der Projectionsebene, so fällt sie mit ihrer Projection zusammen.

§. 182. Es stehe (Fig. 145) AB schief, BC dagegen senkrecht auf der Ebene MN, so ist AC die Projection der AB in der Ebene MN, und BAC heißt ihr Neigungswinkel gegen diese Ebene.

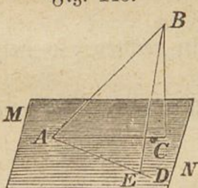


Fig. 145.

Wenn man einen Stab mit dem einen Ende schief gegen den Fußboden hält, so ist seine Neigung gegen den Boden gleich dem Winkel, den er beschreibt, wenn man ihn frei fallen läßt.

Zieht man durch A in der Ebene MN irgend eine Gerade AD, macht AE = AC und zieht BE, so ist diese länger als die Senkrechte AC; in den Dreiecken ABE und ABC sind also zwei Seiten paarweise gleich, dagegen die dritten Seiten ungleich; daher liegt auch der größeren dieser Seiten ein größerer Winkel gegenüber, also Winkel BAE > BAC; d. h.

Unter allen Winkeln, welche eine Gerade mit den durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogenen Geraden bildet, ist ihr Neigungswinkel gegen diese Ebene der kleinste.

Aufgaben.

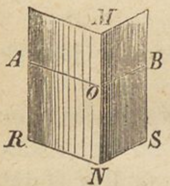
1. Nimm in der Senkrechten AA' (Fig. 144) beliebige Punkte an. Welches ist ihre gemeinschaftliche Projection auf die Ebene MN? Kann man aus der Projection eines Punktes auf eine Ebene auf dessen Lage im Raume schließen?
2. Ziehe (Fig. 144) verschiedene Strecken, deren Endpunkte in den Senkrechten A'A und B'B liegen, und bestimme ihre Projectionen auf die Ebene MN. Kann man aus der Projection einer Strecke auf die Ebene auf die Lage der Strecke im Raume und auf ihre Länge schließen?

2. Lage der Ebenen gegen einander.

§. 183. Zwei Ebenen sind entweder parallel, wenn sie nämlich überall gleichweit von einander abstehen, so dass sie, auch noch so weit erweitert, nie zusammentreffen; oder gegen einander geneigt, wenn sie hinlänglich erweitert zusammentreffen.

Der Abstand zweier paralleler Ebenen ist die Senkrechte, welche von einem Punkte der einen auf die andere gefällt wird.

Fig. 146.



Zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich, hinlänglich erweitert, in einer geraden Linie. Der Winkel AOB (Fig. 146), den die Senkrechten bilden, die man in irgend einem Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen auf dieselbe in den beiden Ebenen errichtet, heißt der Neigungswinkel dieser Ebenen.

Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so heißen sie auf einander senkrecht, sonst schief.

Den Neigungswinkel zweier Ebenen kann man durch die oberen oder unteren Ränder eines aufgeschlagenen Buches versinnlichen.

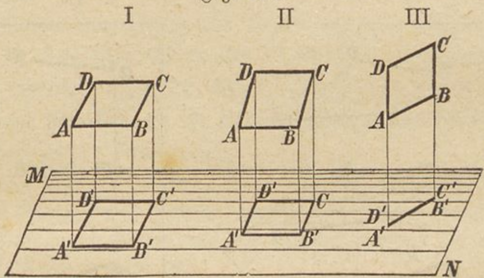
Aufgaben.

1. Welche Ebenen im Schulzimmer sind parallel; welche stehen senkrecht, welche schief auf einander?
2. Können a) zwei verticale, b) zwei horizontale, c) zwei schiefe Ebenen sich schneiden?
3. Welche Lage gegen einander können oder müssen a) zwei verticale Ebenen, b) eine verticale und eine horizontale Ebene, c) eine verticale und eine schiefe Ebene, d) zwei horizontale Ebenen, e) eine horizontale und eine schiefe Ebene, f) zwei schiefe Ebenen haben?

§. 184. Unter der Projection einer geradlinigen Figur auf eine Ebene versteht man die Figur, welche erhalten wird, wenn man die Projectionen der Eckpunkte der gegebenen Figur auf diese Ebene durch Strecken verbindet. In Fig. 147 stellt A'B'C'D' die Projection des Quadrates ABCD auf die Ebene MN dar.

Die Projection eines Quadrates ist ein gleich großes Quadrat (I), oder ein flächenkleineres Parallelogramm (II), oder eine Strecke (III), je nachdem die Ebene des Quadrates mit der Projectionsebene parallel, oder gegen die Projectionsebene schief, oder auf der Projectionsebene senkrecht ist.

Fig. 147.



Ist eine ebene Figur krummlinig, so ist auch ihre Projection auf eine Ebene im allgemeinen krummlinig, und nur dann eine Strecke, wenn die Figur auf der Projectionsebene senkrecht steht.

Was für eine Figur ist die Projection eines Kreises, wenn die Ebene des Kreises a) mit der Projectionsebene parallel, b) gegen die Projectionsebene schief, c) auf der Projectionsebene senkrecht ist?

Sind mehrere Gerade auf einer Ebene senkrecht, so haben alle Figuren, deren entsprechende Punkte in denselben Senkrechten liegen, dieselbe Projection auf diese Ebene. Daraus folgt, dass man aus der Projection einer Figur auf eine Ebene weder auf die Lage noch auf die Größe derselben schließen kann.

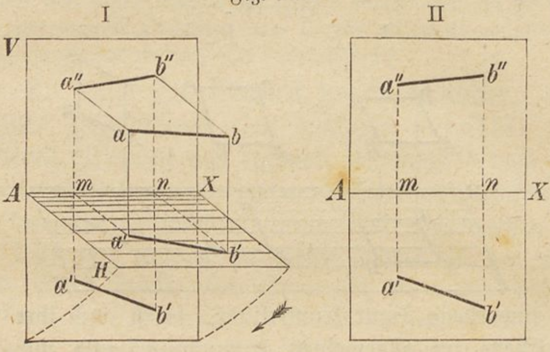
Um nun Figuren geometrisch so darzustellen, dass man aus der Darstellung selbst ihre Lage im Raume und ihre Ausdehnungen entweder unmittelbar entnehmen oder durch einfache Constructionen finden kann, projiciert man dieselben auf zwei sich senkrecht schneidende Ebenen, von denen die eine horizontal, die andere vertical ist. Die Projection auf die horizontale Ebene heißt die Horizontal-Projection oder der Grundriss, die Projection auf die verticale Ebene die Vertical-Projection oder der Aufriss. Die Durchschnittslinie der horizontalen und der verticalen Projectionsebene heißt ihre Achse.

Es seien (Fig. 148) AXH die horizontale, AXV die verticale Projectionsebene, AX ihre Achse und a ein darzustellender Punkt des Raumes. Fällt man von a die Senkrechte aa′ auf die Horizontalebene, so ist ihr Fußpunkt a′ der Grundriss des

Punktes a; fällt man von a die Senkrechte aa″ auf die Verticalebene, so ist ihr Fußpunkt a″ der Aufriss des Punktes a.

Legt man durch die beiden Senkrechten aa′ und aa″ eine Ebene, welche die Achse AX in dem Punkte m senkrecht schneidet, so erscheinen

Fig. 148.



die Projectionen a′ und a″ als die gegenüberliegenden Eckpunkte des Rechteckes aa′ma″.

Ist b′ der Grundriss und b″ der Aufriss eines zweiten Punktes b im Raume, so ist die Strecke a′b′ der Grundriss und die Strecke a″b″ der Aufriss der Strecke ab des Raumes.

Durch den Grundriss und den Aufriss wird eine Strecke der Lage und der Größe nach vollkommen bestimmt. Durch die Construction des Rechteckes a′ma″a erhält man die Lage des Punktes a, durch die Construction des Rechteckes b′nb″b die Lage des Punktes b und durch Verbindung beider die Lage und Länge der Strecke ab.

Was für eine Projection gibt eine Gerade im Raume, wenn dieselbe

a) mit der verticalen, b) mit der horizontalen, c) mit beiden Projections-Ebenen parallel ist; d) auf der verticalen, e) auf der horizontalen Projections-Ebene senkrecht steht; f) in der verticalen, g) in der horizontalen Projections-Ebene liegt?

Da bei Zeichnungen die beiden Projectionen auf ein und dasselbe Papierblatt, also auf eine einzige Ebene zu stehen kommen, so denkt man sich (Fig. 148, I) die horizontale Projections-Ebene um die Achse AX um 90° gedreht, so dass sie in die Erweiterung der verticalen Projections-Ebene fällt. Bei dieser Darstellungsweise erscheint dann der Grundriss unterhalb, der Aufriss oberhalb der Achse (Fig. 148, II). Auch sieht man, dass dabei die beiden Projectionen eines jeden Punktes immer in einer auf der Achse senkrechten geraden Linie liegen, welcher Umstand die Constructionen wesentlich erleichtert.

Eine ebene Figur des Raumes wird auf den Projectionsebenen dargestellt, indem man die Projectionen ihrer Grenzlinien bestimmt.

Ist die Ebene der Figur mit der horizontalen Projectionsebene parallel, so ist der Grundriss mit der Figur congruent, und der Aufriss eine Strecke. Ist die Ebene der Figur mit der verticalen Projectionsebene parallel, so ist der Grundriss eine Strecke, und der Aufriss mit der Figur congruent.

Aufgaben.

1. Zeichne Grund- und Aufriss einer 45*mm* langen Strecke, welche zur horizontalen und verticalen Projectionsebene parallel, und von der ersteren 25*mm*, von der letzteren 33*mm* entfernt ist.

2. Zeichne Grund- und Aufriss eines Quadrates mit der Seite 53*mm*, das im Abstande 38*mm* mit der Horizontalebene parallel, und dessen eine Seite im Abstande 50*mm* mit der Verticalebene parallel ist.

3. Von einem Kreise ist

a) der Grundriss ein Kreis, der Aufriss eine Strecke;

b) der Grundriss eine Strecke, der Aufriss ein Kreis;

c) Grundriss und Aufriss sind Strecken.

d) der Grundriss ist eine Strecke, der Aufriss eine Ellipse;

e) der Grundriss eine Ellipse, der Aufriss eine Strecke;

f) Grundriss und Aufriss sind Ellipsen.

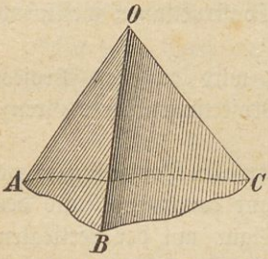
Welche Lage gegen die Projectionsebene hat der Kreis in jedem dieser Fälle?

3. Körperecken.

§. 185. Die gegenseitige Neigung mehrerer Ebenen, welche in einem Punkte zusammentreffen, heißt ein körperlicher Winkel oder eine Ecke; z. B. die Ecke eines Zimmers, eines Kastens. Die Geraden, in denen sich je zwei auf einander folgende Ebenen durchschneiden, nennt man die Kanten, und den Punkt, in welchem alle Ebenen zusammenstoßen, die Spitze oder den Scheitel des Körperwinkels. Ein Winkel, welcher von zwei auf einander folgenden Kanten gebildet wird, heißt ein Kantenwinkel.

Um einen Körperwinkel zu benennen, gibt man entweder bloß den Buchstaben am Scheitel an, oder man nennt auch die Buchstaben an allen Kanten, so jedoch, dass der Buchstabe am Scheitel

Fig. 149.



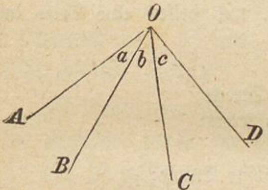
zuerst gesetzt wird. Die Ecke (Fig. 149) heißt die Ecke O, oder die Ecke OABC; O ist die Spitze; OA, OB, OC sind die Kanten, AOB, BOC, COA die Kantenwinkel.

Von zwei Ebenen kann keine Ecke gebildet werden, weil dieselben in einer geraden Linie, und nicht bloß in einem Punkte zusammenstoßen; zur Entstehung einer Ecke sind also wenigstens drei Ebenen erforderlich. Eine Ecke heißt dreiseitig, vierseitig .... je nachdem sie von drei, vier, ... Ebenen gebildet wird.

§. 186. Es sei aus den Kantenwinkeln a, b, c (Fig. 150) eine Körperecke zu bilden.

Man braucht zu diesem Ende nur die Ebenen AOB und DOC

Fig. 150.



so lange um die Geraden OB und OC zu drehen, bis die Schenkel OA und OD in einander fallen. Damit ein Körperwinkel entstehen könne, müssen OA und OD außerhalb der Ebene BOC zusammenfallen, was nur dann möglich ist, wenn die Winkel a und c zusammengenommen größer sind als b. Ebenso läſst sich zeigen, daſs a + b größer als c, und b + c größer als a sein müssen.

In jeder dreiseitigen Ecke ist also die Summe zweier Kantenwinkel größer als der dritte.

Die Drehung der Ebenen AOB und DOC um die Geraden OB und OC kann auf zweierlei Art geschehen, entweder auf der vorderen oder auf der hinteren Seite der Ebene BOC. Die zwei Ecken, die dadurch entstehen, haben nach der Ordnung gleiche Kantenwinkel und gleiche Neigungswinkel der Seitenebenen, und dennoch können sie nicht so in einander gelegt werden, daſs sie sich decken, weil ihre gleichen Bestandtheile im entgegengesetzten Sinne — in der einen Ecke von links nach rechts, in der andern von rechts nach links — auf einander folgen. Die beiden Ecken stehen in derselben Beziehung zu einander, wie ein Gegenstand zu seinem Spiegelbilde, oder wie die rechte Hand zur linken. Zwei solche Ecken heißen symmetrisch.

§. 187. In jeder Ecke ist die Summe der Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.

Denn würden alle Kantenwinkel zusammen vier Rechte betragen, so müssten alle Seitenebenen in eine einzige Ebene hineinfallen und könnten daher keine Ecke bilden.

Wenn mehrere ebene Winkel zusammen 360° oder mehr als 360° betragen, so können sie keine Ecke bilden.

II. Körper.

1. Von den Körpern im allgemeinen.

Eintheilung der Körper.

§. 188. Man unterscheidet eckige und runde Körper; erstere werden von lauter Ebenen eingeschlossen, letztere entweder von ebenen und gekrümmten Flächen, oder von einer einzigen gekrümmten Fläche. So ist der Würfel ein eckiger Körper; eine Walze, eine Kugel sind runde Körper.

Wenn ein Körper auf einer Ebene aufliegt, so heißt diese die Grundfläche; und wenn mit dieser als Grundfläche betrachteten Ebene eine zweite Ebene parallel läuft, so sagt man: der Körper hat zwei parallele Grundflächen. Bei dem Würfel z. B. kann jede Fläche als Grundfläche betrachtet werden; eine Walze hat zwei Grundflächen, nämlich die beiden Kreisflächen. Die übrigen Grenzflächen eines Körpers werden Seitenflächen genannt.

Drei Ebenen bilden eine Ecke, schließen aber noch keinen Raum ein. Damit ein Raum nach allen Seiten abgeschlossen, d. i. damit ein Körper gebildet werde, sind wenigstens vier Ebenen erforderlich.

Die Durchschnittslinie je zweier Grenzebenen wird eine Kante des Körpers genannt.

Die eckigen Körper werden in regelmäßige und unregelmäßige eingetheilt. Regelmäßige oder reguläre Körper heißen diejenigen, bei denen alle Grenzflächen congruente regelmäßige Vielecke und alle Ecken congruent sind; alle übrigen Körper sind unregelmäßig.

Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die Summe aller Grenzflächen desselben. Die Summe der Seitenflächen heißt insbesondere die Seitenoberfläche des Körpers. Die gekrümmte Seitenoberfläche heißt auch Mantelfläche.

Der Raum, welchen die Oberfläche eines Körpers einschließt, heißt dessen Cubikinhalt.

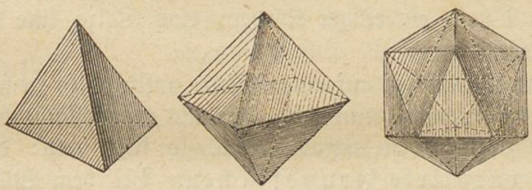
Regelmäßige Körper.

§. 189. Aus dem Satze, dass die Summe aller Kantenwinkel einer Ecke kleiner als 360° sein muss (§. 187), folgt, dass es nur fünf regelmäßige Körper geben kann.

Denn der Winkel eines regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieckes beträgt 60°; von solchen Winkeln können drei, vier oder auch fünf eine Ecke bilden; aus sechs oder mehr als sechs solchen Winkeln aber kann keine Ecke entstehen, da ihre Summe 360° oder mehr als 360° beträgt. Von gleichseitigen Dreiecken können daher nur drei regelmäßige Körper begrenzt werden, nämlich das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder.

Fig. 151.

I II III

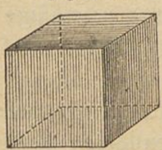


Das Tetraeder (Fig. 151, I) wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je drei in einer Ecke zusammenstoßen; es hat 4 Ecken und 6 Kanten.

Das Oktaeder (Fig. 151, II) wird von acht gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen, von denen je vier eine Ecke bilden; es hat 6 solche Ecken und 12 Kanten.

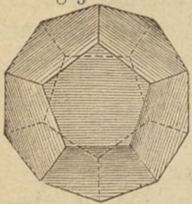
Das Ikosaeder (Fig. 151, III) wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt, deren je fünf eine Ecke bilden; es hat 12 Ecken und 30 Kanten.

Fig. 152.



Der Winkel eines regelmäßigen Viereckes (Quadrates) ist ein rechter; von solchen Winkeln können nur drei in einer Ecke zusammentreffen; aus vier oder mehr als vier rechten Winkeln kann keine Ecke gebildet werden. Es gibt daher einen einzigen von Quadraten begrenzten Körper; er heißt Hexaeder, Cubus oder Würfel. Das Hexaeder (Fig. 152) wird von sechs Quadraten eingeschlossen und hat 8 dreiseitige Ecken und 12 Kanten.

Fig. 153.



Der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes beträgt 108°; von solchen Winkeln können nur drei eine Ecke bilden. Es gibt daher einen einzigen von regelmäßigen Fünfecken begrenzten regelmäßigen Körper. Dieser heißt das Dodekaeder (Fig. 153) und hat 12 Seitenflächen, 20 dreiseitige Ecken und 30 Kanten.

Im regelmäßigen Sechsecke ist jeder Winkel 120°. Von solchen Winkeln kann keine Ecke gebildet werden, da schon drei zusammen 360° betragen. Eben so wenig kann aus den Winkeln eines regelmäßigen Vieleckes von mehr als sechs Seiten eine Ecke entstehen.

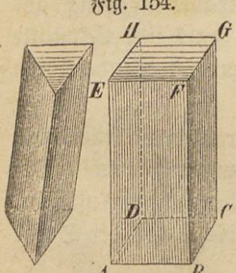
Es gibt daher nur fünf regelmäßige Körper.

Das Prisma.

§. 190. Unter den unregelmäßigen Körpern kommen besonders zwei Arten sehr häufig vor; solche, welche sich über der Grundfläche in durchaus gleicher Weite ausdehnen, bei denen daher die Seitenkanten parallel sind, sie heißen Prismen; und solche, welche über der Grundfläche in eine Spitze zusammenlaufen, bei denen nämlich alle Seitenkanten in einem und demselben Punkte zusammentreffen, sie heißen Pyramiden.

Ein Prisma (Fig. 154) ist ein Körper, welcher von zwei congruenten und parallel gestellten Vielecken und von so vielen Parallelogrammen, als eines der Vielecke Seiten hat, begrenzt wird.

Fig. 154.



Man kann sich ein Prisma ABCDEFGH dadurch entstanden denken, dass sich eine geradlinige Figur ABCD aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in unveränderter Größe so fortbewegt, dass ihre Eckpunkte gerade und mit einander parallele Linien beschreiben.

Die Grundflächen eines Prisma sind congruente und parallel liegende Vielecke, die Seitenflächen sind Parallelogramme. Die Seitenkanten eines Prisma sind unter einander gleich und parallel. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prisma.

Nimmt man auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundfläche Rücksicht, so ist das Prisma ein senkrechtes oder ein schiefes, je nachdem die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht oder schief aufliegen. In einem senkrechten Prisma ist die Höhe gleich einer Seitenkante; die Seitenflächen sind Rechtecke.

Sieht man auf die Anzahl der Seitenkanten, so heißt das Prisma drei-, vier- oder mehrseitig, je nachdem es drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat.

Ein Prisma, dessen alle Grenzflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped. Dieses ist, wie jedes Prisma, entweder senkrecht oder schief.

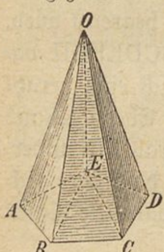
Ein Prisma, dessen alle Grenzflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Ein rechtwinkliges Parallelepiped muss immer auch ein senkrechtes sein.

Ein Prisma, das von lauter Quadraten eingeschlossen wird, heißt ein Würfel, Cubus. Jeder Würfel ist ein rechtwinkliges Parallelepiped; es hat lauter gleiche Kanten und congruente Grenzflächen.

Die Pyramide.

§. 191. Eine Pyramide (Fig. 155) ist ein Körper, der von irgend einem Vielecke und von so vielen Dreiecken, als das Vieleck Seiten hat, begrenzt wird. Man kann sich eine Pyramide OABCDE dadurch entstanden denken, dass sich eine geradlinige Figur ABCDE aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in stetig abnehmender Größe so fortbewegt, dass ihre Eckpunkte gerade und in einem Punkte zusammentreffende Linien beschreiben.

Fig. 155



Die Grundfläche einer Pyramide ist irgend ein Vieleck, die Seitenflächen sind immer Dreiecke. Der Punkt, in welchem alle Seitenflächen zusammenstoßen, heißt der Scheitel oder die Spitze, die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche die Höhe der Pyramide.

Eine Pyramide, in welcher die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, und der Fußpunkt der Höhe in den Mittelpunkt der Grundfläche fällt, heißt eine senkrechte Pyramide; jede andere ist schief. In einer senkrechten Pyramide sind alle Seitenkanten gleich, und alle Seitenflächen congruent.

Eine Pyramide ist drei-, vier- oder mehrseitig, je nachdem sie drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat.

Der Cylinder.

§. 192. Ein Cylinder (Fig. 156) ist ein Körper, welcher von zwei gleichen parallelen Kreisen und von einer gekrümmten Fläche begrenzt wird. Ein Cylinder kann als ein Prisma betrachtet werden, dessen Grundflächen Kreise sind. Man kann sich einen Cylinder dadurch entstanden denken, dass sich eine Kreisfläche aus ihrer Ebene heraus mit ihrer ursprünglichen Lage parallel in unveränderter Größe so fortbewegt, dass der Mittelpunkt stets in derselben Geraden bleibt.

Fig. 156.

Die gekrümmte Seitenfläche des Cylinders heißt der Mantel desselben. Die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Kreisflächen verbindet, wird die Achse, und der Abstand der beiden Kreisflächen die Höhe des Cylinders genannt.

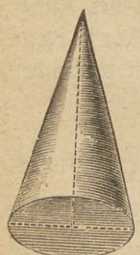
Steht die Achse auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Cylinder ein senkrechter, sonst ein schiefer. Einen senkrechten Cylinder kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich ein Rechteck um eine seiner Seiten herumdreht. In einem senkrechten Cylinder stellt die Achse zugleich die Höhe vor.

Ist in einem senkrechten Cylinder die Achse dem Durchmesser der Grundfläche gleich, so heißt er ein gleichseitiger Cylinder.

Der Kegel.

§. 193. Ein Kegel (Fig. 157) ist ein Körper, der von einem Kreise und von einer in einen Punkt auslaufenden gekrümmten Fläche begrenzt wird. Ein Kegel kann als eine Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche ein Kreis ist. Man kann sich einen Kegel dadurch entstanden denken, dass sich eine Kreisfläche aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in stetig bis zu einem Punkte abnehmender Größe so fortbewegt, dass der Mittelpunkt stets in derselben Geraden bleibt.

Fig. 157.



Die gekrümmte Seitenfläche des Kegels nennt man den Mantel, und den Punkt, in welchen sie zusammenläuft, den Scheitel oder die Spitze des Kegels. Die Mantelfläche eines Kegels ist so beschaffen, dass jede Strecke, welche von der Spitze zum Umfange der Grundfläche gezogen wird, ganz in diese gekrümmte Fläche fällt. Eine solche Strecke heißt eine Seite des Kegels. Die Strecke, welche die Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet, heißt die Achse, und die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche die Höhe des Kegels.

Ein Kegel, dessen Achse auf der Grundfläche senkrecht steht, heißt ein senkrechter; jeder andere ein schiefer. Einen senkrechten Kegel kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten herumdreht. In einem senkrechten Kegel ist die Achse gleich der Höhe und alle Seiten sind einander gleich.

Ist in einem senkrechten Kegel die Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich, so heißt er ein gleichseitiger Kegel.

Die Kugel.

§. 194. Eine Kugel (Fig. 158) ist ein Körper, welcher von einer einzigen gekrümmten Fläche so begrenzt wird, dass jeder Punkt der Oberfläche von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit absteht.

Fig. 158.

Dieser innerhalb der Kugel liegende Punkt heißt der Mittelpunkt derselben. Eine Strecke, welche vom Mittelpunkte bis an die Oberfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Strecke, welche von einem Punkte der Oberfläche durch den Mittelpunkt bis zu dem entgegengesetzten Punkte der Oberfläche geht, wird ein Durchmesser der Kugel genannt.

Man kann sich jede Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um den Durchmesser entstanden denken. Dieser Durchmesser heißt dann die Achse, und dessen Endpunkte sind die Pole der Kugel. Die einzelnen Lagen der sich drehenden Kreislinie heißen Meridiane und die Kreislinien, welche die einzelnen Punkte der sich drehenden Kreislinie beschreiben, Parallelkreise.

2. Geometrische Darstellung und ebene Schnitte der Körper.

§. 195. Unter der Projection eines Körpers auf eine Ebene versteht man das Gebilde, welches erhalten wird, wenn man die Linien und Flächen des Körpers auf diese Ebenen projiciert.

Zeichnet man die Projectionen eines Körpers auf eine horizontale und auf eine verticale Ebene d. i. seinen Grundriss und Aufriss, so sind durch diese die Flächen und Linien bestimmt, von denen der Cubikinhalt des Körpers abhängt. Der Grundriss und der Aufriss eines Körpers enthalten demnach die geometrische Darstellung seines Cubikinhaltes.

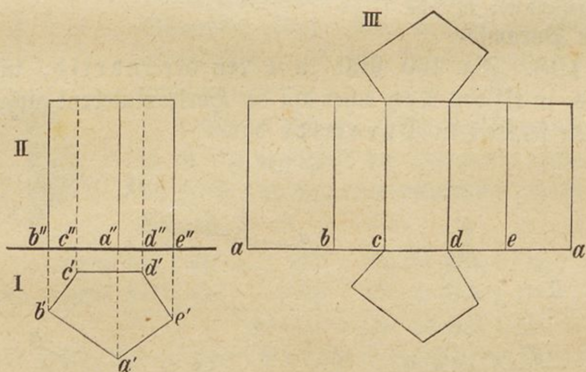
Um die Oberfläche eines Körpers geometrisch darzustellen, construiert man alle Grenzflächen desselben zusammenhängend in einer einzigen Ebene. Eine solche Zeichnung heißt das Netz des Körpers.

Die Körpernetze dienen nicht bloß zur Bestimmung der Oberfläche, sondern auch, indem man sie gehörig ausschneidet und zusammenfügt, zur Anfertigung von Modellen der Körper.

Das Prisma.

§. 196. Fig. 159 stellt in I den Grundriss, in II den Aufriss, in III das Netz eines senkrechten fünfseitigen Prisma dar, dessen Grundfläche auf der Horizontalebene ruht, und von welchem eine Seitenfläche mit der Verticalebene parallel ist.

Fig. 159.



Der Grundriss ist mit der Grundfläche des Prisma congruent und stellt daher die Größe der Grundfläche dar, der Aufriss gibt die Höhe des Körpers.

Gib aus dem Grund- und Aufrisse a) die sichtbaren, b) die gedeckten Eckpunkte des Prisma an.

Gib aus den zwei Projectionen die Kanten des Prisma an, welche a) als sichtbare Strecken, b) als Punkte, c) als gedeckte Strecken erscheinen.

Gib die Flächen des Prisma an, welche a) als sichtbare Flächen, b) als Strecken, c) als gedeckte Flächen erscheinen.

Dasselbe wird in Beziehung auf die Projectionen der später folgenden Körper anzugeben sein.

Um das Netz des Prisma zu erhalten, zeichne man die Parallelogramme (Rechtecke), welche die Seitenoberfläche bilden, so neben einander, dass je zwei eine gemeinschaftliche Seite haben, und construiere dann über und unter einem dieser Parallelogramme die Grundflächen.

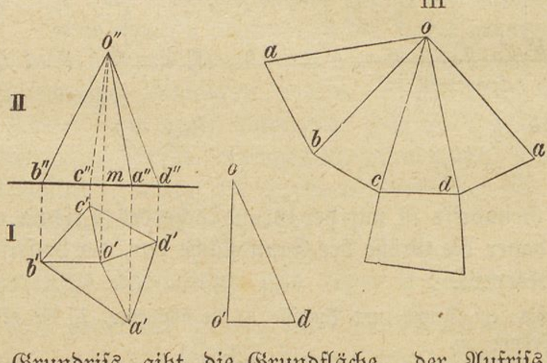
§. 197. Wird ein Prisma durch eine Ebene durchschnitten, welche mit der Grundfläche parallel ist, so ist die Schnittfläche, wie aus der Entstehung des Prisma hervorgeht, mit der Grundfläche congruent. Durch jeden solchen Durchschnitt zerfällt das Prisma in zwei Prismen, welche unter einander gleich oder ungleich sind, je nachdem der Schnitt durch die Mitte einer Seitenkante, oder außerhalb derselben angebracht wird. Legt man durch zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Seitenkanten eine Ebene, so heißt der dadurch entstehende Schnitt ein Diagonalschnitt des Prisma. Ein Parallelepiped wird durch jeden Diagonalschnitt in zwei gleiche dreiseitige Prismen getheilt.

Die Veranschaulichung dieser und der weiter angeführten Schnitte geschieht mit Hilfe zerlegbarer Modelle.

Die Pyramide.

§. 198. Fig. 160 stellt in I den Grundriss, in II den Aufriss, in III das Netz einer auf der Horizontalebene aufgestellten vierseitigen senkrechten Pyramide dar.

Fig. 160.



Der Grundriss gibt die Grundfläche, der Aufriss die Höhe der Pyramide.

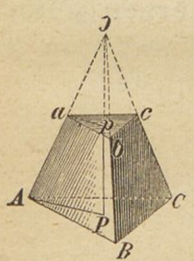
Jede Seitenkante od kann als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes dargestellt werden, dessen Katheten der Grundriss o′d′ dieser Kante und die Höhe o″m der Pyramide ist.

Das Netz einer Pyramide erhält man, wenn man zuerst die Seitendreiecke neben einander so construiert, dass sie den Scheitel gemeinschaftlich haben, und an eines dieser Dreiecke unten die Grundfläche anlegt.

§. 199. Wird eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durch eine Ebene durchschnitten, so ist der Schnitt, da die Pyramide nach oben gleichförmig abnimmt, der Grundfläche ähnlich. Die Pyramide zerfällt durch einen solchen Querschnitt in zwei Theile, eine kleinere Pyramide und einen zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltenen Körper, den man eine abgekürzte Pyramide oder einen Pyramidenstumpf nennt.

Ein Pyramidenstumpf ABCabc (Fig. 161) ist daher der Unterschied zwischen zwei Pyramiden OABC und Oabc, deren Grundflächen die untere und die obere Grundfläche der abgekürzten Pyramide sind, und deren gemeinschaftlicher Scheitel O in dem Durchschnitte der verlängerten Seitenkanten des Stumpfes liegt. Die Entfernung der beiden Grundflächen ist die Höhe des Pyramidenstumpfes.

Fig. 161.



Es sei OP die Höhe der Pyramide OABC, so ist Op die Höhe der Pyramide Oabc und pP die Höhe des Pyramidenstumpfes. Zieht man Ap und ap, so ist

wegen AP ∥ ap . . . OP : Op = OA : Oa,
und wegen AB ∥ ab . . . AB : ab = OA : Oa; daher

OP : Op = AB : ab, d. h.

Die Höhen der zwei Pyramiden, deren Unterschied ein Pyramidenstumpf ist, verhalten sich wie zwei gleichliegende Seiten der Grundflächen des Pyramidenstumpfes.

Wenn die Höhe eines Pyramidenstumpfes und zwei gleichliegende Seiten der unteren und der oberen Grundfläche desselben bekannt sind, so lassen sich daraus die Höhen der beiden Pyramiden finden, deren Unterschied der Pyramidenstumpf ist.

Bezeichnet man durch A und a die Höhen der zwei Pyramiden, durch h die Höhe des Pyramidenstumpfes, durch S und s zwei gleichliegende Seiten der Grundflächen des letzteren, so ist nach dem vorhergehenden Satze $A : a = S : s$.

Da sich in jeder Proportion die Differenz der ersten zwei Glieder zur Differenz der letzten zwei Glieder so verhält, wie das erste Glied zum dritten oder wie das zweite zum vierten, so hat man

$$A - a : S - s = A : S, \qquad A - a : S - s = a : s,$$

oder, weil $A - a = h$ ist,

$$h : S - s = A : S, \qquad h : S - s = a : s$$

woraus $A = \frac{h \,.\, S}{S - s}$, $\quad a = \frac{h \,.\, s}{S - s}$ folgt.

Drücke diese zwei Formeln mit Worten aus.

Ist z. B. $S = 6\,cm$, $s = 4\,cm$ und $h = 5\,cm$, so ist

$$A = \frac{5 \,.\, 6}{6 - 4} = 15\,cm, \qquad a = \frac{5 \,.\, 4}{6 - 4} = 10\,cm.$$

Wie construiert man das Netz eines senkrechten Pyramidenstumpfes?

Die regelmäßigen Körper.

§. 200. Es gibt nur fünf regelmäßige Körper (§. 189). Diese sind:

a) Das Tetraeder (der Vierflächner).

Fig. 162.

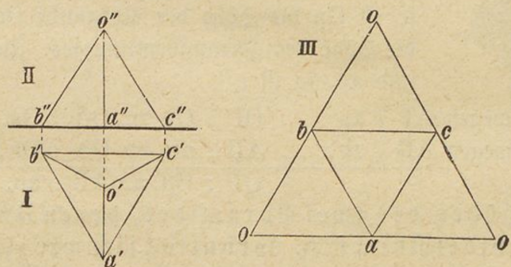


Fig. 162 I ist der Grundriss, II der Aufriss, III das Netz eines Tetraeders.

Um das Netz eines Tetraeders zu erhalten, construiere man mit der Kante des Tetraeders ein gleichseitiges Dreieck, und sodann über jede Seite wieder ein gleichseitiges Dreieck.

b) Das Hexaeder (der Sechsflächner, Würfel, Cubus).

Fig. 163.

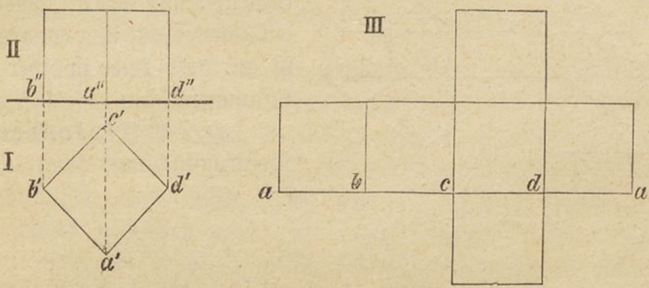


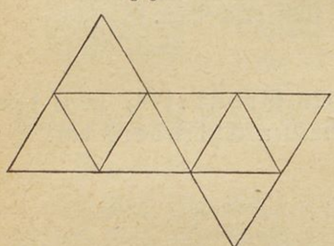
Fig. 163 I stellt den Grundriss, II den Aufriss, III das Netz eines Würfels dar.

Das Netz des Würfels erhält man, wenn man die vier Quadrate, welche die Seitenoberfläche bilden, neben einander zeichnet und dann an den entgegengesetzten Seiten eines dieser Quadrate noch zwei Quadrate construiert.

c) Das Oktaeder (der Achtflächner).

Bei diesem und den folgenden regelmäßigen Körpern beschränken wir uns auf die Construction der Netze.

Fig. 164.



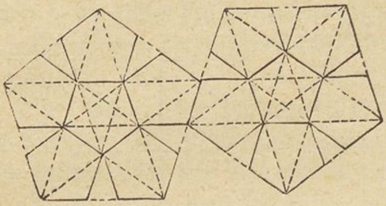
Das Netz eines Oktaeders (Fig. 164) wird erhalten, wenn man mit der Kante des Oktaeders zuerst das Netz eines Tetraeders zeichnet und dann an dieses ein zweites mit ihm congruentes Netz so anlegt, dass beide Netze eine Seite gemeinschaftlich haben.

Wird ein Oktaeder durch eine Ebene geschnitten, welche durch drei Eckpunkte geht, so muss dieselbe auch noch durch einen vierten Eckpunkt gehen, und man erhält als Schnittfläche ein Quadrat. Das Oktaeder kann demnach in zwei gleiche Pyramiden mit quadratischer Grundfläche zerlegt werden.

d) Das Dodekaeder (der Zwölfflächner).

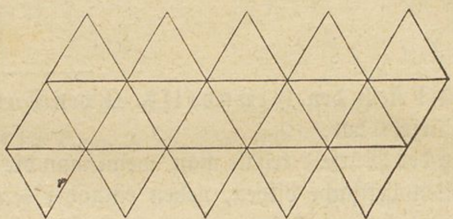
Um das Netz des Dodekaeders (Fig. 165) zu construieren, zeichne man mit der Kante des Dodekaeders ein regelmäßiges Fünfeck, beschreibe über den Seiten desselben wieder regelmäßige Fünfecke (wobei man sich mit Vortheil der Verlängerung der Diagonalen bedient), und lege an dieses Netz ein zweites mit ihm congruentes so an, dass beide in einer Seite zusammenstoßen.

Fig. 165.



e) Das Ikosaeder (der Zwanzigflächner).

Fig. 166.

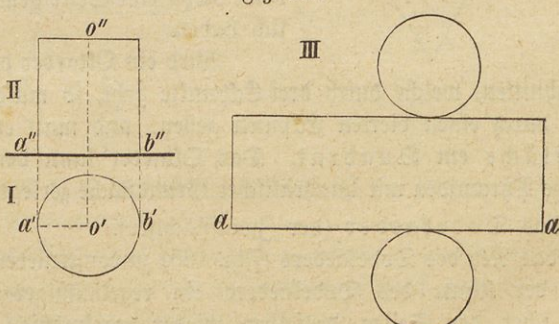


Das Netz eines Ikosaeders (Fig. 166) erhält man, wenn man auf eine Gerade die Kante des Ikosaeders 5mal aufträgt, über diesen Strecken nach oben und unten gleichseitige Dreiecke construiert, dann alle Scheitel auf einer Seite durch eine Strecke verbindet, und längs derselben, nachdem sie verlängert wird, wieder gleichseitige Dreiecke zeichnet, so dass ihrer auf jeder Seite fünf erscheinen.

Der Cylinder.

§. 201. Fig. 167 stellt in I den Grundriss, in II den Aufriss, in III das Netz eines senkrechten Cylinders dar.

Fig. 167.

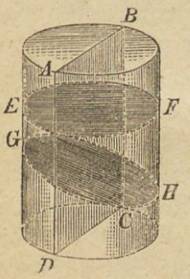


Der Grundriss gibt die Grundfläche, der Aufriss die Höhe des Cylinders an.

Was für Gebilde sind der Grundriss und Aufriss eines Cylinders, der mit seiner Mantelfläche auf der Horizontalebene ruht, und dessen Achse mit der Verticalebene parallel ist?

Denkt man sich die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders vom Cylinder trennbar (z. B. als Papierhülle) und nach der Richtung einer Seite durchschnitten, so bildet dieselbe, wenn man sie auf eine Ebene ausbreitet, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist. Um daher das Netz eines senkrechten Cylinders zu construieren, zeichne man ein Rechteck, dessen Grundlinie $3\frac{1}{7}$mal so groß ist als der Durchmesser der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist, und beschreibe sodann zwei der Grundfläche gleiche Kreise, von denen der eine die Grundlinie, der andere die gegenüberliegende Seite des Rechteckes berührt.

Fig. 168.



§. 202. Die Beschaffenheit des Schnittes eines Cylinders durch eine Ebene hängt von der Lage dieser Ebene ab. Durchschneidet man (Fig. 168) einen Cylinder parallel mit der Achse, so ist die Schnittfläche ein Rechteck ABCD, oder ein schiefes Parallelogramm, je nachdem der Cylinder senkrecht oder schief ist. Wird ein senkrechter Cylinder durch eine auf die Achse senkrechte Ebene geschnitten, so ist der Schnitt EF ein Kreis; ist aber die Achse gegen die schneidende Ebene schief, so ist der Schnitt GH eine Ellipse.

Der Kegel.

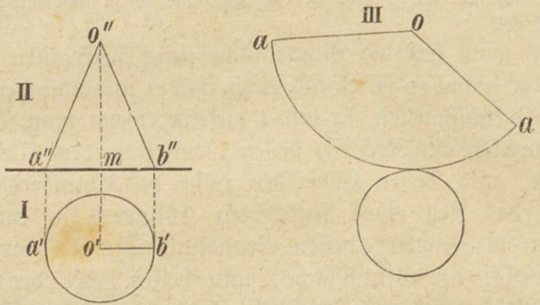
§. 203. Fig. 169 I stellt den Grundriss, II den Aufriss, III das Netz eines senkrechten Kegels dar.

Der Grundriss gibt den Halbmesser der Grundfläche, der Aufriss die Höhe und die Seite des Kegels.

Wird die Mantelfläche des Kegels auf eine Ebene ausgebreitet, so erscheint sie als ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser die Seite des Kegels, und dessen Bogenlänge der Umfang der Grundfläche des Kegels ist. Um daher das Netz eines senkrechten Kegels zu erhalten, zeichne man mit der Seite als Halbmesser einen Kreisausschnitt, dessen Bogenlänge $3\frac{1}{7}$mal so groß ist als der Umfang der Grundfläche des

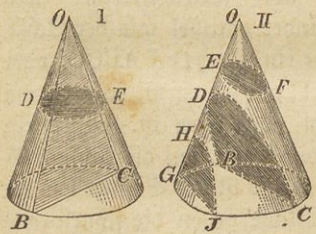
Kegels und construiere dann einen der Grundfläche gleichen Kreis, welcher den Bogen des Kreisausschnittes berührt.

Fig. 169.



§. 204. Besonders wichtig sind die Schnitte, welche entstehen, wenn ein senkrechter Kegel von einer Ebene durchschnitten wird. Geht der Schnitt durch die Achse (Fig. 170, I), so ist er ein gleichschenkliges Dreieck ABC; steht er auf der Achse senkrecht, oder was dasselbe ist, geht er parallel mit der Grundfläche, so ist er ein Kreis DE. Steht aber (Fig. 170, II) die schneidende Ebene auf der Achse schief, so sind drei Fälle möglich. Ist die schneidende Ebene mit einer Seite des Kegels parallel, so entsteht die Parabel BCD; trifft die schneidende Ebene alle Seiten des Kegels, so ist die Durchschnittsfigur eine Ellipse EF; trifft die Schnittebene nicht alle Seiten des Kegels und ist sie auch keiner Seite desselben parallel, so ist der Schnitt eine Hyperbel GHJ.

Fig. 170.

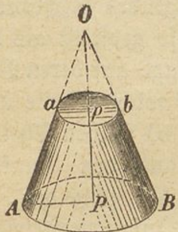


Man kann sich diese Schnitte sehr gut versinnlichen, wenn man ein kegelförmiges zugespitztes Trinkglas nimmt, und dasselbe etwa bis zur Hälfte mit Wasser füllt. Wenn die Achse des Glases vertical steht, so wird der Schnitt der horizontalen Wasseroberfläche mit der Fläche des Glases ein Kreis sein; wird das Glas oben geschlossen, damit das Wasser nicht herausfließen kann, und dann so weit geneigt, bis die schneidende Wasseroberfläche mit der Seite des Kegels parallel wird, so ist der Schnitt eine Parabel; neigt man das Glas weniger, so entsteht die Ellipse; neigt man es mehr, so ist der Schnitt eine Hyperbel.

Die krummen Linien, welche durch den Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene entstehen, heißen mit einem gemeinschaftlichen Namen Kegelschnittslinien.

§. 205. Wird (Fig. 171) ein Kegel durch eine Ebene ab geschnitten, welche mit der Grundfläche parallel ist, so zerfällt er in zwei Körper, einen kleineren Kegel, und einen zwischen zwei parallelen Kreisflächen enthaltenen Körper, welcher ein abgekürzter Kegel oder ein Kegelstumpf genannt wird. Ein Kegelstumpf ABba ist daher der Unterschied zweier Kegel, welche die Grundflächen des Stumpfes zu ihren Grundflächen haben, und deren Scheitel der Punkt ist, in welchem die erweiterte Mantelfläche des Stumpfes zusammenläuft. Die Entfernung Pp der beiden Kreisflächen ist die Höhe des Kegelstumpfes. Eine Strecke, welche von dem Umfange der oberen Grundfläche längs der Mantelfläche bis zum Umfang der unteren Grundfläche gezogen wird, nennt man eine Seite des abgekürzten Kegels, z. B. aA.

Fig. 171.



Der Kegelstumpf steht mit dem Pyramidenstumpfe in derselben Beziehung, wie der Kegel mit der Pyramide (§. 193). Wie sich beim Pyramidenstumpf zwei gleichliegende Seiten der beiden Grundflächen verhalten, so verhalten sich beim Kegelstumpf die Halbmesser der beiden Grundkreise. Wenn daher die Höhe h des Kegelstumpfes und die Halbmesser R und r seiner Grundflächen bekannt sind, so kann man daraus mit Rücksicht auf §. 199 die Höhen A und a der beiden Kegel bestimmen, deren Unterschied der Kegelstumpf ist; man erhält

$$A = \frac{h \,.\, R}{R - r}, \text{ und } a = \frac{h \,.\, r}{R - r}.$$

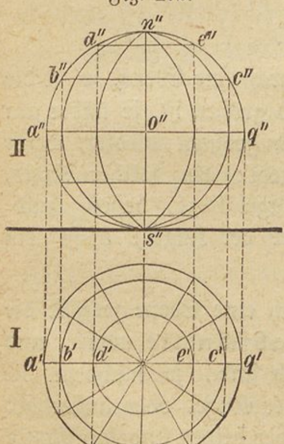
Wie wird das Netz eines senkrechten Kegelstumpfes construiert?

Die Kugel.

§. 206. Fig. 172 I stellt den Grundriss, II den Aufriss einer Kugel dar.

Der Grund- und der Aufriss einer Kugel sind Kreise, deren Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Steht die Achse der Kugel auf der Horizontalebene senkrecht, so erscheinen im Grundriss alle Meridiane als Durchmesser, im Aufriss einer als Kreis, einer als Durchmesser

Fig. 172.

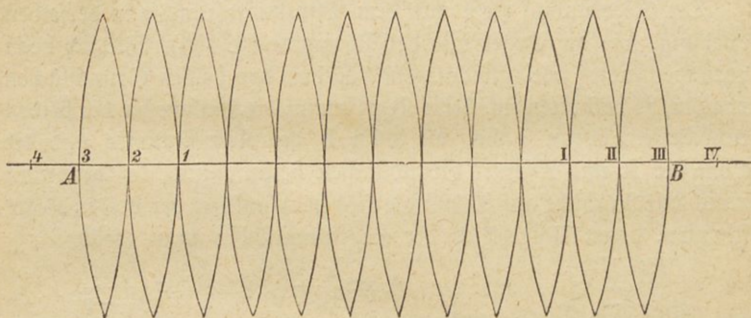


und alle übrigen als Ellipsen; die Parallelkreise erscheinen im Grundriss als concentrische Kreise, im Aufriss als parallele Sehnen.

Die Oberfläche der Kugel lässt sich, da sie doppelt gekrümmt ist, nicht in eine Ebene ausbreiten; daher kann von der Kugelfläche auch kein vollkommen genaues Netz construiert werden. Ein angenähertes Netz der Kugel (Fig. 173) erhält man durch folgendes Verfahren:

Man theile eine Strecke AB, welche $3\frac{1}{7}$mal so groß ist als der Durchmesser der Kugel, in 12 gleiche Theile und trage auf deren Verlängerungen über A und B hinaus noch je 9 solche Theile auf. Beschreibt man dann mit einem Halbmesser von 10 solchen Theilen aus den Punkten 1, 2, 3, ..., und ebenso aus den Punkten I, II, III, . . . Kreisbogen, welche die Gerade AB schneiden, so erhält man 12 gleiche Zweiecke, welche gehörig zusammengebogen ziemlich genau die Kugelfläche geben.

Fig. 173.



§. 207. Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so ist die Schnittfläche ein Kreis, welcher um so größer ist, je näher am Mittelpunkte der Schnitt gemacht wird. Am größten wird er, wenn die Schnittfläche durch den Mittelpunkt geht; ein solcher Kreis, dessen Mittelpunkt im Mittelpunkte der Kugel liegt, dessen Halbmesser also so groß ist als der Halbmesser der Kugel, heißt ein größter Kreis der Kugel.

Durch den Schnitt einer Kugel durch eine Ebene zerfällt die Kugel in zwei Theile, welche man Kugelabschnitte nennt, und welche unter einander gleich oder ungleich sind, je nachdem die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel oder außerhalb desselben geht; im ersten Falle heißt jeder der beiden Kugelabschnitte eine Halbkugel. Die gekrümmte Oberfläche eines Kugelabschnittes heißt eine Kugelmütze oder Calotte.

Wird eine Kugel durch zwei parallele Ebenen durchschnitten, so heißt der zwischen ihnen befindliche Theil der Kugel eine Kugelschicht, und der dazu gehörige Theil der Kugeloberfläche eine Kugelzone (Gürtel).

III. Oberfläche der Körper.

1. Oberfläche der eckigen Körper.

§. 208. Um die Oberfläche eines eckigen Körpers zu finden, braucht man nur den Flächeninhalt jeder Grenzebene für sich zu bestimmen und alle gefundenen Flächen zu addieren.

Oberfläche eines Prisma.

Bei einem Prisma berechne man zuerst die Seitenflächen als Parallelogramme; ihre Summe gibt die Seitenoberfläche; dazu addiert man noch die doppelte Grundfläche.

Bei dem senkrechten Prisma bildet die Seitenoberfläche, wenn man sich dieselbe auf eine Ebene abgewickelt denkt, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche, und dessen Höhe der Seitenkante des Prisma gleich ist. Man findet daher die Seitenoberfläche eines senkrechten Prisma, indem man den Umfang der Grundfläche mit einer Seitenkante multipliciert.

Oberfläche einer Pyramide und eines Pyramidenstumpfes.

Bei der Pyramide bestimmt man zuerst die Seitenflächen als Dreiecke und addiert zu ihrer Summe die Grundfläche.

Ist die Pyramide eine senkrechte, so braucht man nur ein Seitendreieck zu berechnen und dessen Fläche mit der Anzahl der Seitenkanten zu multiplicieren; dazu wird noch die Grundfläche addiert.

Bei dem Pyramidenstumpf bestimmt man zuerst die Seitenflächen als Trapeze, und addiert zu ihrer Summe die beiden Grundflächen.

Oberfläche eines regelmäßigen Körpers.

Bei den regelmäßigen Körpern wird nur eine Grenzebene berechnet und ihre Fläche mit der Anzahl der Grenzebenen multipliciert.

§. 209. Aufgaben.

1. Wie groß ist die Oberfläche eines Würfels, dessen Seite a) 27 *cm*, b) 2 *m* 4 *dm*, c) 1·35 *m* beträgt?

2. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 398·535 □ *cm*; wie groß ist eine Seite desselben?

3. Es soll ein würfelförmiges, oben offenes Gefäß von 0·38 *m* Kantenlänge angefertiget werden; wie viel □ *m* Kupferblech braucht man?

4. Berechne die Oberfläche folgender rechtwinkliger Parallelepipede:

a)	Länge 24 *dm*,	Breite 18 *dm*,	Höhe 36 *dm*;
b)	„ 1·26 *m*,	„ 1·05 *m*,	„ 0·84 *m*;
c)	„ 12 *m* 1 *dm* 4 *cm*,	„ 5 *m* 7 *dm* 5 *cm*,	„ 8 *m* 3 *dm*.

5. Wie groß ist die Seitenoberfläche eines fünfseitigen Prisma, in welchem die Grundlinien der einzelnen Seitenparallelogramme 10·5 *dm*, 8·2 *dm*, 9·4 *dm*, 11·8 *dm*, 9·4 *dm*, und die bezüglichen Höhen 24·7 *dm*, 25·2 *dm*, 24·4 *dm*, 24·2 *dm*, 24·8 *dm* sind?

6. Eine vierseitige Schachtel, welche 3 *dm* lang, 1·5 *dm* breit und 1·6 *dm* hoch ist, soll mit buntem Papier überzogen werden; wie viel □ *dm* Papier braucht man dazu?

7. Wie groß ist die Oberfläche eines vierkantigen Holzes von 2·3 *m* Länge, 0·8 *m* Breite und 0·2 *m* Dicke?

8. Ein viereckiges Gefäß von Blech ist 0·6 *m* lang, 0·5 *m* breit und 0·4 *m* hoch; wie viel □ *m* Blech ist daran, wenn das Gefäß oben unbedeckt ist?

9. Die Seitenoberfläche einer 4·2 *m* hohen senkrechten Säule, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 0·4 *m* ist, soll einen Ölanstrich erhalten; wie viel kostet derselbe, wenn für das □ *m* 75 Kr. gezahlt werden?

10. Wie hoch kommt eine Kiste zu stehen, die 2 *m* lang, 1·2 *m* breit und 1·3 *m* hoch ist, wenn 1 □ *m* mit 80 kr. bezahlt wird?

11. Eine Grube, welche 3 *m* lang, 2·1 *m* breit und 1·8 *m* tief ist, soll auf dem Boden mit Steinplatten belegt, an den Seiten mit Dielen geschützt, und mit einem Deckel von gewöhnlichen Brettern versehen werden. Wie viel □ *m* Steinplatten, Dielen und Bretter sind dazu nöthig?

12. Die Grundfläche eines senkrechten Prisma ist ein regelmäßiges Sechseck, die Höhe gleich 1 *m* 8 *dm*; wie groß ist die Oberfläche, wenn eine Seite der Grundfläche 1 *m* 1 *dm* ist?

13. Die Grundfläche einer senkrechten Pyramide ist ein Quadrat von 6 *dm* Seitenlänge, die Seitenhöhe beträgt 12·37 *dm*; wie groß ist ihre Oberfläche?

14. Ein Thurmdach hat die Form einer senkrechten vierseitigen Pyramide von 9·6 *m* Umfang der Grundfläche und 10·2 *m* Seitenhöhe; wie viel □*m* Blech sind zur Eindeckung erforderlich, wenn für Verschnitt und Falze 6% hinzugerechnet werden?

15. Die Grundflächen eines senkrechten Pyramidenstumpfes sin Quadrate mit den Umfängen 1 *m* 6 *dm* und 1 *m* 2 *dm*, die Höhe eines Seitentrapezes beträgt 2 *m* 8 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

16. Die Grundflächen eines senkrechten Pyramidenstumpfes sind gleichseitige Dreiecke mit den Umfängen 1·74 *m* und 1·11 *m*, die Höhe eines Seitentrapezes beträgt 0·84 *m*; wie groß ist die Oberfläche?

17. Die große Pyramide bei Ghizeh in Ägypten hat 145 *m* Höhe, ihre untere Grundfläche ist ein Quadrat, dessen Seite 187 *m* beträgt, die obere ist auch ein Quadrat von 4 *m* Seitenlänge; wie groß ist die Seitenoberfläche?

18. Bestimme die Oberfläche eines Oktaeders, dessen jede Seite 8 *dm* ist.

19. Ein Würfel und ein Ikosaeder haben 2 *dm* 2 *cm* zur Kante; wie verhalten sich ihre Oberflächen?

2. Oberfläche der runden Körper.

Oberfläche eines Cylinders.

§. 210. Um die Oberfläche eines Cylinders zu erhalten, berechnet man die beiden Grundflächen als Kreise, dann die krumme Mantelfläche, und bringt diese Flächen in eine Summe.

In einem senkrechten Cylinder findet man die Mantelfläche, indem man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe multipliciert. Denn die Mantelfläche läſst sich in ein Rechteck abwickeln, welches mit dem Cylinder gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche des Cylinders gleich ist.

Oberfläche eines Kegels und eines Kegelstumpfes.

§. 211. Die Oberfläche eines Kegels findet man, indem man zuerst die Grundfläche, dann die Mantelfläche berechnet und beide addiert.

Bei einem senkrechten Kegel wird die Mantelfläche gefunden, indem man den Umfang der Grundfläche mit der halben

Seite des Kegels multipliciert. Denn, wenn man sich die Mantelfläche des senkrechten Kegels abgewickelt denkt, so erscheint sie als ein Kreisausschnitt, dessen Bogen dem Umfange der Grundfläche, und dessen Halbmesser der Seite des Kegels gleich ist; nun ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes gleich der Länge des Bogens multipliciert mit dem halben Halbmesser; folglich ist die Mantelfläche eines senkrechten Kegels gleich dem Umfange der Grundfläche multipliciert mit der halben Seite.

Die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes wird gefunden, indem man die Summe der Umfänge seiner Grundflächen mit der halben Seite desselben multipliciert. Denkt man sich nämlich in dem Mantel des Stumpfes unzählig viele Seiten gezogen, so zerfällt derselbe in Figuren, die man als ebene Trapeze ansehen kann; es ist daher die Mantelfläche des Kegelstumpfes gleich der Summe aus den Flächen aller dieser Trapeze, also der Summe ihrer Parallelseiten, d. i. der Summe der Umfänge der beiden Grundkreise, multipliciert mit der halben Höhe der Trapeze, d. i. mit der halben Seite des Kegelstumpfes.

Oberfläche einer Kugel.

§. 212. Die Oberfläche einer Kugel ist, wie jedoch hier noch nicht bewiesen werden kann, gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises derselben.

Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel durch r und die Oberfläche derselben durch o, so ist $r^2\pi$ der Flächeninhalt eines größten Kreises, folglich $o = 4r^2\pi$.

Man kann daher auch sagen:

Die Oberfläche einer Kugel wird gefunden, indem man das 4fache Quadrat des Halbmessers mit der Ludolfischen Zahl multipliciert.

Wenn man umgekehrt aus der bekannten Oberfläche einer Kugel den Halbmesser derselben finden will, darf man nur die Oberfläche durch die 4fache Ludolfische Zahl dividieren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers vor; zieht man daraus die Quadratwurzel, so erhält man den Halbmesser selbst.

Es ist demnach

$$r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}.$$

Heißt R der Halbmesser und O die Oberfläche einer zweiten Kugel, so ist auch

$$O = 4R^2\pi, \text{ daher}$$

$$O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2; \text{ d. h.}$$

die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

§. 213. Aufgaben.

1. Berechne die Oberfläche folgender senkrechter Cylinder:

a) Durchmesser der Grundfläche			5 *dm*, Höhe	8 *dm*;
b) „	„	„	0·25 *m*, „	1·4 *m*;
c) „	„	„	1 *m* 6 *dm* 4 *cm*, „	2 *m* 5 *dm* 8 *cm*.

2. Ein gleichseitiger Cylinder hat 4 *m* zur Seite; man suche seine Mantelfläche.

3. Wie verhält sich die Mantelfläche eines gleichseitigen Cylinders zur ganzen Oberfläche desselben?

4. Die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders ist 62·8 □ *dm*, der Durchmesser der Grundfläche 4 *dm*; wie groß ist die Höhe?

5. Wie groß ist die Oberfläche eines gleichseitigen Cylinders, dessen Achse 1 *m* 2 *dm* beträgt?

6. Wie groß ist die Oberfläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe 2·28 *m* ist, und dessen Grundfläche 1·52 *m* zum Durchmesser hat?

7. Wie groß ist die Oberfläche eines senkrechten Cylinders, in welchem die Höhe 3 *dm* 4 *cm* und a) der Umfang der Grundfläche 7 *dm* 8 *cm*, b) der Inhalt der Grundfläche 8 □ *dm* beträgt?

8. Wie viel □ *dm* Eisenblech braucht man für eine Ofenröhre, welche 5 *m* lang ist und 2 *dm* im Durchmesser hat?

9. Ein cylindrisches oben offenes Gefäß ist von außen anzustreichen; der Halbmesser der Grundflächen ist 3·2 *dm*, die Höhe 5·4 *dm*; wie viel □ *dm* sind anzustreichen?

10. Wie oft wird sich eine Walze um ihre Achse drehen müssen, wenn ein Stück Feld von 20 Ar ganz überwalzt werden soll, und die Walze 1·6 *m* lang ist und 0·3 *m* im Durchmesser hat?

---

11. In einem senkrechten Kegel ist

a) der Durchm. der Grundfläche				4 *m*, eine Seite	6 *m*;
b) „	„	„	„	5·6 *dm*, „ „	8·4 *dm*;
c) „	„	„	„	1 *m* 1 *dm* 7 *cm*, „ „	3 *m* 2 *cm*;

wie groß ist der Mantel, und wie groß ist die ganze Oberfläche?

12. Suche die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, dessen Grundfläche 11·8 *cm* im Halbmesser hat, und dessen Seite 15·5 *cm* beträgt.

13. Bestimme die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Seite 1 *m* 4 *dm* beträgt.

14. Wie verhält sich die Mantelfläche eines gleichseitigen Kegels zur ganzen Oberfläche desselben?

15. Suche die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, dessen Höhe 3 *m* 9 *dm* ist, und dessen Grundfläche 8 *dm* zum Halbmesser hat.

16. Die Seite eines senkrechten Kegels ist 3·33 *dm*, die Mantelfläche 1759·296 *cm*; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche? ($\pi = 3{\cdot}1416$.)

17. Wie viel □ *m* Rinde hat ein Fichtenbaum von 9·2 *m* Seitenhöhe, dessen Umfang am Stammende 2 *m* beträgt?

18. Ein zugespitzter Trichter hat 2 *dm* Durchmesser und 2·4 *dm* Länge; wie viel □ *dm* Blech ist daran?

19. Die Seite eines senkrechten Kegelstumpfes ist 6 *dm*, die Durchmesser der Grundflächen betragen 9 *dm* und 7 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

20. Bestimme die Oberfläche eines senkrechten Kegelstumpfes, dessen Seite 1·5 *m* ist und dessen Grundflächen 2·8 □ *m* und 2·2 □ *m* Inhalt haben.

---

21. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser a) 2 *m*, b) 3·9 *dm*, c) 5 *dm* 4 *cm* 8 *mm* beträgt?

22. Wie groß ist die Oberfläche der Kugel, wenn der Umfang eines größten Kreises 995·885 *mm* beträgt?

23. Eine Kugel, welche 3·5 *dm* im Halbmesser hat, soll vergoldet werden; wie groß ist die zu vergoldende Oberfläche?

24. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, deren Oberfläche 8 □ *dm* beträgt?

25. Die Oberfläche einer Kugel beträgt 66 □ *dm* 3·96 □ *cm*; wie groß ist der Durchmesser?

26. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn man diese als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser 859·0909 geogr. Meilen beträgt? ($\pi = 3{\cdot}141592$.)

27. Der Durchmesser eines Erdglobus ist 4 *dm*; wie verhält sich dessen Oberfläche zur Oberfläche der Erde?

28. Wie groß müsste der Durchmesser eines Erdglobus angenommen werden, auf welchem 1 *Mm* als 1 *mm* erscheinen soll?

29. Von der Oberfläche der Erde sind 0·73 Wasser und 0·27 festes Land. Wie viel □*cm* kommen auf einem Globus von 65 *cm* Durchmesser auf das Wasser und wie viel auf das feste Land?

30. Man will einen Luftball machen, dessen Durchmesser 1·2 *m* beträgt; wie viel Meter Taffet, dessen Breite 92 *cm* ist, wird man dazu brauchen?

31. Eine Kuppel, welche die Form einer Halbkugel hat, soll mit Kupferblech gedeckt werden; wie viel Blech ist dazu erforderlich, wenn der Durchmesser der Kugel 1 *m* 3 *dm* ist, und wie viel kostet diese Bedeckung, wenn ein □*m* zu 8·6 fl. gerechnet wird?

32. Die Seite eines Würfels und der Durchmesser einer Kugel sind gleich, nämlich 38·5 *cm*; um wie viel ist die Oberfläche des Würfels größer als die der Kugel?

33. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches der Oberfläche einer Kugel von 1·1 *m* Durchmesser gleich ist?

34. Ein senkrechter Kegel hat 0·8 *m* Höhe und eine Grundfläche von 0·3 *m* Halbmesser; wie groß muss der Durchmesser einer Kugel sein, deren Oberfläche gleich ist der Mantelfläche jenes Kegels?

35. Ein Kuppelgewölbe ruhet auf einem cylindrischen Mauerwerke; der innere Durchmesser der Kuppel, welche eine Halbkugel vorstellt, ist 12 *m*, die Höhe der Kuppel vom Boden an gerechnet 22 *m*, folglich die Höhe der cylindrischen Mauer 16 *m*. Wie viel Kalk wird man brauchen, um das Innere dieses ganzen Mauerwerkes auszuweißen, wenn man $1\frac{1}{2}$ Kilogramm Kalk braucht, um 1 □*m* Fläche auszuweißen?

36. Eine Ehrenpforte, die mit vollem Bogen geschlossen ist, soll mit einem farbigen Stoffe überzogen werden; die Weite im Lichten ist 3 *m*, die ganze Weite 5 *m*, die Höhe bis zum Schlussteine 5·1 *m* und die Breite der Pforte 2 *m*. Wie viele Meter Stoff von 95 *cm* Breite wird man zum Überziehen brauchen?

IV. Cubikinhalt der Körper.

§. **214.** Da jede Größe nur durch eine Größe derselben Art gemessen werden kann, so kann auch ein Körper nur durch einen Körper gemessen werden. Um daher den Cubikinhalt eines

Körpers zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Einheit des Cubikmaßes an, und untersucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Körper enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die Maßzahl des Körpers.

Als Einheit des Cubikmaßes wird ein Würfel (Cubus) angenommen, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, also ein Meter, ein Decimeter, . . . beträgt, und der dann beziehungsweise Cubikmeter (⊠*m*), Cubikdecimeter (⊠*dm*), . . . heißt.

Einen Körper messen heißt also untersuchen, wie viel Cubikmeter, Cubikdecimeter u. s. w. darin enthalten sind. Es würde zu mühsam und in vielen Fällen unausführbar sein, diese Untersuchung durch wirkliches Neben- und Aufeinanderlegen der Cubikeinheit vorzunehmen; einfacher wird der Cubikinhalt eines Körpers mittelbar aus dem Maße der Linien oder Flächen, von denen die Größe desselben abhängt, durch Rechnung gefunden.

Zwei Körper, welche denselben Cubikinhalt haben, heißen inhaltsgleich.

§. 215. Läßt man einen Körper durch die Parallelbewegung eines ebenen Gebildes entstehen, so hängt sein Cubikinhalt ab:

1. von der ursprünglichen Größe des sich bewegenden Gebildes, d. i. von der Grundfläche des Körpers;
2. von der Größe dieses Gebildes während des Verlaufs der ganzen Bewegung, und
3. von der Entfernung der letzten Stellung des Gebildes von der ursprünglichen Stellung, d. i. von der Höhe des Körpers.

Bleibt die Größe der Grundfläche während der Parallelbewegung unverändert, wie bei dem Prisma und dem Cylinder, oder nimmt sie stetig ab, bis sie in einem Punkt verschwindet, wie bei der Pyramide und dem Kegel, so hängt dann der Cubikinhalt bloß von der Grundfläche und von der Höhe ab. Daraus folgt:

Zwei Prismen, zwei Cylinder, zwei Pyramiden oder zwei Kegel sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Der Cubikinhalt einer Kugel hängt bloß von ihrem Halbmesser ab.

Zwei Kugeln sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben.

1. Cubikinhalt der eckigen Körper.

Cubikinhalt eines Würfels.

§. 216. Ist die Länge der Seite eines Würfels 2 *dm*, so beträgt die Grundfläche $2 \times 2 = 4 \square$ *dm*. Es lassen sich demnach auf der Grundfläche $4 \boxtimes$ *dm* auflegen, und zwar bis zu einer Höhe von 1 *dm*, und von da bis zur Höhe von 2 *dm* liegt noch eine Schichte von $4 \boxtimes$ *dm*; also enthält der Würfel

$$4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \boxtimes dm.$$

Um dieses zu versinnlichen, schneide man sich 8 kleine und gleiche Würfel aus, und lege diese gehörig neben und auf einander.

Man überzeugt sich auf gleiche Weise, dass ein Würfel, dessen
Seite 3 *dm* ist, $3 \times 3 \times 3 = 27 \boxtimes dm$,
" 4 *m* " $4 \times 4 \times 4 = 64 \boxtimes m$,
" 5 *cm* " $5 \times 5 \times 5 = 125 \boxtimes cm$, u. s. w. enthält.

Daraus folgt:

Der Cubikinhalt eines Würfels wird gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite (Kante) dreimal als Factor setzt oder zur dritten Potenz erhebt.

Darum pflegt man auch im Rechnen die dritte Potenz einer Zahl den Cubus derselben zu nennen.

Wenn man umgekehrt aus dem Cubikinhalte eines Würfels die Länge einer Seite finden will, so braucht man nur jene Zahl zu suchen, welche dreimal als Factor gesetzt den Cubikinhalt gibt, d. h. man braucht nur aus dem gegebenen Cubikinhalte die Cubikwurzel auszuziehen.

Bezeichnet s die Länge einer Seite und k den Cubikinhalt eines Würfels, so ist

$$k = s^3 \text{ und } s = \sqrt[3]{k}.$$

Heißt S die Seite und K der Cubikinhalt eines zweiten Würfels, so ist $K = S^3$, daher

$$K : k = S^3 : s^3; \text{ d. h.}$$

die Cubikinhalte zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Seiten.

§. 217. Ein Würfel, dessen Seite 10 *dm* beträgt, hat

$$10 \times 10 \times 10 = 1000 \boxtimes dm.$$

Ein solcher Würfel ist nun 1 Cubikmeter; also ist

$$1 \boxtimes m = 1000 \boxtimes dm.$$

Eben so folgt

$$1 \boxtimes dm = 1000 \boxtimes cm,$$
$$1 \boxtimes cm = 1000 \boxtimes mm.$$

1 Cubikdecimeter heißt als Hohlmaß ein Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

§. 218. Aufgaben.

1. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Würfels, dessen Seite a) 12 *dm*, b) 2 *m* 3 *dm*, c) = 0·575 *m* ist?

2. Berechne a) die Oberfläche, b) den Inhalt eines Würfels, dessen Seite a) 123 *mm*, b) 1 *m* 5 *dm* 3 *cm* beträgt.

3. Wie groß ist die Kante eines Würfels, dessen Inhalt a) 2 $\boxtimes$ *m*, b) 6451·776 $\boxtimes$ *cm* beträgt?

4. Eine Seitenfläche des Würfels beträgt 3 $\square$ *m* 61 $\square$ *dm*; wie groß ist der Cubikinhalt?

5. Ein würfelförmiges Gefäß hat 4·8 *dm* innere Weite; wie viel Liter fasst es?

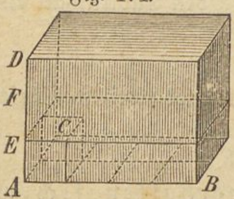
6. An einem Würfel von Granit beträgt jede Seite 1·4 *m*; wie viel wiegt der Würfel, wenn ein $\boxtimes$ *dm* Granit 2·7 Kilogr. wiegt?

7. Es soll ein Würfel gemacht werden, welcher so groß ist als zwei andere Würfel, deren Seiten 5 *dm* 4 *cm* und 4 *dm* 9 *cm* betragen; wie lang wird eine Seite desselben genommen werden müssen?

Cubikinhalt eines Prisma überhaupt.

§. 219. Es sei der Cubikinhalt eines senkrechten Parallelepipeds (Fig. 174), an welchem die Länge AB = 4 *dm*, die Breite AC = 2 *dm*, und die Höhe AD = 3 *dm* ist, zu bestimmen. Da die Grundfläche 4 × 2 = 8 $\square$ *dm* enthält, so läſst sich darauf ein $\boxtimes$ *dm* 8mal auflegen; das Parallelepiped enthält also bis zu einer Höhe von 1 *dm* eine Schichte von 8 $\boxtimes$ *dm*; zu der Höhe EF gehört eine neue Schichte von 8 $\boxtimes$ *dm*, und zu der Höhe FD wieder eine Schichte von 8 $\boxtimes$ *dm*. Das ganze Parallelepiped hat daher 3mal 8 oder 4 × 2 × 3 = 24 $\boxtimes$ *dm*. — Allgemein lassen sich auf der Grundfläche jedesmal so viele Cubikeinheiten aufstellen, als dieselbe Quadrateinheiten enthält, und es erscheinen so viele solcher Schichten von Würfeln über einander, als die Höhe Längeneinheiten enthält. Man muss daher, um den

Fig. 174.



Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds zu erhalten, die Grundfläche mit der Höhe, oder was gleichviel ist, die Länge, Breite und Höhe mit einander multiplicieren. Daraus folgt:

Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds wird gefunden, indem man die Maßzahlen seiner Länge, Breite und Höhe, oder indem man die Maßzahlen seiner Grundfläche und Höhe multipliciert.

Kürzer sagt man gewöhnlich:

Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus der Länge, Breite und Höhe oder dem Producte aus der Grundfläche und Höhe.

Bezeichnet g die Maßzahl der Grundfläche, h die Maßzahl der Höhe und k den Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, so ist

$$k = g \cdot h, \qquad g = \frac{k}{h}, \qquad h = \frac{k}{g}.$$

§. 220. 1. Jedes senkrechte nicht rechtwinklige Parallelepiped ABCDEFGH (Fig. 175) kann in ein rechtwinkliges Parallelepiped ABIKEFLM verwandelt werden, welches mit ihm dieselbe Höhe und gleiche Grundfläche hat; man braucht nur durch eine Seitenkante BF auf die gegenüberstehende Seitenfläche eine senkrechte Ebene zu führen, und den dadurch auf einer Seite abgeschnittenen Theil auf der entgegengesetzten Seite hinzuzusetzen. Es ist daher auch der Cubikinhalt eines senkrechten nicht rechtwinkligen Parallelepipeds gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Fig. 175.

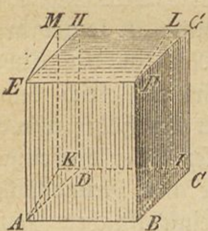
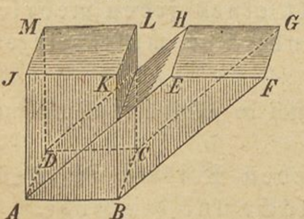


Fig. 176.

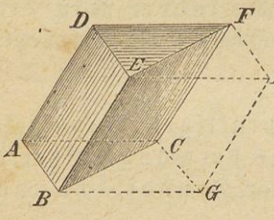


2. Da zwei Prismen, welche gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe haben, inhaltsgleich sind (§. 215), so läßt sich jedes schiefe Parallelepiped ABCDEFGH (Fig. 176) in ein senkrechtes Parallelepiped ABCDJKLM über derselben Grundfläche und von gleicher Höhe verwandeln. Folglich ist

auch der Cubikinhalt des schiefen Parallelepipeds dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe gleich.

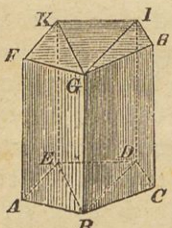
§. 221. 1. Zu jedem dreiseitigen Prisma ABCDEF (Fig. 177) läſst sich ein Parallelepiped construieren, welches doppelt so groß ist als das dreiseitige Prisma und mit ihm gleiche Höhe hat; man braucht nur durch die Seitenkanten BE und CF Ebenen zu legen, welche mit den gegenüberstehenden Seitenflächen parallel sind, und die beiden Grundflächen zu erweitern. Nun ist der Cubikinhalt des Parallelepipeds gleich der Grundfläche multipliciert mit der Höhe, also der Cubikinhalt des halben Parallelepipeds gleich der halben Grundfläche multipliciert mit der Höhe. Das halbe Parallelepiped aber ist das dreiseitige Prisma, die halbe Grundfläche des Parallelepipeds ist die Grundfläche des dreiseitigen Prisma; daher ist auch der Cubikinhalt eines jeden dreiseitigen Prisma gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Fig. 177.



2. Jedes mehrseitige Prisma ABCDEFGHIK (Fig. 178) läſst sich durch Diagonalschnitte in lauter dreiseitige Prismen zerlegen. Nun ist der Cubikinhalt jedes dreiseitigen Prisma gleich seiner Grundfläche multipliciert mit der Höhe; also die Summe der Cubikinhalte aller dieser dreiseitigen Prismen gleich der Summe aller Grundflächen multipliciert mit der gemeinschaftlichen Höhe. Die Summe aller jener Cubikinhalte aber gibt den Cubikinhalt des ganzen mehrseitigen Prisma, die Summe jener Grundflächen gibt die Grundfläche des ganzen Prisma; somit ist der Cubikinhalt eines jeden mehrseitigen Prisma gleich der Grundfläche multipliciert mit der Höhe.

Fig. 178.



Die vorhergehenden Sätze lassen sich in folgenden allgemeinen Satz zusammenfassen:

Der Cubikinhalt eines jeden Prisma ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

§. 222. Aufgaben.

1. Berechne den Cubikinhalt folgender rechtwinkliger Parallelepipede:

a) Länge 35 *cm*, Breite 24 *cm*, Höhe 56 *cm*;

b) Länge 1·28 *dm*, Breite 1·14 *dm*, Höhe 0·59 *dm*;

c) Länge 1 *m* 6 *dm* 5 *cm*, Breite 1 *m* 3 *dm* 8 *cm*, Höhe 2 *m* 8 *dm* 2 *cm*.

2. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Prisma, dessen Grundfläche 5 □ *dm* 46 □ *cm* und dessen Höhe 2 *dm* 9 *cm* ist?

3. Die Grundfläche eines 6 *dm* hohen Prisma ist ein Quadrat, dessen Seite 5 *dm* 4 *cm* beträgt; wie groß ist der Cubikinhalt?

4. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt eines quadratischen Prisma, dessen Grundfläche 0·1521 □ *m* und dessen Höhe 0·8 *m* beträgt?

5. Der Inhalt eines Prisma ist 5·85 ⊠ *m*, die Höhe 1·3 *m*; wie groß ist die Grundfläche?

6. In einem rechtwinkligen Parallelepiped ist die Grundfläche 7 *dm* 3 *cm* lang und 2 *dm* 4 *cm* breit; wie groß ist die Höhe, wenn der Inhalt 64 ⊠ *dm* 820 ⊠ *cm* beträgt?

7. Die Höhe eines Prisma ist 1 *m* 5 *dm*, die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von 1 *m* Seitenlänge; wie groß ist der Cubikinhalt?

8. Ein Prisma, dessen Grundfläche 4 □ *dm* und dessen Höhe 8 *dm* ist, soll in einen Würfel verwandelt werden; wie groß wird die Seite des Würfels sein?

9. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Getreidekastens, bei welchem die Länge 2 *m*, die Breite 1 *m* 3 *dm* und die Höhe 1 *m* 4 *dm* ist; wie viel Hektoliter Getreide kann derselbe aufnehmen?

10. Ein viereckiger Wasserbehälter ist 4 *m* 4 *dm* lang, 1 *m* breit, 7 *dm* tief; wie viel Hektoliter fasst er?

11. Ein Wasserbehälter ist, von außen gemessen, 2 *m* lang, 8 *dm* breit und 5 *dm* hoch; wie viel Liter kann er fassen, wenn die äußeren Wände und der Boden 1 *dm* dick sind?

12. Welche Höhe muss man einer Kiste geben, die bei 9 *dm* Länge und 5 *dm* Breite 135 ⊠ *dm* fassen soll?

13. Die Grundfläche eines prismatischen Gefäßes ist ein Rechteck von 2 *m* Länge und 1·2 *m* Breite; wie tief muss das Gefäß sein, um 12 Hektoliter zu fassen?

14. Die Länge einer Mauer ist 21 *m*, die Höhe 2 *m* 5 *dm*, die Dicke 9 *dm*; wie viel Ziegel braucht man, um diese Mauer aufzuführen, wenn ein Ziegel sammt Verbindungsmittel 30 *cm* lang, 15 *cm* breit und 7 *cm* hoch anzunehmen ist?

15. Eine Mauer ist 21 *m* lang, 8 *dm* dick und 8 *m* hoch; welchen Druck übt dieselbe auf die Unterlage aus, wenn 1 ⊠*m* Mauerwerk 1634 Kilogramm wiegt?

16. Ein rechteckiger Kasten von 3 *m* Länge, 2 *m* Breite und 1·2 *m* Höhe wird mit Steinkohlen gefüllt; wie groß ist das Gewicht dieser Steinkohlen, wenn 1 ⊠*m* davon 1275 Kilogramm wiegt?

17. 1 ⊠*cm* reines Wasser wiegt 1 Gramm; wie viel wiegt ein mit Wasser gefülltes Blechkästchen von 1·5 *dm* Länge, 1·2 *dm* Breite und 8 *cm* Höhe, wenn das leere Blechkästchen 155 Gramm wiegt?

18. Der Dachraum einer Scheune bildet ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche 5·6 *m* zur Grundlinie, 5 *m* zur Höhe hat, und dessen Höhe (Länge des Daches) 8·4 *m* beträgt; wie viel Kilogramm Heu kann dieser Raum aufnehmen, wenn 1 ⊠*m* Heu 114 Kilogramm wiegt?

19. Eine 3560 *m* lange und 6 *m* breite Straße soll mit Kies 1·2 *dm* hoch beschüttet werden; wie viel ⊠*m* Kies braucht man dazu und wie viel Fuhren sind nöthig, wenn der Wagenkasten 1·6 *m* lang, 7 *dm* breit und 5 *dm* tief ist?

20. Ein Balken ist 4 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei gleiche Trapeze, in denen die Parallelseiten 4 *dm* und 3 *dm* sind, und die Höhe 1·5 *dm* beträgt; wie groß ist der Inhalt?

21. Aus 29 ⊠*m* gebranntem Kalk erhält man 100 ⊠*m* gelöschten Kalk; wie viel ⊠*m* gebrannten Kalk braucht man, um eine Grube von 3·2 *m* Länge, 2·2 *m* Breite und 1·5 *m* Tiefe mit gelöschtem Kalke zu füllen?

22. Um einen Keller anzubringen, muss die Erde in einer Länge von 9 *m* 4 *dm* durchaus 7 *m* 4 *dm* breit und 2 *m* 8 *dm* tief ausgegraben werden; wie viel Wägen Erde gibt dieses, wenn die Wagentruhe 1 *m* 8 *dm* lang, 1 *m* breit und 0·3 *m* tief ist, und wenn 10 ⊠*m* feste Erdmasse beim Ausgraben 18 ⊠*m* lockeres Erdreich geben?

23. Ein Holzhändler hat vertragsmäßig 450 □*m* Holz von 80 *cm* Scheitlänge zu liefern; bei der Ablieferung findet sich, dass

die Scheite nur 72 *cm* lang sind; wie viel □*m* 80 *cm* langes Holz muss er nachliefern?

24. Ein Kasten von 1·2 *m* Länge und 0·7 *m* Breite war zum Theil mit Wasser gefüllt; als man in denselben einen Stein von unregelmäßiger Form legte, stieg das Wasser um 1 *dm* und bedeckte den Stein; wie groß ist der Inhalt des Steines?

25. Ein sechsseitig behauener Baumstamm von durchaus gleicher Dicke ist 6 *m* lang, jede Seite an der Grundfläche beträgt 2 *dm*; wie groß ist der Cubikinhalt?

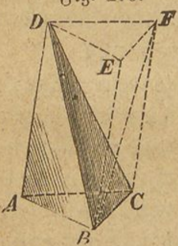
26. Aus einem runden Baumstamme von 0·8 *m* Durchmesser und 2 *m* 2 *dm* Höhe wird ein regelmäßig sechsseitiges Prisma geschnitten; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt desselben?

27. Ein Haus soll 14 *m* lang, 8 *m* breit und 9 *m* hoch sein; die Mauer wird 8 *dm* dick mit Ziegeln aufgeführt, deren jeder mit Inbegriff des verbindenden Kalkes 30 *cm* lang, 15 *cm* breit, 8 *cm* dick ist; in den Mauern befinden sich 36 Fenster, jedes 2 *m* hoch und 1·2 *m* breit, und 2 Thüren von 2·3 *m* Höhe und 1·6 *m* Breite. Wie viele Ziegel sind zum Aufführen dieses Mauerwerkes nöthig?

Cubikinhalt einer Pyramide und eines Pyramidenstumpfes.

§. 223. Jede dreiseitige Pyramide kann als der dritte Theil eines Prisma betrachtet werden, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Fig. 179.



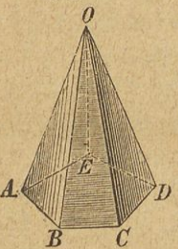
Man nehme in der dreiseitigen Pyramide DABC (Fig. 179) B als Scheitel, somit das Dreieck ACD als Grundfläche an, und lege an dieselbe eine zweite Pyramide BCDF hinzu, welche den nämlichen Scheitel B hat, und deren Grundfläche CDF die frühere ACD zu einem Parallelogramme ergänzt; diese zwei Pyramiden haben dieselbe Höhe, und sind daher, weil sie auch gleiche Grundflächen haben, inhaltsgleich (§. 215). Die zwei betrachteten Pyramiden bilden zusammen eine vierseitige Pyramide BACFD, deren Scheitel in B liegt und deren Grundfläche ACFD ist. Legt man an diese noch eine dreiseitige Pyramide BDEF, deren Scheitel in B liegt und deren Grundfläche das mit ABC congruente und parallel gestellte Dreieck DEF ist, und vergleicht dieselbe mit der gegebenen Pyramide DABC, worin man D als Scheitel und ABC als Grundfläche annimmt, so sieht man, dass die beiden Pyramiden gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben, dass sie demnach ebenfalls inhaltsgleich sind. Diese drei gleichen dreiseitigen Pyramiden bilden zusammen das dreiseitige Prisma ABCDEF, welches mit der

Pyramide DABC gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat; die gegebene dreiseitige Pyramide ist somit wirklich der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von derselben Grundfläche und Höhe.

Da der Cubikinhalt eines Prisma gleich ist dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe, so ist *der Cubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.*

§. 224. Jede *mehrseitige Pyramide* OABCDE (Fig. 180) läſst sich in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen, welche mit ihr dieselbe Höhe haben. Der Cubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich der Grundfläche multipliciert mit dem dritten Theile der Höhe; daher ist der Cubikinhalt aller dreiseitigen Pyramiden, d. i. *der Cubikinhalt der mehrseitigen Pyramide* gleich der Summe der Grundflächen aller dreiseitigen Pyramiden, d. i. *der Grundfläche* der mehrseitigen Pyramide, *multipliciert mit dem dritten Theile der gemeinschaftlichen Höhe.*

Fig. 180.



Es gilt also allgemein der Satz:

Der Cubikinhalt einer Pyramide ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theil der Höhe.

§. 225. Um den *Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes* zu finden, bestimme man die Inhalte der beiden Pyramiden, deren Unterschied der Pyramidenstumpf ist, und subtrahiere den Inhalt der kleineren Pyramide von dem der gröſseren.

Kürzer gestaltet sich die Berechnung nach folgendem Satze:

Der Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes wird gefunden, indem man die Summe der beiden Grundflächen und der Quadratwurzel aus dem Producte derselben mit dem dritten Theile der Höhe multipliciert.

Annäherungsweise findet man den *Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes*, indem man die halbe Summe der beiden Grundflächen mit der Höhe des Stumpfes multipliciert.

§. 226. *Aufgaben.*

1. Berechne den Cubikinhalt folgender Pyramiden:

a) Grundfläche 13 □ *dm*, Höhe 8 *dm*;

b) Grundfläche 2·34 □ *dm*, Höhe 6·3 *dm*;

c) Grundfläche 1 □ *m* 85 □ *dm*, Höhe 5 *dm* 6 *cm*.

2. Der Inhalt einer Pyramide ist 0·6264 ⊠ *m*, die Höhe 0·9 *m*; wie groß ist die Grundfläche?

3. Der Inhalt einer Pyramide ist 9 ⊠ *m* 261 ⊠ *dm*, die Grundfläche 4 □ *m* 41 □ *dm*; wie groß ist die Höhe?

4. In einer senkrechten vierseitigen Pyramide beträgt jede Seite der Grundfläche 1 *m* 4 *dm* und jede Seitenkante 5 *dm*; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt?

5. In einer senkrechten sechsseitigen Pyramide ist eine Seite der Grundfläche 2 *dm* und eine Seitenkante 3·4 *dm*; bestimme die Oberfläche und den Cubikinhalt.

6. Bei einer Pyramide ist die Grundfläche ein Rechteck von 3 *dm* 4 *cm* Länge und 1 *dm* 9 *cm* Breite, und der Cubikinhalt 17 ⊠ *dm* 955 ⊠ *cm*; wie groß ist die Höhe?

7. Die Seite eines Tetraeders ist 1 *dm*; wie groß ist der Inhalt?

8. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Oktaeders, dessen Seite 4 *dm* beträgt? (§. 200, c.)

9. Die Seite der Grundfläche einer senkrechten sechsseitigen Pyramide ist 4·4 *dm*, die Höhe der Pyramide ist 6·3 *dm*; wie groß ist die Seite eines Würfels, welcher der Pyramide an Inhalt gleichkommt?

10. Es soll eine Pyramide, deren Grundfläche 1 □ *m* 15 □ *dm*, und deren Höhe 2 *m* beträgt, aus Eisen gegossen werden; wie viel wird sie wiegen, da 1 ⊠ *dm* Eisen 7·21 Kilogramm wiegt?

11. Wie groß ist das Gewicht einer senkrechten vierseitigen Pyramide aus Marmor, wenn die Höhe 3 *m* und eine Seite der Grundfläche 5 *dm* beträgt und 1 ⊠ *dm* Marmor 2·72 Kilogr. wiegt?

12. In einem Pyramidenstumpfe, dessen Grundflächen Quadrate sind, beträgt eine Seite der unteren Grundfläche 2 *dm* 5 *cm*, eine Seite der oberen Grundfläche 1 *dm* 9 *cm*, die Höhe 2 *dm*; berechne den Cubikinhalt desselben nach jeder der drei oben angeführten Methoden.

13. Es sei ein senkrechter dreiseitiger Pyramidenstumpf aus Eisen zu gießen; die Höhe soll 2·5 *m*, die Seiten der Grundflächen sollen 0·8 *m* und 0·4 *m* betragen; wie viel Kilogramm Eisen wird man dazu brauchen? (1 ⊠ *dm* Eisen wiegt 7·21 Kilogr.)

14. Wie viel wiegt ein Pyramidenstumpf aus Marmor, dessen Grundflächen Quadrate von 1·2*m* und 1*m* Seitenlänge sind und 1·5*m* von einander abstehen? (1⊠*dm* Marmor wiegt 2·72 Kilogr.)

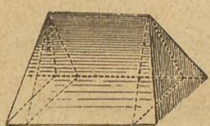
15. Ein vierkantig gehauener Baumstamm von 5*m* Länge ist an der einen Grundfläche 28*cm* breit und 22*cm* hoch, an der andern 24*cm* breit und 19*cm* hoch; wie viel ⊠*m* Holz enthält er?

16. Wie viel Liter fasst ein 6·2*dm* tiefes Gefäß von der Form einer abgekürzten Pyramide, deren Grundflächen Quadrate von 4·8*dm* und 3·2*dm* Seitenlänge sind?

17. Eine 22*m* tiefe Grube ist unten 3*m* lang und 2·6*m* breit, oben 4*m* und 3·5*m* breit; wie viel ⊠*m* Erde sind erforderlich, um die Grube zuzuschütten?

18. Auf einer Landstraße ist jeder Schotterhaufen unten 2·2*m*, oben 1·4*m* lang, seine Breite beträgt 1*m* und die Höhe 0·7*m*; wie groß ist sein Cubikinhalt?

Fig. 181.



Um den Cubikinhalt eines solchen Körpers (Fig. 181) zu bestimmen, darf man nur von den oberen Eckpunkten auf die Grundfläche zwei parallele senkrechte Schnitte führen; dann erscheint der Mitteltheil als ein dreiseitiges Prisma, und die beiden Seitentheile geben zusammen eine vierseitige Pyramide.

Cubikinhalt eines regelmäßigen Körpers.

§. 227. In jedem regelmäßigen Körper gibt es einen Mittelpunkt, welcher von allen Grenzebenen gleichweit absteht. Denkt man sich durch den Mittelpunkt und durch die Kanten des regelmäßigen Körpers Ebenen gelegt, so zerfällt dieser in lauter congruente Pyramiden, deren Grundflächen die Grenzebenen des Körpers sind, und deren Höhe der Abstand des Mittelpunktes von einer Grenzebene ist.

Daraus folgt:

Der Cubikinhalt eines regelmäßigen Körpers wird gefunden, indem man die Oberfläche desselben mit dem dritten Theile des Abstandes des Mittelpunktes des Körpers von einer Grenzebene multipliciert.

Wie das Hexaeder (Würfel), das Tetraeder und Oktaeder unabhängig von dem eben abgeleiteten Satze gemessen werden, ist schon in den §§. 216, 223 und 224 angeführt worden. Im Ikosaeder und Dodekaeder erhält man den Abstand des Mittelpunktes von einer Grenzebene, wenn man von dem Abstande zweier gegenüberstehender Grenzebenen die Hälfte nimmt.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Dodekaeders, in welchem eine Seitenfläche 27·53 □ *cm* und ihr Abstand vom Mittelpunkte 4·454 *cm* beträgt?

2. Berechne a) die Oberfläche, b) den Cubikinhalt eines Ikosaeders, dessen Kante 1 *dm* 5 *cm* ist und worin je zwei gegenüberstehende Seitenflächen 2 *dm* 1·676 *cm* von einander entfernt sind.

2. Cubikinhalt der runden Körper.

Cubikinhalt eines Cylinders.

§. 228. Da jeder Cylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, betrachtet werden kann, so gilt der Satz:

Der Cubikinhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Häufig ist der Cubikinhalt einer cylindrischen Röhre zu berechnen. So nennt man einen Körper, welcher zwischen den Mantelflächen zweier Cylinder liegt, die eine gemeinschaftliche Achse haben. Um den Cubikinhalt einer cylindrischen Röhre zu finden, braucht man nur den Cubikinhalt der beiden Cylinder, von welchen der kleinere dem größeren ausgeschnitten ist, zu berechnen, und den Inhalt des kleineren Cylinders von jenem des größeren zu subtrahieren.

§. 229. Aufgaben.

1. Berechne 1) die Oberfläche, 2) den Cubikinhalt folgender senkrechter Cylinder:

a) Durchmesser der Grundfläche 23 *cm*, Höhe 14 *cm*;
b) Halbmesser der Grundfläche 8·25 *dm*, Höhe 5·24 *dm*;
c) Umfang der Grundfläche 1 *m* 2 *dm* 9 *cm*, Höhe 1 *m* 8 *dm* 8 *cm*.

2. Der Durchmesser eines gleichseitigen Cylinders ist 2·4 *dm*; wie groß ist der Cubikinhalt?

3. Der Inhalt eines Cylinders ist 3·36 ⊠ *m*, der Durchmesser der Grundfläche 0·4 *m*; wie groß ist die Höhe?

4. Der Inhalt eines Cylinders ist 6 ⊠ *dm*, die Höhe 1 *dm* 6 *cm*; wie groß ist die Grundfläche?

5. Bestimme den Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders, dessen Höhe 4 *dm* und dessen Inhalt 9 ⊠ *dm* 496 ⊠ *cm* beträgt.

6. Die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders beträgt 7 □*m* 4 □*dm*, der Umfang der Grundfläche 1·76 *m*; wie groß ist der Cubikinhalt des Cylinders?

7. Wie groß ist die Oberfläche eines senkrechten Cylinders von 4 *dm* Durchmesser und 3 *dm* Höhe, und wie groß die Oberfläche eines Würfels, welcher diesem Cylinder an Inhalt gleichkommt?

8. Eine Walze ist 1·4 *m* lang und hat 2 *dm* im Durchmesser; wie viel Raum nimmt sie ein?

9. Ein Brunnen hat eine cylindrische Form mit 1 *m* 4 *dm* im Durchmesser; wenn nun das Wasser 3 *m* hoch steht, wie viel Hektoliter sind es?

10. Es soll ein runder Brunnen gegraben werden, dessen Weite 1·5 *m* und dessen Tiefe 8·4 *m* beträgt; wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn für das Ausheben und Wegführen von 1 ⊠*m* Erde 1 fl. 50 kr. bezahlt werden?

11. Welchen Druck übt eine Wassersäule von 2·2 *m* Höhe auf den Boden eines cylindrischen Gefäßes von 6 *dm* Durchmesser, wenn 1 ⊠*dm* Wasser 1 Kilogramm wiegt?

12. Ein cylindrisches Gefäß soll 1 Liter halten; wie hoch muss es sein, wenn der innere Durchmesser 108·4 *mm* beträgt?

13. Wie groß ist der Durchmesser eines cylindrischen Gefäßes, das 5·031 *dm* hoch ist und 1 Hektoliter hält?

14. Der Inhalt eines mit Wasser angefüllten cylindrischen Gefäßes von 4·5 *dm* Durchmesser und 3·2 *dm* Höhe wird in ein anderes cylindrisches Gefäß von 6 *dm* Durchmesser gegossen; wie hoch wird das Wasser in diesem Gefäße stehen?

15. Ein runder Thurm hat im Durchmesser 4 *m* 5 *dm*; wie viel Sprengpulver braucht man, um das 1·5 *m* tiefe Grundmauerwerk dieses Thurmes herauszuheben, wenn man für das Ausheben von 1 ⊠*m* Mauerwerk 2 Kilogramm Pulver rechnet?

16. Eine Feuerspritze hat 2 Cylinder (Stiefel), deren innerer Durchmesser 1·8 *dm* beträgt; die Hubhöhe des Kolbens ist in jedem 2·3 *dm* und jeder Kolben steigt während einer Minute 25mal auf und ab; wie viel Hektoliter Wasser wird diese Feuerspritze während einer Stunde unausgesetzter Wirksamkeit verspritzen?

17. Der innere Durchmesser eines runden Thurmes ist 4·2 *m*, die Mauer ist 1·2 *m* dick; wie viel Cubikmeter enthält die Mauer, wenn die Höhe des Thurmes 14·5 *m* beträgt?

18. Eine gußeiserne Walze von 1·2 *m* Länge und 11 *cm* Durchmesser wird so weit abgedreht, dass der Durchmesser nur 9·5 *cm* beträgt; um wie viel ist die abgedrehte Walze kleiner als die frühere?

19. Es soll eine hohle metallene Walze gegossen werden, deren Länge 1 *m* ist; die Weite im Lichten ist 3 *dm*, die Stärke des Metalls 2·5 *cm*, und 1 $\boxtimes$ *dm* desselben wiegt 7·2 Kilogramm. Wenn nun das Kilogramm zu 32 Kr. gerechnet wird, wie viel kostet die ganze Walze?

20. Zu einer Wasserleitung braucht man in einer Länge von 848 *m* Röhren von Blei, welche 1·6 *cm* dick sind und deren Weite im Lichten 8 *cm* beträgt; wie viel kostet das Blei, wenn 1 $\boxtimes$ *dm* desselben 11·35 Kilogramm wiegt und das Kilogramm Blei mit 40 Kr. bezahlt wird?

21. Ein Mühlstein hat 1·6 *m* im Durchmesser und ist 3 *dm* dick; die innere vierseitige Öffnung ist 1 *dm* weit; wie viel wiegt derselbe, wenn 1 $\boxtimes$ *dm* Stein 2·7 Kilogramm wiegt?

22. Wie viel Ziegel braucht man, um ein Thor zu verlegen, welches mit vollem Bogen geschlossen ist, wenn die Weite in Lichten 2·4 *m*, die Höhe bis zum Schlussteine 3·6 *m*, die Dicke der Mauer 8 *dm* ist, und wenn auf 1 $\boxtimes$ *m* Mauerwerk 264 Ziegel gerechnet werden?

Cubikinhalt eines Kegels und eines Kegelstumpfes.

§. 230. Da ein Kegel als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden kann, so folgt:

Der Cubikinhalt eines Kegels ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.

§. 231. *Der Cubikinhalt eines Kegelstumpfes wird* auf dieselbe Weise, wie der Inhalt eines Pyramidenstumpfes, *berechnet, indem man die Summe der beiden Grundflächen und der Quadratwurzel aus dem Producte derselben mit dem dritten Theile der Höhe multipliciert.*

In der Praxis begnügt man sich häufig mit einer *angenäherten Bestimmung des Cubikinhaltes eines Kegelstumpfes*, indem man diesen als einen Cylinder berechnet, dessen Grundfläche gleich ist der halben Summe der beiden Grundflächen des Stumpfes, und dessen Höhe die Höhe des Stumpfes ist.

§. 232. Aufgaben.

1. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Kegels, dessen Grundfläche 127 □ *cm* und dessen Höhe 9 *cm* beträgt?

2. Berechne den Cubikinhalt folgender Kegel:

a) Halbmesser der Grundfläche 6·2 *dm*, Höhe 7·5 *dm*;
b) „ „ „ $14\frac{1}{2}$ *cm*, „ $23\frac{2}{5}$ *cm*;
c) Umfang „ „ 1 *m* 1 *dm* 8 *cm*, Höhe 2 *m* 4 *dm* 6 *cm*.

3. Der Inhalt eines Kegels ist 26 ⊠ *dm* 225 ⊠ *cm*, die Grundfläche 4 □ *dm* 25 □ *cm*; wie groß ist die Höhe?

4. Der Inhalt eines Kegels ist 1 ⊠ *m* 88 ⊠ *dm* 52 ⊠ *cm*, die Höhe 1 *m* 8 *dm*; wie groß ist die Grundfläche?

5. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels, dessen Höhe 3·5 *dm*, und dessen Inhalt 55·894 ⊠ *dm* beträgt?

6. Wie groß ist der Cubikinhalt eines senkrechten Kegels, dessen Seite 2·4 *dm* beträgt, und dessen Grundfläche 2 *dm* zum Halbmesser hat?

7. In einem gleichseitigen Kegel ist die Seitenlänge 7·5 *dm*; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt?

8. Die Mantelfläche eines senkrechten Kegels ist 2 □ *dm* 85 □ *cm*, der Halbmesser der Grundfläche 5 *cm*; wie groß ist der Cubikinhalt?

9. Welche Länge hat die Seite eines Würfels, der einem Kegel von 4·2 *dm* Durchmesser und 4·5 *dm* Höhe an Inhalt gleich kommt?

10. Ein kegelförmiger Filtriertrichter soll ein Liter halten, und oben 1·5 *dm* Durchmesser haben; wie groß muss dessen Höhe sein?

11. In einem kegelförmig aufgeschütteten Getreidehaufen beträgt der Umfang der Grundfläche 2 *m* 5 *dm* und die Höhe 1 *m*; wie viel Hektoliter Getreide enthält der Haufen?

12. Ein Heuschober hat 2·6 *m* Durchmesser und 4·5 *m* Höhe; wie viel Kilogramm Heu enthält er, wenn das ⊠ *m* Heu 114 Kilogramm wiegt?

13. Ein messingener Kegel ist 21 *cm* hoch und hat eine Grundfläche von 10·5 *cm* Durchmesser; wie groß ist das Gewicht desselben, wenn 1 ⊠ *dm* Messing $8\frac{2}{5}$ Kilogramm wiegt?

14. Welchen Wert hat eine Tanne, welche 12·6 *m* hoch ist und unten 2·2 *m* im Umfange hat, wenn das ⊠ *m* Holz mit 6 fl. 40 kr. bezahlt wird?

15. Aus einem kegelförmigen, mit Wasser gefüllten Gefäße von 21 *cm* Durchmesser und 15 *cm* Höhe wird das Wasser in ein cylindrisches Gefäß von 12 *cm* Durchmesser gegossen; wie hoch wird das Wasser in diesem Gefäße stehen?

16. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Kegelstumpfes, dessen Grundflächen 3 *m* und 2 *m* zu Durchmessern haben und 1·2 *m* von einander abstehen?

17. Die Durchmesser der Grundflächen eines senkrechten abgekürzten Kegels sind 2·4 *dm* und 1·8 *dm*, die Seite beträgt 3·02 *dm*; wie groß ist a) die Mantelfläche, b) der Cubikinhalt des Kegelstumpfes?

18. Ein Baumstamm hat an dem einen Ende 17 *dm*, an dem andern 13·6 *dm* Umfang, die Länge beträgt 7 *m*; wie groß ist a) sein Cubikinhalt, b) sein Gewicht, wenn ein ⊠*dm* 0·48 Kilogr. wiegt?

19. Ein Bottich hat 1 *m* unteren und 1·4 *m* oberen Durchmesser und 1·2 *m* Tiefe; wie viel Hektoliter hält derselbe?

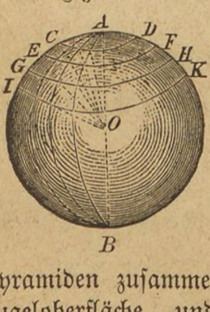
20. Ein in Form eines Kegelstumpfes anzufertigendes Gefäß soll unten 24 *mm* und oben 27 *mm* Umfang haben und 10 Liter halten; wie hoch muss es gemacht werden?

21. Wie viel Cubikmeter Scheitholz gibt ein Baumstamm von 5 *m* Länge, der an dem einen Ende 7 *dm*, an dem andern 6 *dm* Durchmesser hat, wenn man annimmt, dass 1 ⊠*m* Stammholz $1\frac{1}{2}$ ⊠*m* Scheitholz gibt?

Cubikinhalt einer Kugel.

§. **233.** Legt man durch den Durchmesser AB (Fig. 182) sehr viele größte Kreise, und senkrecht darauf mehrere Parallelkreise CD, EF, GH . . ., so zerfällt die Oberfläche der Kugel in lauter Vierecke und Dreiecke, welche man für eben und geradlinig ansehen kann, wenn die Anzahl jener Kreise sehr groß angenommen wird. Zieht man nun von allen Durchschnittspunkten der Oberfläche gerade Linien zum Mittelpunkte der Kugel und denkt sich durch je zwei solche Strecken eine Ebene gelegt, so erscheint die Kugel aus lauter Pyramiden zusammengesetzt, welche alle ihre Grundflächen an der Kugeloberfläche, und ihren Scheitel im Mittelpunkte haben; ihre gemeinschaftliche Höhe ist daher der Halbmesser der Kugel. Der

Fig. 182.



Cubikinhalt einer Pyramide aber wird gefunden, indem man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multipliciert; daher ist der Cubikinhalt aller jener Pyramiden zusammengenommen, d. i. der Inhalt der ganzen Kugel, gleich der Summe aller Grundflächen, d. i. der Kugeloberfläche, multipliciert mit dem dritten Theile des Halbmessers.

Der Cubikinhalt einer Kugel ist also gleich dem Producte aus der Oberfläche derselben und dem dritten Theile des Halbmessers.

Bezeichnet man durch r den Halbmesser, durch o die Oberfläche und durch k den Cubikinhalt einer Kugel, so ist

$$o = 4r^2\pi,\ \text{daher}\ k = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi;\ \text{d. h.}$$

der Cubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Cubus des Halbmessers multipliciert mit $\frac{4}{3}$ der Ludolfischen Zahl.

Um umgekehrt aus dem Cubikinhalte einer Kugel den Halbmesser zu finden, darf man nur den Inhalt durch $\frac{4}{3}$ der Ludolfischen Zahl dividieren; der Quotient ist der Cubus des Halbmessers; zieht man daraus die Cubikwurzel, so erhält man den Halbmesser selbst. Es ist also

$$r = \sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}}.$$

Heißt R der Halbmesser und K der Cubikinhalt einer zweiten Kugel, so ist

$$K = \frac{4}{3} \cdot R^3\pi,\ \text{daher}$$

$$K : k = \frac{4}{3} \cdot R^3\pi : \frac{4}{3} \cdot r^3\pi = R^3 : r^3;\ \text{d. h.}$$

die Cubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

§. 234. Aufgaben.

1. Eine Kugel hat 216 *mm* Durchmesser; wie groß ist a) ihre Oberfläche, b) ihr Cubikinhalt?

2. Der Halbmesser einer Kugel ist

a) 0·36 *m*, b) 48⅘ *cm*, c) 1 *m* 3 *dm* 2 *cm*;

wie groß ist 1) die Oberfläche, 2) der Inhalt der Kugel?

3. Der größte Kreis einer Kugel hat 4·8 *dm* im Umfange; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt der Kugel?

4. Der Inhalt einer Kugel ist 1 ⊠ *m*; wie groß ist der Halbmesser?

5. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Cubikinhalt 2 ⊠ *dm* 50·27 ⊠ *cm* beträgt?

6. Die Oberfläche einer Kugel ist 88·2443 □ *cm*; wie groß ist der Inhalt?

7. Der Cubikinhalt einer Kugel ist 4 ⊠ *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

8. Die Seite eines Würfels ist 1 *m*, und eben so groß ist auch der Durchmesser einer Kugel; welches Verhältnis haben die Cubikinhalte beider Körper?

9. In einen gleichseitigen Cylinder von 1 *dm* Halbmesser werden eine Kugel und ein senkrechter Kegel eingeschrieben: a) wie groß ist der Cubikinhalt jedes dieser drei Körper; b) wie verhalten sich die Inhalte des Kegels, der Kugel und des Cylinders zu einander?

10. Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, welche so groß ist als ein Würfel, dessen Seite 1·11 *m* beträgt?

11. Suche die Seite eines Würfels, der an Inhalt gleich ist einer Kugel von 1 *m* 2 *dm* Durchmesser.

12. Von zwei Kugeln hat die erste 6 *dm*, die zweite 5 *dm* im Durchmesser; wie groß wird der Durchmesser einer Kugel sein, deren Inhalt gleich ist dem Inhalte der beiden anderen Kugeln zusammengenommen?

13. Eine Kugel, ein gleichseitiger Cylinder und ein Würfel haben gleiche Oberfläche, nämlich 10 □ *dm*; wie groß sind die Inhalte dieser drei Körper?

14. Eine Kugel, ein gleichseitiger Cylinder und ein Würfel haben gleichen Cubikinhalt, nämlich 10 ⊠ *dm*; wie groß sind die Oberflächen dieser drei Körper?

15. Um eine Kugel von 1 *dm* Halbmesser werden ein gleichseitiger Cylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Inhalte dieser drei Körper?

16. Ein kugelförmiger Dampfkessel hat 1·2 *m* Durchmesser; wie viel Hektoliter Wasser hält er?

17. Wie viel wiegt eine Kegelkugel von 1 *dm* Durchmesser, wenn das ⊠ *dm* 1·05 Kilogramm wiegt?

18. Auf einen Grad des Erdäquators gehen 15 geographische Meilen. Wie groß wäre der Cubikinhalt der Erde, wenn diese als eine Kugel, deren Durchmesser dem Durchmesser des Äquators gleich ist, betrachtet würde?

19. Eine Kugel von 2·8 *dm* Halbmesser wiegt 4·5 Kilogramm; wie viel wiegt eine andere Kugel aus demselben Stoffe, deren Halbmesser 3·2 *dm* ist?

20. Wie viel Kugeln von 5 *mm* Durchmesser können aus 3 Kilogramm Blei gegossen werden, wenn 1 ⊠ *dm* Blei 11·35 Kilogramm wiegt?

21. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel von Blei, welche $18\frac{1}{2}$ Kilogramm wiegt?

22. Wie groß ist der Durchmesser einer Kanonenkugel von 15 Kilogramm Gewicht, wenn 1 ⊠ *dm* Eisen 7·2 Kilogramm wiegt?

23. Man will aus zwei Stücken Metall, deren eines 4 Kilogramm, das andere 6 Kilogramm wiegt, eine Kugel gießen; wie groß wird der Durchmesser derselben sein, wenn 3 Dekagramm des Metalls ein ⊠ *cm* geben?

24. Ein cylindrischer Dampfkessel mit zwei halbkugelförmigen Endstücken ist 1 *m* weit und 4 *m* lang, so dass die Länge des Cylinders 3 *m* beträgt; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt des Kessels?

25. Der Umfang des äußeren größten Kreises einer Hohlkugel ist 1·2 *m*, die Wandstärke 2 *cm*; wie groß ist der Inhalt der Kugelschale?

26. Wenn man den Durchmesser der Erde $= 1719\frac{1}{2}$ Meilen und die Höhe ihrer Luftschichte $= 11$ Meilen setzt; wie groß ist der Inhalt der Luftschichte?

Inhalt der Fässer.

§. 235. Ein Fass nähert sich in der Form einem Cylinder; nur ist es in der Mitte bauchig, und sein Durchmesser daselbst größer als der Durchmesser seiner Grund- oder Bodenfläche. Man begeht übrigens keinen erheblichen Fehler, wenn man den Inhalt eines Fasses dem Inhalte eines Cylinders gleichsetzt, dessen Höhe gleich ist der Länge des Fasses, und dessen Grundfläche den dritten Theil aus dem doppelten Bauch- und dem einfachen Bodendurchmesser zum Durchmesser hat.

Offenbar sind hier die inneren Maßlängen des Fasses zu nehmen. Den Bauchdurchmesser findet man mittels eines Maßstabes, der durch das Spundloch senkrecht in das Fass gesteckt wird; der innere Bodendurchmesser ist meistens dem äußeren gleich, die innere Faßlänge bekommt man, wenn man von der äußeren Länge die doppelte Bodendicke subtrahiert.

Am zweckmäßigsten werden die Maßlängen durch Decimeter ausgedrückt, da dann das Fass so viel Liter hält, als der Cubikinhalt desselben Cubikdecimeter hat.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Inhalt eines Fasses, dessen Durchmesser am Bauche 6·2 *dm*, am Boden 4·9 *dm*, und dessen Länge 10·6 *dm* beträgt?

2. Ein Bierfass hat 8·4 *dm* Bauchdurchmesser, 7·2 *dm* Bodendurchmesser und 13 *dm* Länge; wie viel Liter hält es?

3. Bestimme den Inhalt folgender Fässer:

	Bauchdurchmesser	Bodendurchmesser	Länge
a)	7·2 *dm*,	5·4 *dm*,	11·2 *dm*;
b)	6·5 *dm*,	5 *dm*,	10·4 *dm*;
c)	6 *dm*,	4·8 *dm*,	9·8 *dm*.

4. Ein Fass von 6 *dm* Bauch- und 4·5 *dm* Bodendurchmesser soll 1 Hektoliter fassen; welche innere Länge muss man ihm geben?

Holzberechnung.

§. 236. Ein Baumstamm hat, wenn er gefällt und von seinen Ästen befreit ist, die Form eines Kegels; am vollkommensten ist diese Form bei den Nadelhölzern. Nur junge Stämme kommen in dieser vollkommenen Form in den Handel; sie werden als Kegel (§. 230) berechnet.

Alle größeren Baumstämme, die in den Handel kommen, sind entwipfelt; sie haben die Form von Kegelstumpfen und werden als solche (§. 231) berechnet, wobei man sich in der Praxis gewöhnlich der angenäherten Berechnungsweise bedient.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Inhalt eines unabgewipfelten Baumstammes von 9 *m* Länge, der am Wurzelende 21 *cm* im Durchmesser hat?

2. Ein Rundholz hat am Stammende 42 *cm*, am Zopfende 28 *cm* im Durchmesser, die Länge beträgt 7 *m*; wie groß ist der Cubikinhalt?

Untere Grundfläche $= 21^2 \times 3\frac{1}{7} = 1386$ □ *cm*
Obere " $= 14^2 \times 3\frac{1}{7} = 616$ "
2002 □ *cm* : 2
Mittlere " . . . . . = 1001 □ *cm*
Inhalt $= 1001 \times 700 = 700700$ ⊠ *cm*
$= 0{\cdot}7007$ ⊠ *m*.

3. Berechne den Inhalt folgender Baumstämme:

	Unterer Durchm.	oberer Durchm.	Länge
a)	40 *cm*,	27 *cm*,	12·6 *m*;
b)	36 *cm*,	28 *cm*,	11·5 *m*;
c)	43 *cm*,	25 *cm*,	8·9 *m*.

§. 237. Die Berechnung des Inhaltes bereits behauener Hölzer hängt von ihrer Gestalt ab. Sie sind entweder durchaus gleich stark, oder an dem einen Ende dicker als an dem andern; ferner ist die Grundfläche ein Quadrat, ein Rechteck oder ein Trapez.

Haben sie durchaus dieselbe Weite, so werden sie als Prismen (§. 221) berechnet. Haben sie dagegen ungleiche Grundflächen, so berechnet man sie als abgekürzte Pyramiden (§. 225), wobei man sich meist mit einem nur angenäherten Resultate begnügt.

Aufgaben.

1. Die Grundflächen eines Balkens sind gleiche Quadrate von 32 *cm* Seitenlänge, die Länge ist 6 *m*; wie groß ist der Cubikinhalt?

Grundfläche = 32^2 = 1024 □ *cm*
Länge = 6 *m* = 600 *cm*
Inhalt = 614400 ⊠ *cm* = 0·6144 ⊠ *m*.

2. Ein Balken ist 5 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei gleiche Trapeze, in denen die Parallelseiten 40 *cm* und 30 *cm* sind und die Höhe 15 *cm* beträgt; wie groß ist der Inhalt?

3. Ein vierkantiges Bauholz ist 5 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei ungleiche Quadrate, deren Seiten 31 *cm* und 27 *cm* sind; wie groß ist der Inhalt?

a) Genaue Berechnung.

Untere Grundfläche = 31^2 = 961 □ *cm*
Obere „ = 27^2 = 729 „
$\sqrt{961 \times 729}$ = 837 „
2527 □ *cm* : 3
842·333 □ *cm*
Inhalt = 842·333 × 500 = 421166·5 ⊠ *cm*
= 0·4211665 ⊠ *m*.

b) Angenäherte Berechnung.

Untere Grundfläche = 961 □ *cm*
Obere „ = 729 „
1690 □ *cm* : 2
Mittlere „ 845 □ *cm*
Inhalt = 845 × 500 = 422500 ⊠ *cm*
= 0·4225 ⊠ *m*.

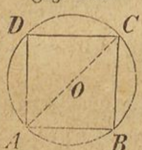
4. Ein prismatisches Bauholz hat zur Grundfläche ein Rechteck von 42 *cm* Länge und 28 *cm* Breite und ist 6·1 *m* lang; man berechne den Inhalt.

5. Ein vierkantig beschlagenes Holz ist 8 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei Rechtecke, deren Längen 4 *dm* und 3 *dm* und deren Breiten 3 *dm* und 2·4 *dm* sind; wie groß ist der Cubikinhalt?

6. Wie viel ist ein Balken von quadratischem Querschnitt wert, wenn er 3·2 *m* lang, an dem einen Ende 41 *cm*, an dem andern 31 *cm* stark ist, und wenn das ⊠ *m* mit 28 fl. bezahlt wird?

§. 238. Damit das Bauholz, welches man durch das Behauen des Rundholzes gewinnt, den größten Inhalt erhalte, müssen als dessen Grundflächen Quadrate angenommen werden, die man sich den Grundflächen des Rundholzes eingeschrieben denkt.

Fig. 183.



Stellt z. B. der aus O (Fig. 183) mit dem Halbmesser AO beschriebene Kreis die Grundfläche eines Rundholzes vor, so ist das Quadrat ABCD die Grundfläche des größten scharf vierkantigen Holzes, welches sich aus jenem Rundholze bearbeiten läſst. Der Flächeninhalt eines solchen Quadrates kann aus dem Durchmesser des Kreises leicht gefunden werden; er ist nach §. 153, Zusatz 2, gleich dem halben Producte der beiden Diagonalen, d. i. dem halben Quadrate des Durchmessers. Ist z. B. der Durchmesser des Rundholzes 10 *dm*, so ist die Fläche des eingeschriebenen Quadrates $= \frac{10^2}{2} = 50$ □ *dm*.

Diesem gemäß läſst sich schon aus den Dimensionen des Rundholzes vorhinein berechnen, welchen Cubikinhalt das größte daraus bearbeitete vierkantige Holz haben wird. Soll dieses prismatisch sein, so wird die Fläche des Quadrates gesucht, welches der kleineren Grundfläche des Rundholzes eingeschrieben wird, und dieselbe mit der Länge multipliciert. Soll das behauene Holz ungleiche Grundflächen haben, so sucht man die halbe Summe der Quadrate, welche in die beiden Grundflächen des Rundholzes beschrieben sind, und multipliciert dieselbe mit der Länge des Holzes.

Aufgaben.

1. Aus einem Rundholze, welches 4 *m* lang und am oberen Ende 48 *cm* Durchmesser hat, soll der größte viereckige Balken mit gleichen Grundflächen bearbeitet werden; wie groß wird der Inhalt desselben sein?

$$\text{Quadratfläche} = \frac{48^2}{2} = 1152 \,\square\, cm$$

$$\text{Inhalt} = 1152 \times 400 = 460800 \,\boxtimes\, cm$$
$$= 0·4608 \,\boxtimes\, m.$$

2. Bestimme den Inhalt des größten vierkantigen Balkens mit ungleichen Grundflächen, welche aus einem 7 *m* langen Rundholze, das oben 38 *cm* und unten 50 *cm* im Durchmesser hat, gehauen werden kann.

3. Ein Baumstamm hat unten 42 *cm*, oben 32 *cm* im Durchmesser, und ist 4·5 *m* lang; wie groß wird der Inhalt des daraus behauenen größten vierkantigen Holzes sein, wenn dieses gleiche, und wie groß, wenn es ungleiche Grundflächen haben soll?

3. Bestimmung des Cubikinhaltes durch das Gewicht.

§. 239. Der Cubikinhalt eines Körpers läßt sich auch durch das Gewicht bestimmen.

Die Größe des Druckes, den ein Körper von beliebigem Rauminhalte auf seine Unterlage ausübt, heißt das absolute Gewicht des Körpers. Das Gewicht, das eine Cubikeinheit, z. B. ein Cubikdecimeter, des Körpers hat, nennt man dessen specifisches Gewicht. Z. B. 1 ⊠ *dm* Silber wiegt 10·51 Kilogramm; diese sind das specifische Gewicht des Silbers für 1 ⊠ *dm* als Cubikeinheit.

Da 1 ⊠ *dm* destilliertes Wasser 1 Kilogramm wiegt, so zeigt das specifische Gewicht eines Körpers für 1 ⊠ *dm* auch an, wie vielmal so groß als das Gewicht eines bestimmten Raumtheiles reinen Wassers das Gewicht eines eben so großen Raumtheiles des betreffenden Körpers ist.

Hier folgen die specifischen Gewichte einiger Körper.

1 Cubikdecimeter

Alabaster . .	wiegt	2·70	Kilogr.	Gold	wiegt	19·36	Kilogr.
Bernstein . .	„	1·08	„	Granit (Mittel)	„	2·70	„
Blei	„	11·35	„	Kalkstein . .	„	0·46	„
Buchenholz . .	„	0·74	„	Kiefernholz .	„	0·52	„
Eichenholz . .	„	0·86	„	Korkholz . .	„	0·24	„
Eisen, geschmiedet	„	7·79	„	Kupfer gehämm.	„	8·88	„
„ gegossen	„	7·21	„	„ gegossen	„	8·79	„
Elfenbein . .	„	1·83	„	Marmor . .	„	2·72	„
Fichtenholz . .	„	0·47	„	Messing (Mittel)	„	8·40	„

Platin . . . wiegt	21·45	Kilogr.	Stahl . . . . wiegt	7·82	Kilogr.
Quecksilber . „	13·60	„	Tannenholz . „	0·48	„
Silber . . . „	10·51	„	Zink . . . . „	7·19	„
Steinkohle (im Mittel) . . „	1·30	„	Zinn . . . . „	7·29	„
			Zucker . . . . „	1·50	„

Es sei z. B. der Cubikinhalt eines Silberbarrens, der 32 Kilogramm wiegt, zu bestimmen.

Da 1 ⊠*dm* Silber 10·51 Kilogr. wiegt, so nehmen 32 Kilogr. Silber so viel ⊠*dm* Raum ein, als wie oft 10·51 Kilogramm in 32 Kilogramm enthalten sind; man hat daher

32 : 10·51 = 3·045 ⊠*dm*.

Der Cubikinhalt eines Körpers in Cubikdecimetern wird demnach gefunden, indem man das absolute Gewicht desselben in Kilogrammen durch das specifische Gewicht für 1 Cubikdecimeter dividiert.

Hiernach kann man auch den Inhalt eines Gefäßes durch das Gewicht bestimmen. Man wägt das leere Gefäß ab, füllt es mit Wasser, bestimmt dann das Gewicht des so gefüllten Gefäßes, und subtrahiert das erste Gewicht von dem zweiten. So viel Kilogramm der Gewichtsunterschied beträgt, so viel Cubikdecimeter oder Liter hält das Gefäß.

Umgekehrt findet man aus dem Cubikinhalte eines Körpers das absolute Gewicht desselben, indem man dessen specifisches Gewicht mit der Maßzahl des in Cubikdecimetern ausgedrückten Cubikinhaltes multipliciert.

Ist z. B. das absolute Gewicht von 346 ⊠*dm* Steinkohlen zu bestimmen, so hat man:

1 ⊠*dm* Steinkohlen wiegt 1·3 Kilogr.
346 „ „ wiegen 1·3 Kilogr. × 346 = 449·8 Kilogr.

§. 240. Aufgaben.

1. Wie viel ⊠*m* enthält ein Balken Eichenholz, der 135 Kilogramm wiegt?

2. Eine Goldstange wiegt 28·5 Kilogramm; welchen Cubikraum nimmt sie ein?

3. Welchen Cubikinhalt haben 3450 Kilogramm Blei?

4. Wie viele Kugeln von 1 *cm* Durchmesser können aus 4 Kilogramm Gusseisen gegossen werden?

5. Ein Gefäß wiegt leer 1·45 Kilogramm, mit Wasser gefüllt 10·95 Kilogramm; wie viel Liter hält es?

6. Es soll ein cylinderförmiges Gewicht von 1 Kilogramm aus Messing gegossen werden; wie hoch muss dasselbe werden, wenn der Durchmesser 0·4 *dm* betragen soll?

7. Eine Walze von Messing soll 20 Kilogramm wiegen und 3 *dm* lang sein; welchen Durchmesser muss sie haben?

8. Wie viel Kilogramm wiegt eine Stange Stabeisen, die 6 *m* lang, 1 *dm* breit und 0·25 *dm* dick ist?

9. Wie viel Kilogramm wiegt eine vierseitige Pyramide von Gusseisen, wenn eine Seite der quadratischen Grundfläche 0·6 *m* lang ist und die Höhe 3 *m* beträgt?

10. Wie viel wiegt eine Kugel von Marmor, deren Durchmesser 0·4 *m* beträgt?

11. Welches Gewicht hat ein Zuckerhut von 2 *dm* Bodendurchmesser und 4 *dm* Höhe?

12. Wie viel wiegt ein □*m* Buchenholz von 80 *cm* Scheitlänge, wenn man für die leeren Zwischenräume $\frac{1}{3}$ des Inhaltes in Abzug bringt?

13. Wie hoch kommen 18 Kugeln von Gusseisen zu einer Gitterverzierung, wenn jede 1·2 *dm* Durchmesser hat und das Kilogramm Gusseisen 28 Kr. kostet?

14. Wie viel Hufeisen zu $\frac{1}{2}$ Kilogramm Gewicht lassen sich aus einer Eisenstange von $1\frac{1}{2}$ *m* Länge, 5 *cm* Breite und 1 *cm* Dicke schmieden?

15. Wie viele Gewichte zu 1 Kilogramm können aus einer alten eisernen Kugel von 3 *dm* Durchmesser gegossen werden, wenn $\frac{1}{10}$ der Masse in Abgang kommt?