PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **31** (2003/2004)
Številka 1
Strani 13–15

Matej Mlakar:

Z NETRANZITIVNOSTJO V IGRI KOCK DO „SKORAJ ZANESLJIVE“ ZMAGE

Ključne besede: zanimivosti, razvedrilo, matematika, teorija iger, kockanje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/31/1538-Mlakar.pdf

Z NETRANZITIVNOSTJO V IGRI KOCK DO 'SKORAJ ZANESLJIVE' ZMAGE

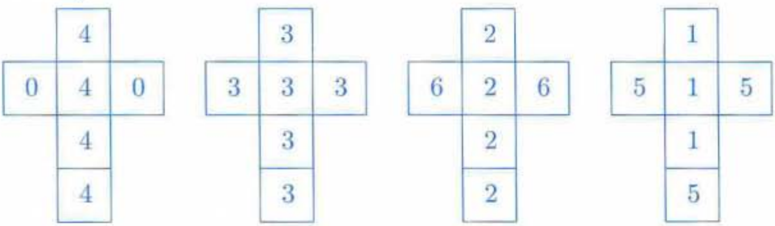
Verjetno je odveč omenjati, da v igri dveh poštenih, standardno označenih kock $K_{(1,2,3,4,5,6)}$ pade šestica na prvi kocki z enako verjetnostjo kot šestica na drugi kocki. Enako velja za vsako drugo število pik. Odloča naključje.

Za spremembo si zamislimo malce drugačno igro s kockami. Recimo, da je število pik na vsaki izmed kock drugače razporejeno (primer množice takih kock je na sliki 1). Pravila igra so preprosta. V igri dveh igralcev vsak igralec izbere eno izmed kock, nasprotnik izbere eno izmed preostalih. Kocke mečeta igralca večkrat (recimo desetkrat ali več), zmaga tisti, ki v teh metih večkrat vrže večje število pik.

Nasprotnik bi že navidez lahko podvomil v poštenost igre, zato je najmanj, kar lahko zahteva, možnost prve izbire. Z nekaj osnovami verjetnosti pa lahko pokažemo, da je prav možnost prve izbire nasprotnika pot k porazu. Kako je to sploh mogoče? V šahu (ki nima veliko opraviti z naključji) je prva poteza določena prednost. Tudi v nekaterih igrah na srečo je tako. Kdor prej pride, dostikrat prej melje.

Tukaj pa bo prva poteza 'skoraj zanesljivo' pomenila poraz.

Vzemimo množico štirih kock, vsako označimo drugače, kar je predstavljeno na mrežah spodaj (število pik na posamezni ploskvi je označeno s številom).



Slika 1. Kocke $K_{(4,4,4,4,0,0)}$, $K_{(3,3,3,3,3,3)}$, $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ in $K_{(1,1,1,5,5,5)}$.

Zavedati se moramo, da v primeru našega zmagovanja nasprotnik zaradi možnosti prve izbire lahko izbere našo, zmagovalno kocko. Kljub temu mu to ne pomaga kaj dosti. Zakaj?

V taki množici kock namreč velja, da

- prva kocka $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga drugo kocko $K_{(3,3,3,3,3,3)}$;
- kocka $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga kocko $K_{(2,2,2,2,6,6)}$;
- kocka $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga kocko $K_{(1,1,1,5,5,5)}$;
- in presenetljivo: krog je sklenjen s tem, da kocka $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga kocko $K_{(4,4,4,4,0,0)}$.

Priporočljivo je zapisati vseh 36 možnosti pri metu vsakega izmed parov, kjer ugotovimo, da je razmerje zmag v vsakem primeru 24 : 12, kar pomeni, da je relacija 'skoraj zanesljivo premaga' dejansko dvakrat večja verjetnost zmage.

Sklenjen krog, v katerem ni absolutno najboljšega, pomeni, da ta relacija na tej množici kock ni tranzitivna. Prav neprehodnost relacije pa nam omogoča, da s prvo izbiro nasprotnika 'skoraj zanesljivo' zmagamo. Če je na primer izbrana kocka $K_{(3,3,3,3,3,3)}$, moramo izbrati $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ in kocka $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ je poražena z dvakrat večjo verjetnostjo.

To velja tudi za ostale omenjene pare.

Če pa se število metov veča, je zmaga tistega, ki izbira drugi, toliko verjetnejša – pri desetih metih pa nasprotnik praktično nima nikakršnih možnosti.

Kaj pa, če se nasprotnik odreče možnosti prve izbire?

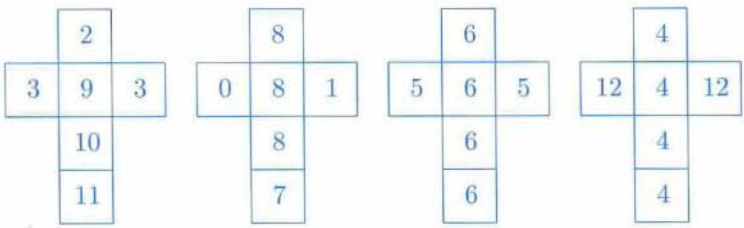
V primeru, da ugotovi strategijo, so naše vloge in možnosti zamenjane. Bolje je, da igro čimprej končamo. Lahko pa se zgodi, da je po naši izbiri kocke njegova izbira še vedno naključna. Mora se pač odločiti med preostalimi tremi kockami. Oglejmo si, katera izbira kocke bi nam prinesla največ možnosti za zmago.

- Izberemo $K_{(4,4,4,4,0,0)}$. S to kocko 'skoraj zanesljivo' premagamo $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ (razmerje $2:1$), tesno izgubimo s $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ (razmerje $4:5$) ter 'skoraj zanesljivo' izgubimo s $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ (razmerje $1:2$).
- Če izberemo $K_{(3,3,3,3,3,3)}$, 'skoraj zanesljivo' premagamo $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ (razmerje možnosti $2:1$), s $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ imamo enake možnosti za zmago, s kocko $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ pa 'skoraj zanesljivo' izgubimo (razmerje $1:2$).
- Če izberemo $K_{(2,2,2,2,6,6)}$, so možnosti za našo zmago s kocko $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ tesno nam v prid (razmerje $5:4$), 'skoraj zanesljivo' izgubimo s $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ (razmerje $1:2$) ter 'skoraj zanesljivo' premagamo $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ (razmerje $2:1$).
- Če pa izberemo $K_{(1,1,1,5,5,5)}$, smo v podobni situaciji kot pri izbiri kocke $K_{(3,3,3,3,3,3)}$. Enkrat imamo enake možnosti, enkrat 'skoraj zanesljivo' izgubimo (s $K_{(2,2,2,2,6,6)}$), enkrat pa 'skoraj zanesljivo' zmagamo (s $K_{(4,4,4,4,0,0)}$).

Iz celotne obravnave je razvidno, da bi nam, če nasprotnik strategije ne pozna, najbolje služila kocka $K_{(2,2,2,2,6,6)}$, kocki $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ ter $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ sta verjetnostno nevtralni, medtem ko bi s $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ najverjetneje izgubili.

Naloge

1. Pokaži, da je množica kock



Slika 2. Kocke $K_{(3,3,2,9,10,11)}$, $K_{(0,1,7,8,8,8)}$, $K_{(5,5,6,6,6,6)}$ in $K_{(4,4,4,4,12,12)}$.

množica netranzitivnih kock, v kateri prva premaga drugo, druga tretjo, tretje četrto ter četrta prvo.

2. Pokaži, da je relacija *'skoraj zanesljivo premaga'* na množici kock

$$K_{(3,3,5,5,7,7)},\ K_{(2,2,4,4,9,9)}, K_{(1,1,6,6,8,8)}$$

netranzitivna.

   (a) Pokaži, da obstaja magični kvadrat velikosti 3, v katerem nastopajo števke, ki določajo števila pik na teh treh kockah.

3. Poišči množico treh kock z lastnostjo netranzitivnosti, ki imajo vsoto pik po vseh ploskvah enako 42.

Matej Mlakar

Literatura

[1] Savage Jr., R.P. *The paradox of nontransitive dice.* American Mathematical Monthly 101, Maj 1994, stran 429–436.

[2] Peterson, I. 1997. *Mailbox: Magic dice; Monopoly and contra dancing.* Science News Online at
`htpp://www.sciencenews.org/sn_arc97/12_20_97/mathland.htm`

Rešitve nalog so na str. 46.