

Celoletne priprave na Mednarodno matematično olimpijado



LUKA HORJAK

→ Že vrsto let Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira Državno tekmovanje srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja, na katerem se dijaki potegujejo za zlata priznanja. A to je za najboljše tekmovalce le vrh ledene gore – skozi leta potekajo tudi izbirni procesi za mednarodna tekmovanja, na katerih se pomerijo najboljši mladi umi s celega sveta. V letošnjem šolskem letu bo potekal izbor za štiri mednarodna tekmovanja za srednješolce.

Mednarodna matematična olimpijada (MMO) je najstarejša mednarodna olimpijada iz znanja. Njeni začetki segajo v leto 1959, ko je Romunija organizirala tekmovanje za države tedanjega vzhodnega bloka. Od takrat je bila organizirana vsako leto z izjemo 1980. Na letošnji izvedbi je sodelovalo kar 618 tekmovalcev iz 112 držav, kar je največ na tovrstnih olimpijadah. 65. MMO bo prihodnje leto gostilo mesto Bath v Veliki Britaniji, potekala pa bo med 11. in 22. julijem. V 6-člansko ekipo se bodo uvrstili tekmovalci, ki bodo na treh izbirnih testih in državnem tekmovanju zbrali največ točk.

Na Srednjeevropski matematični olimpijadi (SMO) sodeluje 10 srednjeevropskih držav. Na tekmovanje se znova uvrsti 6 tekmovalcev, ki se niso uvrstili na MMO in niso v zadnjem letniku srednje šole. S tem je udeležba na mednarodnih tekmovanjih omogočena večjemu številu dijakov, poleg tega pa služi še kot dodatna motivacija in priprava na MMO v prihajajočem šolskem letu. Prihodnjo izvedbo SMO bo konec avgusta gostilo mesto Szeged na jugu Madžarske.



SLIKA 1.

Slovenska ekipa na 64. Mednarodni matematični olimpijadi v Chibi na Japonskem

Dodatno spodbudo dekletom nudi Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO). Olimpijada je namenjena spodbujanju deklet k udeležbi na matematičnih tekmovanjih, kot je MMO, saj tam predstavljajo le okoli 10 % tekmovalcev. Nanjo se uvrstijo najboljša štiri dekleta glede na rezultate prvih dveh izbirnih testov. Letošnjo izvedbo smo organizirali v Sloveniji, prihodnje leto pa bo tekmovalke med 11. in 17. aprilom gostila Gruzija v mestu Tskaltubo.

Zadnje mednarodno tekmovanje v znanju matematike je Romunski matematični master (RMM), ki poteka vsako leto v glavnem mestu Romunije, Bukarešti. Znano je po zelo zahtevnih nalogah. 15. RMM bo potekal med 26. februarjem in 2. marcem. Zaradi zgodnjega termina tekmovanja bosta za izbor štiričlanske ekipe štela 1. izbirni test in dodatne kvalifikacije za to tekmovanje.





Ker naloge na zgoraj naštetih olimpijadah pogosto zahtevajo znanje, ki presega srednješolski učni načrt, skozi leto organiziramo priprave na tekmovanja. Te večinoma vodimo študenti, ki smo se v preteklosti uvrstili na zgoraj našeta tekmovanja in smo zato zelo dobro seznanjeni s koncepti, ki so potrebni za uspeh.

Priprave potekajo v obliki 4-urnih predavanj, s katerimi začnemo v oktobru, potekajo pa do konca šolskega leta. Skupaj tako organiziramo med 10 in 15 predavanj. Pri nekaterih organiziramo za tekmovalce, ki so na pripravah v preteklosti, že sodelovali še višji nivo. V preteklem šolskem letu smo obravnavali naslednje teme:

- preštevanja, načelo vključitev in izključitev, Dirichletov princip
- usmerjeni koti
- modularna aritmetika
- indukcija
- funkcijske enačbe
- potenca točke na krožnico
- polinomi
- invariante in dvojno štetje
- Menelajev, Cevov in pascalov izrek, homotetija
- neenakosti
- diofantske enačbe
- rekurzija, kombinatorne igre
- zaporedja

Na višjem nivoju so bile teme naslednje:

- teorija grafov
- izogonalna konjugiranost in simediane
- lema o dvigu eksponenta
- konstrukcije v teoriji števil
- napredne metode v funkcijskih enačbah
- inverzija
- rodovne funkcije

Na spletni strani www.dmfa.si/Tekmovanja/-MaSSA/Priprave.aspx je objavljen seznam letošnjih priprav, ki se sproti posodablja. Tam lahko najdete tudi gradiva, rezultate izbirnih testov in druge informacije o poteku priprav in tekmovanj.

Olimpijske ekipe določimo z izbirnimi testi. Vsako leto organiziramo tri teste, za to šolsko leto so predvideni datumi 16. 12. 2023, 15. 2. 2024 in 11. 5. 2024. Da so ta v izvedbi čim bolj podobna samim mednarodnim tekmovanjem, trajajo kar 4 ure

in pol, pri čemer ima prvi test 5 nalog, preostala dva pa po 3. Nekaj preteklih izbirnih testov in natančna merila izbora lahko najdete na zgornji spletni strani.



SLIKA 2.

Tekmovalke med pisanjem Evropske deklishe matematične olimpijade v Portorožu

Naloge, ki so pojavljajo na izbirnih testih in mednarodnih tekmovanjih, se zelo razlikujejo od šolskih. Pogosto morajo tekmovalci sami odkriti postopek, ki vodi do rešitve. Pri tem so jim v pomoč nekateri izreki, kot je naslednji:

Dirichletov princip: Če $n + 1$ predmetov razvrstimo v n škatel, bosta zagotovo v neki škatli vsaj dva predmeta.

Dirichletov princip je zelo enostaven koncept. Presenetljivo pa se da aplicirati na zelo zanimive načine, s katerimi lahko rešimo tudi zahtevne naloge.

Naloga: Naj bo n naravno število in $X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ množica, za katero velja $|X| = n + 1$. Dokaži, da obstajata taki različni števili $x, y \in X$, da velja $x \mid y$ ali $y \mid x$.

Rešitev. Oglejmo si najprej, kaj se zgodi pri majhnih vrednostih števila n . Take primere je zelo lahko analizirati, pogosto pa lahko pri tem najdemo kak vzorec, ki nam pomaga pri reševanju splošnih primerov. Pri $n = 1$ seveda velja $X = \{1, 2\}$, in ker velja $1 \mid 2$, je pogoj res izpolnjen. Pravzaprav lahko opazimo še več; če velja $1 \in X$, je pogoj zagotovo izpolnjen, saj 1 deli vsako naravno število.

Pri $n = 2$ velja $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Denimo, da števili x in y iz navodila naloge ne obstajata. Če velja $3 \in X$, dobimo tako pogoj $1 \notin X$, saj $1 \mid 3$. Ker pa $2 \mid 4$, je lahko v X le eno izmed teh števil. Pravzaprav smo množico $\{1, 2, 3, 4\}$ razdelili na množici $\{1, 3\}$ in $\{2, 4\}$, iz vsake izmed teh pa lahko vzamemo največjemu eno število. To po Dirichletovem principu ni mogoče.

Dobili smo torej idejo za splošno rešitev. Če množico $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ razdelimo na n množic, pri čemer se v vsaki množici vsa števila med seboj delijo, lahko po Dirichletovem principu najdemo taki števili x in y . Poskusimo poiskati te množice. V prvi množici naj bo število 1. Ker 1 deli vsako naravno število, dodatnih omejitev nimamo, zato lahko dodamo kar število 2. Naslednje število, ki je deljivo tako z 1 kot z 2, je 4. Če nadaljujemo na tak način, bomo v prvo množico dali natanko potence števila 2.

V drugi množici naj bo najmanjše število, ki ga še nismo uporabili – 3. Podobno kot prej ugotovimo, da je naslednje število, ki je deljivo s 3, enako 6, naslednje 12 in tako dalje. V drugi množici bodo tako natanko števila oblike $3 \cdot 2^k$ za nek $k \in \mathbb{N}_0$.

Ta razmislek lahko posplošimo – če je a najmanjše število v množici, so vsa ostala oblike $a \cdot 2^k$. V vsaki množici se tako res vsa števila delijo paroma. Preostane nam torej še to, da preštejemo, koliko množic smo s tem dobili.

Oglejmo si spet najmanjša števila v vsaki množici. Če je katero izmed njih sodo, denimo $2a$, je vsebovano tudi v množici, ki vsebuje število a . To ni mogoče, saj smo pri konstrukciji vedno izbirali najmanjša števila, ki jih še nismo razdelili v množice. Vsa najmanjša števila množic so torej liha. Ni težko videti, da so ta tudi v različnih množicah. Zapišemo lahko torej

$$\{1, 2, \dots, 2n\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\} \cup \{3, 6, 12, \dots, 2n-1\}.$$

Množico smo tako razdelili na n delov (toliko je namreč lihih števil manjših od $2n$). Po Dirichletovem principu množica X vsebuje dva elementa x in y iz istega dela, za katera seveda velja $x \mid y$ ali $y \mid x$.

Če vas zanima, kako se spopasti s podobnimi nalogami, ali pa morda celo uvrstitev v katero izmed olimpijskih ekip, vabljeni, da se nam pridružite na letošnjih pripravah!

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	4	13			
11			11		
14				16	
		8			12
			8		
			15		

↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

7	8				
5	3				
	5	3			
		8	5	1	
			8	3	
				4	

× × ×

× × ×