PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **9** (1981/1982)
Številka 1
Strani 18–20

Dragoljub M. Milošević, prevod Peter Petek:

NEKATERE NEENAKOSTI V PRAVOKOTNEM TRIKOTNIKU

Ključne besede: matematika, geometrija, neenakosti, pravokotni trikotniki.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/9/9-1-Milosevic-Petek-trikotnik.pdf

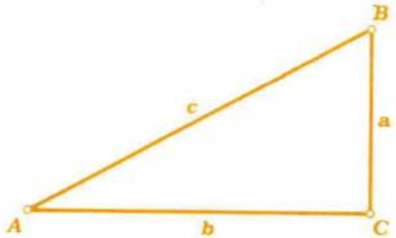
NEKATERE NEENAKOSTI V PRAVOKOTNEM TRIKOTNIKU

Dobro vemo, da za vsak trikotnik velja trikotniška neenakost: stranica trikotnika je večja od razlike in manjša od vsote ostalih dveh stranic trikotnika. Oglejmo si nekatere neenakosti, ki veljajo za pravokotni trikotnik!

1. Če je P ploščina in c hipotenuza pravokotnega trikotnika, velja neenakost

$$P \leq 0,25c^2$$

Dokaz. Ker je kvadrat vsakega realnega števila pozitiven ali nič, velja za kateti pravokotnega trikotnika a in b (slika 1) neenakost $(a - b)^2 \geq 0$, t.j. $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Pitagorov izrek nam pove, da je $a^2 + b^2 = c^2$, ploščino pravokotnega trikotnika izračunamo po formuli $P = ab/2$, iz zgornje neenakosti dobimo $P \leq c^2/4$, kar smo morali dokazati.



Slika 1

2. Za kateti a in b pravokotnega trikotnika in njuni težiščnici t_a in t_b velja neenakost

$$t_a^2 + t_b^2 \geq \frac{5}{8}(a + b)^2$$

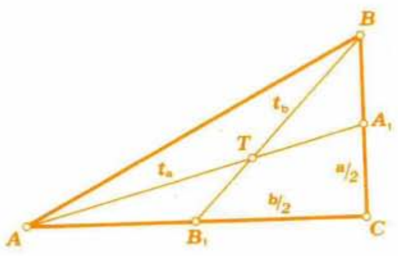
Dokaz. Poglejmo na sliko 2. Trikotnika ACA_1 in BCB_1 sta pravokotna, zato velja

$$t_a^2 = b^2 + (a/2)^2$$
$$t_b^2 = a^2 + (b/2)^2$$

Enakosti seštejemo in dobimo

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2)$$

Ker pa smo v dokazu neeankosti 1 videli, da velja $a^2 + b^2 \geq$ $\geq (a + b)^2/2$, iz zgornje seštete enakosti že sledi trditev izreka.



Slika 2

3. V pravokotnem trikotniku velja: $a + b \geq 2\sqrt{2P}$

Dokaz. Neenakosti $a^2 + b^2 \geq 2ab$ prištejemo na obeh straneh po $2ab$, da dobimo $(a + b)^2 \geq 4ab$, t.j. $a + b > 2\sqrt{ab}$, od koder pa spet zaradi $P = ab/2$ sledi neenakost, ki jo želimo dokazati.

4. V pravokotnem trikotniku velja dvojna neenakost

$$1 < \frac{t_a + t_b}{a + b} < \frac{3}{2}$$

Dokaz. Iz slike 2 preberemo dve trikotniški neenakosti, za trikotnika ACA_1 in BCB_1:

$$t_a < b + a/2$$
$$t_b < a + b/2$$

Ko ju seštejemo, dobimo desni del zahtevane neeankosti:

$$t_a + t_b < \frac{3}{2}(a + b)$$

Ker sta t_a in t_b hipotenuzi omenjenih trikotnikov, sta večji od katet a in b : $t_a > b$ in $t_b > a$. Spet seštejemo $t_a + t_b > a + b$, kar prinese še levi del dvojne neenakosti.

NALOGE

1. Dokaži, da za polmer R očrtanega in r včrtanega kroga pravokotnega trikotnika velja $R > r(1 + \sqrt{2})$!

2. Za kateti a, b in višino h pravokotnega trikotnika veljata neenakosti

(I) $a + b \geq 2h\sqrt{2}$

(II) $1/a + 1/b \leq \sqrt{2}/h$

3. Težiščnice t_a, t_b, t_c in ploščina P pravokotnega trikotnika so v odnosu:

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 \geq 6P$$

Dragoljub M. Milošević

prevedel *Peter Petek*