Lehr- und Uebungsbuch

der

Arithmetik

für

Unterrealschulen.

Von

Dr. Franz Močnik,
k. k. Landesschulinspector.

Dreizehnte Auflage.

Prag, 1870.
Verlag von F. Tempsky.

Druck von Heinr. Mercy in Prag.

Vorwort zur zwölften Auflage.

Das vorliegende Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für Unterrealschulen, welches bisher von dem k. k. Schulbücher-Verlage in Wien unter dem Titel „Anleitung zum Rechnen für die I. und II. Classe der Unterrealschulen“ herausgegeben wurde, nun aber in den Verlag der durch ihre Schulbücherliteratur vortheilhaft bekannten Firma F. Tempsky in Prag übergieng, weiset gegen die früheren Ausgaben in Bezug auf Inhalt und Darstellung wesentliche Veränderungen nach, die größtentheils durch die freundlichen Mittheilungen achtbarer Fachmänner angeregt, dem Buche eine größere praktische Brauchbarkeit sichern dürften.

Manches wurde kürzer und bündiger gefasst, dagegen anderes dem Bedürfnisse der Realschule gemäß erweitert und neu aufgenommen.

Die Hunderttheilung unseres neuen Guldens, sowie die bevorstehende Einführung der metrischen Maße und Gewichte machen es wünschenswert, dass sich die Schüler sobald als möglich die Sicherheit im Decimalrechnen aneignen. Ich habe darum hier die Decimalzahlen nicht als Brüche von einer besonderen Form hingestellt und, wie es in der früheren Ausgabe geschah, erst nach der Lehre von den gemeinen Brüchen eingereiht, sondern dieselbe als bloße Erweiterung unseres Zahlensystems behandelt und das Rechnen in Decimalzahlen sogleich mit dem Rechnen in ganzen Zahlen in entsprechende Verbindung gebracht, wodurch neben dem leichteren Verständnis auch eine bedeutende Zeitersparnis erzielt wird.

Durch die Aufnahme der Elemente der allgemeinen Arithmetik hoffe ich einem vielseitig ausgesprochenen Wunsche begegnet zu haben. Die bezüglichen Lehren sind hier möglichst leichtfasslich, zugleich aber in genauem Einklange mit dem gegenwärtigen Standpunkte ihrer wissenschaftlichen Behandlung gegeben.

Besondere Aufmerksamkeit ist der zweckmäßigen Auswahl der Aufgaben gewidmet worden, so dass diese nicht nur durch Reichhaltigkeit die gründliche Einübung der theoretischen Lehren zu sichern geeignet sind, sondern auch durch die Rücksichtnahme auf die mannigfaltigsten Rechnungsfälle des praktischen Lebens anregend erscheinen. Bei den Aufgaben über die Procentrechnung habe ich den Unterschied zwischen der Rechnung von Hundert und der Rechnung auf und in Hundert mit der nöthigen Schärfe hervortreten lassen.

Möge sich das Buch auch in dieser neuen Ausgabe bei Fachgenossen einer wohlwollenden Aufnahme erfreuen!

Graz, im December 1866.

Der Verfasser.

Vorwort zur dreizehnten Auflage.

Diese Auflage unterscheidet sich von der zwölften hauptsächlich nur dadurch, dass darin bei den Uebungsaufgaben auf die metrischen Maße und Gewichte eine ausgedehntere Rücksicht genommen wurde.

Graz, im Juli 1869.

Der Verfasser.

Einleitung.

§. 1.

Jedes einzelne Ding heißt eine Einheit. Kommen mehrere gleiche Dinge vor, so wird die Angabe, wie viele es sind, Zahl genannt.

Eine Zahl, welche bloß die Menge der in ihr enthaltenen Einheiten ausdrückt, heißt eine unbenannte Zahl; eine Zahl dagegen, welche nicht nur die Menge, sondern auch die Art der Einheiten angibt, eine benannte Zahl. Fünf ist eine unbenannte, fünf Gulden eine benannte Zahl.

Jede Einheit kann man in gleiche Theile theilen, oder sich doch in gleiche Theile getheilt vorstellen. Eine Zahl, welche die Einheit selbst ein- oder mehrmal enthält, heißt eine ganze Zahl; eine Zahl, welche nur einen Theil oder mehrere gleiche Theile der Einheit enthält, eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. Eins, drei sind ganze Zahlen; ein Viertel, drei Viertel sind Brüche.

§. 2.

Aus der Einheit durch fortgesetztes Hinzufügen der Einheit neue Zahlen bilden, heißt zählen. Die dadurch entstehenden Zahlen eins, zwei, drei, vier, fünf, ... nennt man die natürliche Zahlenreihe.

Die Zahlen werden mündlich durch Zahlwörter ausgedrückt, schriftlich durch besondere Zeichen, Ziffern, dargestellt.

Eine übersichtliche Anordnung aller verschiedenen Zahlen, welche den Zweck hat, mit wenigen Namen und Ziffern jede beliebig große Zahl darzustellen, heißt ein Zahlensystem.

Aus gegebenen Zahlen mittelst vorgeschriebener Veränderungen andere neue Zahlen bestimmen, heißt rechnen. Die Zahl, welche durch die Rechnung gefunden wird, nennt man das Resultat der Rechnung.

Die Lehre vom Rechnen heißt Rechenkunst oder Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Die vier Grundrechnungsarten mit unbenannten ganzen Zahlen und Decimalbrüchen.

I. Das dekadische Zahlensystem.

§. 3.

1. Dekadische ganze Zahlen.

Das dekadische Zahlensystem beruhet auf dem Grundsatze, dass je zehn niedrigere Einheiten als eine neue höhere Einheit angenommen und als solche mündlich und schriftlich dargestellt werden.

Man zählt dabei, von der Einheit ausgehend, mit den bekannten Zahlwörtern: eins, zwei, . . . bis zehn. Zehn ursprüngliche Einheiten, auch Einer genannt, betrachtet man als eine neue höhere Einheit und nennt sie einen Zehner. Zehn Zehner bilden eben so eine Einheit der nächst höheren Ordnung, ein Hundert; zehn Hunderte bilden ein Tausend, u. s. w. Jede Zahl ist nun aus Einern Zehnern, Hunderten, . . . zusammengesetzt und wird vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viele Einer, Zehner, Hunderte, . . . sie enthält.

Zur schriftlichen Darstellung der Zahlen genügen die Ziffern für die ersten neun Zahlen, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und die 0 (Null), welche anzeigt, dass von einer bestimmten Ordnung keine Einheiten vorhanden sind. Man nimmt nämlich an, daſs jede Ziffer, wenn man von der Rechten an zählt, an der erſten Stelle Einer, an der zweiten Zehner, an der dritten Hunderte, an der vierten Tauſende u. ſ. w. bedeutet, überhaupt an jeder folgenden Stelle nach links zehnmal ſo viel gilt, als an der nächſtvorhergehenden Stelle nach rechts. Z. B. die Zahl dreißigtauſend einhundert fünf und neunzig enthält 3 Zehntauſende, 0 Tauſende, 1 Hundert, 9 Zehner und 5 Einer, ſie wird demnach geſchrieben: 30195.

§. 4.

2. Decimalbrüche.

Wenn man in einer nach dem dekadiſchen Geſetze geſchriebenen Zahl von der Linken gegen die Rechte zurückſchreitet, ſo bedeutet jede folgende Ziffer nach rechts nur den zehnten Theil von dem, was ſie an der vorhergehenden Stelle nach links gilt, und man kommt ſchließlich auf die Einer herab. Es iſt nun nicht nöthig, die Einer als die niedrigſte Ordnung von Einheiten anzunehmen; man kann einen Einer in zehn gleiche Theile theilen, und einen ſolchen Theil, ein Zehntel, als eine noch niedrigere Einheit betrachten, ferner den zehnten Theil von einem Zehntel, d. i. ein Hundertel, als die Einheit einer noch niedrigeren Ordnung anſehen, und ſo durch fortgeſetzte Theilung zu beliebig kleinen Zahleneinheiten hinabſteigen.

Uebereinſtimmend damit kann man nach dem dekadiſchen Geſetze auch die Ziffernreihe von den Einern noch weiter rechts fortſetzen, ſo daſs eine Ziffer an der erſten Stelle nach den Einern Zehntel, an der zweiten Hundertel, an der dritten Tauſendtel, . . . bedeutet; nur muß dabei durch ein beſtimmtes Zeichen angedeutet werden, wo die Einer aufhören und die Zehntel beginnen. Dieſes Zeichen iſt ein Punkt, welcher nach den Einern rechts oben geſetzt wird und der Decimalpunkt heißt. Die Ziffern links vor dem Decimalpunkt bedeuten Ganze, die Ziffern rechts nach demſelben heißen Decimalen. Es bedeutet ſonach 7777777·777777 folgendes:

Ganze							Decimalen					
7	7	7	7	7	7	**7**·	7	7	7	7	7	7
Millionen	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	**Einer**	Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel	Milliontel

Zahlen, welche Decimalen enthalten, werden Decimalzahlen oder Decimalbrüche genannt.

Eine Decimalzahl wird ausgesprochen, wenn man zuerst die Ganzen und dann entweder jede einzelne Decimale für sich, oder alle Decimalen in ihrer Gesammtheit ausspricht, z. B. 59·234 wird gelesen: 59 Ganze, 2 Zehntel, 3 Hundertel, 4 Tausendtel; oder 59 Ganze, 234 Tausendtel.

Man lese folgende Decimalbrüche: 3·14159, 13·9085, 37·008, 17·0137, 0·8193, 0·70103, 0·00036, 0·0020805.

Beim Anschreiben der Decimalzahlen schreibt man zuerst die Ganzen an, setzt den Decimalpunkt und dann die einzelnen Decimalen nach der Ordnung ihres Stellenwertes. Wenn einzelne Decimalstellen fehlen, so werden dieselben durch Nullen ausgefüllt, z. B. 48 Ganze, 8 Tausendtel, 9 Zehntausendtel schreibt man an 48·0089. Enthält eine Zahl bloß Decimalen, so schreibt man an die Stelle der Ganzen links vor dem Decimalpunkte eine Null, z. B. 8 Zehntel wird geschrieben 0·8.

Man schreibe folgende Decimalbrüche an: a) 3 Ganze, 9 Zehntel; b) 20 Ganze, 4 Zehntel, 3 Hundertel, 7 Tausendtel; c) 35 Ganze, 208 Tausendtel; d) 4 Ganze, 17 Zehntausendtel; e) 83tausend 5 Ganze, 7 Hundertel, 9 Milliontel; f) 8 Tausendtel; g) 71 Zehntausendtel; h) 2tausend 13 Milliontel.

Der Wert eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man ihm rechts eine oder mehrere Nullen anhängt, weil dabei die einzelnen Ziffern ihren früheren Stellenwert beibehalten. Es ist also: 5·3 = 5·30 = 5·300 = 5·300000.

Wenn man in einem Decimalbruche den Decimalpunkt 1, 2, 3, . . . Stellen weiter gegen die Rechte rückt, so erhält dadurch jede einzelne Ziffer, also auch der ganze Bruch, bezüglich einen 10, 100, 1000, . . . mal größeren Wert.

Man vergleiche die Werte der Decimalzahlen 3·856, 38·56, 385·6, 3856.

Wenn man in einem Decimalbruche den Decimalpunkt 1, 2, 3,. . . Stellen weiter gegen die Linke rückt, so erhält dadurch jede Ziffer desselben, also auch der ganze Bruch bezüglich einen 10, 100, 1000 . . . mal kleineren Wert.

Man vergleiche die Werte der Decimalzahlen 976·2, 97·62, 9·762, 0·9762, 0·09762.

Die hier angeführten Ziffern heißen arabische. Nebst diesen werden machmal auch die römischen Ziffern gebraucht. Die Römer hatten nur sieben Zahlzeichen: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500 und M = 1000, und drückten mit denselben durch gehörige Nebeneinanderstellung alle Zahlen nach folgenden Grundsätzen aus: 1. Steht nach einem Zahlzeichen ein gleiches oder ein niedrigeres, so werden ihre Werte zusammengezählt, z. B. XX = 20, VI = 6, LXXVIII = 78. 2. Steht ein niedrigeres Zahlzeichen vor einem höheren, so wird der Wert des höheren um den Wert des niedrigeren vermindert, z. B. IV = 4, XL = 40, XCIX = 99.

II. Das Addieren.

§. 5.

Addieren heißt eine Zahl suchen, welche zwei oder mehreren gegebenen Zahlen zusammen genommen gleich ist. Die gegebenen Zahlen heißen Summanden; auch Posten; die Zahl, welche man durch die Addition findet, wird Summe genannt.

Um zu einer Zahl 5 eine zweite 3 zu addieren, schreitet man in der natürlichen Zahlenreihe von 5 aus um 3 Einheiten vorwärts; die Zahl 8, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Das Zeichen der Addition ist + (mehr); z. B. 5 + 3 = 8 bedeutet: 5 mehr 3 ist gleich 8, oder: 5 und 3 ist 8.

§. 6.

Addition in ganzen Zahlen.

Da nur Gleichartiges zusammengezählt werden kann, so wird die Addition mehrerer Summanden verrichtet, wenn man die Einer zu den Einern, die Zehner zu den Zehnern u. s. w. addiert und die Summe, wenn sie einziffrig ist, unter dieselbe Stelle setzt; wenn sie aber zweiziffrig ist, nur die Einer davon unter jene Stelle schreibt, die Zehner dagegen zu den Einheiten der nächst höheren Ordnung hinzuzählt, z. B.

Summanden	315	2 E. + 1 E. + 5 E. = 8 Einer,
	691	8 Z. + 9 Z. + 1 Z. = 18 Z. = 1 H. + 8 Z.
	582	1 H. + 5 H. + 6 H. + 3 H. = 15 Hundert.
Summe	1588	

Aufgaben.*)

1) Man zähle von 1 angefangen mit 2 aufwärts, nämlich $1 + 2 = 3$, $3 + 2 = 5$, $5 + 2 = 7$, $\ldots 99 + 2 = 101$. Ebenso zähle man mit 2 aufwärts von 2 bis 100.

2) Man zähle mit 3 aufwärts von 1 bis 100, von 2 bis 101, von 3 bis 102.

3) Auf gleiche Weise zähle man

a) mit 4 aufwärts von 1, 2, 3, 4 anfangend;
b) mit 5 aufwärts von 1, 2, 3, 4, 5;
c) mit 6 aufwärts von 1, 2, 3, 4, 5, 6;
d) mit 7 aufwärts von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;
e) mit 8 aufwärts von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;
f) mit 9 aufwärts von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

4) Wenn man in der natürlichen Zahlenreihe von 4 aus um 3 Einheiten und dann von 3 aus um 4 Einheiten fortschreitet, zu welcher Zahl gelangt man in jedem Falle? Was folgt daraus?

---

*) Die hier und weiter unten folgenden Aufgaben sind, so weit es die Einfachheit der Zahlen zuläßt, im Kopfe auszuführen.

5) 37 + 9 + 1 + 2 + 2 + 6 + 6 + 3 + 5 = ?

6) Man addiere die folgenden Zahlen a) in wagrechter, b) in senkrechter Richtung

1 +	3 +	5 +	7 +	9 +	8 +	6 +	4
3 +	4 +	5 +	6 +	7 +	8 +	9 +	10
5 +	9 +	3 +	7 +	1 +	5 +	9 +	3
7 +	4 +	1 +	8 +	5 +	2 +	9 +	6
9 +	8 +	7 +	6 +	5 +	4 +	3 +	2

7) 37 + 40 = ? 8) 59 + 68 = ? 9) 149 + 45 = ?

10) 135 + 316 + 508 = ? 11) 410 + 728 + 105 = ?

12)	13)	14)
2818	12345	53609
3207	3672	2196
4539	5070	13248
		992

Es ist vortheilhaft, beim Addieren größerer Zahlen weder das Wörtchen **und**, noch die einzelnen zu addierenden Ziffern auszusprechen, sondern sogleich nur die jedesmalige Summe zu nennen. So wäre bei der letzten Aufgabe zu sprechen: 2, 10, 16, 25; 2, 11, 15, 24; 2, 11, 13, 14, 20; u. s. w.

15) 420985 + 373612 + 90708 + 123071 = ?

16) 10924 + 5108 + 371248 + 915 + 30924 = ?

17) 35784 + 9876 + 8765 + 7654 + 1234 + 35197 = ?

18) 378459 + 2091358 + 1708205 + 197850 + 9387193 = ?

19) Man addiere die Zahlen 7954261, 3087, 19343780, 24793, 5400738, 3507901, 8979800, 57934207.

20)	21)	22)
3157842	9358930	63593065
1308215	7514398	468208
93084	15813477	1234567
17521938	460045	9876543
743150	1293714	980
9807	81389659	749309

23) Man addiere folgende Zahlen a) in wagrechter, b) in senkrechter Richtung:

793458 +	1237924 +	9321 +	9851367 +	705231
85371 +	805186 +	572913 +	82190 +	680409
134513 +	9083 +	74528 +	62804 +	19375
618727 +	129158 +	193409 +	708356 +	937248
9369 +	72578 +	385396 +	2503124 +	56409

§. 7.

Addition in Decimalbrüchen.

Man schreibt die gleichnamigen Stellen unter einander, nämlich Ganze unter Ganze, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel, u. s. w., und verrichtet die Addition wie bei ganzen Zahlen von der niedrigsten Stelle angefangen; der Decimalpunkt erscheint in der Summe gerade unter den Decimalpunkten der Summanden, z. B.

1)
45·36 4 + 9 + 6 = 19 Hund. = 1 Zehnt. 9 Hund.
13·59 1 + 7 + 5 + 3 = 16 Zehnt. = 1 Ganz. 6 Zehnt.
28·74 1 + 8 + 3 + 5 = 17 Einer = 1 Zehner 7 Ein.
87·69 u. s. w.

2)
0·5
0·25
0·125
0·0625
0·9375

Hier denkt man sich die leeren Stellen in den Summanden mit Nullen besetzt.

3)
38·625
13·05
8·125
59·8

Die Nullen am Ende der Summe werden weggelassen.

Aufgaben.

1)		2)		3)	
1)	65·3	2)	0·83	3)	18·25
	29·9		0·59		7·9
	77·7		0·66		0·086

4) 749·574 + 76·856 + 9·237 = ?

5) 224·56 + 395·085 + 17·8 + 9·76 = ?

6) 4·3125 + 2·13567 + 7·0084 + 51·383 + 12.1567 = ?

7) 35·148 + 13·856 + 25·377 + 33·209 + 28.185 = ?

8) 0·3784 + 0·4785 + 16 + 0·2345 + 24 + 1·475 = ?

9) Welche Zahl ist um 127·75 größer als 293·125?

10) Man addiere drei Zahlen, deren erste 17·834, die zweite um 4·83 größer als die erste, und die dritte um 5·712 größer als die zweite ist.

11) Die Summe 3·123 + 4·234 + 5·345 + 6·456 soll um 7·567 vermehrt werden.

12) 5·347 + 12·84156 + 37·19584 + 0·937856 = ?

13) 29·3456 + 35·98765 + 213·8485 + 38·456 = ?

14) Man verrichte die Addition folgender Zahlen in senkrechter und in wagrechter Richtung:

35.246	+	13·73593	+	8·74612	+	0·513678	+	277·63
8·37947	+	35·1236	+	10·57809	+	5·21936	+	9·1578
40·897654	+	87·930857	+	9·269	+	7·843976	+	844·5
39·0784	+	9 764318	+	14·79345	+	2·653339	+	83·427
0·246937	+	5·665524	+	7·83156	+	0·97	+	12·139

III. Das Subtrahieren.

§. 8.

Von einer Zahl eine andere *subtrahieren* heißt, eine neue Zahl angeben, welche zu der zweiten Zahl addiert, die erste Zahl als Summe gibt. Die Zahl, von welcher subtrahiert werden soll, heißt *Minuend*, die Zahl, welche subtrahiert werden soll, heißt *Subtrahend*; die neue Zahl, die man als Resultat der Subtraction erhält, heißt *Differenz* oder *Rest*.

Um von der Zahl 7 die Zahl 4 zu subtrahieren, darf man nur in der natürlichen Zahlenreihe von 7 aus um 4 Einheiten zu rückschreiten; die Zahl 3, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Differenz.

Das Zeichen der Subtraction ist — (weniger); z. B. 7 — 4 = 3 wird gelesen: 7 weniger 4 ist gleich 3, oder: 4 von 7 bleibt 3.

§. 9.

Subtraction in ganzen Zahlen.

Da nur Gleichartiges subtrahiert werden kann, so werden bei der Subtraction zweier Zahlen die Einer von den Einern, die Zehner von den Zehnern, u. s. w. subtrahiert, indem man zu der jedesmaligen Ziffer des Subtrahends so viel addiert, dass man die darüber stehende Ziffer des Minuends, oder wenn diese kleiner ist, die nächste höhere Zahl erhält, welche an der Stelle der Einer jene Ziffer hat; die dazu addierte Zahl wird an der betreffenden Stelle als Rest angeschrieben, z. B.

1)	785	2)	4045
	613		338
	172		3707

Man spricht hier im ersten Beispiele: 3 und **2** ist 5, 1 und **7** ist 8, 6 und **1** ist 7, und schreibt die jedesmal addierte Ziffer unter die subtrahierten Stellen. — Im zweiten Beispiele spricht man: 8 und **7** ist 15, bleibt 1; 1 und 3 ist 4, und **0** ist 4; 3 und **7** ist 10, bleibt 1; 1 und **3** ist 4.

Aufgaben.

1) Man zähle von 100 abwärts, indem man wiederholt 2 wegnimmt; nämlich 100, 98, 96, . . .

2) Welche Zahlen erhält man, wenn man in der natürlichen Zahlenreihe a) von 100, b) von 99, c) von 98 aus immer um 3 Einheiten zurückschreitet?

3) Man zähle

a) mit 4 abwärts von 100, 99, . . 97;
b) mit 5 „ „ 100, 99, . . 96;
c) mit 6 „ „ 100, 99, . . 95;
d) mit 7 „ „ 100, 99, . . 94;
e) mit 8 „ „ 100, 99, . . 93;
f) mit 9 „ „ 100, 99, . . 92.

4) $50 - 20 = ?$ 5) $78 - 30 = ?$

6) $63 - 35 = ?$ 7) $58 - 7 + 5 - 9 = ?$

8) $109 - 5 + 2 - 8 - 7 = ?$

9) $918 - 235 = ?$ 10) $1057 - 809 = ?$

11)	3156	12)	7910	13)	6093
	917		2578		5465

14) $53162 - 4875 = ?$ 15) $90084 - 71085 = ?$

16) $932413 - 18975 = ?$ 17) $123456 - 34567 = ?$

18) $234578 + 309875 + 198756 - 381409 = ?$

19) Um wie viel ist $8345097 + 1920784 + 764883$ größer als $976342 + 2398745 + 139038$?

20) Man bestimme den Unterschied zwischen $78903456 - 62987491$ und $33557799 - 11446688$.

21) Man subtrahiere von den bei den Additionsaufgaben 12) bis 23) in §. 6. erhaltenen Summen nach und nach die einzelnen Summanden.

22)

Von der Zahl	731542
sind zu subtrahieren die Zahlen	82591
	73859
	127986
	231578
Rest	215528.

Wenn von einer gegebenen Zahl zwei oder mehrere Zahlen zu subtrahieren sind, so addiert man diese Zahlen und zieht ihre Summe von der gegebenen Zahl ab. Man kann übrigens sehr leicht mit der Addition der abzuziehenden Zahlen zugleich die Subtraction von dem gegebenen Minuend verbinden. Man addiert nämlich zuerst die Einer aller zu subtrahierenden Zahlen und sucht, wie viel man zu ihrer Summe 24 noch addieren müße, um die nächste höhere Zahl zu bekommen, welche an der Stelle der Einer 2 hat, d. i. um 32 zu erhalten; dann verfährt man ebenso mit den Zehnern, Hunderten u. s. w. Dabei spricht man: 8, 14, 23, 24 und **8** ist 32, bleibt 3; 3, 10, 18, 23, 32 und **2** ist 34, bleibt 3; u. s. f.

23) $94789384 - (12356938 + 39279 + 64082641 + 876450) = ?$

24) 13902080 — (4809376 + 623219 + 907456 + 193 + 18765) = ?

25) 8341709 — (763583 + 937846 + 293588 + 3084415) = ?

26) 98765432 — (1234567 + 8901234 + 5678901 + 2345678) = ?

§. 10.

Subtraction in Decimalbrüchen.

Beim Subtrahieren der Decimalbrüche schreibt man den Subtrahend so unter den Minuend, dass Ganze unter Ganze, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel, u. s. w. zu stehen kommen, und subtrahiert dann wie bei ganzen Zahlen die gleichnamigen Stellen von der niedrigsten angefangen; der Decimalpunkt erscheint in dem Reste genau unter den übrigen Decimalpunkten. Z. B.

1) 27·442	2) 218·746	3) 5·85
18·568	0·85	5·2356
8·874	217·896	0·6144

Aufgaben.

1) 0·735 — 0·274 = ? 2) 25·78 — 19·9 = ?

3) 62·4 — 9·88 = ? 4) 10 — 9·75 = ?

5) 14·879 — 8 = ? 6) 1 — 0·3842 = ?

7) 37·784 — 15·384 = ? 8) 37·857 — 28 = ?

9) 55·3124 — 13·8751 = ? 10) 12·9472 — 8·315 = ?

11) 333·78 — 108·333 = ? 12) 7·8 — 0·3589 = ?

13) 0·673042 — 0·374998 = ? 14) 36 — 0·00795 = ?

15) 823·25463 — 788·9367 = ?

16) 3·95207 — 2·8973176 = ?

17) Um wie viel ist 7·8939 größer als 6·935?

18) Um wie viel ist 37·485 kleiner als 40?

19) Welche Zahl ist um 3·3333 kleiner als 12·8333?

20) Um wie viel ist die Summe 3·149 + 8·71938 + 10·08 größer als 9·79345 + 1·859559?

21) $371{\cdot}756 - (58{\cdot}3475 + 108{\cdot}99 + 73{\cdot}8055) = ?$

22) $(5{\cdot}34562 + 9{\cdot}07834) - (4{\cdot}30855 + 2{\cdot}19931 + 0{\cdot}86603 + 3{\cdot}14159) = ?$

IV. Das Multiplicieren.

§. 11.

Multiplicieren heißt eine Zahl so oft als Summand setzen, als eine zweite Zahl anzeigt. Die Zahl, welche öfters als Summand gesetzt werden soll, heißt Multiplicand, die Zahl, welche angibt, wie oft der Multiplicand zu setzen ist, heißt Multiplicator; und das Resultat der Multiplication wird Product genannt. Multiplicand und Multiplicator werden beide auch mit dem gemeinschaftlichen Namen Factoren bezeichnet.

Das Zeichen der Multiplication ist $\times$ oder . (multipliciert mit, mal); z. B. $5 \times 3 = 15$ oder $5.3 = 15$ wird gelesen: 5 multipliciert mit 3 ist gleich 15, oder: 3mal 5 ist 15.

Eine Zahl kann auch mit mehreren anderen Zahlen multipliciert werden, indem man dieselbe zunächst mit einer dieser Zahlen multipliciert, das erhaltene Product mit einer zweiten, u. s. w.

Es ist für das Product gleichgiltig, in welcher Ordnung man die Factoren mit einander multipliciert.

$5.3 = 3.5 = 15;$

$2.3.4 = 2.4.3 = 3.2.4 = 3.4.2 = 4.2.3 = 4.3.2 = 24.$

§. 12.

Multiplication in ganzen Zahlen.

I. Wenn der Multiplicator einziffrig ist, so wird die Multiplication verrichtet, wenn man jeden Bestandtheil des Multiplicands so oftmal nimmt, als der Multiplicator Einheiten enthält, d. i. wenn man zuerst die Einer, dann die Zehner, . . des Multiplicands mit dem einziffrigen Multiplicator multipliciert. Z. B.

5mal 7 E. sind 35 E. = 3 Z. + 5 E.

437 × 5 — 5mal 3 Z. sind 15 Z., und 3 Z. sind 18 Z. = 1 H. + 8 Z.

2185 — 5mal 4 H. sind 20 H., und 1 H. sind 21 H.

Aufgaben.

1) Man nehme jede der Zahlen 1, 2, 3, ... 8, 9 folgeweise 1mal, 2mal, 3mal, ... 8mal, 9mal, und präge diese Producte dem Gedächtnisse ein (das Einmaleins).

2) $8 \times 2 + 9 \times 5 = ?$ 3) $9 \times 8 - 6 \times 7 = ?$

4) $5 \times 6 + 8 \times 1 - 7 \times 3 = ?$

5) $7 \times 7 - 8 \times 3 + 4 \times 6 = ?$

6) $72 \times 9 = ?$ 7) $59 \times 8 = ?$ 8) $66 \times 7 = ?$

9) $603 \times 8 = ?$ 10) $281 \times 9 = ?$ 11) $765 \times 6 = ?$

12) $1823 \times 3 = ?$ 13) $8035 \times 6 = ?$

14) $7085 \times 8 = ?$ 15) $91072 \times 5 = ?$

16) $134793 \times 2 = ?$ 17) $35709 \,.\, 7 = ?$

18) $218354 \,.\, 6 = ?$ 19) $836214 \,.\, 4 = ?$

20) Man multipliciere 93876432 nach der Reihe mit den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

21) Die Zahl 70859164 soll mit 2, das Product wieder mit 2, das neue Product noch mit 2, und das erhaltene Product wieder mit 2 multipliciert werden.

22) Ebenso multipliciere man 1936787 8mal nach einander mit 3, eben so oft mit 4, 5, 6, 7, 8, 9.

23) Wie viel ist $78945621 \times 8 + 3109207 \times 9$?

24) Um wie viel ist 35701924×7 größer als 40189370×6?

25) Man multipliciere jede der Zahlen a) 9170854, b) 5891303, c) 77026539, d) 4789155 mit jeder der Zahlen p) 5, q) 6, r) 8, s) 9.

II. Wenn der Multiplicator 10, 100, 1000, ... ist, so wird die Multiplication verrichtet, wenn man jeder Ziffer des Multiplicands einen 10mal, 100mal, 1000mal, ... höhern Wert ertheilt, welches geschieht, indem man der Zahl rechts 1, 2, 3, ... Nullen anhängt. Z. B.

1) $\frac{346 \times 10}{3460}$ 2) $\frac{584 \times 100}{58400}$ 3) $\frac{870 \times 1000}{870000}$

Aufgaben.

1) $3165 \times 10 = ?$ 2) $8279 \times 10 = ?$

3) $7843 \times 100 = ?$ 4) $38100 \times 100 = ?$

5) $319 \times 10000 = ?$ 6) $5700 \times 1000 = ?$

7) Man multipliciere 39572 mit 10, 100, 1000, 10000, 100000.

8) $93572 \times 1000 + 7845 \times 100 + 134790 \times 10 = ?$

9) $27483 \times 10000 + 93586 \times 10 - 96583 \times 100 = ?$

10) $74309 \times 100000 - (859638 \times 100 + 9307825 \times 10) = ?$

III. Wenn der Multiplicator irgend eine mehrziffrige Zahl ist, so muß man den Multiplicand so oftmal nehmen, als alle einzelnen Bestandtheile des Multiplicators Einheiten enthalten; man wird also den Multiplicand mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators multiplicieren, und jedem dadurch erhaltenen Theilproducte denjenigen Namen geben, welchen die Ziffer des Multiplicators hat, mit welcher multipliciert wurde. Dieses letztere wird durch gehöriges Anschreiben der Theilproducte erreicht, wenn man nämlich jedes folgende Product um eine Stelle weiter gegen die Rechte oder gegen die Linke zu schreiben beginnt, je nachdem man mit der höchsten oder mit der niedersten Ziffer des Multiplicators zu multiplicieren anfängt.

Es ist gleichgiltig, in welcher Ordnung man mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators multipliciert, wenn nur die Theilproducte in der gehörigen Stellung unter einander geschrieben werden.

Z. B.

538 × 247		oder 538 × 247
107600	200mal	1076
21520	40mal	2152
3766	7mal	3766
132886		132886

Aufgaben.

1) $73 \times 23 = ?$ 2) $87 \times 36 = ?$

3) $185 \times 19 = ?$ 4) $649 \times 57 = ?$

5) 7013 × 84 = ?   6) 12345 × 69 = ?
7) 35482 . 98 = ?   8) 345 . 123 = ?
9) 5290 . 617 = ?   10) 9204 . 729 = ?
11) 78431 . 924 = ?   12) 12345 . 678 = ?
13) 109207 . 3014 = ?   14) 75084 . 2395 = ?
15) 398594 . 57396 = ?   16) 381475 . 873589 = ?

17)	18)	19)
347 × 800	4560 × 29	80500 × 650
277600	4104	4025
	912	4830
	132240	52325000

20) 91234 . 78000 = ?   21) 70800 × 371 = ?
22) 35800 . 978000 = ?   23) 83109000 × 93857 = ?

24) Man multipliciere 617385 a) mit 67, b) mit 386, c) mit 7083, d) mit 91304.

25) Wie viel ist 31416mal a) 29905, b) 83442, c) 179355, d) 658409?

26) Man multipliciere jede der Zahlen
a) 63335, b) 129370, c) 768904, d) 570123 mit jeder der Zahlen
p) 987, q) 6130, r) 34048, s) 786231.

27) 91347835 × 1235709 × 3248193 = ?

28) 56789 × 12345 × 67890 × 45678 = ?

29) 780523 × 935386 + 238719 × 3709300 = ?

30) 468029 × 783507 — 389785 × 690528 = ?

§. 13.

Multiplication in Decimalbrüchen.

I. Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, 1000, . . . multipliciert, indem man jeder Ziffer desselben einen 10, 100, 1000 . . . mal so großen Wert gibt, d. i. wenn man den Decimalpunkt 1, 2, 3, . . . Stellen weiter nach rechts rückt. Z. B.

4·567 × 10	1·23 × 100	0·08 × 1000
45·67	123	80

II. Decimalbrüche werden mit ganzen Zahlen und mit einander multipliciert, indem man ohne Rücksicht auf den Decimalpunkt wie bei ganzen Zahlen multipliciert, im Producte aber von der Rechten gegen die Linke so viele Decimalstellen abschneidet, als deren in beiden Factoren zusammen enthalten sind. Z. B.

a)	b)	c)	d)
83 × 45	0·83 × 45	83 × 4·5	0·83 × 4·5
332	3 32	332	3 32
415	415	41 5	415
3735	37·35	373·5	3·735

In a) werden die ganzen Zahlen 83 und 45 multipliciert; das Product 3735 ist eine ganze Zahl.

In b) sind 83 Hundertel 45mal zu nehmen; man erhält daher 3735 Hundertel, d. i. 37 Ganze 35 Hundertel; folglich muß man im Producte 3735 2 Decimalstellen abschneiden.

In c) hat man 83 mit 4·5 d. i. mit dem 10ten Theile von 45 zu multiplicieren, wodurch man auch nur den 10ten Theil von 3735, also 3735 Zehntel, d. i. 373 Ganze 5 Zehntel erhält; im Producte 3735 muß also hier 1 Decimalstelle abgeschnitten werden.

In d) hat man 83 Hundertel mit dem 10ten Theile von 45 zu multiplicieren, wodurch man auch nur den 10ten Theil von 3735 Hunderteln, also 3735 Tausendtel d. i. 3 Ganze 735 Tausendtel erhält; hier muß man also im Producte 3735 3 Decimalstellen abschneiden.

Aufgaben.

1) 17·085 × 10 = ? 2) 3·14159 × 100 = ?

3) 7·4105 × 1000 = ? 4) 0·956 × 100000 = ?

5) 8·9456 × 3 = ? 6) 0·9876 × 90 = ?

7) 17·345 × 9 = ? 8) 7·157 × 800 = ?

9) Die Zahl 15·893 soll mit 10, 100, 1000, 10000, 100000 multipliciert werden.

10) 0·1284 × 87 = ? 11) 129·23 × 58 = ?

12) 33·841 × 37 = ? 13) 13·837 × 531 = ?

14) 0·128 × 625 = ? 15) 3·1567 × 950 = ?
16) 5·19635 × 225 = ? 17) 13·9078 × 609 = ?
18) 783 × 0·09 = ? 19) 35·27 × 0·4 = ?
20) 7·8413 × 1·7 = ? 21) 5·462 × 2·36 = ?
22) 3·5 × 1·72 = ? 23) 7125 × 0·03 = ?
24) 783 × 2·83 = ? 25) 17·835 × 0·71 = ?
26) 7·314 × 3·25 = ? 27) 41·23 × 0·52 = ?
28) 0·315 × 0·017 = ? 29) 6·521 × 0·082 = ?
30) 23·915 × 9·93 = ? 31) 345·123 × 0·617 = ?
32) 6·451 × 80·01 = ? 33) 0·4992 × 0·327 = ?
34) 2·3456 × 6·789 = ? 35) 0·3561 × 0·1375 = ?
36) 15·3287 × 57·89 = ? 37) 72·2286 × 0·00938 = ?
38) 6·21046 × 0·01753 = ?
39) Wie viel beträgt 3·125 × 1·09 + 7·378 × 0·037?
40) Um wie viel ist 37 × 3·957 größer als 12·935 × 7·108?
41) Wie groß ist der Unterschied zwischen 72·834 × 0·123 + 125·37 und 33·891 × 1·793 — 3·1974 × 8·3?
42) 810·214 × 0·09573 = ?
43) 3·141593 × 785·72 = ?
44) 781642 × 0·81593 = ?
45) 399·1345 × 14·8875 = ?
46) 9·51643 × 92857 = ? 47) 0·28719 × 0·53644 = ?
48) 545·0013 × 0·011378 = ?
49) Das Product zweier gleicher Factoren wird Quadrat genannt. Man bestimme das Quadrat von a) 2·14, b) 42·58, c) 0·17345, d) 5·8078.
50) Das Product dreier gleicher Factoren wird Cubus genannt. Man bestimme den Cubus von a) 0·15, b) 6·34, c) 15·38, d) 0·7925.
51) 0·0000956 × 27851 = ?
52) 8·236755 × 193·57 = ? 53) 23·8945 × 97513 = ?
54) 24·94407 × 285·263 = ?
55) 1·37938 × 248571 = ?
56) 355·35914 × 31·579 + 85·2056 × 24·806 = ?
57) 93·62853 × 6450 — 82·517425 × 5349 = ?

§. 14.

Rechnungsvortheile bei der Multiplication.

1. Wenn der Multiplicator die Ziffer 1 enthält.

Anstatt:

$$\begin{array}{r} 3421 \times 41 \\ \hline 3421 \\ 13684 \\ \hline 140261 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56073 \times 1\cdot08 \\ \hline 56073 \\ 4485\ 84 \\ \hline 60558\cdot84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43\cdot12 \times 123 \\ \hline 43\ 12 \\ 8\ 62\ 4 \\ 1\ 29\ 36 \\ \hline 53\ 03\cdot76 \end{array}$$

kann man mit Vermeidung alles unnützen Wiederholens auch schreiben:

$$\begin{array}{r} 3421 \times 41 \\ 13684 \\ \hline 140261 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56073 \times 1\cdot08 \\ 4485\ 84 \\ \hline 60558\cdot84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43\cdot12 \times 123 \\ 8\ 62\ 4 \\ 1\ 29\ 36 \\ \hline 53\ 03\cdot76 \end{array}$$

Wenn daher im Multiplicator die Ziffer 1 vorkommt, so läſst man den Multiplicand ungeändert als das erste Theilproduct stehen, multipliciert ihn dann nur mit den andern geltenden Ziffern des Multiplicators, und schreibt die dadurch erhaltenen Theilproducte gehörig darunter. Z. B.

$$1)\ \begin{array}{r} 521892 \times 17 \\ 3653244 \\ \hline 8872164 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 35\,018 \times 0\cdot501 \\ 17509\ 0 \\ \hline 17544\cdot018 \end{array}$$

$$3)\ \begin{array}{r} 87061 \times 541 \\ 348244 \\ 435305 \\ \hline 47100001 \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{r} 30\cdot786 \times 7\cdot106 \\ 215\ 5\ 02 \\ 1\ 84716 \\ \hline 218\cdot7\ 65316 \end{array}$$

5) $842\cdot18 \times 61 = ?$ 6) $341528 \times 1\cdot0009 = ?$

7) $241578 \times 1758 = ?$ 8) $1\cdot23456 \times 7\cdot819 = ?$

9) $3975684 \times 3\cdot125 = ?$ 10) $83600 \times 3921 = ?$

11) $7935\cdot839 \times 1\cdot49 + 2708\cdot437 \times 9\cdot41 = ?$

12) $3792\cdot708 \times 3416 - 93\cdot7854 \times 8140 = ?$

2. Wenn der Multiplicator 11 ist.

Nach dem eben angeführten Vortheile hat man

$$\begin{array}{r} 381307{\cdot}924 \times 11 \\ 3813079\ 24 \\ \hline 4194387{\cdot}164 \end{array}$$

woraus hervorgeht, daſs man bei der Multiplication mit 11 das Product unmittelbar aus dem Multiplicand ableiten könne, wenn man die erste Ziffer rechts ungeändert anschreibt, dann zur ersten Ziffer die zweite, zur zweiten die dritte, und überhaupt zu jeder Stelle die nächst höhere addiert. Z. B.

1) $\begin{array}{r} 178423\ .\ 11 \\ \hline 1962653 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 3840{\cdot}72\ .\ 11 \\ \hline 42247{\cdot}92 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 907865\ .\ 110 \\ \hline 99865150 \end{array}$

Man spricht im ersten Beispiele: 3 ist 3; 3 und 2 ist 5; 2 und 4 ist 6, 4 und 8 ist 12, bleibt 1; 1 und 8 ist 9, und 7 ist 16, bleibt 1; 1 und 7 ist 8, und 1 ist 9; 1 ist 1.

4) 358972 . 11 = ? 5) 791·8046 . 1·1 = ?

6) 3156793 . 11 + 3911784 . 19 = ?

7) Man multipliciere 975875 mit 11, das Product wieder mit 11, und das neue Product noch einmal mit 11.

8) Man multipliciere jede der Zahlen 123·04516, 397506, 30975·46, 98307261 9mal nach einander mit 11.

3. **Wenn sich der Multiplicator in zwei Factoren zerlegen läſst, mit denen man leicht multiplicieren kann,** so multipliciert man den Multiplicand zuerst mit einem Factor, und das Product dann noch mit dem andern Factor. Z. B.

1) $\begin{array}{r} 9206 \times \underline{49} \\ \hline 64442\quad 7.7 \\ \hline 451094 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 219{\cdot}56 \times \underline{33} \\ \hline 658{\cdot}68\quad 3.11 \\ \hline 7245{\cdot}48 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 12345 \times \underline{270} \\ \hline 111105\quad 9.30 \\ \hline 3333150 \end{array}$

4) 78054 . 36 = ? 5) 513·942 . 6·3 = ?

6) 70694 . 5600 = ? 7) 8715·4637 . 24 = ?

8) 21953790 × 72 + 5907738 × 11 = ?

9) 437819×56+38429×54+197568×64 = ?

10) 1345693×350+99755×48—722034×450 = ?

4. **Wenn der Multiplicator aus lauter Neunern**

besteht, mit Ausnahme der Einer, welche auch eine andere Ziffer sein können.

Hat man die Zahl z. B. mit 992 zu multiplicieren, so multipliciert man mit 1000; dadurch bekommt man um das 8fache zu viel, man muß daher die Zahl noch mit 8 multiplicieren, und die 8fache Zahl von der 1000fachen subtrahieren.

Wenn also der Multiplicator bis auf die Einer lauter Neuner enthält, so addiert man zu den Einern so viel, dass man 100, 1000, ... bekommt, hierauf multipliciert man den Multiplicand zuerst mit 100, 1000, ... dann mit der zu den Einern hinzuaddierten Zahl, und subtrahiert das zweite Product von dem ersten. Z. B.

1) $7{\cdot}534\,67_{000} \times \underline{994}$ $\quad$ 2) $150234_{0000} \times \underline{9997}$

$\underline{\quad 45\,20802} \quad 1000-6$ $\qquad\quad$ $\underline{450702} \quad 10000-3$

$7\,489{\cdot}46198$ $\qquad\qquad$ 1501889298

3) $132459 \,.\, 98 = ?$ $\quad$ 4) $1750370 \,.\, 99600 = ?$

5) $312{\cdot}6547 \times 995 = ?$ $\quad$ 6) $8356139 \times 99930 = ?$

7) $595146 \times 9992 - 372819 \times 9900 = ?$

8) $757583 \times 72 + 164792 \times 993 = ?$

9) $4082635 \times 970 - 246897 \times 88 = ?$

5. Wenn der Multiplicator aus lauter Neunern bestehet, mit Ausnahme der höchsten Ziffer, welche nicht nothwendig 9 sein muß.

Vermehrt man einen solchen Multiplicator um 1, so erhält man eine Zahl, welche aus einer einzigen geltenden Ziffer mit rechts folgenden Nullen besteht. Wenn man nun den Multiplicand mit dieser Zahl multipliciert, so ist das Product um das 1fache des Multiplicands, d. i. um den Multiplicand selbst zu groß; man muß daher von jenem Producte noch den Multiplicand subtrahieren. Z. B.

1) $5682 \times \underline{399}$ $\quad$ 2) $7{\cdot}296 \times \underline{5999}$

$\underline{2272800} \quad 400-1$ $\qquad$ $\underline{43776\,000} \quad 6000-1$

2267118 $\qquad\qquad$ $43768{\cdot}704$

Hier wird der oben stehende Multiplicand von dem darunter gesetzten 400fachen, oder 6000fachen desselben subtrahiert.

3) 5431678 × 59 = ? 4) 4809156 × 7·99 = ?
5) 13·4967 × 3999 = ? 6) 9173046 × 8990 = ?
7) 993798 × 9999 = ? 8) 24688134 × 29 = ?
9) 5344266 × 199 + 954680 × 6999 = ?
10) 39246817 × 19 + 24910333 × 25 = ?
11) 6072554 × 9991 — 8526631 × 599 = ?
12) 83119274 × 79 + 1945076 × 13 — 5833556 × 11 = ?
13) 67890·123 × 499 — (1234·567 × 150 + 98765·4 × 1·07) = ?

V. Das Dividieren.

§. 15.

Eine Zahl durch eine andere dividieren heißt, eine neue Zahl bilden, welche mit der zweiten Zahl multipliciert, die erste Zahl als Product gibt. Die Zahl, welche dividiert werden soll, heißt Dividend, die Zahl, durch welche dividiert wird, heißt Divisor; die neue Zahl, welche man durch die Division erhält, heißt Quotient.

Das Zeichen der Division ist : (dividiert durch); z. B. 8 : 2 = 4 wird gelesen: 8 dividiert durch 2 ist gleich 4, oder: 2 ist in 8 4mal enthalten. Ein Quotient wird manchmal auch dadurch angezeigt, dass man den Divisor unter den Dividend, und zwischen beide einen Strich setzt, z. B. $\frac{3}{5}$ wird gelesen: 3 dividiert (gebrochen) durch 5, oder 3 5tel. Diese Form des Quotienten wird die Bruchform genannt.

§. 16.

Division in ganzen Zahlen.

Das Dividieren wird bei der höchsten Stelle des Dividends begonnen. Man nimmt im Dividend so viele höchste Ziffern, als ihrer der Divisor hat, oder um eine mehr, wenn die mit jenen Ziffern gebildete Zahl kleiner als der Divisor ist, als ersten

Theildividend an, und dividiert diesen durch den Divisor, wodurch man die erste und höchste Ziffer des Quotienten erhält. Multipliciert man dann mit dieser Ziffer des Quotienten den Divisor, subtrahiert das Product von dem ersten Theildividende und setzt zu dem Reste die nächst niedrigere Ziffer des Dividends dazu, so bildet diese Zahl den zweiten Theildividend, welcher durch den Divisor dividiert, die zweite Ziffer des Quotienten gibt. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man alle Ziffern des Dividends in Rechnung gezogen hat. Z. B.

1) 936 : 3 — 212   9 H. : 3 = 3 H.; 3 Z. : 3 = 1 Z. 6 E. : 3 = 2 E.

2) 4579 : 8 — $572\frac{3}{8}$ Man spricht: 8 in 45 5mal, bleibt 5; 8 in 57 7mal, bleibt 1; 8 in 19 2mal, bleibt 3. Man erhält also 572 als Quotienten und 3 als Rest, welcher noch durch 8 zu dividieren ist; 1 in 8 gleiche Theile getheilt, gibt 1 Achtel, 3 in 8 gleiche Theile getheilt, gibt also 3 Achtel $= \frac{3}{8}$: man muß also im Quotienten zu der ganzen Zahl 572 noch den Bruch $\frac{3}{8}$ hinzufügen.

3) 4731 : 83 = 57
415
581
581
= = =

Da 83 in 47 nicht enthalten ist, so nimmt man 473 als ersten Theildividend. 83 in 473 (versuchsweise 8 in 47) ist 5mal enthalten; 5mal 83 ist 415, von 473 subtrahiert, bleibt 58; 58 Z. = 580 E. und 1 E. dazu, sind 581 E. 83 in 581 (8 in 58) ist 7mal enthalten; 7mal 83 ist genau 581; es bleibt also kein Rest.

4) 98648 : 418 = 236
1504
2508
= = =

Die Theilproducte aus dem Divisor und der jedesmaligen Ziffer des Quotienten werden gewöhnlich sogleich während des Multiplicierens von den betreffenden Theildividenden subtrahiert und bloß die Reste angeschrieben. Man spricht: 418 in 986 (4 in 9) ist 2mal enthalten; 2mal 8 ist 16, und **0** ist 16, bleibt 1; 2mal 1 ist 2, und 1 ist 3, und **5** ist 8; 2mal 4 ist 8, und **1** ist 9. Zum Reste 150 kommt 4 herab; 418 in 1504 (4 in 15) ist 3mal enthalten: 3mal 8 ist 24, und **0** ist 24, bleibt 2; 3mal 1 ist 3, und 2 ist 5, und **5** ist 10, bleibt 1; 3mal 4 ist 12, und 1 ist 13, und **2** ist 15; u. s. f.

Wenn der Divisor 10, 100, 1000, . . . ist, so wird die Division verrichtet, wenn man vom Dividend rechts 1, 2, 3,... Ziffern abschneidet; die links bleibenden Ziffern bilden den Quotienten, die rechts abgeschnittenen den Rest, welcher noch durch den Divisor zu dividieren ist. Z. B.

$$\frac{98,0 : 10}{98} \qquad \frac{15,00 : 100}{15} \qquad \frac{24,637 : 1000}{24\frac{637}{1000}}$$

Aufgaben.

1) Wie oft ist enthalten

a) 2 in 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18?
b) 3 in 1, 2, 3, 4, . . . 29?
c) 4 in 1, 2, 3, 4, . . . 39?
d) 5 in 1, 2, 3, . . . 49?
e) 6 in 1, 2, 3, . . . 59?
f) 7 in 1, 2, 3, . . . 69?
g) 8 in 1, 2, 3, . . . 79?
h) 9 in 1, 2, 3, . . . 89?

2) Wie oft ist enthalten a) 2 in 20, b) 3 in 36, c) 5 in 85, d) 6 in 96, e) 7 in 84, f) 8 in 104?

3) Wenn man 1 Ganzes in 2 gleiche Theile theilt, wie heißt ein solcher Theil? Wie heißt ein Theil, wenn man 1 Ganzes in 3, 4,... 8, 9, 10 gleiche Theile theilt?

Wie groß ist die Hälfte, das Drittel, Viertel, . . . Neuntel, Zehntel von den auf einander folgenden natürlichen Zahlen von 1 bis 100?

4) Man bestimme

a) 108 : 2, b) 318 : 3, c) 174 : 4, d) 615 : 5,
e) 416 : 6, f) 448 : 7, g) 912 : 8, h) 588 : 9.

5) Man dividiere durch 8 jede der Zahlen 750, 1284, 1707, 3520, 9184.

6) 57933 : 9 = ? 7) 170924 : 4 = ?
8) 915278 : 3 = ? 9) 378238 : 7 = ?
10) 1957351 : 6 = ? 11) 577306 : 8 = ?

12) Man dividiere 4950875 durch 6, die in diesem und

jedem folgenden Quotienten erhaltenen ganzen Zahlen wieder durch 6; wie groß ist der sechste Quotient?

13) 3420 : 100 = ? 14) 1235 : 10 = ?
15) 13579 : 1000 = ? 16) 708459 : 10000 = ?
17) 684 : 12 = ? 18) 4399 : 83 = ?
19) 7577 : 62 = ? 20) 15766 : 49 = ?
21) 7840 : 20 = ? 22) 25238 : 500 = ?
23) 34463 : 370 = ? 24) 451094 : 4900 = ?
25) 32768 : 128 = ? 26) 67130 : 274 = ?
27) 5639712 : 624 = ? 28) 2823150 : 1298 = ?
29) 1861704 : 3510 = ? 30) 21345738 : 72100 = ?
31) 68703705 : 105 = ?
32) 20857384 : 3004 = ?
33) 98765432 : 12345 = ?
34) 8642013570 : 56789 = ?
35) 70370088 : 25986 = ?
36) 1292671490 : 42086 = ?
37) 34639215 : 39783 = ?
38) 934215023 : 91030 = ?
39) 12345678 : 57095 = ?
40) 264808461 : 264803 = ?
41) 70251807402 : 79863 = ?
42) Man dividiere jede der Zahlen
a) 78422960, b) 41065515, c) 151466112
durch jede der Zahlen
p) 616, q) 2979, r) 43827.

§. 17.

Division in Decimalbrüchen.

I. Ein Decimalbruch wird durch 10, 100, 1000, . . . dividiert, indem man den Decimalpunkt 1, 2, 3, . . . Stellen weiter nach links rückt, weil dadurch jede Ziffer einen 10, 100, 1000, . . . mal kleineren Wert erhält. Z. B.

124·85 : 10	5·74 : 1000	83574 : 100
12·485	0·00574	835·74

II. Ein Decimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man ihn wie eine ganze Zahl dividiert, und in den Quotienten den Decimalpunct setzt, bevor man die Zehntel des Dividends in Rechnung zieht. Bleibt bei der Division ein Rest übrig, so kann man, da der Wert eines Decimalbruches durch Hinzufügen von Nullen nicht geändert wird, diesem so wie jedem folgenden Reste eine Null anhängen, und die Division fortsetzen. Z. B.

29·24 : 16 = 1·8275
13 2
44
120
80

29 Ganze dividiert durch 16 geben 1 Ganzes, und es bleiben noch 13 Ganze = 130 Zehntel; 130 + 2 = 132 Zehntel. Diese durch 16 dividiert geben 8 Zehntel, worauf noch 4 Zehntel = 40 Hundertel bleiben; 40 + 4 = 44 Hundertel. Diese durch 16 dividiert geben 2 Hundertel, und es bleiben noch 12 Hundertel = 120 Tausendtel; diese durch 16 dividiert geben 7 Tausendtel mit dem Reste 8; u. s. w.

Dasselbe Verfahren läßt sich auch bei der Division zweier ganzer Zahlen, wenn am Ende ein Rest bleibt, in Anwendung bringen. Z. B.

2783_{00} : 4
695·75

1328 : 29 = 45·7931 . . .
168
230
270
90
30
1

Geht die Division zuletzt ohne Rest auf, so ist der Quotient vollkommen genau; dieses tritt nur dann ein, wenn der Divisor 2 oder 5 oder ein Product ist, das außer 2 und 5 keine anderen Factoren enthält. Geht die Division nicht ohne Rest auf, so ist der Quotient nur angenähert, und zwar um so genauer, je mehrere Decimalen man entwickelt. Wie viele Decimalen man zu suchen hat, hängt von der Natur der Aufgabe ab. Bedeutet der Decimalbruch z. B. Gulden, und ist er das Endergebnis der ganzen Rechnung, so reicht es hin, drei Decimalen zu entwickeln; wenn aber der Quotient nicht das Endresultat der Rechnung ist, sondern es wäre damit noch eine Multiplication vorzunehmen, so müßte er in mehreren Decimalen bestimmt werden.

Wenn die Division nicht aufgeht, so muß bei fortgesetzter Rechnung einer der schon einmal übriggebliebenen Reste nothwendig wieder erscheinen, und es werden daher auch im Quotienten Ziffern, die schon einmal da gewesen sind, in derselben Ordnung wiederkehren. Z. B.

```
307 : 3 = 102·33 . . .        3 : 22 = 0·13636 . . .
 07                           30
  10                           80
   10                          140
    1                            80
                                 140
                                   8
```

Ein Decimalbruch, in welchem eine Ziffer oder eine Reihenfolge von Ziffern immer wiederkehrt, heißt ein periodischer, und die Reihe der sich wiederholenden Ziffern die Periode. In dem ersten der obigen zwei Beispiele besteht die Periode aus einer Ziffer (3), im zweiten aus 2 Ziffern (36).

Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und die letzte Ziffer derselben mit darüber gesetzten Punkten zu bezeichnen. Es ist demnach

$307 : 3 = 102{\cdot}\dot{3}$, $\qquad 3 : 22 = 0{\cdot}1\dot{3}\dot{6}$.

III. Die Division durch einen Decimalbruch kann in eine Division durch eine ganze Zahl verwandelt werden, indem man Dividend und Divisor mit 10, 100, 1000, . . . multipliciert, je nachdem der Divisor 1, 2, 3, . . . Decimalen hat. Z. B.

$126 : 0{\cdot}9 = 1260 : 9 = 140$

$$
\begin{array}{l}
5{\cdot}696 : 3{\cdot}2 = 56{\cdot}96 : 32 \\
\qquad\qquad\qquad \overline{\phantom{56{\cdot}96}} : 8 \\
\qquad\qquad\qquad 7{\cdot}12 \\
\qquad\qquad\qquad \overline{\phantom{56{\cdot}96}} : 4 \\
\qquad\qquad\qquad 1{\cdot}78
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
2{\cdot}5415 : 0{\cdot}037 = 2541{\cdot}5 : 37 = 68{\cdot}689\,.\,. \\
\qquad\qquad\qquad\quad 321 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 255 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 330 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 340 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 7
\end{array}
$$

IV. Ein anderes allgemeines Verfahren für die Division der Decimalbrüche beruhet auf folgenden Betrachtungen: Die Ziffernreihe des Quotienten hängt bloß von der Ziffernreihe des Dividends und jener des Divisors ab; man bekommt daher die auf einander folgenden Ziffern des Quotienten, wenn man im Dividend und im Divisor die Decimalpunkte ganz unberücksichtigt läſst, und die Division wie bei ganzen Zahlen verrichtet. Der Stellenwert der Ziffern ist sodann vollkommen bestimmt, wenn man den Wert der ersten oder höchsten Ziffer kennt, da der Stellenwert jeder folgenden Ziffer um das 10fache abnimmt. Bei der Division ganzer Zahlen hat bekanntlich die erste Ziffer im Quotienten denselben Stellenwert, wie die niederste Ziffer im ersten Theildividend, oder was einerlei ist, wie diejenige Ziffer, von welcher das Product aus der ersten Ziffer des Quotienten und den Einern des Divisors subtrahiert wird. Kommen nun im Divisor nebst den Ganzen auch Decimalen vor, so ändert dieses an dem Stellenwerte der ersten Ziffer in Quotienten nichts; es wird also auch da die erste Ziffer des Quotienten gleichen Stellenwert mit derjenigen Ziffer des Dividends haben, von welcher das Product aus der ersten Ziffer des Quotienten und den Einern des Divisors subtrahiert werden muß.

Es ergibt sich daher für das Dividieren der Decimalbrüche folgendes allgemeine Verfahren:

Man bestimme die erste Ziffer des Quotienten, ohne auf die Decimalpunkte Rücksicht zu nehmen. Sodann multipliciere man mit dieser Ziffer den Divisor, subtrahiere das Product von dem ersten Theildividende, und sehe, von welcher Stelle des Dividends das Product aus jener Ziffer des Quotienten und den Einern des Divisors subtrahiert wird, oder, wenn der Divisor keine Einer hat, von welcher Stelle jenes Product subtrahiert werden müßte, wenn die Einer vorhanden wären. Die erste Ziffer des Quotienten bedeutet nun Einheiten derselben Ordnung, wie die Ziffer des Dividends, von welcher das genannte Product zu subtrahieren ist. Ist diese Stelle eine Decimalstelle, so deutet man dieses durch Vorsetzung der erforderlichen Nullen mit dem Decimalpunkte an; bedeutet sie Ganze, so punktiert man alle noch folgenden ganzen Stellen und setzt dann den Decimalpunkt. Die weitere Division wird wie bei ganzen Zahlen verrichtet. Z. B.

1) 9141·2321 : 32·9 = 277·849
2561
258 2
27 93
1 612
2961
0

Da hier das Product aus der ersten Ziffer 2 des Quotienten mit den Einern 2 des Divisors von der Ziffer 1 des Dividends, welche den Wert Hunderte hat, subtrahiert wird, so bedeutet auch 2 im Quotienten Hunderte, und es müßen noch zwei ganze Stellen, Zehner und Einer, folgen, deren Stellen man vor der wirklichen Bestimmung der dahin kommenden Ziffern punktiert; die Rechnung steht daher im Anfange:

9141·2321 : 32·9 = 2 . . ·
256

Hierauf wird, ohne weiter auf die Decimalpunkte Rücksicht zu nehmen, die Division wie bei ganzen Zahlen fortgesetzt.

2) 3·4156 : 82·7 = 0·0413 . . .
1076
2490
9

Das Product aus der ersten Ziffer 4 des Quotienten und den Einern 2 des Divisors wird hier von der Ziffer 1 des Dividends, also von den Hunderteln, subtrahiert; 4 kommt daher an die Stelle der Hundertel.

3) 2·5882 : 0·123 = 21·042 . . .
125
520
280
24

Hier wird das Product aus der ersten Ziffer 2 des Quotienten mit den Zehnteln 1 des Divisors von den Einern 2 des Dividends subtrahiert; wenn daher der Divisor auch Einer enthielte, so müßte das Product derselben mit 2 von den Zehnern des Dividends subtrahiert werden; darum bedeutet die erste Ziffer 2 des Quotienten Zehner.

Aufgaben.

1) 785·34 : 100 = ? 2) 3·1415 : 10 = ?
3) 23·7 : 1000 = ? 4) 0·93 : 100 = ?
5) Man dividiere die Zahlen 3·985, 317·91, 0·87 durch 10, 100, 1000, 10000.
6) 135·873 : 9 = ? 7) 2·7835 : 5 = ?
8) 195·936 : 26 = ? 9) 0·73 : 25 = ?
10) 13 : 8 = ? 11) 3 : 7 = ?
12) 9·1415 : 16 = ? 13) 121·78 : 400 = ?
14) 168 : 3·5 = ? 15) 0·589 : 0·57 = ?
16) 12·345 : 0·0047 = ? 17) 48·45 : 0·089 ?
18) 8 : 0·123 = ? 19) 346·25 : 64·8 = ?
20) 1792·325 : 25 = ? 21) 0·9537 : 29 = ?
22) 7·256 : 0·44 = ? 23) 1739 : 48 = ?
24) 1784 : 2957 = ? 25) 12.0456 : 239 = ?
26) 38·9008 : 5·23 = ? 27) 83·087 : 5·37 = ?
28) 123·5 : 3·84 = ? 29) 9·1342 : 208·3 = ?
30) 0·3126 : 0·0134 = ? 31) 343·71 : 1·127 = ?
32) 0·8756 : 4·322 = ? 33) 137·84 : 7·91 = ?
34) 15·3678 : 0·9125 = ? 35) 0·81074 : 0·009157 = ?
36) 39562·478 : 4279 = ? 37) 5701·7926 : 3953 = ?
38) 0·2368 : 72369 = ? 39) 3781 : 387·453 = ?
40) 3783·231 : 157·286 = ?
41) 348 : 2·9156 = ? 42) 1000 : 3·45016 = ?
43) 0·0494 : 2·5786 = ? 44) 781·4 : 27·9847 = ?

§. 18.

Rechnungsvortheile bei der Division und Multiplication.

1. Durch 25 wird dividiert, wenn man das 4fache des Dividends durch 100 dividiert. Z. B.

1) 34625 : 25
1385·00

2) 153723 : 25
6148·92

3) 5930450 : 25 = ? 4) 2369·513 : 25 = ?

5) 13782376 : 25 = ? 6) 492·75186 : 25 = ?

2. Durch 125 wird dividiert, wenn man das 8fache des Dividends durch 1000 dividiert. Z. B.

1) 579625 : 125
4637·000

2) 21 579 : 125
172·632

3) 38521·63 : 125 = ? 4) 38024625 : 125 = ?

5) 3794420 : 25 + 9588037·9 : 125 = ?

3. Wenn sich der Divisor in zwei Factoren zerlegen läſst, durch welche man bequem dividieren kann, so dividiert man den Dividend zuerst durch den einen Factor, und den Quotienten noch durch den andern Factor. Z. B.

1) 466320 : 48
——— 6)
77720
——— 8)
9715

2) 330579 : 45
——— 5)
66115·8
——— 9)
7346·2

3) 49320 : 72 = ? 4) 784345 : 35 = ?

5) 100800 : 28 = ? 6) 8872472 : 56 = ?

7) 62222·202 : 63 = ? 8) 47273394 : 5·4 = ?

9) 29861·286 : 42 = ? 10) 21758·0976 : 72 = ?

4. Mit Hilfe der Division läſst sich auch die Multiplication mit 25 oder 125 sehr vortheilhaft verrichten. Statt mit 25 zu multiplicieren, multipliciert man mit 100, und divi-

diert das Product durch 4; statt mit 125 zu *multiplicieren*, wird mit 1000 multipliciert, und das Product durch 8 dividiert. Z. B.

1) $\begin{array}{l} 5986_{00} \times 25 \\ \hline 149650 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} 3795_{000} \times 125 \\ \hline 474375 \end{array}$

3) $123{\cdot}456 \,.\, 25 = ?$ 4) $7903124 \,.\, 1{\cdot}25 = ?$

5) $378{\cdot}4232 \times 125 + 13792{\cdot}057 \times 2{\cdot}5 = ?$

6) $43782695 \times 25 - 73458213375 : 125 = ?$

VI. Abgekürzte Rechnung mit Decimalbrüchen.

§. 19.

Ein Decimalbruch, welcher einen bestimmten Wert nicht völlig genau, sondern bloß *näherungsweise* darstellt, heißt ein *unvollständiger* Decimalbruch, im Gegensatze zu einem *vollständigen*, dessen Bruchstellen einen bestimmten Wert vollkommen genau ausdrücken. Wenn die Division zweier Zahlen, so viele Decimalen man auch entwickeln mag, nicht ohne Rest aufgeht, so erscheint der Quotient als ein unvollständiger Decimalbruch.

Sowohl bei vollständigen als unvollständigen Decimalbrüchen begnügt man sich die Rechnungsresultate bis auf eine bestimmte Decimalstelle genau anzugeben. Den Fehler, den man dabei durch die Weglassung der überflüssigen Decimalen begeht, pflegt man dadurch so klein als möglich zu machen, dass man die letzte beibehaltene Decimalziffer um 1 erhöht, *corrigiert*, wenn die erste wegzulassende Ziffer 5 oder größer als 5 ist, dagegen die letzte Decimalziffer unverändert läßt, wenn die erste wegzulassende Ziffer kleiner als 5 ist. So setzt man, wenn auf 3 Decimalstellen abgekürzt wird, 9·873 statt 9·87294 . . ., und 4·016 statt 4·01641 . . .

§. 20.

Abgekürzte Addition und Subtraction.

Um die Summe oder die Differenz gegebener Decimalbrüche auf weniger Stellen, als diese Brüche enthalten, anzugeben, reicht es hin, **eine** Stelle mehr zu berechnen, als verlangt werden, und dann die letzte Ziffer wegzulassen, nachdem darnach die vorhergehende Ziffer richtig gestellt wurde. Z. B.

auf 3 Stellen			auf 4 Stellen	
5·178	4239		3·9742	634
7·342	1361		1·0583	9148
8·574	3076		2·9158	7 . . .
21·094	8 . . .	Rest = 2·9159.		

Summe = 21·095.

§. 21.

Abgekürzte Multiplication.

Wird z. B. 5·97031 mit 24·68 multipliciert, so hat man nach der gewöhnlichen Multiplicationsmethode

5·97031	× 24·68
119406	2
23881	24
3582	186
477	6248
147·347	2508

Soll nun das Product bloß in drei Decimalen, also bis auf die Tausendtel herab, entwickelt werden, so ist die hier rechts des Striches dargestellte Rechnung überflüssig, und man wird, um dieselbe zu ersparen, mit jeder Ziffer des Multiplicators nur jene höheren Ziffern des Multiplicands multiplicieren müssen, deren Producte auf die Stellen Einfluss haben, die im Producte verlangt werden. — Wenn man mit 2 Zehnern multipliciert, so wird man, um Tausendtel zu erhalten, offenbar bei der Ziffer 3 des Multiplicands, welche Zehntausendtel bedeutet, zu multiplicieren anfangen; denn 0·0003 × 20 = 0·006. Die Ziffer 2 des Multiplicators, mit welcher der Multiplicand von der Ziffer 3 aufwärts multipliciert wird, wollen wir daher unter jene Ziffer

$$\begin{array}{r} 5{\cdot}97031 \\ 8642 \\ \hline 119406 \\ 23881 \\ 3582 \\ 478 \\ \hline 147{\cdot}347 \end{array}$$

3 setzen. — Wird mit 4 Einern multipliciert, so muß man, um Tausendtel zu erhalten, bei der Ziffer 0 des Multiplicands, welche den Werth Tausendtel hat, zu multiplicieren anfangen; man setzt daher 4 unter die Ziffer 0 des Multiplicands. Die Producte aus 4 mit den zwei niedrigsten Ziffern 1 und 3 des Multiplicands enthalten Hunderttausendtel und Zehntausendtel, welche man nicht braucht; da jedoch in dem letztern Producte 12 nur die Einer 2 Zehntausendtel, die Zehner 1 aber Tausendtel vorstellen, so darf man von diesem Producte auch nur 2 vernachlässigen, 1 aber muß zu dem Producte aus 0 und 4, welches Tausendtel gibt, als *Correctur* addiert werden. — Mit 6 Zehnteln muß man bei der Ziffer 7 des Multiplicands zu multiplicieren beginnen, um Tausendtel zu erhalten; den $0{\cdot}07 \times 0{\cdot}6 = 0{\cdot}042$; 6 wird daher unter die Ziffer 7 des Multiplicands geschrieben. — Hat man endlich mit 8 Hundertel zu multiplicieren, so wird man, um Tausendtel zu bekommen, bei der Ziffer 9 des Multiplicands zu multiplicieren anfangen; es ist nämlich $0{\cdot}9 \times 0{\cdot}08 = 0{\cdot}072$; die 8 schreibt man daher unter die Ziffer 9 des Multiplicands. Die niedrigeren Ziffern 7, 0, 3 und 1 des Multiplicands haben auf die im Producte verlangten Decimalen keinen Einfluſs, nur das Product aus 7 und 8 muß rücksichtlich der sich ergebenden Zehner berücksichtiget werden; da nämlich in 56 die Zehner 5 Tausendtel bedeuten, so muß man diese 5 Zehner, oder weil 56 näher an 60 als an 50 liegt, richtiger 6 Zehner als Tausendtel zu dem Producte aus 9 und 8 als Correctur addieren.

Betrachtet man die Stellung der Ziffern des Multiplicators bei der obigen zweiten Anschreibweise, so sieht man, daſs die Ziffer der Einer des Multiplicators, nämlich 4, unter der dritten Decimale 0, also unter derjenigen Decimalstelle des Multiplicands steht, mit welcher das Product abbrechen soll, und daſs die übrigen Ziffern des Multiplicators daneben in umgekehrter Ordnung erscheinen. Da in der letzten beizubehaltenden Stelle eines jeden Theilproductes nicht nur das Product aus den zwei übereinander stehenden Ziffern, sondern auch die Zehner des Productes mit der nächst niedrigeren Stelle des Multiplicands vorkommen, so muß man, um die niedrigste beizubehaltende Stelle genau zu erhalten, mit jeder Ziffer des Multiplicators zuerst die um eine Stelle weiter rechts stehende Ziffer des Multiplicands multiplicieren, von diesem Producte die nächsten Zehner behalten, und diese als Correctur zu dem Producte der über einander stehenden Ziffern addieren.

Bei der abgekürzten Multiplication der Decimalbrüche verfahre man daher nach folgenden Regeln:

1. Man setze die Einer des Multiplicators unter die niedrigste Decimalstelle des Multiplicands, welche noch im Producte vorkommen soll, und schreibe daneben die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Ordnung.

2. Man multipliciere mit der ersten rechts vorkommenden Ziffer des Multiplicators zuerst die um eine Stelle weiter rechts stehende Ziffer des Multiplicands, schreibe jedoch dieses Product nicht an, sondern merke sich davon nur die nächsten Zehner, welche die Correctur bilden; dann multipliciere man die gerade darüberstehende Ziffer des Multiplicands, addiere zu dem Producte die Correctur, und fange hier das abgekürzte Theilproduct zu schreiben an; nun werden nach der Reihe auch die weiter aufwärts folgenden Ziffern des Multiplicands multipliciert. Eben so multipliciert man dann mit der zweiten, dritten, . . . Ziffer des umgekehrten Multiplicators, und schreibt die einzelnen dadurch erhaltenen abgekürzten Theilproducte als Additionsposten unter einander.

3. Man addiere die abgekürzten Theilproducte, und schneide in der Summe die verlangte Anzahl Decimalen ab.

Soll die letzte Decimale im Producte vollkommen richtig sein, so entwickle man um eine Decimale mehr, als ihrer genau sein sollen.

Beispiele und Aufgaben.

1) Man entwickle das Product aus 5·21567 und 23·785 in 3 Decimalen.

5·21567 × 23·785
5 8732
10 4313
1 5647
3651
417
26
124·055

Man setzt die Einer 3 des Multiplicators unter die dritte Decimale 5 des Multiplicands, schreibt die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Ordnung und multipliciert:

2mal 7 ist 14, bleibt 1 zur Correctur; 2mal 6 ist 12, und 1 ist 13, 3 angeschrieben, bleibt 1; 2mal 5 ist 10, und 1 ist 11 u. s. w.

3mal 6 ist 18, bleibt 2 zur Correctur; 3mal 5 ist 15, und 2 ist 17, 7 angeschrieben, bleibt 1; u. s. w.

7mal 5 ist 35, bleibt 4 zur Correctur; 7mal 1 ist 7, und 4 ist 11, 1 angeschrieben, bleibt 1; u. s. w.

2) Es sollen in dem Producte aus 39·208 und 5·647 nur 2 Decimalen bestimmt werden.

39·208 × 5·647
74 65
196 04
23 52
1 57
27
221·40

Die Einer 5 des Multiplicators kommen hier unter die zweite Decimale 0 des Multiplicands.

3) Man multipliciere 245·31 mit 0·00956 so, dass im Producte 4 Decimalen erscheinen.

$245{\cdot}31_{00}$ × 0·00956
65 9000
2207 8
122 7
14 7
2·345 2

Hier kommen die Einer 0 des Multiplicators unter die vierte Decimalstelle des Multiplicands; die fehlenden Decimalen rechts im Multiplicand werden mit Nullen ersetzt.

4) Man bestimme a) vollständig, b) in 3 Decimalen das Product aus 0·08245 und 13·708.

Man entwickle folgende Producte:

5) 69·432 × 3·004 in 4 Decimalen;
6) 34·56 × 0·00207 „ 2 „
7) 23·8047 × 3·22 „ 3 „
8) 0·59384 × 0·753 „ 3 „
9) 38·0785 × 1·2345 „ 3 „
10) 6·70145 × 0·87019 „ 5 „
11) 3·1416 × 4·915 „ 2 „
12) 975·12378 × 39·13908 in 4 Decimalen;
13) 7·5319 × 0·4052 × 6·8312 in 4 Decimalen;
14) 1·05 × 1·05 × 1·05 × 1·05 in 5 Decimalen.

15) Es soll 1·04 6mal als Factor gesetzt und das Product in 6 Decimalen entwickelt werden.

16) Man setze 1·02 20mal als Factor und bestimme das Product in 6 Decimalen.

17) Man suche die Ganzen des Productes

124·256 × 308·492 × 98·073.

18) Die Zahl 1·045 soll 2mal, 3mal, 4, 5, . . . 9, 10mal als Factor gesetzt, und das jedesmalige Product in 5 Decimalen entwickelt werden.

19) Welche Producte in 6 Decimalen erhält man, wenn 1·06 8mal, 1·055 12mal, 1·0275 15mal als Factor gesetzt wird?

§. 22.

Abgekürzte Division.

Bei der abgekürzten Division der Decimalbrüche wird folgendes Verfahren angewendet:

1. Man suche die erste Ziffer des Quotienten und bestimme ihren Stellenwert. Da der Quotient eine bestimmte Anzahl Decimalen enthalten soll, so ist aus dem Stellenwerte der ersten Ziffer auch bekannt, wie viele Ziffern der verlangte Quotient im Ganzen haben soll.

2. Man schneide im Divisor von der Linken angefangen

so viele Ziffern ab, als ihrer der gesuchte Quotient enthalten soll; diese bilden den abgekürzten Divisor. Hat der Divisor nicht so viele Ziffern, als ihrer abgeschnitten werden sollen, so tritt die abgekürzte Division erst später im Verlaufe der Rechnung ein.

3. Man behalte auch im Dividend nur so viele Ziffern von der höchsten angefangen, als ihrer der Quotient haben soll, oder um eine mehr, wenn der abgekürzte Divisor in eben so vielen höchsten Ziffern des Dividends nicht enthalten ist; jene beibehaltenen Ziffern sind der abgekürzte Dividend.

4. Man dividiere nach der gewöhnlichen Divisionsweise so lange fort, bis die letzte Ziffer des abgekürzten Dividends herabgesetzt wurde; hierauf schneide man bei jeder folgenden Division die niederste noch vorhandene Ziffer des Divisors ab; die jedesmal gefundene Ziffer des Quotienten multipliciere man dann zuerst mit der höchsten im Divisor weggelassenen Ziffer und zähle die aus diesem Producte erhaltenen Zehner als Correctur zu dem ersten eigentlichen Producte dazu.

5. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis sich im Divisor keine Ziffer mehr vorfindet.

Beispiele und Aufgaben.

1) Der Quotient 83·423 : 31·586 soll in 4 Decimalen bestimmt werden.

83·423 : 3,1·,5,8,6 = 2·6411
20 251
1 299
36
4

Die erste Ziffer 2 des Quotienten bedeutet Einer; daher wird der Quotient im ganzen 5 Ziffern enthalten; es werden daher der Dividend und der Divisor, sowie sie gegeben sind, auch schon als abgekürzt zu betrachten sein. Nachdem das Product aus 2 und dem Divisor von dem Dividende subtrahiert wurde, schneidet man, anstatt dem Reste 20251 eine Null anzuhängen, im Divisor die niederste Ziffer 6 weg, und dividiert 20251 durch 3158; sodann multipliciert man: 6mal 6 ist 36, bleibt 4 zur Correctur; 6mal 8 ist 48, und 4 (Correctur) ist 52 und 9 ist 61, u. s. f.

2) Es soll der Quotient 3·79357 : 13·8594 in 3 Decimalen gesucht werden.

3·79ˌ357 : 1ˌ3·ˌ8ˌ594 = 0·274
1 02
  5

Da hier die erste Ziffer 2 des Quotienten Zehntel bedeutet, so muß man im Quotienten 3 Ziffern entwickeln; man behält daher im Dividend und im Divisor nur die drei höchsten Stellen bei und dividiert dann abgekürzt.

3) Der Quotient 12345·6352 : 0·789 soll in 3 Decimalen entwickelt werden.

12345·635ˌ2 : 0·7ˌ8ˌ9 = 1564·719
4455
 510 6
  37 23
   5 675
     152
      73

Die erste Ziffer 1 im Quotienten bedeutet Tausende; der Quotient wird daher 4 Ganze und 3 Decimalstellen, zusammen 7 Ziffern enthalten; es soll also der abgekürzte Divisor 7, und der abgekürzte Dividend 8 Ziffern haben; da aber der Divisor nur 3ziffrig ist, so tritt die abgekürzte Division erst dann ein, nachdem die niederste beibehaltene Ziffer 5 des abgekürzten Dividends in Rechnung gezogen wurde.

Man bestimme abgekürzt nachstehende Quotienten:

4)	12·37 : 3·0945	in 3	Decimalen,
5)	0·8912 : 2·59	„ 2	„
6)	372·934 : 18·723	„ 4	„
7)	44·1937 : 0·8536	„ 3	„
8)	748 : 9·13457	„ 5	„
9)	0·9275 : 0·3104	„ 4	„
10)	39·644 : 417	„ 4	„
11)	1 : 3·14159	„ 5	„
12)	309·27 : 0·0987	„ 2	„

Zweiter Abschnitt.

Das Rechnen mit benannten ganzen Zahlen und Decimalbrüchen.

I. Das Rechnen mit einnamigen Zahlen.

§. 23.

Eine benannte Zahl, welche Einheiten einer einzigen Benennung enthält, heißt einnamig; z. B. 4 Gulden. Eine benannte Zahl, welche Einheiten verschiedener Benennung enthält, die jedoch zu derselben Art gehören, heißt mehrnamig; z. B. 4 Gulden 20 Kreuzer.

Die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten einer niedrigeren Benennung eine Einheit der höheren Benennung bilden, heißt die Verwandlungszahl. Zwischen Gulden und Kreuzern ist 100 die Verwandlungszahl. Die wichtigsten Maße, Gewichte und Münzen sammt ihren Verwandlungszahlen sind im Anhange übersichtlich zusammengestellt.

Für das Rechnen mit einnamigen Zahlen gilt dasselbe Verfahren, wie für das Rechnen mit unbenannten Zahlen.

§. 24.

Addition einnamiger Zahlen.

Die Summanden müssen gleichnamig sein, welchen Namen dann auch die Summe erhält.

Aufgaben.

1) Jemand hat folgende Beträge eingenommen:

im Jänner	1345 fl.	wie viel im Ganzen?
„ Februar	810 „	
„ März	98 „	
„ April	635 „	
„ Mai	1082 „	
„ Juni	217 „	

2) Der wie vielte Tag eines gemeinen Jahres ist der 5. März, der 17. Mai, der 29. Juli, der 10. August, der 15. October, der 30. November?

3) Kaiser Franz I. wurde geboren zu Florenz im Jahre 1768, übernahm 24 Jahre alt die Regierung und starb nach einer 43jährigen Herrschaft. Wann trat er die Regierung an, wann starb er, und welches Alter erreichte er?

4) Jemand schuldet an A 3268 fl., an B 4550 fl., an C 1880 fl., an D 2736 fl.; wie viel an alle zusammen?

5) Ein Besitzer erzeugte in 10 auf einander folgenden Jahren 714, 635, 837, 512, 538, 693, 810, 855, 719, 688 Hektoliter Wein; wie viel während des ganzen Decenniums?

6) Ein Kaufmann empfängt 6 Fässer mit Oel; in dem ersten sind 540, in dem zweiten 515, in dem dritten 510, in dem vierten 520, in dem fünften 524, in dem sechsten 525 Pfund; wie viel Pfund zusammen?

7) Böhmen hat 318 Städte, 237 Märkte und 12105 Dörfer; wie viel Wohnorte zusammen?

8) Steiermark hat 827386 Joch Aecker, 54644 Joch Weingärten, 455504 Joch Wiesen, 397794 Joch Weiden und 1761667 Joch Waldungen; wie viel Joch beträgt die ganze productive Bodenfläche dieses Kronlandes?

9) Vier Capitalien tragen einzeln 112·35 fl., 87·5 fl., 53·125 fl., 188·75 fl. jährlichen Zins; wie viel zusammen?

10) Die Seiten eines Fünfeckes sind 25·124°, 32·315°, 20·25°, 17·136°, 15·248°; wie groß ist der Umfang?

11) Jemand, der bereits 27·345 Hektar Ackerfläche besitzt, kauft noch zwei Aecker von 2·378 Hektar und 3·134 Hektar; wie viel Ackergrund besitzt er nun?

12) Ein Silberarbeiter hat 2·1325, 1·772, 4·1785, 2·794 Mark Silber verarbeitet; wie viel beträgt dieses zusammen?

13)		14)		15)	
63259	Thl.	440·33	Francs	5365·83	Rubel
19068	"	2776·12	"	9791·94	"
27890	"	1275·97	"	6527·76	"
8865	"	5308·78	"	4183·68	"
19256	"	6127·09	"	1349·07	"

16) Der Bau einer Eisenbahn verursachte folgende Kosten:

für die Grundeinlösung	1808457 fl.	wie hoch belaufen sich die sämmtlichen Anlagekosten?
" den Unterbau	19344605 "	
" den Oberbau	8074726 "	
" Gebäude	2317990 "	
" Verschiedenes	456082 "	

§. 25.

Subtraction einnamiger Zahlen.

Minuend und Subtrahend müssen gleichen Namen haben, welchen dann auch der Rest bekommt.

Aufgaben.

1) Ein Kaufmann hatte an Kaffee einen Vorrath von 2175 ℔, davon verkaufte er 1405 ℔; wie viel Kaffee blieb ihm noch übrig?

2) Jemand nimmt in einem Jahre 1800 fl. ein, und gibt 1348 fl. aus; wie viel erspart er?

3) Welches Datum schreibt man am 35sten, 87sten, 104ten, 233sten, 281sten, 307ten, 360sten Tage eines Schaltjahres?

4) An einem Gebäude findet man die Aufschrift 1639, wie alt ist dieses Gebäude?

5) Die Erfindung des Papiers fällt in das Jahr 1240, jene des Schießpulvers in das Jahr 1356, jene des Fernrohres

in das Jahr 1608, und die Erfindung der Dampfmaschinen in das Jahr 1699; wie lange ist es seit jeder dieser Erfindungen?

6) Auf eine Schuld von 5345 fl. wird eine Abschlagszahlung von 1324 fl. geleistet; wie groß ist noch der Schuldrest?

7) Zwei Fässer Kaffee wiegen 1280 ℔; die Fässer für sich wiegen 44 ℔; wie viel ℔ Kaffee enthalten die beiden Fässer?

8) Ein Haus, auf welchem 3580 fl., 2300 fl., 1860 fl. und 1525 fl. Schulden lasten, wird um 10000 fl. verkauft; wie viel bleibt dem Eigenthümer nach der Tilgung aller Schulden übrig?

9) Wien zählte im Jahre 1840 357815 Einwohner, im Jahre 1857 473957; um wie viel hat die Bevölkerung Wiens in dieser Zeit zugenommen?

10) Jemand kauft eine Waare um 685·16 fl. nach 3 Monaten zahlbar, wie viel hat er dafür sogleich zu bezahlen, wenn ihm wegen der früheren Bezahlung 17·12 fl. nachgelassen werden?

11) Jemand schuldet 1382·47 fl., darauf zahlt er 785·64 fl.; wie viel bleibt er noch schuldig?

12) Eine Waare wurde um 138·35 fl. eingekauft, und um 177·38 fl. verkauft; wie viel hat man dabei gewonnen?

13) Von einem Acker, welcher 328 $\square^{0}$ misst, werden 85·25 $\square^{0}$ verkauft; wie viel bleibt noch übrig?

14) Eine böhmische Elle hat 0·762 Wiener Ellen; um wie viel ist die böhmische Elle kleiner als die Wiener Elle?

15) Der längste Tag in Wien ist 15·967 Stunden, der kürzeste 8·583 Stunden; wie groß ist der Unterschied?

16) Eine Schüssel, welche 5·387 Mark wiegt, enthält 4·488 Mark feines Silber; wie viel ist dabei Zusatz?

17) Ein Fass enthält 37·75 Hektoliter Wein; wenn nun daraus drei kleinere Fässer, von denen das erste 4·5 Hektoliter, das zweite 5·25 Hektoliter, das dritte 5·85 Hektoliter fasst, gefüllt werden, wie viel bleibt noch im großen Fasse übrig?

18) Jemand nimmt in einem Monate folgende Summen

ein: 388 fl., 295 fl., 57 fl., 167 fl., 315 fl.; dagegen gibt er aus: 237 fl., 410 fl., 117 fl.; wie groß ist der Ueberschuss der Einnahme über die Ausgabe?

Man verrichte folgende Subtractionen:

19)		20)		21)	
724·7	Ctr.	6315	Pud.	2136·52	Kilogr.
583·65	„	1908	„	978·26	„

22) Ein Londoner Pfund hat 0·80998 Wiener ℔, ein Zollpfund 0·89284, ein russisches Pfund 0·73123 Wiener ℔; wie groß ist der Unterschied zwischen je zweien dieser Gewichte?

23) Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ist 20657700 Meilen, der Venus von der Sonne 14942334, und des Merkur 7996596 Meilen; um wie viel Meilen sind die Planeten Venus und Merkur der Sonne näher, als unsere Erde?

24) Unsere Erde hat eine Oberfläche von 9261436 □Meilen; davon entfallen auf jede kalte Zone 384083 □Meilen, auf jede gemäßigte Zone 2400146 □Meilen; wie viel □Meilen umfaßt die heiße Zone?

25) In Triest wurde in 5 Jahren an Kaffee eingeführt: 180089 Ctr., 241579 Ctr., 212403 Ctr., 210402 Ctr., 233537 Ctr.; dagegen ausgeführt: 199141 Ctr., 234595 Ctr., 234535 Ctr., 209244 Ctr., 217076 Ctr. Um wie viel beträgt die ganze Ausfuhr mehr als die ganze Einfuhr?

§. 26.

Multiplication einnamiger Zahlen.

Bei der Multiplication kann bloß der Multiplicand eine benannte Zahl, der Multiplicator aber muß unbenannt sein, und das Product erhält den Namen des Multiplicands.

Aufgaben.

1) Ein Ctr. Wachs kostet 108 fl.; wie viel kosten 8 Ctr.?

8 Ctr. sind 8mal 1 Ctr., sie kosten also 8mal 108 fl.; man hat daher

108 fl. $\times$ 8 $=$ 864 fl.

2) Ein Ctr. Kupfer kostet 51 fl.; wie viel kosten 7 Ctr., 39 Ctr., 100 Ctr.?

3) Ein Bierbrauer kauft 13 Ctr. Hopfen, den Centner zu 117 fl.; wie viel hat er dafür zu bezahlen?

4) Ein Beamter hat monatlich 126 fl. Gehalt; wie hoch ist der Jahresgehalt?

5) Der Umfang eines Wagenrades ist 3 Meter; wie viel Meter legt das Rad nach 2345 Umdrehungen zurück?

6) Wie groß ist das Gewicht von 4 Cubikfuß Kanonengut, wenn 1 Cubikfuß Wasser 56 ℔ wiegt, und wenn das Kanonengut 9mal so schwer ist als das Wasser?

7) Wie viel Weizen erzeugt eine Bodenfläche von 728 Joch, wenn der Ertrag eines Joches zu 14 Metzen angenommen wird?

8) In Oesterreich werden jährlich im Durchschnitte 81926 Münzpfund Silber gewonnen; wie viel beträgt dieses, wenn man ein Münzpfund zu 45 fl. rechnet?

9) Ein Kaufmann erhält 2185 Kilogramm Waare; wie viel W. Pfund sind es, da 1 Kilogramm = 1·78568 W. Pfund ist?

10) Wie viele Ellen geben 15 ℔ Leinengarn, wenn auf 1 ℔ 11 Sträne gehen, und wenn 1 Strän 3000 Ellen enthält?

11) Böhmen umfaßt 903 □Meilen, und es kommen auf 1 □Meile 5605 Einwohner; wie groß ist die Bevölkerung von Böhmen?

12) Ein Pendel braucht zu einer Schwingung 0·87 Secunden; in wie viel Zeit wird es 20, 60, 87, 1000 Schwingungen machen?

13) Ein Pfund kostet 2·35 fl.; wie hoch kommen 9 ℔, 27 ℔, 58 ℔, 106 ℔, 238 ℔, 1118 ℔?

14) Ein Centner kostet 37·843 fl.; wie viel kosten 7·53 Ctr., 17·24 Ctr., 33·135 Ctr., 0·2475 Ctr.?

15) Eine Elle Tuch kostet 4·22 fl.; wie viel kosten 5, 9, 4·5, 12·25 Ellen?

16) Ein Dampfwagen legt stündlich 4·2 Meilen zurück; wie viel in 7, 10, 3·7, 13·75 Stunden?

17) Von einem Capitale bezieht man jährlich 65·78 fl. Zins; wie viel in 0·25, in 2·125 Jahren?

18) Ein Garten, welcher die Form eines Rechteckes hat, ist 20^0 lang und 12^0 breit; wie groß ist seine Fläche?

Wie viele $\square^0$ lassen sich nach der Länge auftragen? Wie viele solche Schichten kommen nach der Breite neben einander zu liegen? Wie viel $\square^0$ enthält also die ganze Fläche?

19) Ein Hof ist 24 Meter lang und 13 Meter breit; wie viel beträgt seine Fläche?

20) Wie groß ist die Fläche eines Quadrates, dessen Seite 18′ ist?

Man multipliciere die Länge einer Seite mit sich selbst.

21) Wie groß ist die Fläche eines Rechteckes, welches 35·34 Meter lang und 17·18 Meter breit ist?

22) Die Seite eines Quadrates ist 3·42 Meter, die Seite eines zweiten Quadrates 9·75 Decimeter; um wie viel □ Decimeter ist der Flächeninhalt des ersten Quadrates größer als der des zweiten?

23) In einem Zimmer, welches $5{\cdot}4^0$ lang und $3{\cdot}15^0$ breit ist, soll ein neuer Boden gelegt werden; wie viel wird der Boden kosten, wenn für die Quadratklafter 4·38 fl. bezahlt wird?

24) Ein Hof von 15·35 Meter Länge und 10·83 Meter Breite soll mit Platten belegt werden, wovon das Quadratmeter zu 2·48 fl. gerechnet wird; wie hoch belaufen sich die Kosten?

25) Eine Mauer hat 47′ Länge, 26′ Höhe und 2′ Dicke; wie viel Cubikfuß enthält sie?

Wie viele □′ enthält die Grundfläche der Mauer? Wie viele Cubikfuß lassen sich also auf der Grundfläche auftragen? Wie viele solche Schichten kann man nach der ganzen Höhe über einander legen? Wie viel Cubikfuß enthält demnach die Mauer?

26) Ein Zimmer ist 15 Meter lang, 9 Meter breit und 6 Meter hoch; wie groß ist der Raum dieses Zimmers?

27) Ein cylinderförmiger Kessel ist 6′ tief, seine Grundfläche beträgt 5 □′; wie viel hält der Kessel?

28) Wie groß ist der Cubikinhalt eines Würfels, dessen Seite 26 Centimeter beträgt?

Man setze die Länge einer Seite 3mal als Factor.

29) Wie viel wiegt eine vierkantige Eisenstange, welche 83″ lang, 4″ breit und 1″ dick ist, wenn der Cubikzoll Eisen 9 Loth wiegt?

30) Wie viel Maß fasst ein würfelförmiges Gefäß, dessen Seite 1·2′ ist, da 1 Cubikfuß 22·32 Maß hält?

31) Der Durchmesser eines Kreises beträgt 5 Decimeter, wie groß ist der Umfang?

Der Umfang eines Kreises wird berechnet, wenn man den Durchmesser mit 3·14, genauer mit 3·14159 multipliciert.

32) Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser a) 4·2′, b) 2·815′, c) 11·75″ beträgt?

33) Wie groß ist der Umfang einer kreisrunden Tischplatte, wenn der Durchmesser derselben 1·76 Meter ist?

34) Ein Rad hat 2·735′ im Halbmesser; wie groß ist der Umfang desselben, und wie viele Umläufe wird es machen müßen, um 1 Meile zurückzulegen?

35) Der Halbmesser eines Kreises ist 4·5 Meter; wie groß der Flächeninhalt?

Um die Fläche eines Kreises zu erhalten, multipliciert man das Quadrat des Halbmessers mit 3·14, genauer mit 3·14159.

36) Wie groß ist die Bodenfläche eines kreisrunden Sales, dessen Durchmesser 5·34° ist?

37) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser 4·3 Decimeter ist?

Die Kugeloberfläche wird berechnet, wenn man das 4fache Quadrat des Halbmessers mit 3·14159 multipliciert.

38) Eine Kugel hat a) 4·24′, b) 5·15″ im Durchmesser; wie groß ist ihre Oberfläche?

39) Ein kugelrunder Turmknopf, welcher 3·2′ im Durchmesser hat, soll vergoldet werden. Wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn für den Quadratfuß 1·7 fl. gezahlt wird?

40) Wie groß ist der Körperinhalt einer Kugel, deren Halbmesser 7·5 Decimeter ist?

Der Cubikinhalt einer Kugel wird gefunden, wenn man entweder a) die Oberfläche mit dem dritten Theile des Halbmessers, oder b) wenn man $^4/_3$ des Cubus des Halbmessers mit 3·14159 multipliciert.

41) Wie viel wiegt eine eiserne Kugel von 2·4 Decimeter Durchmesser, wenn ein Cubikdecimeter Eisen 7·8 Kilogramm wiegt?

42) Ein Wiener Metzen hält 1·9471 Cubikfuß; wie viel Cubikfuß sind 12 Metzen, 37·75 Metzen, 128·125 Metzen?

43) Ein Wiener Eimer enthält 1·792 Cubikfuß; wie viel Cubikfuß sind 33 Eimer, 130·5 Eimer, 350·095 Eimer?

44) 7845 Malt. × 57 = ? 45) 493·38 Hektolit. × 3·5 =?

46) 93·264 Quarter × 19·7 =?

47) 518·75 Tschetwert × 15·28 = ?

48) Wie viel Wiener Fuß sind 87 Meter? (Die näheren Angaben zu dieser und ähnlichen Aufgaben sind im Anhange dieses Buches nachzuschlagen; für die vorliegende Aufgabe findet man dort: 1 Meter = 3·16375 W. Fuß.)

49) Wie viel Wiener Ellen sind:

a) 324 engl. Yard? b) 508·5 sächs. Ellen?

50) Wie viel nied. österr. Maß sind:

a) 2345 baier. Maßkannen? b) 708·25 preuß. Quart?

c) 948·6 engl. Gallon? d) 1205·68 Liter?

51) Wie viel Wiener Pfund sind:

a) 7390·7 Zollpfund? b) 2958·25 türk. Oke?

52) Der Tunnel unter der Themse bei London ist 433 $^1/_3$ Yards lang; wie viel ist das in Wiener Fuß?

53) Die große Piramide bei Gizé in Aegypten hat 450 Pariser Fuß Höhe; wie viel beträgt dieses in Wiener Fuß?

54) Jemand braucht zu einem Rocke 3 $^1/_2$ preuß. Ellen 2 Ellen breites Tuch; wie viel Wiener Ellen 7 Viertel breites Tuch beträgt dieses?

55) Ein Wiener Fuß hat 0·31608 Meter, 0·97313 Pariser Fuß, 1·000719 preußische Fuß, 1·08309 bairische Fuß,

1·03713 russische Fuß; wie viel von jedem dieser Längenmaße gehen auf 10, 100, 1000, 10000, 100000 Wiener Fuß?

56) Wie viel kosten 37·3456 Centner, wenn ein Centner 41·34 fl. kostet? (3 Decimalen).

57) Ein Capital gibt jährlich 43·578 fl. Interessen; wie viel in 2·862 Jahren?

58) Ein bestimmter Raumtheil Silber ist 10·51mal, das Gold 19·36mal so schwer, als ein eben so großer Raumtheil reinen Wassers; wie schwer ist ein Cubikfuß von jedem der genannten Metalle, wenn ein Cubikfuß Wasser 56·38 W. Pfund wiegt? (2 Dec.).

59) Wie groß ist die Fläche eines Rechteckes, welches 13·175 Meter lang und 8·192 Meter breit ist? (3 Dec.)

60) Wie viel beträgt der Inhalt eines Gefäßes von 3·245′ Länge, 1·78′ Breite und 1·208′ Tiefe? (2 Dec.)

61) Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 2·1345′ ist? (3 Dec.)

62) Der Halbmesser eines Kreises ist 4·157 Decimeter; wie groß ist a) sein Umfang, b) sein Flächeninhalt? (3 Dec.)

63) Es soll a) die Oberfläche, b) der Körperinhalt einer Kugel gefunden werden, deren Halbmesser 4·123′ ist. (3 Dec.)

64) Ein Gulden Capital wächst bei einem gewissen Zinsfuße in 20 Jahren auf 2·653298 fl. an; wie hoch wächst bei der nämlichen Verzinsungsweise und in derselben Zeit ein Capital von 2315 fl. an? (3 Dec.)

65) Eine englische Silberkrone wiegt 28·276 Gramm (Schrot) und enthält 0·925 feines Silber; wie groß ist das Gewicht des darin enthaltenen feinen Silbers (Korn)? (3 Dec.)

66) Eine Wiener Mark hat 0·5613 Zollpfund; wie viel Zollpfund sind 3·0158 Wiener Mark? (4 Dec.)

67) Eine Toise = 1·949036 Meter, die Länge einer geographischen Meile beträgt nach Bessel 3807·235 Toisen; wie viel Meter hat eine geographische Meile? (2 Dec.)

8) Das preußische Quart = 1·14503 Liter, 1 Liter =

0·70685 Wiener Maß; wie viel Wiener Maß hat 1 preußisches Quart? (4 Dec.)

69) Ein Mailänder Braccio hat 0·594936 Meter, 1 Meter = 1·283468 Wiener Ellen; wie viel Wiener Ellen hat 1 Mailänder Braccio? (6 Dec.)

70) Der Flächeninhalt der österreichischen Monarchie beträgt 10816·94 österr. □Meilen; wie viel sind dieß geographische □Meilen, da 1 österreichische □Meile = 1·045102 geog. □Meilen ist? (2 Dec.)

71) Ein englischer Quarter hat 2·90781, ein römischer Rubbio 2·94465, ein preußischer Scheffel 0·54962, ein russisches Tschetwert 2·09902 Hektoliter; wie viel Wiener Metzen beträgt jedes dieser Getraidemaße? (4 Dec.)

72) Eine französische Hektare hat 2·47114 englische Acres, 3·91662 preußische Morgen, 1·80694 sächsische Acker, 0·91533 russische Dessätine; man drücke ein Wiener Joch, das 0·575464 franz. Hektaren enthält, durch die hier angeführten Feldmaße aus. (4 Dec.)

§. 27.

Division einnamiger Zahlen.

Bei der Division, wenn sie als Theilung angewendet wird, kann bloß der Dividend benannt, der Divisor aber muß unbenannt sein, und der Quotient erhält den Namen des Dividends. Wird die Division als Vergleichung angewendet, so sind Dividend und Divisor benannt, und zwar müßen sie gleichnamig sein; als Quotient erhält man eine unbenannte Zahl.

Aufgaben.

1) 9 Ctr. Zucker kosten 252 fl.; wie viel kostet 1 Ctr.?

1 Ctr. ist der 9te Theil von 9 Ctr.; daher kostet 1 Ctr. nur den 9ten Theil von 252 fl.; man hat also:

252 fl. : 9 = 28 fl.

2) 8 Eimer Wein kosten a) 112 fl., b) 136 fl., c) 176 fl., d) 232 fl.; wie hoch kommt 1 Eimer zu stehen?

3) Ein Beamter hat einen Jahresgehalt von 1890 fl.; wie viel bezieht er monatlich?

4) Eine Summe von 4560 fl. ist unter 19 Personen zu gleichen Theilen zu vertheilen; wie viel bekommt jede Person?

5) Für ein Unternehmen sind 1204 fl. erforderlich; wie viel Personen müßen daran theilnehmen, damit auf eine Person die Auslage von 14 fl. komme?

So viele Personen, als wie oft 14 fl. in 1204 fl., oder 14 in 1204 enthalten ist, also 1204 : 14 = 86
84

6) Der Umfang eines Locomotivrades ist 5 Fuß; wie viele Umdrehungen muß dasselbe machen, um eine Meile = 24000 Fuß zurückzulegen?

7) Eine Handlungsgesellschaft gewinnt 5184 fl.; wenn nun davon auf jeden Theilnehmer 324 fl. entfallen, wie viele Personen waren in der Gesellschaft?

8) Ein Joch Ackerland liefert in Böhmen 11 Metzen Getraide; wie groß ist die Ackerfläche Böhmens, wenn man das jährliche Erträgnis an Getraide mit 42769540 Metzen ansetzt?

9) 25 Ctr. kosten 304·37 fl., wie hoch kommt 1 Centner?

10) Wenn 35 Deciliter Branntwein 2·5 fl. kosten, wie viel Deciliter erhält man für 1 fl.?

11) Wenn 12 Hektoliter Gerste 48·136 fl. kosten, wie theuer ist 1 Hektoliter?

12) Ein Capital trägt jährlich 658·35 fl. Zins; wie viel Zins trägt es monatlich, wie viel täglich?

13) 58 Centner einer Waare kosten 728·2 fl.; wie viel kostet 1 Centner, wie viel 1 ℔, wie viel 1 Loth?

14) 67 Eimer Wein kosten 1058·6 fl.; wie viel kostet 1 Eimer, wie viel 1 Maß?

15) Wenn 90 Pariser Fuß 92·5947 Wiener Fuß betragen, wie viel beträgt 1 Pariser Fuß?

16) Wenn 5·135 Ctr. einer Waare 215·26 fl. kosten, wie hoch kommt 1 Ctr.?

17) Die Anlagekosten einer Eisenbahn, welche 8·12 Meilen lang ist, betragen 4206000 fl.; wie groß ist das Anlagecapital für eine Meile?

18) Eine Locomotive legte in 3·28 Stunden 14·325 Meilen zurück; wie viel Meilen legte sie bei gleichförmiger Bewegung stündlich zurück?

19) Ein Cubikdecimeter Wasser wiegt 1·786 W. ℔, ein Cubikdecimeter Quecksilber 24·29 W. ℔; wie vielmal so schwer als das Wasser ist das Quecksilber?

20) Eine Kanonenkugel legt in 1 Secunde 0·174 Meilen, die Erde in ihrer jährlichen Bewegung um die Sonne in 1 Secunde 4·113 Meilen zurück; wie vielmal ist die letztere Geschwindigkeit größer als die erstere?

21) 12 Meter Tuch kosten 48 fl., wie viel kosten 19 Meter?

12	Meter	kost.	48 fl.
1	„	„	48 fl. : 12 = 4 fl.
19	„	„	4 fl. × 19 = 76 fl.

22) 32 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 6 Tagen; in wie viel Tagen werden 24 Arbeiter mit der Arbeit fertig?

32	Arbeiter	6 Tage,
1	„	6 Tage × 32 = 192 Tage
24	„	192 Tage : 24 = 8 Tage.

23) 38 Ctr. Quecksilber kosten 5396 fl.; was kosten 73 Ctr.? (Hier bestimme man zuerst, was ein Ctr. kostet, und daraus, wie viel 73 Ctr. betragen.)

24) 75 ℔ Reis werden mit 15 fl. bezahlt; wie viel Reis bekommt man für 9 fl.?

25) 15 Pferde kommen mit einem gewissen Vorrathe an Futter 28 Wochen lang aus; wie lange kommen 21 Pferde mit demselben Vorrathe aus?

26) Wie viel kosten 47 Hektoliter Wein, wovon 28 Hektoliter mit 655·2 fl. bezahlt werden?

27) Wenn 8·07 Ctr. einer Waare mit 287·35 fl. bezahlt werden, wie hoch kommen 35·78 Ctr. zu stehen?

28) Jemand kauft 8 Eimer Wein à 15 fl., 10 Eimer à 18 fl., und 15 Eimer à 24 fl.; wie hoch kommt im Durchschnitte 1 Eimer zu stehen?

29) Ein Zimmerboden von der Form eines Rechteckes hat 257 □′ Fläche; die Länge beträgt 21′, wie groß ist die Breite?

30) Ein vierkantiges, durchaus gleich weites Gefäß enthält 2·25 Cubikmeter; wenn nun die Höhe 0·5 Meter beträgt, wie groß ist die Bodenfläche?

31) Eine Halle, welche 312″ lang und 264″ breit ist, soll mit Platten von 9″ Länge und 8″ Breite belegt werden; wie viele solcher Platten sind erforderlich?

32) Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang 10° beträgt? (§. 26, Aufg. 31).

33) Der Umfang eines Kreises ist a) 3·2°, b) 5·18′, c) 58·935 Centimeter; wie groß ist der Halbmesser?

34) Ein Speicher ist 3° 4′ 8″ lang und 3° 1′ 2″ breit; wie viel Metzen Getraide können darauf gebracht werden, wenn die Höhe des aufgeschütteten Getraides 9″ betragen soll, und ein Metzen = 1·9471 Cubikfuß ist? (3 Dec.)

35) Ein runder Tisch hat für 8 Personen Platz; wie groß ist sein Durchmesser, wenn auf eine Person 1·8′ des Umfanges gerechnet wird?

36) Wie viel kosten 3·158 Ctr. einer Waare, wovon 7 Ctr. 35 ℔ 12 Loth 200 fl. kosten?

37) Ein russischer Silberrubel wiegt 20·7315 Gramm und enthält 17·9909 Gramm feines Silber; wie viel Tausendtheile beträgt der Feingehalt dieser Münze?

38) Niederösterreich hat 79249 Joch Weingärten, und erzeugt im Durchschnitte jährlich 1810260 Eimer Wein; wie viel Eimer entfallen auf ein Joch?

39) Der österreichische Kaiserstaat hat 33787000 Einwoh-

ner, von denen im Durchschnitte 3142 auf eine österr. □Meile kommen; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Staates?

40) Unter allen österreichischen Ländern hat das Königreich Böhmen, in welchem 5059125 Einwohner auf 902·85 □Meilen leben, die dichteste Bevölkerung; am dünnsten bevölkert ist Salzburg, welches 124·52 □Meilen mit 146930 Einwohnern umfasst. Wie viele Einwohner kommen auf eine □Meile in dem erstern, wie viele in dem letztern Lande?

41) 34125 Liter : 35 = ?

42) 798·34 Ohm : 48 = ?

43) 4379·5 Oxhoft : 13·25 = ?

44) 5578 Wedro : 27·75 = ?

45) Man verwandle 718 Wiener Fuß a) in preuß. Fuß, b) in Meter, c) in engl. Fuß, d) in röm. Palmi.

46) Wie viel beträgt 1 Wiener Metzen im baierischen Maße?

47) Wie viel Zollpfund machen 37 Wiener Ctr.?

48) Wie viel beträgt ein Wiener Fuß im Längenmaße von Baiern, Frankreich, England, Rußland?

49) Wie viel beträgt eine Wiener Elle im Ellenmaße der eben genannten Länder?

50) Wie viel beträgt 1 Hektoliter im baierischen, preußischen, russischen, Schweizer Getraidemaße?

51) Wie viel beträgt eine Wiener Maß, wie viel 318·3 Eimer im Flüssigkeitsmaße der eben genannten Länder?

52) Wie viel russische Tschetwert machen 1234 sächsische Scheffel?

53) Wie viel preußische Eimer betragen 125 russische Wedro?

54) Wie viel beträgt 1 preuß. Quart im Flüssigkeitsmaße von Baiern, England, Rußland, Sachsen, Schweiz?

55) Man verwandle 7248 Hamburger Ellen in das Ellenmaß eines jeden der eben angeführten Länder.

56) Der höchste Berg in Asien, der Everest, erstreckt sich

27212 Wiener Fuß über dem Meeresspiegel; wie groß ist seine Höhe im englischen Maße?

57) Auf eine kölnische Mark = 233·855 Gramm feinen Silbers gehen 58·0387 griechische Drachmen; wie viele solcher Münzstücke gehen auf ein deutsches Münzpfund = 500 Gramm feinen Silbers? (4 Dec.)

58) Jemand ist einen Betrag von 2000 fl. nach 15 Jahren zu bezahlen schuldig; wenn er nun mit jedem Gulden, den er jetzt zahlt, 2·078928 fl. jener Schuld berichtiget, wie viel muß er sogleich zahlen, um die obige Schuld zu tilgen? (3 Dec.)

59) Aus einem deutschen Münzpfunde feinen Goldes werden 50 Kronen oder auch 68·2831 englische Sovereigns geprägt; wie viel Kronen ist ein Sovereign wert? (3 Dec.)

60) Ein Wiener Pfund beträgt 0·560012 Kilogramm oder 1·367511 russische Pfund; wie viel Kilogramm hat demnach 1 russ. Pfund? (6 Dec.)

61) Ein bairisches Tagewerk umfasst 0·61567 sächsische Acker, ein sächsischer Acker 0·96151 österreichische Joch; wie viel bair. Tagewerk ist ein österr. Joch? (5 Dec.)

II. Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

§. 28.

Das Resolvieren.

Die Einheiten einer höheren Benennung in Einheiten einer niedrigern Benennung verwandeln, heißt jene *resolvieren* oder *auflösen*.

1. *Eine einnamige Zahl wird in eine niedrigere Benennung resolviert*, indem man sie mit der entsprechenden Verwandlungszahl *multipliciert*. Z. B.

Wie viel Minuten sind 15 Stunden? — 1 Stunde hat

60 Minuten; 15 Stunden haben also 15mal 60 Minuten; folglich 15 Stunden = 15 × 60 = 900 Minuten.

2. *Die Decimalen einer einnamigen Zahl werden in Ganze der niedrigeren Benennungen resolviert*, indem man sie zuerst mit der Verwandlungszahl für die nächst niedrigere Benennung multipliciert, und mit den im Producte erhaltenen Decimalen auf gleiche Weise weiter verfährt. Z. B.

$$\begin{array}{l} 7{\cdot}625^{0} = 7^{0}\ 3'\ 9'' \\ \hline 3{\cdot}750' \\ \hline 9{\cdot}00'' \end{array}$$

3. *Eine mehrnamige Zahl wird in die niedrigste Benennung resolviert*, indem man die Einheiten der höchsten Benennung mit der Verwandlungszahl für die nächst niedrigere multipliciert, zu dem Producte die gegebenen Einheiten dieser niedrigeren Benennung addiert, und dieses Verfahren fortsetzt, bis man die niedrigste Benennung erhält. Z. B.

Wie viel Tage sind 35 Jahre 7 Monate 15 Tage?

35 × 12	kürzer	35 Jahre
70		70
420 Mon.		427 Mon.
+7 "		12825 Tage
427 × 30		
12810 Tage		
+15 "		
12825 Tage.		

Ganz einfach gestaltet sich das Resolvieren, wenn die Verwandlungszahl 10 oder 100 ist; z. B.

5 Ballen 3 Rieß = 53 Rieß, 8 Ctr. 35 Pfd. = 835 Pfd.,
65 fl. 73 kr. = 6573 kr., 19 fl. 8 kr. = 1908 kr.
15·234 Meter = 15 Meter 2 Decim. 3 Cent. 4 Millim.

Aufgaben.

1) Wie viel Zoll haben 127 Fuß?
2) Wie viel Zoll enthalten 9′, 23′, 57′ 312′?
3) Wie viel Fuß machen 7°, 13°, 54°, 359°?

4) Wie viel Quadratfuß sind 37 □°, 113 □°, 248 □°?

5) Wie viel □° betragen 8, 19, 251 Joch?

6) Wie viel □" machen 715□', 328□', 950□', 1728□'?

7) Wie viel Cubikzoll haben 35, 58, 108, 571 Cubikfuß?

8) Wie viel Centimeter sind 3, 12, 55, 102 Decimeter?

9) Wie viel □Decimeter betragen 8, 23, 87, 265 □Meter?

10) Wie viel Cubik-Decimeter sind 5, 64, 123, 704 Cubik-Meter?

11) Wie viel Liter sind 9, 37, 83, 157 Hektoliter?

12) Wie viel Maß enthalten 13, 28, 39, 99, 111 Eimer?

13) Wie viel Pfund sind 3, 13, 25, 49, 177 Centner?

14) Wie viel Gramm sind 5, 49, 87, 144 Kilogramm?

15) Wie viel Kreuzer machen 8, 17, 83, 243, 1202 fl.?

16) Wie viel Kreuzer C. M. sind 3, 11, 57, 180 Gulden C. M.?

17) Wie viel Minuten sind 25 Tage?

18) Wie viel Secunden sind 12, 27, 58 Tage?

19) Wie viel Linien sind 8, 23, 57, 133 Fuß?

20) Wie viel □" sind 5, 41, 71, 315 □°?

21) Wie viel Cubikzoll betragen 9, 17, 57, 119 Cub.-Klftr.?

22) Wie viel Cub.-Millimeter sind 4, 18, 215, 620 Cub.-Decimeter?

23) Wie viel Loth sind 15, 63, 138, 710 Centner?

24) Wie viel ℔ machen 0·78 Ctr., wie viel 0·25 Ctr., 0·125 Ctr.?

25) Wie viel Ctr. und ℔ betragen 3·73 Ctr.?

26) Wie viel Ctr., ℔, Loth und Quentchen machen 37·3758 Ctr.?

27) Wie viel fl. und kr. sind 85·42 fl.?

28) Wie viel fl. und kr. betragen 347·05 fl.?

29) Wie viel Jahre, Monate und Tage sind 5·378 Jahre, 2·157 Jahre, 1·2345 Jahre, 3·888 Jahre?

30) Wie viel Klafter, Fuß, Zoll, Linien sind 5·246°, 3·158°, 37·946°, 208·207°?

31) Wie viel □Meter, □Decimeter, □Centimeter sind 25·3475 □Meter, 31·0785 □Meter, 3·579 □Meter?

32) Wie viel Hektar und Ar sind 5·27 Hektar, 27·34 Hektar, 105·7 Hektar?

33) Wie viel Cub.°, Cub.′, Cub.″ sind 37·963 Cub.°, 127·371 Cub.°, 19·0079 Cub.°, 333·333 Cub.°?

34) Ein Jahr hat 365·24222 Tage; wie viel Stunden, Minuten und Secunden beträgt der Decimalbruch?

35) Wie viel Wiener Fuß, Zoll, Linien, Punkte hat 1 Meter?

36) Wie viel Wiener ℔, Loth und Quentchen beträgt 1 Kilogramm?

37) Oberösterreich hat 208·47 □Meilen; wie viel sind es Joch und □Klafter?

38) 8° 5′ 9″ =? Zoll.

39) 13 Meter 4 Decim. 25 Millim. =? Millim.

40) 27 □° 33 □′ 35 □″ =? □″

41) 7 Cub.° 63 Cub.′ =? Cub.′

42) 35 Hektoliter 82 Liter =? Liter.

43) 23 Cub. Met. 149 Cub. Decim. =? Cub. Decim.

44) 15 Ctr. 6 ℔ =? ℔.

45) 7 Ctr. 59 ℔ 3 Loth =? Loth.

46) 4 Mark 8 Loth 3 Qtch. =? Qtch.

47) 9 Kilogramm 7 Gramm =? Gramm.

48) 48 fl. 23 kr. =? kr.

49) Wie viel Kreuzer sind:

a) 7 fl. 93 kr.? b) 29 fl. 14 kr.?

c) 58 fl. 40 kr.? d) 306 fl. 3 kr.?

Man bringe auf die niedrigste Benennung:

50) 648 fl. 47 kr. 3 ₰ Conv. Münze;

51) 128 fl. 55 kr. süddeutsche Währung;

52) 3240 Thlr. 22 Silbergr. 6 Pf. preuß.;

53) 1309 Francs 68 Centimes franz.;

54) 884 Mark 3 Schill. 5 Pfenn. hamburg.;

55) 75 Ruthen 4 Fuß 8 Zoll 7 Linien schweiz;
56) 209 Quarters 7 Bushels 4 Gallons engl.;
57) 36 Ctr. 45 ℔ 28 Loth Zollgewicht.

§. 29.

Das Reducieren.

Die Einheiten einer niedrigeren Benennung in Einheiten einer höheren Benennung verwandeln, heißt jene reducieren.

1. Eine einnamige Zahl wird auf eine höhere Benennung reduciert, indem man sie durch die entsprechende Verwandlungszahl dividiert. Z. B.

Wie viel ℔ sind 448 Loth? Auf 1 ℔ gehen 32 Lth.; es werden also in 448 Lth. soviel ℔ enthalten sein, als wie oft 32 Lth. darin vorkommen; man hat daher

448 Loth = (448 : 32) ℔ = 14 ℔

2. Eine einnamige Zahl, welche Ganze von höheren Benennungen enthält, wird auf Ganze dieser höheren Benennungen reduciert, wenn man sie durch die Verwandlungszahl für die nächst höhere Benennung dividiert; der Quotient bedeutet Einheiten dieser höheren, der etwa gebliebene Rest Einheiten der niedrigeren Benennung. Der Quotient wird, wenn es angeht, auf dieselbe Art auf die nächst höhere Benennung reduciert. Z. B.

Wie viel Tage, Stunden und Minuten sind 5853 Minuten?

5853 : 60 = 97 St.   97 : 24 = 4 T.
33 Min.   1 St.

also 5853 Min. = 4 Tage 1 St. 33 Min.

Ganz einfach gestaltet sich diese Reduction für die Verwandlungszahl 10 oder 100. Z. B.

9347 kr. = 93 fl. 47 kr.;   1808 kr. = 18 fl. 8 kr.
4235 Centimeter = 42 Meter 3 Decim. 5 Centim.

3. Eine mehrnamige Zahl wird auf die höchste Benennung reduciert, indem man die Reduction nach 1. von

der niedrigsten Benennung angefangen allmälich vornimmt, und zu dem jedesmaligen Resultate die gegebenen Einheiten der entsprechenden Benennung dazu zählt. Z. B.

Man reduciere 7 Ctr. 28 Pfd. 24 Lth. auf Centner.

24 : 32 = 0·75 Pfd.

28·75 : 100 = 0·2875 Ctr.

oder 32	24 Lth.
100	28·75 Pfd.
	7·2875 Ctr.

also 7 Ctr. 28 Pfd. 24 Lth. = 7·2875 Ctr.

Aufgaben.

1) Wie viel Fuß sind in 348 Zoll enthalten?

2) Wie viel Gulden C. M. betragen 540 Kreuzer?

3) Wie viel fl. und kr. sind 7928 kr., wie viel 123405 kr. ö. W.?

4) 16265 Bogen Druckpapier, wie viel sind es Ballen, Rieß, Buch und Bogen?

5) Wie viel ℔, Loth und Qtch. geben 5231 Qtch.?

6) Wie viel Meter, Decim., Centim. und Millimeter sind 21907 Millimeter?

7) Wie viel Hektar und Ar sind 1234 Ar?

Man reduciere folgende Zahlen auf Ganze der höheren Benennungen.

8) 3748 Bogensecunden	9) 337947 Zeitsecunden
10) 79350 Schreibbogen	11) 108374 Druckbogen
12) 24853 Zoll	13) 314586 Linien
14) 57843 □Centimeter	15) 1900538 Cubiklinien
16) 7502 Liter	17) 38047 Gramm
18) 78043 Quentchen	19) 6310845 Richtpfennige
20) 34287 Kreuzer	21) 907143 Pfennige C. M.
22) 924156 Pfenn. preuß.	23) 357894 Pences engl.
24) 764092 Linien bad.	25) 709926 Mäßlein schweiz.
26) 844270 Quart preuß.	27) 485033 Doli russ.

28) Wenn jemand in jeder Secunde 1 zählen würde; wie viel Zeit würde er brauchen, um eine Million, und wie viel, um eine Billion zu zählen (das Jahr zu 365 Tagen gerechnet), vor-

ausgesetzt, dass es möglich wäre, Tag und Nacht ununterbrochen fortzuzählen?

29) Wenn jemand täglich 10 kr. erspart; wie groß ist das Ersparnis in einem gemeinen Jahre?

30) In Oesterreich verbraucht man im Durchschnitte jährlich 12 ℔ Salz per Kopf, in Preußen 14 ℔, in Frankreich 15 ℔, in England 18 ℔; wie groß ist der Salzverbrauch in jedem dieser Staaten, wenn man die Bevölkerung von Oesterreich auf 35, jene von Preußen auf 24, von Frankreich auf 36, von England auf 26 Millionen ansetzt?

31) Die Zeit von einem Vollmonde zum andern (synodischer Monat) beträgt 2551442 Secunden; wie viel sind dieß Tage, Stunden, Minuten und Secunden?

32) Wie viel Gulden betragen 37 fl. 58 kr.?

33) Wie viel Ctr. sind 7 Ctr. 37 ℔ 28 Loth 2 Qtch; wie viel Ctr. sind 88 ℔ 17 Lth. 1 Qtch.?

34) Wie viel Kilogramm betragen 17 Kilogramm 71 Gramm?

35) 381 fl. 8 kr. = ? fl.

36) $4^0\ 5'\ 6''\ 3'''$ = ? Klafter.

37) $3\square^0\ 27\square'\ 58\square'' = ?\ \square^0$

38) 27 Hektar 67 Ar = ? Hektar.

39) 41 Cub. Decimeter 7 Cub. Centim. 28 Cub. Millim. = ? Cub. Meter.

40) 6 Monate 4 Tage 16 Stund. 19 Min. = ? Jahre.

41) 2 Ballen 5 Rieß 17 Buch = ? Ballen.

42) 525 Scudi 7 Paoli 3 Bajocchi = ? Scudi röm.

43) 7 Ctr. 87 Pfd. 7 Neuloth 4 Quint = ? Ctr. hamb.

44) 18 Wispel 1 Malter 7 Scheffel 13 Metzen = ? Wispel sächs.

§. 30.

Addition mehrnamiger Zahlen.

Beim Addieren mehrnamiger Zahlen beginnt man bei der niedrigsten Benennung und reduciert die Summe, wenn sie

Ganze der nächst höhern Benennung enthält, auf diese höhere Benennung.

1)

38 Ctr.	14 ℔	25 Loth	2 Qtch.	8 Qtch. = 2 Lth.
124 „	85 „	17 „	3 „	71 Lth. = 2 Pfd. 7 Lth.
87 „	— „	24 „	— „	151 Pfd. = 1 Ctr. 51 Pfd.
8 „	50 „	3 „	3 „	
258 „	51 „	7 „	— „	

2)

375 fl. 28 kr.	oder	375 28 kr.	oder	375·28 fl.
708 „ 83 „		708 83 „		708·83 „
659 „ 70 „		659 70 „		659·70 „
415 „ 8 „		415 08 „		415·08 „
2158 fl. 89 kr.		2158 89 kr.		2158·89 fl.

3)

5·2 Meter	5·2 Meter
9·4 Decimeter	0·94 „
125 Millimeter	0·125 „
	6·265 Meter.

4) Jemand hat vier Capitalien, welche einzeln 124 fl. 45 kr., 48 fl. 84 kr., 213 fl. 58 kr., 308 fl. 75 kr. jährlichen Zins tragen; wie groß ist das ganze jährliche Zinserträgnis?

5) Die Seiten eines Viereckes sind: 2 Meter 4 Decimeter 2 Centim., 5 Meter 3 Decim. 8 Centim., 2 Meter 5 Decim. 1 Centim., 4 Meter 1 Decim. 9 Centim; wie groß ist der Umfang?

6) Ein Haus hat bis zur ersten Balkenlage 1° 5′ 4″, von hier bis zur zweiten 1° 4′ 2″, von da bis zur dritten 1° 2′ 5″, und endlich von hier bis zum Gipfel 1° 5′ 8″ Höhe; wie viel beträgt die ganze Höhe?

7) Ein Sechseck enthält vier Dreiecke; das erste hat 48 □° 25 □′, das zweite 71 □° 12 □′, das dritte 92 □° 15□′, das vierte 65□° 18□′; wie groß ist die ganze Fläche des Sechseckes?

8) In einer Buchdruckerei werden an Druckpapier verbraucht: 2 Ballen 3 Rieß 5 Buch 18 Bogen, 3 Ballen 8 Rieß

13 Buch 14 Bogen, 7 Ballen 9 Rieß 17 Buch 8 Bogen; wie viel zusammen?

9) Jemand erhält 5 Fässer Zucker, welche einzeln 2 Ctr. 38 ℔ 16 Lth., 1 Ctr. 90 ℔ 20 Lth., 2 Ctr. 12 ℔ 28 Lth., 2 Ctr. 18 ℔ 4 Lth., 2 Ctr. 20 ℔ wiegen; wie groß ist das ganze Gewicht?

10) Eine Glocke enthält an Messing 12 Ctr. 47 ℔ 9 Lth., an Kupfer 18 Ctr. 53 ℔ 17 Lth., an Zinn 1 Ctr. 77 ℔ 29 Lth.; wie schwer ist die Glocke?

11) Jemand verkauft nach und nach an Wein: 12 Hektoliter 28 Liter, 15 Hektoliter 14 Liter, 8 Hektoliter 37 Liter, 26 Hektoliter 4 Liter; wie viel macht dieses zusammen?

12) Ein Silberarbeiter verarbeitet an Silber 8 Mark 8·75 Loth, 7 Mark 11·2 Loth, 7 Mark 13·95 Loth; wie viel im Ganzen?

13)	738 fl.	47 kr.	3 Pf. südd.	14)	87 Thl.	25 Sgr.	3 Pf. preuß.
	905 „	57 „	2 „		54 „	19 „	1 „
	191 „	33 „	2 „		79 „	28 „	3 „
	688 „	40 „	3 „		12 „	8 „	2 „

15)	1248 Francs	58 Cent.
	3076 „	89 „
	1835 „	72 „
	2469 „	31 „

16)	18 Pf. Sterl.	16 Schill.	7 Penc. engl.
	57 „ „	12 „	11 „
	70 „ „	9 „	4 „
	63 „ „	17 „	9 „

17) In Wien tritt der Mittag 56 Minuten 11 Secunden früher ein, als in Paris; wenn nun die Uhr in Paris 3 St. 28 Min. 40 Sec. zeigt, wie viel Uhr ist zu gleicher Zeit in Wien?

18) Jemand wurde am 19. November 1789 geboren und lebte 48 Jahre 8 Monate und 9 Tage; wann starb er?

Geburtszeit:	1788 J.	10 Mon.	18 Tage	nach Chr. G.
Lebensdauer:	48 „	8 „	9 „	
Sterbezeit:	1837 J.	6 Mon.	27 Tage	nach Chr. G.

Er starb also am 28. Juli 1838.

19) Kaiser Franz Josef I. wurde am 18. August 1830 geboren und übernahm, 18 Jahre 3 Mon. 14 Tage alt, die Regierung; wann war dieses?

20) Ein Haus, welches den 31. Juli 1767 erbaut wurde, brannte 98 Jahre 6 Monate 29 Tage nach der Erbauung ab; wann geschah der Brand?

21) Wenn am 13. September um 7 Uhr 24 Minuten 12 Sec. morgens Vollmond ist, und die Zeit von einem Vollmonde bis zum andern 29 Tage 12 Stunden 44 Min. 3 Sec. beträgt; wann wird der nächste Vollmond eintreten?

§. 31.

Subtraction mehrnamiger Zahlen.

Das Subtrahieren der mehrnamigen Zahlen beginnt bei der niedrigsten Benennung. Wenn bei einer Benennung die Zahl des Subtrahends größer ist, als jene des Minuends, so wird die letztere um so viel Einheiten vermehrt, als ihrer eine nächst höhere Einheit enthält, und dann die Subtraction verrichtet; sodann wird aber, damit der Rest ungeändert bleibe, auch der Subtrahend in der nächst höheren Benennung um 1 vermehrt.

Aufgaben.

1) Von 35 Ctr. 67 ℔ 28 Lth. werden verkauft
28 „ 38 „ 12 „ wie viel bleibt übrig?
7 Ctr. 29 ℔ 16 Lth.

2) Jemand ist fl. 2148„8 schuldig, davon zahlt er fl. 952„75; wie viel bleibt er noch schuldig?

fl. 2148 „ 8	oder 214808 kr.	oder 2148·08 fl.
„ 952 „ 75	95275 „	952·75 „
fl. 1195 „ 33	119533 kr.	1195·33 fl.
	= 1195 fl. 33 kr.	= 1195 fl. 33 kr.

3) Von 3 Hektoliter 27 Liter subtrahiere man 83·6 Liter.

3 Hektoliter	27 Lit.	oder	3·27 Hektol.
	83·6 „		0·836 „
2 Hektol.	43·4 Lit.		2·434 Hektol.

4) Ein Haus wird um 8000 fl. gekauft; der Eigenthümer muß es später um 6388 fl. 35 kr. verkaufen; wie viel Verlust hat er dabei?

5) Eine Buchdruckerei

braucht an Papier	12 Ballen,		
hat aber nur noch	5 „	4 Rieß	13 Buch;
wie viel fehlt noch?	6 Ballen	5 Rieß	7 Buch.

Hier spricht man: 13 Buch und 7 geben 20 Buch, d. i. 1 Rieß; 1 und 4 sind 5 Rieß, und 5 sind 10 Rieß, d. i. 1 Ballen; 1 und 5 sind 6 Ballen, und 6 sind 12 Ballen.

6) Von einem Acker, welcher 2 Joch 547 □⁰ groß ist, wird eine Fläche von 1 Joch 215 □⁰ mit Weizen, der Rest mit Korn besäet; wie viel beträgt die Kornfläche?

7) Ein Sonnenjahr beträgt 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden, ein Mondjahr (12 Umlaufszeiten des Mondes um die Erde) nur 354 Tage 8 Stunden 48 Minuten 36 Secunden; um wie viel ist das Sonnenjahr länger als das Mondjahr?

8) Von 20 Ballen 7 Rieß Schreibpapier sind nach und nach verkauft worden: 3 Ballen 6 Rieß 12 Buch, 4 Ballen 8 Rieß 16 Buch, 6 Ballen 9 Rieß 15 Buch; wie viel Papier bleibt noch vorräthig?

9) Ein Beamter war zur Zeit seiner Anstellung 23 Jahre 3 Monate 14 Tage alt; nun ist er 47 Jahre 1 Monat 8 Tage alt; wie lange dient er schon?

10) In einem Dreiecke betragen die drei Seiten 15 Meter 3 Decim. 8 Centim., 11 Met. 1 Decim. 9 Centim., und 6 Met. 5 Decim. 6 Centim.; wie groß ist der Umfang desselben, und um wie viel ist die Summe je zweier Seiten größer, als die dritte Seite?

11) Eine Kugel hat eine Fläche von 12 □' 81 □'' 80 □'''; wie viel geht ihrer Oberfläche bis zu 1 □° ab?

12) Auf einer Besitzung lastet eine Schuld von 6200 fl., davon werden 885 fl. 40 kr., 2740 fl., 766 fl. 90 kr. abgetragen; wie viel beträgt noch die rückständige Schuld?

13) Jemand nimmt 728 fl. 24 kr., 1025 fl. 17 kr., 910 fl. 8 kr. ein und gibt 2214 fl. 42 kr. aus; wie viel bleibt ihm übrig?

14) Ein Kaufmann hatte 13 Ctr. 48 ℔ Reis vorräthig; wie viel bleibt noch übrig, wenn er 2 Ctr. 59 ℔, 3 Ctr. 27 ℔, 5 Ctr. 88 ℔ verkauft hat?

15) Ein Cubikfuß Eisen wiegt in der Luft 4 Ctr. 45·4 ℔, im Wasser nur 3 Ctr. 88·9 Pfd.; wie groß ist sein Gewichtsverlust im Wasser?

16) Es soll der Höhenunterschied zwischen zwei Punkten A und D dadurch gefunden werden, dass man die Höhe zweier Zwischenpunkte B und C gegen A und D untersucht. Wenn nun A um 4° 5' 9'' höher liegt als B, B um 2° 3' 8'' höher als C, und C um 1° 2' 3'' tiefer als D; um wie viel liegt A höher als D?

17) Eine Eisenbahn steigt von der Station A zur Station B um 3 Meter 1·25 Decim., von B bis C um 1 Meter 4·11 Decim., von C bis D fällt sie um 5 Meter 5·87 Decim., von D bis E steigt sie wieder um 1 Meter 1·5 Decim. Um wie viel liegt E höher oder tiefer als A?

18) 25 Ctr. 79 ℔ 20 Loth Zollgew. — 9 Ctr. 49 ℔ 26 Lth. = ?

19) 428 Kilogr. 248 Gramm — 264 Kilogr. 549 Gramm = ?

20) 203 Ctr. 7 Unz. 11 Drachm. engl. adp. — 88 Ctr. 10 Unz. 15 Drachm. = ?

21) 149 Pud 18 Pfd. 35·62 Solotn. russ. — 39 Pud 32 Pfd. 78·75 Solotn. = ?

22) Jemand wurde am 5. November 1809 geboren; wie alt war er am 27. Mai 1866?

$$\begin{array}{rlrlrl} 1865 & \text{Jahre} & 4 & \text{Monate} & 26 & \text{Tage} \\ 1808 & \text{"} & 10 & \text{"} & 4 & \text{"} \\ \hline 56 & \text{Jahre} & 6 & \text{Monate} & 22 & \text{Tage.} \end{array}$$

23) Der berühmte Tonkünstler Mozart wurde in Salzburg am 27. Jänner 1756 geboren und starb in Wien den 5. December 1791; wie alt ist er geworden?

§. 32.

Multiplication mehrnamiger Zahlen.

Wenn eine mehrnamige Zahl mit einer unbenannten multipliciert werden soll, multipliciert man entweder die Einheiten einer jeden Benennung von der niedrigsten angefangen, und reduciert die niedrigeren Producte; oder man verwandelt die mehrnamige Zahl in die niedrigste oder in die höchste Benennung, und verrichtet dann die Multiplication.

Aufgaben.

1) $\underline{18^0\ 2'\ 5'' \times 23}$ $\quad 5'' \times 23 = 115'' = 9'\ 7''$

$\quad 423^0\ 1'\ 7''$ $\quad 2' \times 23 + 9' = 55' = 9^0\ 1'$

$\quad 18^0 \times 23 + 9^0 = 423^0$

oder

$$18^0\ 2'\ 5'' = 1325'', \quad \begin{array}{r} 1325'' \times 23 \\ \hline 2650 \\ 3975 \\ \hline 30475'' \end{array} = 423^0\ 1'\ 7'';$$

oder auch

$$18^0\ 2'\ 5'' = 18{\cdot}40267^0, \quad \begin{array}{r} 18{\cdot}4\,0267^0 \times 23 \\ \hline 36\,8\,0534 \\ 5\,5\,20801 \\ \hline 42\,3{\cdot}26141^0 \end{array} = 423^0\ 1'\ 7''.$$

2) $\underline{248 \text{ fl. } 64 \text{ kr.} \times 6}$ oder $\underline{248{\cdot}64 \text{ fl.} \times 6}$

$\quad 1491 \text{ fl. } 84 \text{ kr.} \qquad 1491{\cdot}84 \text{ fl.}$

$\qquad = 1491 \text{ fl. } 84 \text{ kr.}$

3) 25 Meter 3 Decim. 38 Millim. $\times$ 25 = ?

4) 7 Hektar 5·2 Ar $\times$ 146 = ?

5) Wenn 1 Ctr. 27 fl. 72 kr. kostet, wie hoch kommen 10 Centner?

6) Wenn 1 Ctr. 47 fl. 62 kr. kostet, was betragen 28 Ctr., 57 Ctr., 102 Ctr., 337 Ctr.?

7) Ein Hektoliter Weizen kostet 7 fl. 8 kr.; wie hoch kommen 7, 28, 55, 99, 125 Hektoliter?

8) Ein Beamter bezieht monatlich 128 fl. 75 kr. Gehalt; wie viel jährlich?

9) Wenn zwischen dem Blitze einer Kanone und dem darauf gehörten Knalle 12 Secunden verfließen und der Schall in jeder Secunde 332 Meter 2 Decim. 5. Centim. zurücklegt, wie weit ist die Kanone vom Beobachter entfernt?

10) Wenn 1 Maß Wasser 2 ℔ 16 Lth. 3 Qtch. wiegt, wie groß ist das Gewicht von einem Eimer Wasser?

11) Das metrische Pfund hat 1 ℔ 25·142 Lth. Wiener Gewicht; wie viel sind 35, 89, 133, 20·48 metrische Pfund?

12) Ein Presburger Eimer hat 37 Maß 2 Seidel Wiener Maß; wie viel sind 30, 47, 65, 78 Presburger Eimer?

13) Wenn 1 Dukaten 5 fl. 45 kr. gilt, was betragen 33, 57, 98, 183 Dukaten?

14) Ein Hauseigenthümer läßt 6 große und 11 kleine Zimmer ausmahlen; von einem großen zahlt er 8 fl. 82 kr., von einem kleinen 5 fl. 25 kr.; wie hoch kommt die Mahlerei sämmtlicher Zimmer?

15) Wie hoch kommen 28 Ctr. 64 ℔ à 34 fl. 82·5 kr. der Centner?

16) Wenn der Centner mit 18 fl. 35 kr. bezahlt wird; wie hoch kommen 2 Ctr. 17 Pfd. 24 Lth.?

17) 738 Lire 72 Cent. ital. $\times$ 319 = ?

18) 1204 Mark B. 9 Schill. 9 Pfenn. hamb. $\times$ 125 = ?

19) 658 Thlr. 18 Ngr. 7 Pf. sächs. $\times$ 199 = ?

20) Man berechne folgenden Conto:

1869			
3. April	4 Ellen feines grünes Tuch à fl. 6„20	—	—
11. „	5 Ellen schwarzes Tuch à fl. 4„75	—	—
12. „	3 Westenzeuge à fl. 1„32	—	—
12. „	8 Ellen Leinwand à 48 kr.	—	—
12. „	16 Knöpfe à 5 kr.	—	—
25. „	2 Halstücher à fl. 3„20	—	—
30. „	ein Regenschirm	7	15
	Summe . .	—	—

21) Wie lang ist ein Faden, der sich um eine Welle, deren Umfang 3′ 5″ 8‴ ist, 158mal herumwinden läßt?

22) Ein Zimmer ist 3° 5′ 6″ lang, und 2° 3′ 4″ breit; wie groß ist die Bodenfläche desselben?

$3^0\ 5'\ 6'' = 282''$ $\qquad$ 282×184

$2^0\ 3'\ 4'' = 184''$ $\qquad$ 2256

1128

51888

$51888 : 144 = 360\ \square'$ $\qquad$ $360 : 36 = 10\ \square^0.$

868

$48\ \square''$ $\qquad$ Bodenfläche $10\ \square^0\ 48\square''$.

23) Ein Rechteck ist 8 Met. 3·5 Decim. lang und 5 Met. 4 Decim. 4 Centim. breit; wie groß ist seine Fläche?

24) Ein Gang, welcher 20 Met. 5 Decim. lang und 2 Met. 2 Decim. breit ist, soll mit Platten belegt werden; was kostet diese Arbeit, wenn für das □Meter 2 fl. 35 kr. gezahlt wird?

25) Jemand kauft einen quadratförmigen Bauplatz, dessen Seite 12° 5′ 4″ ist, und zwar die Quadratklafter zu 24·245 fl.; wie viel muß er dafür bezahlen?

26) Wie groß ist die Oberfläche und wie groß der Körperinhalt eines Würfels, dessen Seite 1° 3′ 9″ beträgt?

27) Welchen Inhalt hat ein Wagen, dessen Inneres 1 Met. 8 Decim. lang, 6·1 Decim. breit und 4·7 Decim. hoch ist?

28) Ein rechtwinkliges, oben offenes Gefäß ist 3′ 8″ lang, 2′ 5″ breit und 1′ 9″ hoch; welche Oberfläche haben die vier Seitenwände und der Boden?

29) Wie hoch kommt die Aufführung einer Mauer, welche 13 Met. 4 Decim. lang, 9 Met. 3 Decim. hoch und 6 Decim. dick ist, wenn für den Cubikfuß 12 kr. bezahlt wird?

30) Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 3 Met. 4 Decim. 9 Centim. ist?

31) Ein kreisrunder Hof, der 7° 2′ 4″ im Durchmesser hat, soll gepflastert werden; wie hoch wird die Arbeit kommen, wenn für die Quadratklafter 1·75 fl. bezahlt wird?

32) Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt einer Kugel, deren Durchmesser 1 Met. 5·26 Decim. ist?

§. 33.

Division mehrnamiger Zahlen.

Wenn eine mehrnamige Zahl durch eine unbenannte zu dividieren ist, so dividiert man entweder die Einheiten einer jeden Benennung von der höchsten angefangen, indem man dabei den jedesmaligen Rest in die niedrigere Benennung resolviert; oder man verwandelt die mehrnamige Zahl in die niedrigste oder in die höchste Benennung, und verrichtet dann die Division.

Ist eine mehrnamige Zahl durch eine andere benannte Zahl zu dividieren, so müßen beide früher auf einerlei Benennung gebracht werden.

Aufgaben.

1) Man dividiere 138 Ctr. 72 ℔ 12 Lth. durch 18.

138 Ctr.	72 ℔	12 Lth.	: 18 = 7 Ctr. 70 ℔ 22 Lth.
12 „	1200 „	384 „	
1200 ℔	1272 „	396 „	
	12 „	36 „	
	384 Lth.	„ „	

oder

138 Ctr. 72 ℔ 12 Lth. = 443916 Lth.

443916 Loth. : 18

———————— : 2

221958

———————— : 9

24662 Lth. = 7 Ctr. 70. ℔ 22 Lth.

oder auch

138 Ctr. 72 ℔ 12 Lth. = 138·72375 Ctr.

138·72375 Ctr. : 18

———————— : 3

46·24125

———————— : 6

7·706875 Ctr. = 7 Ctr. 70 Pfd. 22 Lth.

2) Man suche den 6. Theil von fl. 385„14 kr.

fl. 385 „ 14 : 6	oder	38514 kr. : 6
fl. 64 „ 19		6419 kr.
		= 64 fl. 19 kr.

3) 530 fl. 84 kr. : 23 = ?

4) 4501 fl. 84 kr. : 56 = ?

5) 12 □Met. 11 □Decimet. : 28 = ?

6) 289 Kilogr. 674 Gramm : 57 = ?

7) $399^0\ 3'\ 2''\ 3'''$: 27 = ?

8) 986236 Ctr. 36 ℔ 22 Lth. : 236 = ?

9) Wenn 1 Ctr. Quecksilber 148 fl. kostet, wie theuer ist 1 Pfund?

10) Ein Hektoliter Wein kostet 37 fl. 60 kr.; wie hoch kommt 1 Liter?

11) Ein Ballen Papier kostet 45 fl. 50 kr., wie hoch kommt 1 Rieß?

12) Eine Röhre gibt in 15 Stunden 48 Minuten 43 Eimer Wasser; in wie viel Zeit 1 Eimer?

13) 3003 Quart. 4 Bush. 6 Gall. engl. : 94 = ?

14) 2300 Tschetwert 5 Tschetwerik 1 Tschetwerka russ. : 83 = ?

15) Wie oft sind 5 Lth. 2 Qtch. in 2 ℔ 2 Lth. enthalten?

5 Lth. 2 Qtch. = 22 Qtch. 264 : 22 = 14.

2 ℔ 2 Lth. = 264 Qtch.

16) 31 fl. 50 kr. : 2 fl. 25 kr. = ?

17) 9 □Met. 57 □Decim. 84 □Centim. : 24 □Decim. 56 □Centim. = ?

18) 65 Ctr. 62 ℔ 17 Lth. 2 Qtch. : 3 Ctr. 64 ℔ 18 Lth. 3 Qtch. = ?

19) 326 Ball. 1 Rieß 17 Buch 19 Druckb. : 13 Ball. 5 Rieß 18 Buch 6 Bogen = ?

20) Eine Stiege ist 3 Meter 8 Decimeter hoch; wie viele Stufen hat sie, wenn jede Stufe 1 Decim. 3 Centim. hoch ist?

21) In einer 942° 1′ 4″ langen Allee befinden sich an jeder Seite Bäume in gleicher Entfernung von 2° 1′ 4″; wie viele Bäume zählt die Allee?

22) Wie viel Stück Dukaten braucht man, um 305 fl. 55 kr. zu zahlen, wenn die Dukaten im Curse zu 4 fl. 95 kr. stehen?

23) Eine Fläche hat 15 □° 30 □′ 15 □″; wie viele Bretter von 1° 3′ 4″ Länge und 1′ 1″ Breite braucht man, um jene Fläche zu bedecken?

24) Ein Acker, welcher die Form eines Rechteckes hat, ist 75° 2′ lang, wie breit ist er, wenn die Fläche 715 □° 24 □′ beträgt?

715 □° 24 □′ = 25764 □′ 25764 : 452 = 57

75° 2′ = 452′ 3164

′ ″ ″ ″

57′ = 9° 3′ Breite.

25) Ein Rechteck hat 72 □° 12 □′ Inhalt, und 2° Breite; wie groß ist die Länge?

26) Ein cylindrisches Gefäß enthält 1 Cub. Decim. 683 Cub.

Centim.; wenn nun die Höhe 9 Centim. beträgt, wie groß ist die Bodenfläche?

27) Ein Spiegel von 2′ 8″ Höhe und 2′ 3″ Breite kostet 43 fl. 20 kr.; wie hoch wird ein Quadratzoll gerechnet?

28) Eine Linie ist viermal gemessen worden, und man fand sie 57 Met. 5 Decim. 4 Centim., 57 Met. 2 Decim. 3 Centim., 58 Met. 1 Decim. 8 Centim., 57 Met. 3 Decim. 5 Centim. lang; wie groß ist die Durchschnittslänge jener Linie?

29) Ein Rechteck hat 65 □Met. 18 □Decim. 57 □Centim. Flächeninhalt; wie groß ist seine Breite, wenn die Länge 12·571 Met. beträgt?

30) Eine Mauer enthält 37·356 Cubikklafter, die Länge ist 12° 5′, die Höhe 7° 4′; wie dick ist die Mauer?

31) 5 Mark 12 Loth Silber werden um 122·45 fl. verkauft; wie viel kostet 1 Mark?

32) Das Licht legt den Weg von der Sonne zur Erde, also einen Weg von 21000000 Meilen, in 8 Minuten 13·22 Secunden zurück; wie viel Meilen in einer Secunde?

33) Eine Goldstange ist 2 Mark 6·3 Loth schwer und enthält 2 Mark 1·5 Loth feines Gold; wie viel karatig ist diese Goldmasse?

34) Eine Straße hat in einer Strecke von 854·6° eine Steigung von 13° 4′ 8″; wie groß ist die Steigung auf eine Klafter Länge?

35) Ein Gefäß hält 3 Cubikfuß 205·5 Cubikzoll; wie viele Maß hält es, jede zu 77·4145 Cubikzoll? (1 Dec.)

36) Wie viel Eimer faßt ein Gefäß von 2′ 8″ Länge, 2′ 5″ Breite und 1′ 9″ Tiefe, da 1 Eimer 1·792 Cubikfuß enthält? (2 Dec.)

37) Ein Speicher ist 3° 4′ 8″ lang und 3° 1′ 2″ breit; wie viel Metzen Getraide können darauf gebracht werden, wenn die Höhe des aufgeschütteten Getraides 9″ betragen soll, und ein Metzen = 1·9471 Cubikfuß ist? (3 Dec.)

38) 10 Ellen Tuch kosten 52 fl. 20 kr.; wie hoch kommen 7 Ellen von demselben Tuche?

39) Wenn 5 Hektoliter 108 fl. 20 kr. kosten, wie hoch kommen 9 Hektoliter von demselben Weine?

40) Wie viel kosten 3·158 Ctr. einer Waare, wovon 7 Ctr. 35 ℔ 12 Loth 200 fl. kosten?

41) Die Triebräder einer Locomotive haben 5 Fuß im Durchmesser; wie viel Umläufe müßen sie machen, um die Eisenbahnstrecke zwischen Wien und Linz, welche 24 Meilen 3601 Klafter beträgt, zurückzulegen?

42) Unter drei Personen sollen 115 fl. 86 kr. so vertheilt werden, dass A die Hälfte, B den dritten Theil und C den Rest bekommt; wie groß ist der Antheil einer jeden dieser drei Personen?

43) Jemand nimmt einen Bedienten auf, und verspricht ihm 74 fl. 50 kr. Jahreslohn; nach 4 Monaten entläſst er den Diener, nachdem er ihm schon 13 fl. 80 kr. gegeben hat; wie viel hat der Diener noch zu bekommen?

44) Auf einem Getraidemarkte verkaufte man 48 Metzen Weizen zu 4 fl. 20 kr., 35 Metzen zu 4 fl. 32 kr. und 17 Metzen zu 4 fl. 60 kr.; wie theuer wurde im Durchschnitte ein Metzen verkauft?

45) Jemand reiset ab und macht täglich 4 Meilen 2000 Klafter; nach 3 Tagen wird ihm ein Bote nachgeschickt, der täglich 6 Meilen 1000 Klafter zurücklegt. In wie viel Tagen holt er ihn ein?

46) Wie viel kostet die Verführung von 1 Cub. Meter Steinen auf eine Strecke von 1 Kilometer, wenn man auf diese Weglänge täglich 25 Fuhren, jede mit 620 Cub. Decim. Ladung, machen kann und wenn eine Fuhre für den ganzen Tag 5 fl. 20 kr. kostet?

Dritter Abschnitt.

Theilbarkeit der Zahlen.

§. 34.

Wenn eine Zahl durch eine andere dividiert, eine ganze Zahl zum Quotienten gibt, so heißt die erste Zahl durch die zweite theilbar. Z. B. 18 ist durch 3 theilbar, weil 18 durch 3 dividiert die ganze Zahl 6 zum Quotienten gibt, und kein Rest übrigbleibt; 18 ist aber nicht theilbar durch 5, weil 5 in 18 nicht ohne Rest enthalten ist.

Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so heißt die erstere Zahl ein Vielfaches von der zweiten, und diese ein Maß von jener. So ist 18 ein Vielfaches von 3, und 3 ein Maß von 18.

Es gibt Zahlen, welche durch keine andere Zahl theilbar sind, als durch sich selbst und durch die Einheit; z. B. 1, 3, 13, 37. Solche Zahlen heißen einfache oder Primzahlen, zum Unterschiede von den zusammengesetzten Zahlen, welche außer durch 1 und durch sich selbst auch noch durch andere Zahlen theilbar sind. So ist 18 eine zusammengesetzte Zahl, weil sie außer durch 1 und 18 auch durch 2, 3, 6, 9, theilbar ist.

§. 35.

Kennzeichen der Theilbarkeit.

1. Jede Zahl, welche am Ende 1, 2, 3 . . . Nullen hat, ist ein Vielfaches von 10, 1000, . . . und daher durch 10, 100, 1000, . . . theilbar.

2. Jede Zahl läſst sich in zwei Bestandtheile zerlegen, deren einer ein Vielfaches von 10, der andere die Ziffer der Einer enthält; z. B.

$$57876 = 57870 + 6; \; 21335 = 21330 + 5.$$

Da jedes Vielfache von 10 durch 10, somit auch durch 2 und durch 5 theilbar ist, so hängt es nur von der Ziffer der Einer ab, ob die ganze Zahl durch 2 oder 5 theilbar ist.

Ist die Ziffer der Einer durch 2 theilbar, d. i. eine der Ziffern 0, 2, 4, 6, 8, so ist die Zahl selbst durch 2 theilbar. Man nennt die Zahlen, welche Vielfache von 2 sind, gerade Zahlen, während die übrigen, als 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... ungerade Zahlen heißen.

Ist die Ziffer der Einer durch 5 theilbar, d. i. stehet an der niedrigsten Stelle 0 oder 5, so ist die Zahl selbst durch 5 theilbar.

3. Jede Zahl läſst sich in zwei Bestandtheile zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 100, der andere die zwei niedersten Ziffern enthält; z. B.

$$25848 = 2500 + 48; \; 375375 = 375300 + 75.$$

Das Vielfache von 100 ist durch 4 und durch 25 theilbar; es kommt daher nur auf die zwei niedersten Stellen an, ob auch die ganze Zahl selbst durch 4 oder 25 theilbar ist.

Eine Zahl ist demnach durch 4 theilbar, wenn die zwei niedersten Stellen durch 4 theilbar sind; und durch 25, wenn die zwei niedersten Stellen durch 25 theilbar sind.

4. Jede Zahl kann in zwei Bestandtheile zerlegt werden, von denen der eine lauter Vielfache von 9, der andere die Summe aller Ziffern der Zahl enthält; z. B.

$$\begin{aligned} 75624 &= 7.10000+5.1000+6.100+2.10+4 \\ &= 7.(9999+1)+5.(999+1)+6.(99+1)+2.(9+1)+4 \\ &= 7.9999+7+5.999+5+6.99+6+2.9+2+4 \\ &= 7.9999+5.999+6.99+2.9 \\ &\quad +7+5+6+2+4. \end{aligned}$$

Der erste Bestandtheil, welcher lauter Vielfache von 9 enthält, ist nun durch 3 theilbar; ist auch der zweite Bestandtheil, nämlich die *Ziffernsumme*, durch 3 *theilbar*, so ist es auch die ganze Zahl. Die eben zerlegte Zahl 75624 ist also durch 3 theilbar, weil die Ziffernsumme $7 + 5 + 6 + 2 + 4 = 24$ durch 3 theilbar ist.

Ebenso folgt auch:

Eine Zahl ist *durch* 9 *theilbar*, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 theilbar ist.

Aufgaben.

1) Welche von den Zahlen 16, 44, 53, 3094, 7821, 13457, 28431, 33556, 132580 sind durch 2 theilbar, welche nicht?

2) Welche von den Zahlen 318, 127, 5234, 13725, 321891, 283514, 4909231, 1378920 sind durch 3 theilbar, welche nicht?

3) Man gebe von den nachfolgenden Zahlen diejenigen an, welche durch 4 theilbar sind: 152, 372, 574, 1380, 2324, 198760, 293456, 135731, 832458.

4) Welche von den Zahlen 108, 327, 5436, 13578, 23456, 536463, 2937330 sind durch 9 theilbar?

5) Welche von den Zahlen 35, 750, 380, 574, 3100, 21348000 sind durch 5, 10, 100, 1000 theilbar?

6) Welche von den Zahlen 5148, 375, 1234, 8109, 2700, 617310, 34560, 192432 sind durch 2, welche durch 3, 4, 5, 9, 10, 100 theilbar?

7) Durch welche Zahlen ist 2520 theilbar?

8) Man gebe an, durch welche von den Zahlen 2, 3, 4, 5, 9, 10 die nachfolgenden Zahlen theilbar sind: 112, 5040, 18480, 23400, 50280, 38124, 354240.

§. 36.

Zerlegung einer Zahl in Primfactoren.

Jede zusammengesetzte Zahl kann in *Primfactoren* zerlegt, d. i. als ein Product von lauter Primzahlen dargestellt werden.

Um eine Zahl in Primfactoren zu zerlegen, dividiere man sie durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividiere man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man endlich auf einen Quotienten kommt, der selbst eine Primzahl ist. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quotient sind die gesuchten Primfactoren.

Sind z. B. die Primfactoren von 660 zu suchen, so hat man

$660 : 2 = 330$	oder	660	2
$330 : 2 = 165$		330	2
$165 : 3 = 55$		165	3
$55 : 5 = 11$		55	5
		11	11

also $660 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11$.

Aufgaben.

Man zerlege in einfache Factoren:

1) 240,	2) 270,	3) 300,	4) 420,
5) 360,	6) 365,	7) 540,	8) 936,
9) 1000,	10) 1050,	11) 1536,	12) 1440,
13) 3075,	14) 4158,	15) 5250,	16) 13832.

§. 37.

Größtes gemeinschaftliches Maß.

Wenn eine Zahl in zwei oder mehreren Zahlen ohne Rest enthalten ist, so heißt sie ein gemeinschaftliches Maß derselben; z. B. 3 ist ein gemeinschaftliches Maß von 9 und 15, ebenso ist 5 ein gemeinschaftliches Maß von 15, 40 und 60. Die größte Zahl, welche in mehreren anderen Zahlen ohne Rest enthalten ist, wird das größte gemeinschaftliche Maß derselben genannt. So haben die Zahlen 36 und 60 die Zahlen

2, 3, 4, 6, 12 zu gemeinschaftlichen Maßen, 12 aber ist unter diesen das größte.

Wenn zwei Zahlen außer der Einheit kein anderes gemeinschaftliches Maß haben, so nennt man sie Primzahlen unter einander, oder relative Primzahlen; z. B. 8 und 15 oder 5, 9 und 16.

1. Wenn zwei Zahlen 24 und 18 ein gemeinschaftliches Maß 6 haben, so muß auch ihre Summe 24 + 18 = 42 dadurch theilbar sein. Denn 6 ist in 24 4mal, in 18 3mal, in 24 + 18 also 4mal und 3mal, d. i. 7mal enthalten.

2. Haben zwei Zahlen 24 und 15 ein gemeinschaftliches Maß, so muß auch ihr Unterschied 24 — 15 = 9 dadurch theilbar sein. Denn 3 ist in 24 8mal, in 15 5mal, daher in 24—15 8mal weniger 5mal d. i. 3mal enthalten.

3. Ist eine Zahl 24 durch eine andere 6 theilbar, so ist auch jedes Vielfache derselben, z. B. 24 × 5 = 120 durch dieselbe Zahl theilbar. Es ist nämlich 6 in 24 4mal, daher in 5mal 24 5mal so oft, also 20mal enthalten.

4. Wenn die Division zweier Zahlen ohne Rest aufgeht, so ist der Divisor selbst das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Zahlen. Z. B. 48 : 12 = 4; hier ist 12 ein gemeinschaftliches Maß von 48 und 12, weil es in beiden Zahlen ohne Rest enthalten ist; es ist aber auch das größte gemeinschaftliche Maß, da 12 offenbar durch keine größere Zahl als durch sich selbst theilbar sein kann.

5. Wenn bei der Division zweier Zahlen ein Rest übrig bleibt, so ist das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Divisor und dem Reste zugleich das größte gemeinschaftliche Maß zwischen dem Dividend und dem Divisor. Es sei z. B. 84 durch 24 zu dividieren, so hat man

84 : 24 = 3 mit dem Reste 12,

also

$$84 = 24 \times 3 + 12$$

und

$$12 = 84 - 24 \times 3.$$

Der Divisor 24 und der Rest 12 haben nun offenbar 12 zum gr. g. Maß; dasselbe gr. g. Maß müßen auch der Dividend 84 und der Divisor 24 haben. Es ist nämlich 12 gewiss ein gemeinschaftliches Maß von 84 und 24, da dadurch 24, daher auch $24 \times 3 + 12 = 84$ theilbar ist; 12 ist aber auch das größte gemeinschaftliche Maß von 84 und 24, denn hätten diese zwei Zahlen noch ein größeres gemeinschaftliches Maß als 12, so müßte durch dasselbe auch $84 - 24 \times 3 = 12$ theilbar sein, was jedoch nicht sein kann, da 12 durch keine Zahl theilbar sein kann, die größer als 12 ist. Das gr. g. Maß 12 zwischen dem Divisor 24 und dem Reste 12 muß also auch das gr. g. Maß zwischen dem Dividende 84 und dem Divisor 24 sein.

§. 38.

1. Um das größte gemeinschaftliche Maß zweier oder mehrerer Zahlen zu finden, zerlege man dieselben in Primfactoren, und suche unter diesen diejenigen heraus, welche in allen gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen. Das Product dieser Factoren ist gewiss ein gemeinschaftliches Maß der gegebenen Zahlen; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen anderen Factor hinzufügen würde, dieses Product nicht mehr in allen gegebenen Zahlen enthalten wäre.

Ist z. B. das gr. g. Maß von 180 und 270 zu suchen, so hat man

180	2	270	2	gr. g. M. $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$
90	2	135	3	
45	3	45	3	
15	3	15	3	
5	5	5	5	

Aufgaben.

Man suche das gr. g. Maß von

1) 420 und 630;	2) 400 und 680;
3) 320 und 450;	4) 540 und 756;
5) 448 und 576;	6) 360 und 1024;
7) 300, 360 und 840;	8) 740, 925 und 2035;
9) 104, 525 und 712;	10) 312, 468 und 624.

2. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen kann auch unabhängig von ihrer Zerlegung in Factoren gefunden werden.

Es sei z. B. das gr. g. Maß von 252 und 63 zu suchen.

$$252 : 63 = 4.$$

Da hier die Division ohne Rest aufgeht, so ist 63 selbst das gesuchte gr. g. Maß.

Man suche ferner das gr. g. Maß zwischen 4277 und 637.

$$4277 : 637 = 6 \text{ mit dem Reste } 455.$$

Da bei dieser Division ein Rest übrig bleibt, so weiß man, dass der Dividend 4277 und der Divisor 637 dasselbe gr. g. Maß haben, wie der Divisor 637 und der Rest 455; anstatt zwischen den ersteren zwei Zahlen, wird man daher zwischen den kleineren Zahlen 637 und 455 das gr. g. Maß suchen.

$$637 : 455 = 1 \text{ mit dem Reste } 182.$$

Man wird nun wieder, anstatt zwischen 637 und 455, das gr. g. Maß zwischen 455 und 182 suchen.

$$455 : 182 = 2 \text{ mit dem Reste } 91.$$

Da das gr. g. Maß zwischen 182 und 91 auch das gr. g. Maß zwischen 455 und 182 sein muß, so hat man ferner

$$182 : 91 = 2.$$

Es ist also 91 das gr. g. Maß zwischen 182 und 91, folglich auch zwischen 455 und 182, daher auch zwischen 637 und 455, und somit auch zwischen 4277 und 637.

Man kann die Rechnung so stellen:

637	4277	6	91 das gr. g. Maß.
182	455	1	
0	**91**	2	

Zur Auffindung des gr. g. Maßes zweier Zahlen führt daher folgendes Verfahren:

Man dividiert die größere Zahl durch die kleinere; bleibt ein Rest, so dividiert man sodann den Divisor durch den Rest, den neuen Divisor durch den neuen Rest u. s. w., bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht; der letzte Divisor ist das gr. g. Maß der zwei gegebenen Zahlen. Ist der letzte Divisor 1, so sind die beiden Zahlen relative Primzahlen.

Muß man bei diesem Rechnungsgange endlich auf eine Division kommen, welche ohne Rest aufgeht? Warum?

Um das gr. g. Maß zwischen drei oder mehreren Zahlen zu finden, sucht man zuerst das gr. g. Maß zweier Zahlen, dann das gr. g. Maß zwischen dem gefundenen Maße und der dritten Zahl u. s. f. Das zuletzt gefundene Maß ist zugleich das gr. g. Maß aller gegebenen Zahlen.

Soll z. B. das gr. g. Maß von 32, 48 und 116 gefunden werden, so hat man zunächst

32	48	1	also ist 16 das gr. g. Maß
0	**16**	2	von 32 und 48.

Da 16 als das gr. g. Maß zwischen 32 und 48 alle gemeinschaftlichen Maße dieser zwei Zahlen enthält, so können die Zahlen 32, 48 und 116 kein gemeinschaftliches Maß haben, das nicht zugleich in 16 enthalten wäre; man braucht daher nur noch zwischen 16 und 116 das gr. g. Maß zu suchen, welches dann auch das gr. g. Maß zwischen 32, 48 und 116 sein muß.

16	116	7	4 ist also das gr. g. Maß von 16 und 116,
0	**4**	4	daher auch von 32, 48 und 116.

Aufgaben.

1) Man suche das gr. g. Maß zu 2793 und 1519.

1519	2793	1
245	1274	1
0	**49**	5
		5

gr. g. Maß = 49.

2) Es soll das gr. g. Maß zu 120 und 847 gefunden werden.

120	847	7
50	7	7
1		

gr. g. Maß = 1; es sind also 120 und 847 relative Primzahlen.

3) Welche Zahl ist das gr. g. Maß zwischen 182, 936 und 559?

182	936	5
0	**26**	7

26	559	21
	39	
	13	1

13 ist also das gr. g. Maß zu 182, 936 und 559.

Man suche noch das gr. g. Maß von

4) 143 und 171; 5) 323 und 289;
6) 396 und 660; 7) 713 und 837;
8) 153 und 389; 9) 437 und 1035;
10) 1292 und 2812; 11) 3718 und 7774;
12) 112, 372 und 516; 13) 1554, 3552 und 5143.

§. 39.

Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

Wenn eine Zahl durch zwei oder mehrere Zahlen theilbar ist, so heißt sie ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben; z. B. 24 ist ein gemeinschaftliches Vielfaches von 2, 3, 4, 6, 8, 12.

Da das Product stets durch seine Factoren theilbar sein muß, so ist jedes Product ein gemeinschaftliches Vielfaches seiner Factoren.

Um die Rechnungen möglichst einfach durchzuführen, ist es oft von Wichtigkeit, zu gegebenen Zahlen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache d. i. die kleinste Zahl zu finden, welche durch alle jene Zahlen theilbar ist.

Wenn unter den Zahlen, deren Vielfaches gesucht wird, kein Paar vorkommt, welches ein gemeinschaftliches Maß hat, so ist ihr Product selbst zugleich ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches; denn wie man eine Zahl oder auch nur einen Factor weglassen würde, wäre das Product der übriggebliebenen Zahlen und deren Factoren nicht mehr durch alle gegebenen Zahlen theilbar.

Wenn eine oder mehrere unter den gegebenen Zahlen in einer andern ohne Rest enthalten sind, so kann man dieselben weglassen, und das Vielfache der übrigen wird auch durch die weggelassenen theilbar sein.

Haben zwei oder mehrere Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so kann man bei der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Vielfachen statt jener Zahlen das gemeinschaftliche Maß nur einmal und die Quotienten nehmen, welche jene Zahlen durch dieses Maß dividiert geben. Z. B. die Zahlen 14 und 18 haben das gemeinschaftliche Maß 2, und geben dadurch dividiert 7 und 9; die Zahl nun, welche durch 2, 7 und 9 theilbar ist, wird gewiss auch durch $2 \times 7 = 14$ und durch $2 \times 9 = 18$ theilbar sein.

Auf diesen Grundsätzen beruhet das nachstehende Verfahren zur Auffindung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen:

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen in eine Reihe, und lasse diejenigen weg, welche in andern größeren ohne Rest enthalten sind.

2. Kommen unter den übriggebliebenen Zahlen zwei oder mehrere vor, die eine Primzahl zum gemeinschaftlichen Maße haben, so hebe man dieses Maß heraus, dividiere dadurch und

setze in eine neue Reihe die Zahlen, welche dadurch nicht theilbar sind, ungeändert herab, von den übrigen schreibe man nur die Quotienten hin.

3. Mit der auf diese Art erhaltenen Reihe verfahre man wieder auf dieselbe Weise, und setze dieses so lange fort, bis kein Paar der letzten Reihe mehr ein gemeinschaftliches Maß hat.

4. Die Zahlen der letzten Reihe und die als Maße herausgehobenen Zahlen werden mit einander multipliciert; das Product ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen. Z. B.

1) Man suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu den Zahlen 5, 8, 9, 11.

Da von diesen Zahlen kein Paar ein gemeinschaftliches Maß hat, so ist ihr kl. g. Vielfaches

$$5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 = 3960.$$

2) Man suche das kl. g. Vielfache zwischen 2, 3, 5, 8, 16, 60, 120.

Hier sind alle Zahlen in 120 ohne Rest enthalten, daher ist 120 selbst das kl. g. Vielfache.

3) Es soll das kl. g. Vielfache zu den Zahlen 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 28, 36 gefunden werden.

Man hat folgende Rechnung:

~~2~~,	~~3~~,	~~4~~,	~~5~~,	8,	10,	~~12~~,	15,	28,	36	
				4,	~~5~~,		15,	14,	18	2
				2,			15,	7,	9	2
				2,			5,	7,	3	3

Das kl. g. Vielfache der gegebenen Zahlen ist also

$$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2520.$$

Aufgaben.

Man suche das kl. g. Vielfache von

1) 3 und 5; 2) 2 und 10;

3) 4 und 10; 4) 2, 5 und 7;
5) 3, 9 und 18; 6) 3, 4 und 14;
7) 3, 5, 8 und 11; 8) 2, 3, 5 und 20;
9) 3, 5, 8, 14, 18, 21 und 30;
10) 3, 5, 6, 18, 20, 21 und 25;
11) 2, 3, 5, 8, 11, 15, 21, 36;
12) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 18, 33, 35, 60;
13) 12, 15, 27, 60, 72, 90, 128, 396.

Vierter Abschnitt.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

§. 40.

Eine Zahl, welche einen Theil der Einheit ein- oder mehrmal in sich enthält, wird eine *gebrochene Zahl* oder ein *Bruch* genannt. Zur Darstellung eines Bruches sind zwei Zahlen erforderlich: der *Nenner*, welcher angibt, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt wurde, und der *Zähler*, welcher anzeigt, wie viele solcher Theile man genommen hat.

Z. B. In dem Bruche $\frac{3}{8}$ (drei Achtel) ist 8 der Nenner, und zeigt an, dass die Einheit in 8 gleiche Theile getheilt wurde; 3 ist der Zähler, und gibt an, dass man einen solchen Theil, nämlich $\frac{1}{8}$, 3mal genommen hat.

Ein Bruch, dessen Zähler kleiner als der Nenner ist, heißt *echt*; z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{20}$. Ein echter Bruch ist kleiner als 1.

Ein Bruch, dessen Zähler gleich dem Nenner oder größer als der Nenner ist, heißt *unecht*; z. B. $\frac{2}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{217}{50}$. Ein unechter Bruch ist entweder gleich 1, oder größer als 1.

Eine Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem angehängten Bruche besteht, wird eine *gemischte Zahl* genannt; z. B. $1\frac{3}{4}$, $5\frac{7}{6}$, $915\frac{13}{19}$. So oft bei der Division ganzer Zahlen ein Rest übrig bleibt, ist der Quotient immer eine gemischte Zahl.

I. Umformung der Brüche.

§. 41.

1. Jede gemischte Zahl kann in einen unechten Bruch verwandelt werden; man darf nur die ganze Zahl mit dem Nenner multiplicieren und zum Producte den Zähler addieren; diese Summe ist der Zähler, der Nenner wird unverändert beibehalten. Z. B.

$$5\tfrac{3}{8} = \frac{5 \times 8 + 3}{8} = \tfrac{43}{8}$$

Denn 1 Ganzes hat 8 Achtel, 5 Ganze sind also 5mal 8 = 40 Achtel, und die 3 Achtel dazu, hat man $\frac{43}{8}$.

Man richte folgende gemischte Zahlen zu unechten Brüchen ein:

$1\frac{3}{8}$, $2\frac{3}{4}$, $5\frac{7}{8}$, $3\frac{8}{15}$, $12\frac{2}{3}$, $27\frac{4}{5}$, $128\frac{1}{20}$, $102\frac{7}{12}$, $207\frac{13}{19}$, $1234\frac{47}{51}$, $5728\frac{1}{2}$, $217\frac{11}{18}$, $69\frac{97}{69}$, $300\frac{17}{40}$, $298\frac{10}{27}$, $39\frac{243}{625}$.

2. Jeder unechte Bruch kann in eine ganze oder gemischte Zahl verwandelt werden; man braucht nur den Zähler durch den Nenner zu dividieren. Z. B.

$$\tfrac{27}{4} = 27 : 4 = 6\tfrac{3}{4}.$$

Denn: 4 Viertel machen 1 Ganzes, 27 Viertel also machen so viel Ganze, als wie oft 4 in 27 enthalten ist; man muß somit 27 durch 4 dividieren.

Man ziehe noch aus folgenden unechten Brüchen die Ganzen heraus:

$\frac{5}{5}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{42}{6}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{34}{7}$, $\frac{51}{10}$, $\frac{123}{16}$, $\frac{715}{32}$, $\frac{10008}{64}$, $\frac{21567}{125}$, $\frac{12533}{400}$.

Aus diesen Verwandlungen ersieht man auch, dass ein Bruch als ein angezeigter Quotient betrachtet werden kann; der Zähler stellt den Dividend, der Nenner den Divisor vor.

§. 42.

Je mehrere gleich große Theile man nimmt, desto mehr erhält man zusammen. Wenn daher zwei oder mehrere Brüche denselben Nenner haben, so ist jener unter ihnen der größere, welcher den größeren Zähler hat. Z. B. $\frac{7}{10}$ ist größer als $\frac{3}{10}$, was man so schreibt: $\frac{7}{10} > \frac{3}{10}$.

Welcher unter den Brüchen $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$ ist der größte, welcher der kleinste, und warum?

In je mehrere Theile die Einheit getheilt wird, desto kleiner sind die einzelnen Theile. Wenn also zwei oder mehrere Brüche denselben Zähler haben, so ist derjenige unter ihnen der kleinste, welcher den größten Nenner hat. So ist $\frac{3}{8}$ kleiner als $\frac{3}{5}$, oder $\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$.

Welcher unter den Brüchen $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{5}{26}$ ist der kleinste, welcher der größte, und warum?

§. 43.

Erweiterung der Brüche.

Wenn man den Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl multipliciert, so erhält man einen Bruch, welcher mehrere, aber auch kleinere Theile ausdrückt, und zwar werden, so vielmal mehr Theile der neue Bruch enthält, eben so vielmal die einzelnen Theile kleiner sein, so dass der neue Bruch mit dem früheren einen gleichen Wert hat. Man nennt eine solche Formveränderung eines Bruches, ohne dessen Wert zu ändern, die Erweiterung desselben. Z. B.

$$\frac{3}{5} \text{ mit 6 erweitert, gibt } \frac{3 \times 6}{5 \times 6} = \frac{18}{30}.$$

So erhält man durch Erweiterung:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{15}{30} = \frac{53}{106} = \ldots$$
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{24}{36} = \frac{60}{90} = \ldots$$
$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \frac{9}{24} = \frac{12}{32} = \frac{15}{40} = \frac{30}{80} = \frac{375}{1000} \ldots$$

Durch die Erweiterung kann man jeden Bruch ohne Aenderung seines Wertes in einen andern verwandeln, dessen Nenner ein Vielfaches von dem früheren Nenner ist. Um z. B. $\frac{7}{8}$ in einen

Bruch, dessen Nenner 40 ist, zu verwandeln, darf man $\frac{7}{8}$ nur mit 40 : 8 d. i. mit 5 erweitern, wodurch man $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$ erhält. Um daher einen Bruch in einen andern Bruch von gegebenem Nenner zu erweitern, darf man nur den neuen Nenner durch den früheren dividieren, und mit dem Quotienten den früheren Zähler multiplicieren; das Product ist der neue Zähler.

Z. B. $\frac{7}{9}$ soll in einen Bruch vom Nenner 108 erweitert werden; man hat

$$108 : 9 = 12,\ 7 \times 12 = 84, \text{ also } \frac{7}{9} = \frac{84}{108}.$$

Man kann durch dieses Verfahren auch mehrere Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen, sobald dieser durch alle Nenner der gegebenen Brüche theilbar ist. Sind z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{20}$ auf den Nenner 120 zu bringen, so hat man

$$120 : 3 = 40,\ 2 \times 40 = 80, \text{ somit } \frac{2}{3} = \frac{80}{120};$$
$$120 : 4 = 30,\ 3 \times 30 = 90,\ \text{„}\ \frac{3}{4} = \frac{90}{120};$$
$$120 : 20 = 6,\ 7 \times 6 = 42,\ \text{„}\ \frac{7}{20} = \frac{42}{120}.$$

Man bringe

1) die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ auf den Nenner 6;
2) „ „ $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ „ „ „ 12;
3) „ „ $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{15}$ „ „ „ 30;
4) „ „ $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{8}$ „ „ „ 72;
5) „ „ $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$ „ „ „ 240;
6) „ „ $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{18}$ auf den Nenner 720;
7) „ „ $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{11}{17}$, $\frac{3}{14}$ „ „ „ 78540;
8) „ „ $\frac{9}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{125}$, $\frac{46}{50}$, $\frac{113}{625}$ „ „ „ 10000.

Um die Rechnungen so einfach als möglich zu führen, pflegt man die Brüche allezeit auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen; dieser ist offenbar die kleinste Zahl, welche durch alle gegebenen Nenner theilbar ist, somit ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

Aufgaben.

1) Man bringe die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner:

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 4, 5, 9, somit der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist 180 und man hat

$180 : 4 = 45,\ 3 \times 45 = 135$ oder
$180 : 5 = 36,\ 2 \times 36 = 72$
$180 : 9 = 20,\ 4 \times 20 = 80$

	180	
$\frac{3}{4}$	45	135
$\frac{2}{5}$	36	72
$\frac{4}{9}$	20	80

daher

$$\frac{3}{4} = \frac{135}{180},\ \frac{2}{5} = \frac{72}{180},\ \frac{4}{9} = \frac{80}{180}.$$

2) Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ sollen auf die kleinste gemeinschaftliche Benennung gebracht werden.

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist 12, und man hat

	12	
$\frac{1}{2}$	6	6
$\frac{2}{3}$	4	8
$\frac{3}{4}$	3	9
$\frac{5}{12}$	1	5

daher

$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$
$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$
$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$
$\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$

Man bringe noch folgende Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner:

3) $\frac{13}{21}, \frac{37}{39}, \frac{7}{12}, \frac{10}{52}$;
4) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{32}, \frac{9}{40}, \frac{13}{60}$;
5) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{5}{8}, \frac{13}{18}$;
6) $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{5}{7}, \frac{8}{21}, \frac{3}{8}, \frac{2}{3}, \frac{7}{15}$;
7) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$;
8) $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{16}, \frac{9}{25}, \frac{4}{5}, \frac{11}{15}, \frac{8}{9}, \frac{17}{20}$;
9) $\frac{2}{3}, \frac{7}{15}, \frac{8}{25}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{11}{12}, \frac{13}{18}$;
10) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \frac{127}{128}$;
11) $\frac{17}{30}, \frac{5}{32}, \frac{23}{25}, \frac{19}{24}, \frac{38}{75}, \frac{29}{36}, \frac{3}{35}$;
12) $\frac{17}{54}, \frac{11}{48}, \frac{19}{64}, \frac{7}{18}, \frac{31}{50}, \frac{29}{32}, \frac{23}{45}$.

Mittels der Erweiterung der Brüche ist man im Stande, auch Brüche von ungleichen Nennern hinsichtlich ihrer Größe zu vergleichen; man darf sie nur mit einem gemeinschaftlichen Nenner darstellen, und dann auf die neuen Zähler Rücksicht nehmen. Um z. B. zu sehen, welcher von den zwei Brüchen $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{18}$ der größere ist, hat man

$\frac{3}{8} = \frac{27}{72}$, $\frac{7}{18} = \frac{28}{72}$, daher $\frac{7}{18}$ größer als $\frac{3}{8}$.

Welcher von den Brüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{16}{31}$, $\frac{29}{60}$ ist der größte, und welcher der kleinste?

Man ordne folgende Brüche nach ihrer Größe, und zwar von dem kleinsten angefangen: $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{23}{35}$, $\frac{63}{95}$, $\frac{13}{19}$.

§. 44.

Abkürzen der Brüche.

Wenn man den Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl dividiert, so ändert sich zwar die Form des Bruches, der Wert desselben aber bleibt unverändert; denn so vielmal weniger Theile der neue Bruch enthält, eben so vielmal größer sind die einzelnen Theile. Eine solche Formveränderung des Bruches durch die Division wird das **Abkürzen** desselben genannt, sie kann natürlich nur dann statthaben, wenn Zähler und Nenner des gegebenen Bruches einen gemeinschaftlichen Theiler haben; ist dieses nicht der Fall, so hat der Bruch bereits die einfachste Form, und kann nicht ohne Aenderung des Wertes durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden. Z. B.

1) $\frac{4}{18} \overset{2}{=} \frac{2}{9}$ 2) $\frac{36}{57} \overset{3}{=} \frac{12}{19}$ 3) $\frac{44}{84} \overset{4}{=} \frac{11}{21}$

4) $\frac{35}{80} \overset{5}{=} \frac{7}{16}$ 5) $\frac{200}{240} \overset{10}{=} \frac{20}{24} \overset{4}{=} \frac{5}{6}$

Man kürze folgende Brüche so weit als möglich ab:

$\frac{22}{50}$, $\frac{25}{40}$, $\frac{24}{48}$, $\frac{21}{30}$, $\frac{102}{141}$, $\frac{1512}{1644}$, $\frac{192}{240}$, $\frac{420}{2520}$, $\frac{676}{1092}$, $\frac{625}{1000}$, $\frac{273}{1239}$, $\frac{1824}{2040}$.

§. 45.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch.

Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, darf man nur den Zähler durch den Nenner dividieren. Z. B.

1) $\frac{25}{4} = 25 : 4 = 6{\cdot}25$ 2) $\frac{37}{8} = 37 : 8 = 4{\cdot}625$

3) $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{\cdot}5$ 4) $\frac{7}{3} = 7 : 3 = 2{\cdot}3333\ldots$

5) $\frac{13}{16} = 13_0 : 16 = 0{\cdot}8125$

$$\begin{array}{l} \;\;20 \\ \;\;\;\;40 \\ \;\;\;\;\;\;80 \end{array}$$

Aufgaben.

1) Man verwandle folgende gemeine Brüche in Decimalbrüche: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{17}{40}$, $\frac{25}{72}$, $\frac{39}{77}$, $17\frac{3}{5}$, $5\frac{8}{13}$, $6\frac{7}{17}$, $8\frac{3}{23}$, $19\frac{9}{78}$, $223\frac{7}{13}$.

2) Ein Meter ist gleich 3·16375 Wiener Fuß; diesen Wert drücken annäherungsweise die Brüche $\frac{19}{6}$, $\frac{174}{55}$, $\frac{367}{116}$, $\frac{541}{171}$, $\frac{5236}{1655}$, $\frac{5777}{1826}$, $\frac{11013}{3481}$ aus; wie groß ist der Unterschied zwischen dem wahren und jedem dieser Näherungswerte in Decimalen?

3) Ein Wiener Metzen hat 1·9471, oder näherungsweise $\frac{35}{18}$, $\frac{37}{19}$, $\frac{368}{189}$, $\frac{773}{397}$, $\frac{1141}{586}$, $\frac{3055}{1809}$ Wiener Cubikfuß; man gebe den Unterschied zwischen dem wahren und jedem der Näherungswerte in Decimalen an.

Wenn bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches die Division zuletzt ohne Rest aufgeht, so ist der erhaltene Decimalbruch dem gegebenen gemeinen vollkommen gleich, und heißt ein **endlicher** Decimalbruch.

Geht die Division nicht ohne Rest auf, so ist der erhaltene Decimalbruch nur angenähert, und drückt den Wert des gemeinen Bruches um so genauer aus, je mehrere Decimalen man entwickelt; er heißt ein unendlicher Decimalbruch. Bei solchen Decimalbrüchen reichen für die Berechnung der meisten Aufgaben 3 oder 4 Decimalstellen hin.

Jeder unendliche Decimalbruch, welcher aus einem gemeinen Bruche hervorgeht, ist ein periodischer Decimalbruch.

§. 46.

Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch.

Um einen endlichen Decimalbruch in einen gemeinen zu verwandeln, darf man ihn nur mit Angabe seines Nenners anschreiben. Z. B.

$$0{\cdot}7 = \tfrac{7}{10},\; 0{\cdot}25 = \tfrac{25}{100} = \tfrac{1}{4},\; 3{\cdot}64 = 3\tfrac{64}{100} = 3\tfrac{16}{25}.$$

Zusammengesetzter erscheint häufig die Verwandlung eines periodischen Decimalbruches in einen gemeinen Bruch. Ist z. B. der periodische Decimalbruch $0{\cdot}\dot{5}$ durch einen gemeinen Bruch darzustellen, so hat man:

$$\left.\begin{array}{rcl} 10\text{facher Bruch} & = & 5{\cdot}5555\ldots \\ 1\text{facher }\;\;\text{„}\;\; & = & 0{\cdot}5555\ldots \end{array}\right\}\text{subtrahiert}$$
$$\overline{9\text{facher Bruch} = 5\qquad\qquad\qquad}$$

daher der einfache Bruch $= \frac{5}{9}$.

Bei dem periodischen Decimalbruche $0{\cdot}\dot{1}0\dot{8} = 0{\cdot}108108\ldots$ wird man haben:

$$\left.\begin{array}{rcr} 1000\text{facher Bruch} & = & 108{\cdot}108108\ldots \\ 1\text{facher Bruch} & = & 0{\cdot}108108\ldots \end{array}\right\}\text{subtrahiert}$$
$$\overline{999\text{facher Bruch} = 108\qquad\qquad\qquad}$$

daher der einfache Bruch $= \frac{108}{999} = \frac{12}{111} = \frac{4}{37}$.

Ebenso würde man finden:

$$0{\cdot}\dot{7} = \tfrac{7}{9},\; 0{\cdot}\dot{3}\dot{1} = \tfrac{31}{99},\; 0{\cdot}\dot{3}5\dot{9} = \tfrac{359}{999}.$$

Ein periodischer Decimalbruch, worin die Periode gleich mit der ersten Decimalstelle beginnt, wird daher in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man die Periode zum Zähler, und so viele Neuner, als die Periode Ziffern hat, zum Nenner annimmt.

Beginnt die Periode nicht gleich mit der ersten Decimale, wie in $0{\cdot}73\dot{5}1\dot{7} = 0{\cdot}73517517\ldots$, so hat man

$$\left.\begin{array}{rcr} \text{100000facher Bruch} & = & 73517{\cdot}517517\ldots \\ \text{100facher} \quad ,, & = & 73{\cdot}517517\ldots \end{array}\right\} \text{subtrahiert}$$
$$\overline{\text{99900facher Bruch} = 73517 - 73}$$

daher der einfache Bruch $= \frac{73517-73}{99900}$.

Hier nimmt man also die Periode sammt den ihr vorangehenden Decimalen, subtrahiert davon diese letztern, der Rest ist der Zähler des gesuchten Bruches; als Nenner nimmt man so viele Neuner an, als die Periode Ziffern hat, mit so vielen Nullen rechts, als ihr Decimalen vorangehen.

Beispiele.

1) $0{\cdot}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

2) $7{\cdot}0625 = 7\frac{625}{10000} = 7\frac{25}{400} = 7\frac{1}{16}$.

3) $7{\cdot}\dot{4} = 7\frac{4}{9}$.

4) $0{\cdot}\dot{7}3\dot{8} = \frac{738}{999} = \frac{83}{111}$.

5) $0{\cdot}3\dot{1}\dot{4} = \frac{314-3}{990} = \frac{311}{990}$.

6) $5{\cdot}21\dot{3} = 5\frac{213-21}{900} = 5\frac{192}{900} = 5\frac{16}{75}$.

7) Man verwandle in gemeine Brüche die folgenden Decimalbrüche:

$0{\cdot}8$, $0{\cdot}24$, $0{\cdot}025$, $3{\cdot}15$, $35{\cdot}005$, $50{\cdot}875$, $0{\cdot}\dot{2}$, $0{\cdot}\dot{3}\dot{6}$, $0{\cdot}\dot{0}\dot{8}$, $12{\cdot}\dot{3}$, $9{\cdot}\dot{1}0\dot{5}$, $0{\cdot}3\dot{2}0\dot{4}$, $0{\cdot}57\dot{2}\dot{3}$, $17{\cdot}105\dot{2}$, $133{\cdot}30\dot{7}8\dot{5}$.

II. Das Addieren und Subtrahieren der Brüche.

§. 47.

Addition der Brüche.

2 Neuntel und 5 Neuntel sind 7 Neuntel, oder

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}.$$

Brüche von gleichen Nennern werden also addiert, indem man ihre Zähler addiert, und als Nenner den gemeinschaftlichen Nenner beibehält.

Haben die Brüche ungleiche Nenner, so werden sie zuerst auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, und dann addiert. Z. B.

1) $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

2) $\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{12} \\ \hline \frac{1}{2} & 6 & 6 \\ \frac{1}{3} & 4 & 4 \\ \frac{1}{12} & 1 & 1 \\ \cline{3-3} & & \frac{11}{12} \end{array}$ 3) $\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{30} \\ \hline \frac{3}{5} & 6 & 18 \\ \frac{5}{6} & 5 & 25 \\ \frac{7}{10} & 3 & 21 \\ \cline{3-3} & & \frac{64}{30} = \frac{32}{15} = 3\frac{2}{15}. \end{array}$

4) $3\frac{7}{8} + 2{\cdot}5 = 3\frac{7}{8} + 2\frac{1}{2} = 6\frac{3}{8}$.

Aufgaben.

1) $\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{11}{12} = ?$
2) $\frac{7}{20} + \frac{9}{20} + \frac{1}{20} + \frac{3}{20} = ?$
3) $\frac{5}{7} + \frac{8}{9} = ?$
4) $\frac{7}{45} + \frac{11}{18} = ?$
5) $29\frac{3}{10} + 45 + 16\frac{4}{10} = ?$
6) $45\frac{1}{2} + 127\frac{3}{5} + \frac{8}{15} = ?$
7) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{9} = ?$
8) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} + 0{\cdot}7 + \frac{1}{2} = ?$
9) $8 + 3\frac{5}{6} + 7\frac{3}{4} + 0{\cdot}\dot{3} = ?$
10) $1\frac{1}{2} + 5\frac{3}{8} + 13\frac{5}{12} + 8\frac{2}{3} + 19\frac{5}{9} = ?$
11) $128\frac{3}{4} + 245\frac{3}{5} + 208\frac{1}{2} + 199\frac{1}{3} + 206\frac{7}{10} = ?$
12) $2\frac{1}{3} + 20 + 3\frac{3}{4} + \frac{5}{12} + 17\frac{2}{3} + 3\frac{11}{16} + 5\frac{7}{8} + \frac{1}{2} = ?$
13) $5{\cdot}8 + 27\frac{5}{12} + 40{\cdot}25 + 9\frac{7}{8} = ?$
14) $0{\cdot}\dot{7} + 2{\cdot}\dot{3}\dot{1} + 81{\cdot}35 + 15{\cdot}3\dot{6} = ?$
15) $35708\frac{7}{32} + 10985\frac{9}{16} + 78659\frac{11}{80} + 340795\frac{17}{24} = ?$
16) $759\frac{59}{120} + 1813\frac{41}{48} + 3879\frac{131}{180} + \frac{37}{72} + 538\frac{55}{64} = ?$
17) $17084\frac{134}{625} + 95382 + 56014\frac{73}{250} + 739\frac{85}{112} + 3956\frac{31}{80} = ?$

18) $69374\frac{82}{185} + 8315\frac{97}{180} + 35717\frac{19}{150} + 39090\frac{53}{80} + 97\frac{80}{81} = ?$

19) $13789\frac{177}{572} + 24890\frac{169}{156} + 35901\frac{43}{390} + 46012\frac{191}{195} + 579\frac{99}{154} = ?$

20) Ein Landmann erzeugt $58\frac{3}{8}$ Metzen Weizen, $38\frac{1}{4}$ Metzen Korn, $43\frac{1}{2}$ Metzen Gerste, und $70\frac{5}{8}$ Metzen Hafer; wie viel Metzen Getraide macht dieses?

21) Ein Leinwandhändler kauft 4 Stück Leinwand, im ersten sind $49\frac{1}{3}$ Ellen, im zweiten $42\frac{1}{2}$, im dritten $54\frac{3}{4}$, im vierten $40\frac{5}{8}$ Ellen; wie viel Ellen enthalten alle 4 Stück?

22) Ein Kaufmann erhält 6 Fässer Kaffee; das Fass A enthält $124\frac{1}{2}$ ℔, B $126\frac{3}{5}$ ℔, C $120\frac{7}{16}$ ℔, D $118\frac{5}{8}$ ℔, E $117\frac{7}{8}$ ℔, F $119\frac{3}{4}$ ℔; wie viel ℔ sind es im Ganzen?

23) Jemand hat $8\frac{3}{10}$ fl., $37\frac{3}{4}$ fl., $28\frac{4}{5}$ fl., $9\frac{9}{20}$ fl., $19\frac{1}{2}$ fl. zu zahlen; wie viel zusammen?

24) Ein Handelsmann findet beim Jahresabschlusse folgenden Vorrath an Kaffee:

$21\frac{1}{2}$ Ctr.	Mocca	im	Werte	von	$1730\frac{3}{4}$	fl.
$61\frac{6}{8}$ „	Martinique	„	„	„	$4210\frac{2}{5}$	„
$15\frac{1}{8}$ „	Havanna	„	„	„	$962\frac{17}{20}$	„

wie groß ist der ganze Vorrath, und wie groß dessen Gesammtwert?

25) Die Seiten eines Dreieckes betragen $35^0\ 4\frac{5}{12}'$, $23^0\ 2\frac{3}{4}'$, $20^0\ 5\frac{5}{6}'$; wie groß ist der Umfang?

26) Die Winkel eines Viereckes betragen einzeln $78^0\ 47\frac{1}{2}'$, $107^0\ 32\frac{3}{5}'$, $57^0\ 57\frac{7}{10}'$ und $115^0\ 42\frac{1}{5}'$; wie groß ist ihre Summe?

27) Ein Wasserbehälter wird durch 3 Röhren gefüllt, und zwar durch die erste Röhre allein in 4 Stunden, durch die zweite in 5, durch die dritte in 6 Stunden. Der wie vielte Theil des Behälters wird in einer Stunde gefüllt, wenn man das Wasser bloß aus der ersten, oder der zweiten, oder der dritten, oder wenn man es aus allen drei Röhren zugleich fließen läſst?

28) Jemand hat $18\frac{533}{800}$ Hektar Ackergründe, $19\frac{59}{64}$ Hektar

Wiesen, $13\frac{9}{25}$ Hektar Waldungen und $1\frac{341}{500}$ Hektar Gartenland; wie groß ist sein ganzer Besitzstand?

29) Das Ausgraben eines Brunnens kostet für das erste Meter $2\frac{1}{5}$ fl. und für jedes folgende Meter $1\frac{3}{4}$ fl. mehr als für das vorhergehende; wie viel wird das Ausgraben des Brunnens kosten, wenn derselbe 8 Meter tief ist?

§. 48.

Subtraction der Brüche.

7 Neuntel weniger 4 Neuntel sind 3 Neuntel, oder

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{3}{9}.$$

Brüche von gleichen Nennern werden also subtrahiert, wenn man die Zähler subtrahiert und unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner schreibt.

Haben die zu subtrahierenden Brüche ungleiche Nenner, so werden sie zuerst auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, und dann subtrahiert. Z. B.

1) $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}.$

2)
$$\begin{array}{r|c|c} & \multicolumn{1}{c}{8} & \\ \hline \frac{5}{8} & 1 & 5 \\ -\frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \hline & & \frac{3}{8} \end{array}$$

3) $4\frac{3}{4} - 2 = 2\frac{3}{4}.$

4) $49 - 15\frac{3}{5} = 33\frac{2}{5}.$

Im letzten Beispiele addiert man zu dem Bruche des Subtrahends so viel hinzu, dass man ein Ganzes erhält; was man hinzuaddiert, wird sogleich in den Rest geschrieben, dann vermehrt man den Subtrahend um 1 Ganzes und subtrahiert die Ganzen.

5) $4\frac{3}{4} - 1{\cdot}16 = 4\frac{3}{4} - 1\frac{16}{100} = 3\frac{59}{100}.$

Aufgaben.

1) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = ?$

2) $\frac{19}{20} - \frac{11}{20} = ?$

3) $\frac{9}{10} - \frac{7}{10} = ?$

4) $\frac{17}{30} - \frac{13}{30} = ?$

5) $2\frac{29}{54} - \frac{17}{54} = ?$

6) $7\frac{8}{15} - \frac{2}{5} = ?$

7) $\frac{17}{20} - \frac{17}{30} = ?$

8) $\frac{8}{9} - \frac{7}{8} = ?$

9) $35\frac{3}{8} - 19 = ?$

10) $108\frac{7}{10} - 99 = ?$

11) $315\frac{12}{25} - 300 = ?$

12) $37 - \frac{1}{4} = ?$

13) $128 - 48\frac{5}{9} = ?$

14) $17 - 12\frac{11}{12} = ?$

15) $83\frac{1}{2} - 15\frac{3}{4} = ?$

16) $9\frac{5}{8} - 4\frac{3}{16} = ?$

17) $146\frac{3}{5} - 88\frac{7}{8} = ?$

18) $\frac{7}{9} - 0\cdot3 = ?$

19) $37\cdot75 - 18\frac{5}{6} = ?$

20) $14\cdot\dot{6} - 9\frac{9}{11} = ?$

21) $37945\frac{107}{120} - 29086\frac{43}{56} = ?$

22) $7358\frac{223}{625} - 997\frac{59}{75} = ?$

23) $23985\frac{17}{82} - 10845\frac{23}{40} = ?$

24) $30912\frac{511}{512} - 30905\frac{17}{96} = ?$

25) $8765\frac{431}{560} - 5678\frac{97}{120} = ?$

26) $3746\frac{158}{243} - 950\frac{131}{162} = ?$

27) $12345\frac{67}{68} - 6082\frac{55}{56} = ?$

28) $57830\frac{91}{112} - 37921\frac{123}{136} = ?$

29) $839\frac{563}{637} - 785\frac{215}{443} = ?$

30) $1528\frac{571}{982} - 649\frac{817}{1112} = ?$

31) Jemand nimmt $125\frac{3}{4}$ fl. ein, und gibt $83\frac{1}{4}$ fl. aus; wie viel bleibt ihm übrig?

32) Um wie viel sind $\frac{17}{20}$ fl. mehr als $\frac{4}{5}$ fl.?

33) Von $20\frac{3}{4}$ ℔ werden $2\frac{7}{8}$ ℔ verkauft; wie viel bleibt übrig?

34) A ist $25\frac{3}{4}$ Jahre alt, B 17 Jahre; um wie viel ist A älter als B?

35) Jemand besitzt 27 Joch Ackergrund; wie viel behält er noch, wenn er $7\frac{3}{16}$ Joch verkauft?

36) Von 58 fl. 42 kr. werden 19 fl. $53\frac{1}{2}$ kr. ausgegeben; wie viel bleibt übrig?

37) Um wie viel verändert sich der Bruch $\frac{17}{25}$, wenn man a) zum Zähler und Nenner 3 addiert, b) vom Zähler und Nenner 3 subtrahiert?

38) Von einer Schuld von 200 fl. werden nach und nach 30 fl., $35\frac{1}{2}$ fl., $41\frac{3}{5}$ fl., $18\frac{8}{25}$ fl. abgezahlt; wie groß ist noch der Schuldrest?

39) Sechs Kisten wiegen mit dem darin enthaltenen Kandis-

zucker $56\frac{1}{4}$ ℔, 49 ℔, $43\frac{1}{2}$ ℔, $52\frac{3}{8}$ ℔, $42\frac{3}{4}$ ℔, $40\frac{9}{10}$ ℔; die leeren Kisten wiegen $5\frac{3}{4}$ ℔, $5\frac{5}{8}$ ℔, $4\frac{1}{4}$ ℔, $5\frac{1}{4}$ ℔, $4\frac{1}{12}$ ℔, $4\frac{1}{2}$ ℔; wie viel Kandis ist in allen 6 Kisten?

40) Um wie viel ist die Summe $17\frac{3}{8} + 25\frac{5}{12}$ größer als die Summe $8\frac{4}{5} + 26\frac{7}{10}$?

41) Um wie viel ist der Unterschied $37\frac{5}{16} - 11\frac{3}{5}$ größer als der Unterschied $28\frac{7}{15} - 19\frac{7}{12}$?

42) Man hat vier Zahlen: die erste ist $8\frac{5}{12}$, die zweite um $2\frac{3}{4}$ größer als die erste, die dritte um $3\frac{5}{8}$ kleiner als die zweite, die vierte so groß als der Unterschied zwischen der ersten und dritten; wie groß ist die Summe aller vier Zahlen?

43) Wie groß ist der Unterschied zwischen $3784\frac{19}{75} + 1738\frac{38}{105}$ und $233\frac{3}{25} + 1817\frac{67}{100} + 2789\frac{37}{240}$?

44) Um wie viel ist $6383\frac{25}{512} + 3791\frac{791}{800} - 5879\frac{151}{160}$ kleiner als $6495\frac{119}{240} + 4802\frac{421}{720} - 4768\frac{17}{40}$?

III. Das Multiplicieren und Dividieren der Brüche.

§. 49.

Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

5 Neuntel 4mal genommen sind 20 Neuntel, oder

$$\frac{5}{9} \times 4 = \frac{20}{9} = \frac{5 \times 4}{9}.$$

Ein Bruch wird daher mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciert und den Nenner ungeändert beibehält.

Die Richtigkeit dieser Regel ergibt sich auch aus dem Begriffe eines Bruches. Wenn der Nenner ungeändert bleibt, der Zähler aber 2mal, 3mal, 4mal . . . . so groß wird, so erhält man 2mal, 3mal, 4mal . . . . so viele eben so große Theile, daher wird auch der Wert des neuen Bruches 2, 3, 4 . . . mal so groß, als der Wert des früheren Bruches.

In einigen Fällen kann noch eine andere Art des Multiplicierens angewendet werden. Wenn man den Zähler eines Bruches ungeändert läſst, den Nenner aber 2mal, 3mal, 4mal . . . . kleiner annimmt, so werden, weil das Ganze in weniger Theile getheilt wird, die einzelnen Theile größer ausfallen, und man erhält somit eben so viele, aber 2, 3, 4 . . . . mal größere Theile, folglich wird auch der Wert des neuen Bruches 2, 3, 4 . . . . mal so groß, als der Wert des früheren Bruches; oder:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man den Zähler ungeändert läſst, und den Nenner durch die ganze Zahl dividiert.

Dieses zweite Verfahren ist jedoch nur dann anwendbar, wenn der Nenner des gegebenen Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist. Z. B.

1) $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.   2) $\frac{7}{12} \times 4 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

3) $3\frac{2}{7} \times 8 = \frac{23}{7} \times 8 = \frac{184}{7} = 26\frac{2}{7}$.

4) $9\frac{3}{10} \times 5 = \frac{93}{10} \times 5 = \frac{93}{2} = 46\frac{1}{2}$.

5) $\frac{4}{7} \times 7 = 4$.   6) $\frac{11}{12} \times 12 = 11$.

Aus den letzten zwei Beispielen ersieht man, daſs *ein Bruch mit seinem Nenner multipliciert den Zähler zum Producte gibt.*

7) $\frac{7}{12} \times 9 = \frac{63}{12} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$ oder

$$\frac{7}{\underset{4}{\cancel{12}}} \times \overset{3}{\cancel{9}} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}.$$

Wenn der Nenner des Bruches und die ganze Zahl ein gemeinschaftliches Maß haben, so wird die Multiplication vereinfacht, wenn man dieselben noch vor dem Multiplicieren durch jenes Maß dividiert.

Aufgaben.

1) $\frac{5}{8} \times 7 = ?$ 2) $\frac{17}{35} \times 11 = ?$

3) $\frac{15}{32} \times 16 = ?$ 4) $\frac{17}{30} \times 15 = ?$

5) $\frac{8}{15} \times 21 = ?$ 6) $37\frac{5}{12} \times 25 = ?$

7) $108\frac{3}{8} \times 24 = ?$ 8) $73\frac{2}{9} \times 42 = ?$
9) $7\frac{35}{48} \times 99 = ?$ 10) $33\frac{12}{37} \times 125 = ?$
11) $157\frac{7}{12} \times 63 = ?$ 12) $3752\frac{37}{40} \times 8314 = ?$
13) $15934\frac{117}{216} \times 3092 = ?$
14) $9540\frac{380}{633} \times 19350 = ?$
15) $38064\frac{139}{456} \times 8036 = ?$
16) $8642\frac{132}{725} \times 7865 = ?$
17) $256934\frac{59}{85} \times 13845 = ?$
18) $20783\frac{1234}{5679} \times 36453 = ?$
19) $83253\frac{229}{300} \times 57264 = ?$

20) Um wie viel ist $9360\frac{137}{573} \times 7235$ größer als $1356\frac{511}{600} \times 13568$?

21) Wie viel Kreuzer beträgt $\frac{1}{2}$ fl., wie viel $\frac{1}{4}$ fl., $\frac{1}{5}$ fl., $\frac{1}{10}$ fl., $\frac{1}{20}$ fl., $\frac{1}{25}$ fl., $\frac{1}{50}$ fl.?

22) Wie viel Kreuzer sind $\frac{3}{4}$ fl., $\frac{4}{5}$ fl., $\frac{7}{10}$ fl., $\frac{11}{25}$ fl., $\frac{37}{50}$ fl.?

23) Wie viele Monate sind $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{25}$ Jahre?

24) Wie viel ℔ sind $\frac{7}{25}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{32}$, $\frac{57}{80}$, $\frac{13}{50}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{29}{40}$ Ctr.?

25) Wie viel Klafter, Fuß, Zoll und Linien sind $3\frac{21}{32} + 4\frac{5}{8} + 5\frac{2}{3} + 3\frac{5}{6} + 4\frac{13}{20}$ Fuß?

26) Ein Metzen hat $1\frac{179}{189}$, ein Eimer $1\frac{99}{125}$ Cubikfuß; wie viel Cubikzoll beträgt jeder der beiden Brüche?

27) Auf ein Hemd braucht man $3\frac{3}{4}$ Ellen Leinwand; wie viel auf ein Dutzend Hemden?

28) Wenn 1 ℔ $\frac{18}{25}$ fl. kostet, wie hoch kommen 2, 3, 7, 12, 85, 235, 3014 ℔?

29) Eine Klafter Holz kommt auf $11\frac{3}{4}$ fl.; wie viel kosten 3, 4, 8, 17, 25, 44 Klafter?

30) In einem gleichseitigen Vierecke beträgt jede Seite 8 Meter $3\frac{7}{10}$ Decimeter; wie groß ist der ganze Umfang?

31) Wenn 1 Hektoliter Weizen $6\frac{7}{12}$ fl. kostet, wie viel betragen 4, 8, 13, 38, 87, 108 Hektoliter?

32) Ein Pferd braucht täglich $\frac{5}{8}$ Metzen Hafer; wie viel brauchen 15 Pferde in 28 Tagen?

33) A nimmt täglich $4\frac{9}{20}$ fl., B $3\frac{17}{25}$ fl. ein; wie viel nimmt jeder von ihnen in 25 Tagen ein, um wie viel A mehr als B, und wie viel nehmen beide zusammen ein?

34) Jemand wechselt 35 Ducaten zu $5\frac{3}{5}$ fl., und 13 Kronen zu $13\frac{23}{25}$ fl. ein; wie groß ist der Betrag?

35) Ein Silberarbeiter hat 16 Mark $12\frac{1}{2}$ löthiges Silber, 13 Mark $12\frac{11}{18}$ löthiges, und 9 Mark $13\frac{2}{5}$ löthiges Silber; wie viel Loth feines Silber hat er?

36) Ein Wiener Eimer hat $1\frac{99}{125}$ Cubikfuß; wie viel Cubikfuß enthalten 20, 87, 125, 277, 380 Eimer?

37) Ein freifallender Körper legt in der 1 Secunde $15\frac{9}{16}$ Fuß zurück, in der 2. Secunde 3mal, in der 3. Secunde 5mal, in der 4. Secunde 7mal so viel; a) wie groß sind die Fallräume für die 2., 3., 4. Secunde, b) wie groß der Fallraum für alle vier Secunden?

38) Ein Holzhändler kauft 30 Klafter Holz à $9\frac{3}{4}$ fl., 27 Klafter à $10\frac{1}{20}$ fl., 36 Klafter à $10\frac{2}{5}$ fl., und verkauft 1 Klafter durchschnittlich um $12\frac{3}{4}$ fl.; wie viel gewinnt er, wenn er $14\frac{9}{25}$ fl. Nebensauslagen hätte?

39) Das Meter ist gleich $3'\ 1\frac{23}{24}''$ des Wiener Längenmaßes; wie viel in dem letzteren Maße betragen 10, 37, 144 Meter?

§. 50.

Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

8 Neuntel in 4 gleiche Theile getheilt, geben zwei Neuntel, oder

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9} = \frac{8:4}{9}.$$

Ein Bruch wird also durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert und den Nenner ungeändert läſst.

Die Richtigkeit dieser Regel folgt auch unmittelbar aus dem Begriffe eines Bruches. Wenn man den Nenner unverändert läßt, den Zähler aber 2, 3, 4 . . . . mal kleiner annimmt, so erhält man 2, 3, 4mal weniger eben so große Theile, also wird auch der neue Bruch nur der 2te, 3te, 4te . . . . Theil von dem früheren Bruche sein.

Das hier begründete Verfahren ist jedoch nur dann anwendbar, wenn der Zähler durch die ganze Zahl theilbar ist; im entgegengesetzten Falle würde man als Zähler des Quotienten einen Bruch bekommen, was man in der Rechnung zu beseitigen sucht; es muß daher für diesen Fall ein anderes Verfahren der Division aufgestellt werden.

Wenn der Zähler eines Bruches ungeändert bleibt, der Nenner aber 2, 3, 4 . . . . mal größer wird, so bekommt man eben so viele, aber 2, 3, 4 . . . . mal kleinere Theile; somit wird auch der neue Bruch 2, 3, 4 . . . . mal kleiner als der frühere. Um daher den 2ten, 3ten, 4ten . . . . Theil eines Bruches zu erhalten, darf man nur den Nenner desselben 2, 3, 4 . . . . mal so groß nehmen; oder:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, wenn man den Zähler ungeändert läßt, und den Nenner mit der ganzen Zahl multipliciert. Z. B.

1) $\frac{8}{15} : 4 = \frac{2}{15}$. 2) $\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{24}$.
3) $13\frac{1}{2} : 9 = \frac{27}{2} : 9 = \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.
4) $8\frac{7}{8} : 10 = \frac{71}{8} : 10 = \frac{71}{80}$.
5) $\frac{12}{25} : 8 = \frac{12}{200} = \frac{3}{50}$ oder kürzer $\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{25} : \overset{2}{\cancel{8}} = \frac{3}{50}$.

Aufgaben.

1) $\frac{10}{11} : 5 = ?$ 2) $\frac{27}{32} : 3 = ?$
3) $\frac{13}{15} : 8 = ?$ 4) $\frac{5}{18} : 11 = ?$
5) $\frac{9}{28} : 12 = ?$ 6) $\frac{15}{16} :$ [illegible] $= ?$
7) $\frac{14}{17} : 21 = ?$ 8) $2\frac{3}{5} : 4 = ?$
9) $3\frac{5}{6} : 5 = ?$ 10) $12\frac{3}{5} : 7 = ?$
11) $37\frac{1}{12} : 15 = ?$ 12) $128\frac{13}{48} : 25 = ?$
13) $78934\frac{37}{40} : 378 = ?$ 14) $50831\frac{131}{200} : 703 = ?$
15) $17908\frac{283}{445} : 137 = ?$ 16) $24170\frac{391}{533} : 865 = ?$

17) Wie viel ist der 12te Theil von $\frac{3}{4}$, von $1\frac{1}{2}$, $3\frac{7}{8}$, $15\frac{3}{5}$, $1224\frac{3}{10}$?

18) Von welcher Zahl ist $73\frac{3}{4}$ das 3fache, von welcher das 5fache, das 9fache, das 20fache, das 35fache?

19) Man addiere den 4ten, 5ten und 6ten Theil von $23\frac{2}{3}$.

20) Wie groß ist der Unterschied zwischen dem 10ten und 12ten Theile von $108\frac{6}{25}$?

21) Wie viel Gulden betragen $\frac{3}{5}$ kr., wie viel $6\frac{1}{2}$ kr., $13\frac{4}{5}$ kr., $49\frac{7}{10}$ kr.?

22) Wie viel Gulden betragen 12 fl. 24 kr., 3 fl. 8 kr., 17 fl. $25\frac{1}{2}$ kr.?

23) Welchen Pfundbruch geben 18 Lth., $24\frac{1}{2}$ Lth., $5\frac{3}{4}$ Lth.?

24) Wie viel Ctr. machen $17\frac{4}{5}$ ℔, $48\frac{3}{8}$ ℔, 37 ℔ 28 Lth., 3 ℔ $4\frac{1}{2}$ Lth., 35 ℔ 17 Lth. 3 Qtch., 8 Ctr. 40 ℔ 20 Lth. 1 Qtch., 3 Ctr. 15 Lth. $2\frac{1}{2}$ Qtch.?

25) Die österreichischen Eisenbahnen haben eine Spurweite von 4′ 6″ 6‴; wie viel beträgt dieses in Bruchtheilen einer Klafter?

26) Ein Ctr. kostet $58\frac{3}{4}$ fl.; wie hoch kommt 1 ℔?

27) Jemand kauft das Dutzend Seidentücher um $17\frac{2}{5}$ fl.; wie hoch kommt ein Stück?

28) 48 Meter kosten $158\frac{1}{2}$ fl.; wie viel kostet 1 Meter? wie hoch kommen 2, 7, 13, 41 Meter?

29) Ein Dampfwagen legt in 5 Stunden $21\frac{2}{4}$ Meilen zurück; wie viel in einer Stunde?

30) Wenn 1 Hektoliter Wein 24 fl. kostet, wie viel Hektoliter bekommt man für $63\frac{1}{2}$ fl., wie viel für $90\frac{2}{5}$ fl., für $290\frac{9}{20}$ fl.?

31) Wie viel Wiener Fuß kommen auf 1 Meter, wenn 103 Meter $325\frac{84}{97}$ Wiener Fuß enthalten?

§. 51.

Multiplication mit einem Bruche.

Es sei z. B. 5 mit $\frac{3}{4}$ zu multiplicieren. $\frac{3}{4}$ bedeutet, dass man den 4ten Theil der Einheit 3mal zu nehmen habe; $5 \times \frac{3}{4}$

bedeutet daher, dass man nicht 5 selbst, sondern nur den 4ten Theil von 5 3mal zu nehmen habe; also

$$5 \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{4} \times 3 = \tfrac{15}{4} = 3\,\tfrac{3}{4}.$$

Eine Zahl mit $\frac{3}{4}$ multiplicieren, oder eine Zahl $\frac{3}{4}$mal nehmen, oder auch $\frac{3}{4}$ von einer Zahl nehmen, heißt also so viel, als: den 4ten Theil dieser Zahl 3mal nehmen.

Um demnach eine Zahl mit einem Bruche zu multiplicieren, wird dieselbe durch den Nenner dividiert, und der Quotient mit dem Zähler multipliciert.

Insbesondere hat man z. B.:

$$7 \times \tfrac{1}{2} = 7 : 2;\ 8 \times \tfrac{1}{3} = 8 : 3;$$
$$11 \times \tfrac{1}{4} = 11 : 4.$$

Eine Zahl mit $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ .... multiplicieren, heißt daher so viel, als: die Zahl durch 2, 3, 4 .... dividieren.

Hat man einen Bruch, z. B. $\frac{4}{5}$ mit einem Bruche $\frac{7}{9}$ zu multiplicieren, so ist

der 9te Theil von $\frac{4}{5}$ . . $\frac{4}{5 \times 9}$

und das 7fache von $\frac{4}{5 \times 9}$ . . $\frac{4 \times 7}{5 \times 9}$

also $\frac{4}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{4 \times 7}{5 \times 9} = \frac{28}{45}$;

d. h. Ein Bruch wird mit einem Bruche multipliciert, wenn man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multipliciert, und das erste Product als Zähler, das zweite als Nenner annimmt.

Aufgaben.

1) $8 \times \frac{3}{4} = ?$ 2) $15 \times \frac{4}{5} = ?$

3) $7 \times \frac{5}{8} = ?$ 4) $13 \times \frac{7}{10} = ?$

5) $43 \times \frac{1}{2} = ?$ 6) $55 \times \frac{1}{12} = ?$

7) $\frac{5}{7} \times \frac{3}{8} = ?$ 8) $\frac{9}{10} \times \frac{3}{4} = ?$

9) $\frac{7}{8} \times \frac{12}{25} = \frac{84}{200} = \frac{21}{50}$ oder $\frac{7}{\underset{2}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{25} = \frac{21}{50}$.

10) $\frac{18}{25} \times \frac{3}{8} = ?$ 11) $\frac{12}{35} \times \frac{14}{15} = ?$

12) $\frac{5}{12} \times 0{\cdot}36 = ?$ 13) $\frac{35}{64} \times 0{\cdot}\dot{7} = ?$

14) $5\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{23}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{69}{20} = 3\frac{9}{20}$.

15) $17\frac{3}{4} \times 12\frac{3}{7} = \frac{71}{4} \times \frac{87}{7} = \frac{6177}{28} = 220\frac{17}{28}$.

16) $3\frac{17}{18} \times \frac{5}{8} = ?$ 17) $\frac{13}{18} \times 27\frac{3}{7} = ?$

18) $2\frac{4}{15} \times 3{\cdot}85 = ?$ 19) $4{\cdot}1\dot{5} \times 7\frac{3}{40} = ?$

20) $72\frac{5}{6} \times 19\frac{7}{8} = ?$ 21) $7315\frac{37}{50} \times 218\frac{53}{60} = ?$

22) $1892\frac{58}{75} \times 295\frac{4}{5} = ?$ 23) $97403\frac{87}{128} \times \frac{2345}{3337} = ?$

24) $564\frac{3917}{4075} \times 37\frac{219}{572} = ?$

25) $6285 \times 2134\frac{719}{5375} = ?$

26) $9807\frac{2378}{4559} \times 8796\frac{1267}{3448} = ?$

27) $8138\frac{1324}{3999} \times 4925\frac{2423}{9993} = ?$

28) $8642\frac{327}{415} \times \frac{713}{866} + 19371\frac{38}{77} \times 255\frac{113}{225} = ?$

29) $4751\frac{420}{631} \times 571\frac{191}{812} - 3640\frac{319}{520} \times 460\frac{80}{701} = ?$

30) Wie viel ist $\frac{2}{3}$, wie viel $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ von $68\frac{7}{10}$?

31) Wie viel ist $\frac{7}{8}$ des Unterschiedes $19\frac{7}{10} - 8\frac{3}{4}$?

32) Wie viel beträgt $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ von $13\frac{4}{5}$ zusammengenommen?

$$13\frac{4}{5} = \frac{69}{5} \qquad \begin{array}{l|r|l} & 20 & \\ \frac{69}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{69}{10} & 2 & 13 \\ \frac{69}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{46}{5} & 4 & 184 \\ \frac{69}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{207}{20} & 1 & 207 \\ \hline & & \frac{529}{20} = 26\frac{9}{20} \end{array}$$

kürzer: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{23}{12}$; $\frac{69}{5} \times \frac{23}{12} = \frac{529}{20} = 26\frac{9}{20}$.

33) Um wie viel ist $\frac{7}{8}$ von $65\frac{3}{5}$ größer als $\frac{3}{4}$ von $55\frac{5}{6}$?

34) Ein Metzen Weizen wiegt 80 ℔; wie viel wiegen $6\frac{1}{4}$ Metzen, wie viel $7\frac{3}{8}$, $10\frac{1}{2}$, $17\frac{7}{16}$ Metzen?

35) Ein Centner Kaffee kostet $62\frac{1}{2}$ fl.; wie hoch kommen $8\frac{3}{4}$ Ctr., $13\frac{17}{25}$ Ctr., 18 Ctr. 15 ℔, 31 Ctr. $31\frac{1}{2}$ ℔?

36) Der Flächenraum von Niederösterreich ist $344\frac{1}{2}$ □Meilen, $\frac{17}{50}$ davon betragen die Waldungen; wie viel Flächenraum nehmen diese ein?

37) Wie viel Meter betragen $115\frac{3}{8}$ Yards à $\frac{32}{35}$ Meter?

38) Wie viel preuß. Meilen betragen $92\frac{7}{12}$ österr. Meilen à $1\frac{1}{133}$ preuß. Meilen?

39) Ein Cubikfuß Wasser wiegt $56\frac{5}{8}$ ℔; das Quecksilber ist $13\frac{1}{2}$mal, das Silber $10\frac{1}{2}$mal, das Eisen $7\frac{3}{10}$mal, das Zinn $7\frac{1}{5}$mal so schwer als das Wasser; wie viel wiegt 1 Cubikfuß, wie viel $2\frac{3}{4}$, $3\frac{7}{12}$, $5\frac{3}{10}$ Cubikfuß von jedem dieser Metalle?

40) Eine Mark feines Silber gilt $25\frac{3}{4}$ fl.; wie hoch kommen $\frac{3}{4}$ Mark, $5\frac{7}{8}$ Mark, 3 Mark 5 Lth., 7 Mark 7 Lth. $2\frac{1}{2}$ Qtch. Silber?

41) Wenn ein Elle $5\frac{2}{5}$ fl. kostet, wie viel kosten $2\frac{1}{3}$, $3\frac{5}{8}$, $6\frac{3}{4}$ Ellen?

42) Ein Kaufmann hat $204\frac{3}{4}$ Ctr. Kaffee; davon ist $\frac{2}{7}$ Havanna, $\frac{3}{10}$ Portorico, $\frac{1}{8}$ Mocca, und der Rest Java Kaffee; wie viel hat er von jeder Sorte?

43) Vier Personen theilen eine Summe von $745\frac{3}{5}$ fl. so unter einander, dass A $\frac{1}{4}$, B $\frac{5}{8}$, C $\frac{1}{5}$ und D den Rest bekommt; wie viel kommt auf jeden?

44) Es werden $136\frac{1}{2}$ Ctr. einer Waare, der Centner zu $23\frac{2}{3}$ fl., gekauft, A erhält davon $\frac{1}{3}$, B $\frac{2}{5}$, C $\frac{1}{6}$, D $\frac{1}{10}$; wie viel muß jeder bezahlen?

45) Eine silberne Schüssel wiegt $8\frac{17}{32}$ Mark, und enthält $12\frac{1}{2}$löthiges Silber; wie viel feines Silber enthält sie, und wie viel ist sie wert, wenn man die Mark feines Silber zu $25\frac{3}{20}$ fl. rechnet?

46) Wie viel Silber und Kupfer enthält ein Barren Silber, der $5\frac{3}{4}$ Pfund wiegt, und dessen Feingehalt $\frac{520}{1000}$ ist?

47) Wie viel wiegen 23 vierkantige Eisenstangen von $8\frac{3}{4}'$ Länge, $\frac{6}{7}'$ Breite, $\frac{1}{85}'$ Dicke, wenn 1 Cubikfuß Eisen $4\frac{3}{25}$ Ctr. wiegt?

48) Ein Rechteck ist $35\frac{3}{4}$ Meter lang und Meter $28\frac{1}{5}$ breit; wie groß ist seine Fläche?

49) Wie hoch wird ein Garten, welcher $32\frac{3}{4}{}^{0}$ lang und $13\frac{7}{12}{}^{0}$ breit ist, zu stehen kommen, wenn die $\square^{0}$ mit $1\frac{2}{5}$ fl. bezahlt wird?

50) Ein rechtwinkliges Gefäß hat $4\frac{3}{4}'$ Länge, $3\frac{11}{12}'$ Breite und $1\frac{2}{3}'$ Tiefe; wie groß ist der Inhalt?

§. 52.

Division durch einen Bruch.

$\frac{1}{5}$ ist 5mal kleiner als 1, es wird daher $\frac{1}{5}$ in irgend einer Zahl 5mal so oft enthalten sein, als 1 in derselben Zahl vorkommt; $\frac{3}{5}$ ist 5mal kleiner als 3; daher wird $\frac{3}{5}$ in einer Zahl 5mal so oft enthalten sein als 3. Um daher zu erfahren, wie oft $\frac{3}{5}$ in einer Zahl enthalten ist, untersucht man zuerst, wie oft 3 darin vorkommt, d. i. man dividiert die Zahl durch den Zähler 3, und nimmt den erhaltenen Quotienten 5mal, d. i. multipliciert ihn mit dem Nenner 5.

Eine Zahl durch einen Bruch dividieren, heißt also, die Zahl durch den Zähler des Bruches dividieren und den Quotienten mit dem Nenner multiplicieren. Man hat z. B.

$$8 : \tfrac{3}{5} = \tfrac{8}{3} \times 5 = \frac{8 \times 5}{3},$$

$$\tfrac{4}{7} : \tfrac{3}{5} = \frac{4}{7 \times 3} \times 5 = \frac{4 \times 5}{7 \times 3}.$$

Es ist aber auch

$$8 \times \tfrac{5}{3} = \frac{8 \times 5}{3},$$

$$\tfrac{4}{7} \times \tfrac{5}{3} = \frac{4 \times 5}{7 \times 3}.$$

Man sieht also, daß

$8 : \frac{3}{5}$ dieselbe Zahl gibt wie $8 \times \frac{5}{3}$,
und $\frac{4}{7} : \frac{3}{5}$ „ „ „ „ $\frac{4}{7} \times \frac{5}{3}$.

Die Division durch einen Bruch kann also in eine Multiplication mit dem umgekehrten Bruche verwandelt werden, und es bestehet die Regel:

Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, wenn man sie mit dem umgekehrten Divisor multipliciert.

Insbesondere ist

$7 : \frac{1}{2} = 7 \times 2,\ 8 : \frac{1}{3} = 8 \times 3,\ \frac{3}{7} : \frac{1}{4} = \frac{3}{7} \times 4.$

Eine Zahl durch $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ dividieren, heißt also so viel, als: die Zahl mit 2, 3, 4 . . . multiplicieren.

Aufgaben.

1) $12 : \frac{1}{3} = ?$ 2) $\frac{3}{16} : \frac{1}{5} = ?$

3) $10 : \frac{3}{7} = ?$ 4) $15 : \frac{5}{8} = ?$

5) $\frac{7}{10} : \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}.$

6) $\frac{13}{18} : \frac{11}{17} = ?$ 7) $\frac{9}{16} : \frac{3}{20} = ?$

8) $3 : 2\frac{1}{2} = 3 : \frac{5}{2} = 3 \times \frac{2}{5} = 1\frac{1}{5}.$

9) $7\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{23}{3} \times 2 = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}.$

10) $138\frac{7}{15} : \frac{1}{10} = ?$ 11) $17\frac{16}{21} : \frac{11}{12} = ?$

12) $18\frac{3}{4} : 2\frac{3}{3} = ?$ 13) $7\frac{3}{8} : 32\frac{3}{10} = ?$

14) $0{\cdot}52 : 3\frac{2}{5} = ?$ 15) $37\frac{5}{8} : 0.2\dot{3}\dot{5} = ?$

16) $25\frac{7}{9} : 15\frac{1}{18} = ?$ 17) $32487\frac{23}{50} : \frac{127}{130} = ?$

18) $29607 : 1202\frac{55}{128} = ?$ 19) $1728\frac{328}{625} : 57\frac{137}{250} = ?$

20) Von welcher Zahl betragen $\frac{5}{8}$ genau 100?

21) Welches ist die Zahl, von welcher $\frac{3}{5}$ gerade so viel ist als $\frac{4}{9}$ von $23\frac{1}{2}$?

22) Von welcher Zahl betragen $\frac{27}{32}$ um $72\frac{5}{8}$ mehr als $\frac{13}{16}$ von $588\frac{17}{85}$?

23) Welches ist die Zahl, von welcher $\frac{23}{40}$ um $15\frac{3}{25}$ weniger betragen als $\frac{31}{48}$ von $2358\frac{17}{30}$?

24) Jemand verdient täglich $\frac{3}{4}$ fl.; wie lange wird er arbeiten müßen, um $19\frac{1}{2}$ fl. zu verdienen?

25) Wenn $\frac{7}{8}$ Ellen $4\frac{1}{5}$ fl. kosten, wie hoch kommt 1 Elle, wie hoch kommen 3 Ellen, $5\frac{1}{2}$ Ellen?

26) Wie viel kostet der Centner, wenn $2\frac{3}{4}$ Ctr. 57 fl. 20 kr. kosten?

27) Ein Acker, welcher $5\frac{3}{4}$ Hektar enthält, wird um 1820 fl. verkauft; wie viel kostet 1 Hektar?

28) Ein Rad hat $11\frac{2}{3}$ Fuß im Umfange; wie viel Um-

drehungen muß es machen, um einen Weg von 2000 Klaftern zu durchlaufen?

29) Wenn ein Dampfwagen in $5\frac{7}{15}$ Stunden $20\frac{1}{2}$ Meil. zurücklegt; wie viel Meilen legt er in einer Stunde zurück?

30) $8\frac{1}{2}$ Mark Legierung enthalten $148\frac{3}{4}$ Karat feines Gold; wie viel karatig ist die Legierung?

31) Ein Eimer nimmt $1\frac{19}{24}$ Cubikfuß Raum ein; wie viel Eimer faßt ein Wasserbehälter von $14\frac{31}{48}$ Cubikfuß Inhalt?

32) Ein Zollpfund ist gleich $28\frac{3}{4}$ Loth des Wiener Handelsgewichtes; wie viel Zollpfund betragen $68\frac{1}{2}$ Wiener Pfund?

33) Ein Rechteck hat $128\frac{5}{18}$ □° Fläche; wie breit ist dasselbe, wenn die Länge $18^0\ 3\frac{1}{2}'$ beträgt?

34) Wie viel kosten $8\frac{3}{4}$ Hektoliter, wenn $2\frac{3}{8}$ Hektoliter $47\frac{1}{2}$ fl. kosten?

35) Wenn $6\frac{5}{8}$ Ellen $28\frac{1}{5}$ fl. kosten, wie hoch kommen $9\frac{1}{3}$ Ellen?

36) Ein Wiener Fuß hat $\frac{55}{174}$ Meter; wie viel Wien. Fuß ist ein Kilometer?

37) Wie viel Triester Star à $1\frac{17}{48}$ Wien. Metzen betragen $146\frac{5}{8}$ Wien. Metzen?

38) Ein Kaufmann bekommt zwei Sorten Kaffee; von der ersten kostet der Centner $72\frac{3}{5}$ fl., von der zweiten $58\frac{1}{2}$ fl.; wenn nun von der schlechtern Sorte $3\frac{2}{5}$ Ctr. da waren und der ganze Betrag $369\frac{51}{100}$ fl. ausmachte, wie viel Ctr. waren von der bessern Sorte?

39) Ein Wasserbehälter von 110 Cubik-Decimeter Inhalt soll mit Wasser gefüllt werden; wenn man nun jedesmal $4\frac{3}{4}$ Cubik-Decimeter dazu trägt, und ein solcher Gang $5\frac{1}{2}$ Minuten dauert; in wie viel Gängen und in welcher Zeit wird der Behälter gefüllt werden?

40) Eine Dose, welche $8\frac{1}{8}$ Lth. schwer ist und $13\frac{1}{2}$ löthiges Silber enthält, kostet $15\frac{7}{25}$ fl.; wie theuer wird ein Lth. feines Silber gerechnet?

41) Ein Ballen Baumwolle wog $248\frac{1}{2}$ ℔, der Ballen für

sich wog $16\frac{3}{4}$ ℔; wie hoch kommt ein Ctr. davon, wenn die ganze Baumwolle 268·83 fl. kostete?

42) Jemand kauft $45\frac{2}{3}$ Ellen Tuch, die Elle zu $4\frac{1}{5}$ fl.; wie theuer muß er eine Elle verkaufen, um im Ganzen $28\frac{83}{90}$ fl. zu gewinnen?

§. 53.

Multiplication und Division der Brüche nach der Strichmethode.

Das Multiplicieren und Dividieren der Brüche kann sehr bequem nach der Strichmethode vollzogen werden. Man zieht dabei einen aufrechten Strich, und setzt die Zahlen, deren Product den Dividend bildet, auf die rechte, die Zahlen dagegen, deren Product den Divisor bildet, auf die linke Seite.

1. Ist z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{9}{5}$ zu multiplicieren, so muß das Product der Zähler durch das Product der Nenner dividiert werden. Man schreibt daher die zu multiplicierenden Brüche auf die Dividendseite unter einander, läßt aber nur die Zähler 3 und 9 auf derselben Seite, die Nenner 4 und 5 streicht man durch, und überträgt sie auf die linke Seite; dann multipliciert man die Zähler rechts, und eben so die Nenner links des Striches; das Product der Zähler 27 ist der Dividend, das Product der Nenner 20 der Divisor, und der Quotient $1\frac{7}{20}$ das gesuchte Product.

4	3	
	~~4~~	
5	9	
	~~5~~	
20	27	$1\frac{7}{20}$

Wenn zwei Zahlen auf entgegengesetzten Seiten des Striches durch dieselbe Zahl theilbar sind, so kann man dadurch abkürzen; denn der Quotient wird nicht geändert, wenn man Divisor und Dividend durch dieselbe Zahl dividiert.

Sind z. B. $\frac{8}{9}$ und $\frac{5}{12}$ zu multiplicieren, so hat man die nebenstehende Rechnung.

9	~~8~~ 2	
	~~9~~	
3 ~~12~~	5	
	~~12~~	
27	10	$\frac{10}{27}$

Hier lassen sich 12 und 8 durch 4 abkürzen; man dividert dadurch, und schreibt nur die Quotienten 3 und 2 an.

Kommen gemischte Zahlen, z. B. $5\frac{3}{4}$ und $6\frac{1}{5}$ zu multiplicieren vor, so werden sie zu unechten Brüchen eingerichtet, die Zähler auf der rechten Seite angeschrieben, die Nenner aber sogleich auf die linke Seite übertragen.

4	$5\frac{3}{4}$) 23	
5	$6\frac{1}{5}$) 31	
20	713	$35\frac{3}{20}$

2. Ist ein Bruch, z. B. $\frac{5}{6}$ durch einen Bruch $\frac{3}{7}$ zu dividieren, so schreibt man den Dividend $\frac{5}{6}$ auf die rechte, den Divisor $\frac{3}{7}$ auf die linke Seite. Der Quotient bleibt beständig, wenn man Divisor und Dividend mit derselben Zahl multipliciert. Wenn man hier beiderseits mit dem Nenner 7 des Divisors multipliciert, so bleibt von diesem Bruche links bloß der Zähler 3, auf der andern Seite erscheint dann der Nenner 7 als Factor. Wenn man ebenso beiderseits mit dem Nenner 6 des Dividends multipliciert, so fällt dieser Nenner auf der rechten Seite weg, und es bleibt bloß der Zähler 5, auf der andern Seite erscheint dann der Nenner 6 als Factor.

$\frac{3}{\cancel{7}}$	$\frac{5}{\cancel{6}}$	
6	7	
18	35	$1\frac{17}{18}$

Sind gemischte Zahlen durch eben solche zu dividieren, so werden sie zuerst zu unechten Brüchen eingerichtet, und dann die Zähler auf derselben, die Nenner aber auf der entgegengesetzten Seite angeschrieben. Auch hier kann man die Zahlen zu beiden Seiten des Striches abkürzen.

Aus allem Vorhergehenden folgt: Bei der Multiplication oder Division der Brüche zieht man einen aufrechten Strich, schreibt die Factoren oder den Dividend auf die rechte, den Divisor auf die linke Seite. Kommen gemischte Zahlen vor, so werden sie zu unechten Brüchen eingerichtet; die Zähler läßt man auf jener Seite stehen, wo der Bruch sein soll, die Nenner aber werden auf die entgegengesetzte Seite übertragen. Dann werden die Zahlen beiderseits abgekürzt. Endlich multipliciert man die Zahlen zu beiden Seiten, und dividiert das Product auf der Dividendseite durch jenes auf der Divisorseite; der Quotient ist die gesuchte Zahl.

Aufgaben.

Man verrichte nach der Strichmethode folgende Multiplicationen und Divisionen:

1) $\frac{4}{7} \times \frac{3}{8} = ?$ 2) $2\frac{1}{3} \times 7\frac{1}{6} = ?$
3) $6\frac{1}{3} \times 12\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{3} = ?$
4) $25\frac{5}{8} \times 214\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = ?$
5) $\frac{5}{8} : \frac{2}{9} = ?$ 6) $31\frac{3}{5} : \frac{3}{5} = ?$
7) $712\frac{3}{4} : 4\frac{5}{8} = ?$ 8) $27\frac{1}{10} : 35\frac{6}{7} = ?$
9) $20 \times \frac{3}{4} : \frac{7}{8} = ?$ 10) $7\frac{5}{13} \times 2\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4} = ?$
11) $319\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} : 7\frac{1}{4} = ?$ 12) $\frac{3}{10} \times 65\frac{5}{6} : 3\frac{3}{10} = ?$
13) Was kosten $38\frac{2}{5}$ Ctr. zu $17\frac{5}{12}$ fl.?

14) Wie viel wiegen $2\frac{3}{4}$ Cubikfuß Quecksilber, wenn das Quecksilber $13\frac{1}{2}$mal so schwer als das Wasser ist, und 1 Cubikfuß Wasser $56\frac{3}{8}$ ℔ wiegt?

15) Ein Bauplatz hat $11\frac{2}{3}{}^0$ Länge und $8\frac{3}{4}{}^0$ Breite; wie hoch kommt derselbe, wenn die Quadratklafter mit $38\frac{3}{10}$ fl. bezahlt wird?

16) Ein Ziegelstein ist $11\frac{1}{2}''$ lang, $5\frac{1}{2}''$ breit und $2\frac{1}{3}''$ dick; wie groß ist sein Cubikinhalt?

17) Welchen Druck übt eine Mauer aus, welche $45\frac{7}{12}'$ lang, $2\frac{1}{4}'$ breit und $27\frac{5}{6}'$ hoch ist, wenn ein Cubikfuß Mauerwerk $87\frac{5}{8}$ ℔ wiegt?

18) $5\frac{3}{4}$ Ctr. einer Waare werden mit $158\frac{3}{5}$ fl. bezahlt; wie hoch kommt 1 Ctr.?

19) Wenn $5\frac{7}{8}$ Ballen Druckpapier $124\frac{17}{25}$ fl. kosten, wie viel kostet 1 Ballen?

20) $10\frac{1}{3}$ ℔ Garn geben $47\frac{3}{8}$ Ellen Leinwand; wie viel Ellen gibt 1 ℔?

21) Wenn ein Meter $4\frac{4}{5}$ fl. kostet, wie viel Meter wird man für $110\frac{4}{5}$ fl. erhalten?

22) Ein Baugrund wird um $728\frac{7}{20}$ fl. verkauft; wie viel $\square^0$ enthält er, wenn die $\square^0$ mit $15\frac{3}{4}$ fl. bezahlt wird?

23) Ein Körper legt in jeder Secunde $3\frac{1}{4}$ Meter zurück,

ein zweiter $35\frac{3}{4}$ Meter; wie vielmal so schnell bewegt sich der zweite Körper als der erste?

24) Wie viel Ellen wird man für $9\frac{1}{2}$ fl. erhalten, wenn $2\frac{1}{2}$ Ellen $3\frac{2}{5}$ fl. kosten?

25) Wie viel kosten $17\frac{3}{20}$ Ctr., wenn $8\frac{3}{5}$ Ctr. mit $208\frac{1}{2}$ fl. bezahlt werden?

26) Ein Acker von 13 Joch $128\frac{1}{2}$ $\square^0$ wird um $2530\frac{1}{8}$ fl. gekauft; der Käufer tritt nun $2\frac{5}{16}$ Joch zu demselben Preise an seinen Nachbar ab; wie viel hat dieser zu bezahlen?

27) Ein Taglöhner bekommt für 6 Tage $4\frac{9}{10}$ fl.; für wie viel Tage $14\frac{7}{10}$ fl.?

28) Was ist vortheilhafter: $9\frac{9}{64}$ ℔ um $16\frac{4}{5}$ fl. einzukaufen, oder $10\frac{3}{4}$ ℔ um $22\frac{7}{12}$ fl.?

29) Wenn $57\frac{17}{25}$ Ctr. $1348\frac{3}{20}$ fl. kosten; wie viel Ctr. bekommt man für $732\frac{3}{8}$ fl., für $950\frac{11}{12}$ fl., für $2338\frac{17}{24}$ fl.?

30) Wie hoch kommt eine Mauer von $78\frac{3}{4}'$ Länge, $2\frac{5}{12}'$ Dicke und $33\frac{2}{3}'$ Höhe, wenn 20 Cubikfuß mit $1\frac{19}{25}$ fl. bezahlt werden?

Fünfter Abschnitt.

Wälsche Praktik.

§. 54.

Eine Zahl, welche mehrere Male genommen eine andere höhere Zahl gibt, heißt ein **aliquoter Theil** von dieser letztern; z. B. 4 ist ein aliquoter Theil von 32, und zwar der 8te Theil; 20 Kreuzer sind ein aliquoter Theil von 100 Kreuzern oder von einem Gulden, und zwar der 5te Theil, $\frac{1}{6}$ ist ein aliquoter Theil von 1; dagegen ist 4 kein aliquoter Theil von 30, 7 Kreuzer kein aliquoter Theil von einem Gulden.

Beispiele.

1) 25 kr. sind der 4te Theil von einem Gulden, 10 kr. $= \frac{1}{10}$ fl.

2) 25 ℔ $= \frac{1}{4}$ Ctr., 5 ℔ $= \frac{1}{20}$ Ctr.

3) 16 Loth $= \frac{1}{2}$ ℔, 1 Loth $= \frac{1}{32}$ ℔.

4) 4 Monate $= \frac{1}{3}$ Jahr, 3 Monate $= \frac{1}{4}$ Jahr.

5) 10 Tage $= \frac{1}{3}$ Monat, 2 Tage $= \frac{1}{15}$ Monat.

6) Man gebe alle aliquoten Theile eines Guldens, eines Centners, eines Pfundes, eines Lothes, eines Jahres, eines Monates an; eben so eines Pfundes Sterling, eines Thalers preuß. und sächs., einer Hamburger Mark Banco.

Wenn eine Zahl kein aliquoter Theil einer höheren Zahl ist, so läßt sie sich immer in aliquote Theile derselben zerfällen, und zwar durch die Subtraction, wenn ihr gerade noch ein aliquoter Theil bis zu der höhern Zahl fehlt, sonst durch die Addition. Bei der Zerlegung durch die Addition sehe man darauf, dass man immer mit den größern aliquoten Theilen anfange, und dass wo möglich jeder folgende Theil ein aliquoter Theil eines andern vorhergehenden sei.

Beispiele.

1) $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$. 2) $\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$.

3) 80 kr. = 100 kr. — 20 kr. = 1 fl. — $\frac{1}{5}$ fl.

4) 75 ℔ = 100 ℔ — 25 ℔ = 1 Ctr. — $\frac{1}{4}$ Ctr.

5) 8 Monate = 12 Monate — 4 Monate = 1 Jahr — $\frac{1}{3}$ Jahr.

6) $\frac{5}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

7) $\frac{11}{16} = \frac{8}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.

8) 30 kr. = 25 kr. + 5 kr. = $\frac{1}{4}$ fl. + $\frac{1}{20}$ fl.

9) 31 ℔ = 25 ℔ + 5 ℔ + 1 ℔.

10) 19 Tage = 15 Tage + 3 Tage + 1 Tag.

11) Man zerlege die verschiedenen Kreuzerzahlen von 1 bis 100 in aliquote Theile des Guldens, wenn sie es nicht schon sind.

12) Man zerfälle die verschiedenen Zahlen der Pfunde von 1 bis 100, welche nicht aliquote Theile eines Centners sind, in solche.

13) Man stelle die verschiedenen Zahlen der Lothe von 1 bis 32 als aliquote Theile eines Pfundes dar.

14) Man zerlege 5, 7, 8, 9, 10, 11 Monate in aliquote Theile eines Jahres.

Das Verfahren, nach welchem die im Rechnen vorkommenden niedrigeren Zahlen als aliquote Theile einer höhern Zahl betrachtet und als solche berechnet werden, heißt die wälsche Praktik. Sie wird insbesondere angewendet, wenn aus dem bekannten Betrage der Einheit der Betrag einer gleichartigen Mehrheit gefunden werden soll, und wenn in diesem Falle im

Betrage der Einheit, oder in der Mehrheit, oder in beiden zugleich kleinere Theile eines höhern Ganzen entweder als Brüche oder als Unterbenennungen vorkommen.

§. 55.

1. Aufgaben, in denen der Betrag der Einheit zerlegt wird.

1) Wie viel kosten 64 ℔, wenn 1 ℔ 25 kr. kostet?

64 ℔ à 25 kr. oder $\frac{1}{4}$ fl.
16 fl.

25 kr. sind der 4te Theil eines Guldens, 64 Pfund à $\frac{1}{4}$ fl. kosten daher $\frac{64}{4}$ fl.; man muß also 64 fl. durch 4 dividieren, wodurch man 16 fl. erhält.

2) Wie viel kosten 46 Meter à 3 fl. 20 kr.?

46 Ellen	à 3 fl. 20 kr.
138 fl.	à 3 fl.
9·2 „	à 20 kr. = $\frac{1}{5}$ fl.
147·2 fl. = 147 fl. 20 kr.	

3) Wie hoch kommen 168 Ellen, wenn 1 Elle 60 kr. kostet?

168 Ellen	à 60 kr.
84 fl.	à 50 kr. = $\frac{1}{2}$ fl.
16·8 fl.	à 10 kr. = $\frac{1}{5}$ von 50 kr.
100·8 fl. = 100 fl. 80 kr.	

4) Man berechne den Wert von 42 Centnern zu 9 Thlr. 19 Sgr. preuß.

42 Ctr.	à 9 Thl. 19 Sgr.
378 Thl.	à 9 Thl.
21 „	15 Sgr. = $\frac{1}{2}$ Thl.
4·2 „	3 „ = $\frac{1}{5}$ von 15
1·4 „	1 „ = $\frac{1}{3}$ von 3
404·6 Thl. = 404 Thl. 18 Sgr.	

5) Wie viel kosten 214 Metzen à 1 fl. 37 kr.?

53·5 . . . . . 25 kr. $= \frac{1}{4}$ fl.

21·4 . . . . . 10 „ $= \frac{1}{10}$ „

4·28 . . . . . 2 „ $= \frac{1}{5}$ von 10

293·18 fl. = 293 fl. 18 kr.

6) Wie hoch kommen 125 ℔ à 80 kr.?

— 25 20 kr.

100 fl.

Zu 80 kr. fehlen noch 20 kr. $= \frac{1}{5}$ fl., um einen ganzen Gulden zu erhalten, oder 80 kr. = 1 fl. — 20 kr.; man nimmt also zuerst 125 Pfd. à 1 fl., wodurch man 125 fl. erhält, dann berechnet man 125 Pfd. à $\frac{1}{5}$ fl., wodurch man 25 fl. bekommt, und subtrahirt den zweiten Betrag vom ersten.

7) Wie viel kosten 214 Hektoliter, wenn das Hektoliter mit 8 fl. 75 kr. bezahlt wird?

214 Hektoliter à fl. 8 „ 75

1926 . . . . à 9 fl.

— 52·8 . . . . à 25 kr.

1873·2 fl. = 1873 fl. 20 kr.

Zu 75 kr. fehlen noch 25 kr. $= \frac{1}{4}$ fl. bis zu einem ganzen Gulden, oder 8 fl. 75 kr. = 9 fl. — 25 kr.; man sucht daher zuerst den Wert à 9 fl., dann à 25 kr., und subtrahirt den zweiten Betrag vom ersten.

Man berechne:

8) 356 Ellen à fl. 4 „ 50.

9) 728 ℔ à 20 kr.

10) 75 Rieß Papier zu fl. 3 „ 10 kr.

11) 129 Ctr. zu fl. 12 „ 30 kr. südd. W.

12) 2145 ℔ zu 12 Neugr. sächs.

13) 158 ℔ à 9 Schill. Banco hamb.

14) 1000 Stück Bäumchen à 15 kr.

15) 3240 Pfund Sterling à fl. 16 „ 16.

16) 719 Meter à 90 kr.

17) 3158 ℔ à 3 fl. 95 kr.

18) 912 Metzen zu fl. 3 „ 80 kr.

19) 24 Hemden à fl. 3 „ 12.

20) 739 Ctr. zu 10 fl. 30 kr.

21) 65 ℔ à 18 kr.
22) 57 Hektoliter à fl. 3 „ 25.
23) 98 Ellen zu 37 kr.
24) 315 Ctr. à 4 Livr. 13 Schill. Sterling.
25) 78 Ctr. à 86 Mark 7 Schill. Banco hamb.
26) 205 Ellen à 1 Thl. 23 Sgr. preuß.
27) 405 Eimer zu fl. 15 „ 43.
28) 518 ℔ zu 85 kr.
29) 1228 ℔ zu fl. 2 „ 39.
30) 132 Ellen zu 45 kr.
31) 115 Ducaten zu fl. 5 „ 86
32) 387 Ctr. à fl. 10 „ 84.
33) 1345 Kilogramm à $1\frac{3}{5}$ Francs.
34) 2028 engl. Pfund à 9 Schill. 8 Pences.

§. 56.

2. Aufgaben, in denen die Mehrheit zerlegt wird.

1) Wie viel kosten 20 ℔, wenn 1 Ctr. auf 140 fl. zu stehen kommt?

20 ℔. à fl. 140 pr. Ctr
fl. 28

20 Pfund sind der 5te Theil von einem Centner, und kosten daher nur den 5ten Theil von 140 fl.

2) Wie viel kostet $\frac{1}{4}$ Meter eines Tuches, wovon das Meter fl. 5 „ 20 kostet?

$\frac{1}{4}$ Meter à fl. 5 „ 20
fl. 1 „ 30.

3) Wie hoch kommen 4 Ctr. 50 ℔, zu 54 fl. der Ctr.?

4 Ctr. 50 ℔ à fl. 54 pr. Ctr.
216
50 ℔ = $\frac{1}{2}$ Ctr. 27
fl. 243

4) Wie viel kosten $3\frac{1}{8}$ Ellen Tuch à 5 fl. 12 kr.?

$3\frac{1}{8}$ Ellen à fl. 5 „ 12
fl. 15 „ 36
$\frac{1}{8}$ „ „ fl. — „ 64
fl. 16 „ —

5) Wie hoch kommen 20 Loth, wenn 1 ℔ fl. 2 „ 40 kostet?

20 Loth à fl. 2 „ 40 pr. ℔.
16 Loth = $\frac{1}{2}$ ℔ . fl. 1 „ 20
4 „ = $\frac{1}{4}$ von 16 „ — „ 30
fl. 1 „ 50

6) Wie viel betragen 12 Ctr. 85 ℔ à 87 Rubel pr. Ctr.?

12 Ctr. 85 ℔ à Rub. 87 pr. Ctr.
174
50 ℔ = $\frac{1}{2}$ Ctr. 43·5
25 „ = $\frac{1}{2}$ von 50 21·75
10 „ = $\frac{1}{5}$ von 50 8·7
Rub. 1117·95
= 1117 Rub. 95 Kopeken.

7) Man berechne den Wert von $4\frac{5}{8}$ Ell. à fl. 4 „ 40.

$4\frac{5}{8}$ Ellen à fl. 4 „ 40
fl. 17 „ 60
$\frac{1}{2}$ . . . „ 2 „ 20
$\frac{1}{8}$ . . . „ — „ 55
fl. 20 „ 35

8) Wie hoch kommen 75 ℔ à fl. 15 „ 12 pr. Ctr.

75 ℔ à fl. 15 „ 12 pr. Ctr.
ab 25 ℔ . . . „ 3 „ 78
fl. 11 „ 34

75 Pfd. = 1 Ctr. — 25 Pfd; man nimmt daher zuerst den Wert für 1 Ctr., dann für $\frac{1}{4}$ Ctr., und subtrahiert.

9) Was betragen $3\frac{7}{8}$ Meter à fl. 5 „ 12?

4 . . . . . 20 „ 48
ab $\frac{1}{8}$ . . . . . — „ 64
fl. 19 „ 84

Man berechne noch:

10) 25 Pfd. à fl. 2 „ 64 pr. Ctr.

11) $5\frac{1}{3}$ Ellen zu fl. 5 „ 45.

12) 10 Ctr. 10 ℔ zu fl. 47 „ 32 der Centner.

13) $8\frac{1}{10}$ Ctr. zu fl. 25 „ 40.

14) 5 Eimer 20 Maß à fl. 18 „ 26 pr. Eimer.

15) 5 Ctr. 80 ℔ zu 64 fl. der Ctr.?

16) 8 ℔ 24 Loth à fl. 2 „ 20 pr. ℔.

17) 8 Ctr. 24 ℔ à fl. 35 pr. Ctr.

18) 9 ℔ 13 Lth. zu fl. 3 „ 48 das Pfund.

19) 9 $\frac{3}{8}$ Ellen zu fl. 4 „ 48.

20) 3 Ctr. 32 ℔ 17 Lth. zu $26\frac{2}{5}$ fl. pr. Ctr.

21) 8 Mark 7 Lth. zu 13·5 Lth. feines Silber pr. Mark.

22) $8\frac{3}{4}$ Meter zu fl. 6 „ 12.

23) Eine Masse Silber enthält 6 Mark 9 Loth 3 Qtch. feines Silber; wenn nun die Mark feines Silber mit fl. 25 „ 36 bezahlt wird, was ist die Silbermasse wert?

24) Die jährliche Einnahme kommt auf fl. 2452 „ 20; wie viel beträgt die Einnahme in 2 Jahren 7 Monaten 18 Tagen?

§. 57.

Aufgaben, in denen sowohl die Mehrheit als der Preis der Einheit zerlegt wird.

1) Wenn 1 Ctr. mit 48 fl. 25 kr. bezahlt wird, wie hoch werden 20 Ctr. 62 ℔ 2 Lth. zu stehen kommen?

20 Ctr. 62 ℔ 2 Loth	à fl. 48 „ 25 pr. Ctr.
20 Ctr. à 48 fl.	fl. 960 „ —
à 25 kr. = $\frac{1}{4}$ fl.	„ 5 „ —
50 ℔ = $\frac{1}{2}$ Ctr.	„ 24 „ 12·5
10 „ = $\frac{1}{5}$ von 50 ℔	„ 4 „ 82·5
2 „ = $\frac{1}{5}$ von 10 ℔	„ — „ 96·5
2 Lth. = $\frac{1}{32}$ von 2 ℔ . . .	„ — „ 3·0
	fl. 994 „ 94·5

2) Wie viel kosten 38 Ctr. 85 ℔ à fl. 128 „ 48 der Ctr.?

3) Wie viel feines Silber ist in 42 Mark 12 Loth enthalten, wenn eine Mark 12 Loth 9 Grän feines Silber enthält?

4) Wie viel kosten 17 Ctr. 55 ℔ $22\frac{1}{2}$ Loth, wenn der Centner mit 37 fl. 85 kr. verkauft wird?

5) Wie viel Gulden betragen 204 Mark $11\frac{3}{4}$ Loth, wenn eine Mark zu 25 fl. $34\frac{1}{2}$ kr. gerechnet wird?

6) Wie viel betragen 748 Livres 17 Schilling Sterling à 11 fl. 72 kr.?

7) Wie viel kosten 27 Ctr. 68 Pfd. 6 Neuloth einer Waare, wovon das Pfund 3 Mark 12 Schill. Banco kostet?

8) Wie viel kosten 3 Ctr. $35\frac{3}{4}$ Pfund à 1 Thlr. 18 Sgr. pr. Pfund?

Man führe alle diese Beispiele auch mit Hilfe der Decimalbrüche durch.

Sechster Abschnitt.

Die Kettenbrüche.

I. Entstehung der Kettenbrüche.

§. 58.

Jeder gemeine Bruch kann mit dem Zähler 1 dargestellt werden, wenn man Zähler und Nenner desselben durch den Zähler dividiert. So ist z. B.

$$\frac{67}{150} = \frac{67 : 67}{150 : 67} = \frac{1}{2\frac{16}{67}}$$

oder

$$\frac{67}{150} = \frac{1}{2 + \frac{16}{67}}$$

Verwandelt man den Bruch $\frac{16}{67}$ wieder in einen Bruch mit dem Zähler 1, indem Zähler und Nenner durch 16 dividiert werden, so erhält man

$$\frac{16}{67} = \frac{1}{4 + \frac{3}{16}}$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$\frac{3}{16} = \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}$$

Setzt man diese nach und nach gefundenen Brüche zusammen, so ist der Bruch

$$\frac{67}{150} = \frac{1}{2 + \frac{16}{67}} = \frac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \frac{3}{16}}} = \frac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \frac{1}{3}}}}$$

Ein Bruch dieser letzteren Art, worin der Zähler 1 ist, der Nenner aber eine ganze Zahl nebst einem Bruche enthält, welcher wieder dieselbe Eigenschaft besitzen kann, wird ein **Kettenbruch** genannt.

Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, heißen **Glieder** des Kettenbruches. Zur Bestimmung ihrer Nenner wurde folgende Rechnung vorgenommen:

150 : 67 = 2 mit dem Reste 16	oder	67	150	2
67 : 16 = 4 " " " 3		3	16	4
16 : 3 = 5 " " " 1		0	1	5
3 : 1 = 3 " " " 0				3

woraus hervorgeht, dass dabei derselbe Rechnungsgang eingehalten wurde, wie bei der Auffindung des gr. g. Maßes zwischen 150 und 67 (§. 38, 2).

Um daher **einen echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln**, dividiert man den Nenner durch den Zähler, sodann den frühern Divisor durch den erhaltenen Rest, und so immer den vorher gehenden Divisor durch den neuen Rest, bis kein Rest mehr übrig bleibt; die dabei erhaltenen Quotienten nimmt man als Nenner der auf einander folgenden Glieder des Kettenbruches an, deren Zähler immer 1 ist.

Soll ein **unechter Bruch** z. B. $\frac{151}{69}$ durch einen Kettenbruch dargestellt werden, so verwandelt man ihn zuerst in eine gemischte Zahl $2 + \frac{13}{69}$, und sucht für den angehängten echten Bruch $\frac{13}{69}$ die entsprechende Kette. Die ganze Rechnung würde sich so stellen:

69	151	2
4	13	5
	1	3
		4

also $\frac{151}{69} = 2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$

Um einen Decimalbruch z. B. 3·14 in einen Kettenbruch zu verwandeln, darf man denselben nur als einen gemeinen Bruch darstellen, und diesen dann durch einen Kettenbruch ausdrücken. Es ist nämlich

$$3{\cdot}14 = 3 + \tfrac{14}{100}$$

14	100	7
0	2	7

also

$$3{\cdot}14 = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{7}}$$

Man verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche:

1) $\frac{75}{164}$	2) $\frac{59}{75}$	3) $\frac{68}{157}$
4) $\frac{655}{2704}$	5) $\frac{131}{23}$	6) $\frac{1439}{283}$
7) $\frac{1800}{469}$	8) $\frac{1141}{586}$	9) 0·57
10) 0·835	11) 5·36	12) 1·5192

§. 59.

Will man umgekehrt einen Kettenbruch auf einen gemeinen Bruch zurückführen, so verwandelt man die letzte gemischte Zahl in einen Bruch, und fährt so mit der Reduction von unten bis zum obersten Bruche fort. Z. B. für den Kettenbruch $\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$ hätte man folgende Rechnung: $1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$; $1 : \frac{6}{5} = \frac{5}{6}$; $3\frac{5}{6} = \frac{23}{6}$; und endlich $1 : \frac{23}{6} = \frac{6}{23}$, welcher gemeine Bruch dem gegebenen Kettenbruche gleich ist.

Ebenso erhält man

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \frac{1}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{11}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \frac{2}{11}}$$

$$= 2 + \frac{1}{\frac{35}{11}} = 2 + \tfrac{11}{35} = \tfrac{81}{35}$$

Man führe noch folgende zwei Kettenbrüche auf gemeine Brüche zurück:

1) $\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$ 2) $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$

II. Näherungsbrüche und ihre Eigenschaften.

§. 60.

Wenn man bei irgend einem Gliede der Kette stehen bleibt, und die darauf folgenden Glieder vernachlässiget, so heißt der daraus hervorgehende gemeine Bruch ein Näherungsbruch des gegebenen Kettenbruches, und zwar der erste, zweite, dritte,.... je nachdem man nur das erste, oder die ersten zwei, drei, ... Glieder in Rechnung zieht.

Für den Kettenbruch $\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$ ist

der 1. Näherungsbruch $\frac{1}{6}$

„ 2. „ $\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3}} = \cfrac{1}{\frac{19}{3}} = \frac{3}{19}$

„ 3. „ $\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}} = \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\frac{7}{2}}} = \cfrac{1}{6+\frac{2}{7}}$

$= \cfrac{1}{\frac{44}{7}} = \frac{7}{44}$

der 4. Näherungsbruch $\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}} = \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{9}{4}}}} = \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{9}}}$

$$= \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\frac{31}{9}}} = \cfrac{1}{6+\cfrac{9}{31}} = \cfrac{1}{\frac{195}{31}} = \frac{31}{195}$$

Der letzte Näherungsbruch stellt zugleich den ganzen Wert des Kettenbruches vor.

§. 61.

1. Die früher entwickelten Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}$$

lassen sich auch so darstellen:

erster Näherungsbruch $= \frac{1}{6}$

zweiter " $= \frac{3}{19}$

dritter " $= \frac{7}{44} = \frac{3 \times 2 + 1}{19 \times 2 + 6}$

vierter " $= \frac{31}{195} = \frac{7 \times 4 + 3}{44 \times 4 + 19}$

Wenn daher die ersten zwei Näherungsbrüche bestimmt sind, so läßt sich jeder folgende Näherungsbruch aus den ihm unmittelbar vorhergehenden zwei Näherungsbrüchen berechnen; es ist nämlich der Zähler eines jeden solchen Näherungsbruches gleich dem Zähler des vorhergehenden Näherungsbruches multipliciert mit dem Nenner des Gliedes, bei dem man stehen bleibt, mehr dem Zähler des vorvorhergehenden Näherungsbruches; ebenso ist der Nenner gleich dem Nenner des vorhergehenden Näherungsbruches multipliciert mit dem Nenner, bei welchem man stehen bleibt, mehr dem Nenner des vorvorhergehenden Näherungsbruches.

Der Kettenbruch $1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}}$

hat folgende

Nenner 4, 1, 5, 2, 3;

Näherungsbrüche $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{35}{29}$, $\frac{76}{63}$, $\frac{263}{218}$.

Folgende Brüche sollen in Kettenbrüche verwandelt und zu jedem die auf einander folgenden Näherungsbrüche gesucht werden:

1) $\frac{126}{237}$ 2) $\frac{507}{109}$ 3) $\frac{970}{403}$

4) $\frac{433}{1802}$ 5) 0·1305 6) 1·7857.

2. Der Kettenbruch $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}}}$

hat folgende

Nenner 2, 3, 4, 5, 6;

Näherungsbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{13}{30}$, $\frac{68}{157}$, $\frac{421}{972}$.

Der letzte Näherungsbruch ist zugleich der Wert des ganzen Kettenbruches. Vergleicht man die einzelnen Näherungsbrüche mit dem Bruche $\frac{421}{972}$, indem man ihnen den Nenner 972 gibt, so findet man, daß

$\frac{1}{2} = \frac{486}{972}$ um $\frac{65}{972}$ größer,

$\frac{3}{7} = \frac{416\frac{4}{7}}{972}$ um $\frac{4\frac{3}{7}}{972}$ oder $\frac{31}{6804}$ kleiner,

$\frac{13}{30} = \frac{421\frac{6}{30}}{972}$ um $\frac{\frac{6}{30}}{972}$ oder $\frac{6}{29160}$ größer,

$\frac{68}{157} = \frac{420\frac{156}{157}}{972}$ um $\frac{\frac{1}{157}}{972}$ oder $\frac{1}{152604}$ kleiner

als der gegebene Bruch $\frac{421}{972}$ ist.

Man sieht also, dass die auf einander folgenden Näherungsbrüche abwechselnd größer und kleiner sind als der ganze Kettenbruch, und dass sie diesem um so näher kommen, je mehrere Glieder der Kette man in Anspruch nimmt.

Ueberdieß kann nachgewiesen werden, dass jeder Näherungsbruch den Wert des Kettenbruches genauer ausdrückt, als alle möglichen gemeinen Brüche, deren Nenner nicht größer sind als der seinige; eine Eigenschaft, welche für die practische Anwendung von großer Wichtigkeit ist.

III. Anwendung der Kettenbrüche.

§. 62.

Die Kettenbrüche bieten ein vorzügliches Mittel dar, einen in großen Zahlen angegebenen gemeinen oder Decimalbruch näherungsweise durch einen Bruch darzustellen, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind. Man verwandelt nämlich den gegebenen Bruch in einen Kettenbruch und bestimmt dessen Näherungsbrüche, von welchen dann ein früherer oder späterer für den gegebenen Bruch genommen werden kann, je nachdem eine geringere oder größere Genauigkeit verlangt wird.

1) Es sei z. B. der n. ö. Eimer mit dem Wiener Cubikfuß zu vergleichen. Gesetzlich ist 1 Eimer $= \frac{224}{125}$ Cubikfuß.

Um nun Näherungswerte zu erhalten, welche in kleineren Zahlen ausgedrückt sind, hat man

125	224	1
26	99	1
5	21	3
0	1	1
		4
		5

daher $\frac{224}{125} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}}$

$$1, \; 3, \; 1, \; 4, \; 5;$$

Näherungsbrüche: $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{43}{24}$, $\frac{224}{125}$.

Man hat daher folgende Näherungswerte, von denen jeder folgende dem wahren Werte näher kommt, als der vorhergehende:

1 Eimer	$= 2$	Cubikfuß,				
1 „	$= \frac{7}{4}$	„	oder	4 Eimer	$=$ 7	Cubikfuß,
1 „	$= \frac{9}{5}$	„	„	5 „	$=$ 9	„
1 „	$= \frac{43}{24}$	„	„	24 „	$=$ 43	„
1 „	$= \frac{224}{125}$	„	„	125 „	$=$ 224	„

2) Es sei ferner der Wert eines Meter in Wiener Fuß annähernd zu bestimmen. 1 Meter = 3·16375 Wiener Fuß.

16375	100000	6
625	1750	9
125	500	2
	0	1
		4

$$3{\cdot}16345 = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}$$

$$6, \; 9, \; 2, \; 1, \; 4;$$

Näherungsbrüche: $\frac{19}{6}$, $\frac{174}{55}$, $\frac{367}{116}$, $\frac{541}{171}$, $\frac{2531}{800}$.

Handelt es sich nur um eine beiläufige Berechnung, so kann man

1 Meter = $\frac{19}{6}$ W. F. oder 6 Meter = 19 W. Fuß

setzen. Genauer sind die nachfolgenden Näherungswerte:

1 Meter	$= \frac{174}{55}$	W. F.	oder	55 Meter	$=$ 174	W. Fuß,
1 „	$= \frac{367}{116}$	„	„	116 „	$=$ 367	„

u. s. w.

Aufgaben.

1) Der Umfang eines Kreises ist 3·14159mal so groß als der Durchmesser desselben. Man drücke diese Beziehung durch kleinere Zahlen aus.

2) Das Eisen ist 7·785mal so schwer als das Wasser. Man drücke diese Beziehung durch kleinere Zahlen aus.

Man suche mit Rücksicht auf die im Anhange enthaltenen Angaben Näherungswerte für die Vergleichung:

3) zwischen dem Wiener Fuß und
   a) dem englischen Fuß,
   b) dem preußischen Fuß,
   c) dem Schweizer Fuß;

4) zwischen der Wiener Elle und
   a) der Hamburger Elle,
   b) der englischen Yard,
   c) dem französischen Meter;

5) zwischen dem n. ö. Metzen und
   a) dem englischen Quarter,
   b) dem französischen Hektoliter
   c) dem russischen Tschetwert;

6) zwischen der Wiener Maß und
   a) dem englischen Gallon,
   b) der preußischen Quart,
   c) der sächsischen Kanne,
   d) dem französischen Liter;

7) zwischen dem Wiener Pfund und
   a) dem englischen Pfund,
   b) dem russischen Pfund,
   c) dem Zollpfund.

Siebenter Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln.

§. 63.

Ein Product, das aus lauter gleichen Factoren entstanden ist, heißt eine **Potenz**; jeder der gleichen Factoren ist die **Wurzel**, und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die Wurzel als Factor gesetzt wurde, wird der **Exponent** genannt. Z. B.

$$4 \times 4 = 16$$
$$4 \times 4 \times 4 = 64$$
$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256.$$

Hier ist 16 die 2. Potenz von 4, 64 die 3., 256 die 4. Potenz von 4; dagegen ist 4 die 2. Wurzel von 16, die 3. Wurzel von 64, die 4. Wurzel von 256.

Die zweite Potenz einer Zahl heißt auch ihr **Quadrat**, die dritte Potenz der **Cubus**.

Eine Zahl zur 2., 3., 4. . . . Potenz erheben, heißt nichts anderes, als diese Zahl 2mal, 3mal, 4mal . . . als Factor setzen. Dieses Geschäft wird dadurch angezeigt, daß man rechts etwas über der Wurzel den Exponenten der verlangten Potenz hinschreibt; z. B.

statt $4 \times 4 \times 4$ schreibt man 4^3;

" $4 \times 4 \times 4 \times 4$ " " 4^4

Der Exponent 1 wird nicht angeschrieben, so dass 4 so viel bedeutet als 4^1.

Wird eine gegebene Zahl in lauter gleiche Factoren aufgelöset, so heißt dieses Verfahren das Wurzelausziehen. Aus einer Zahl die 2., 3., 4., . . . Wurzel ausziehen heißt demnach, eine Zahl suchen, welche 2mal, 3mal, 4mal, . . . als Factor gesetzt, die vorgelegte Zahl zum Producte gibt; z. B. aus 125 die dritte Wurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche 3mal als Factor gesetzt, 125 gibt; diese Zahl ist 5, denn $5 \times 5 \times 5 = 125$, 5 ist also die dritte Wurzel von 125. Das Wurzelausziehen zeigt man dadurch an, dass man vor die gegebene Zahl das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$, und in dessen Oeffnung den Exponenten setzt; $\sqrt[3]{125}$ bedeutet die 3. Wurzel aus 125.

Der Exponent 2 wird nicht angeschrieben, so dass z. B. $\sqrt{64}$ die zweite Wurzel aus 64 vorstellt.

Die zweite Wurzel einer Zahl wird insbesondere auch ihre Quadratwurzel, und die dritte Wurzel die Cubikwurzel genannt.

Das Erheben einer Zahl zu einer bestimmten Potenz bestehet in einer wiederholten Multiplication, und unterliegt daher keiner Schwierigkeit.

Um eine Zahl zum Quadrat zu erheben, darf man sie nur mit sich selbst multiplicieren; z. B.

$$137^2 = 137 \times 137 = 18769,$$
$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = \tfrac{3}{5} \times \tfrac{3}{5} = \tfrac{9}{25},$$
$$2{\cdot}73^2 = 2{\cdot}73 \times 2{\cdot}73 = 7{\cdot}4529.$$

Aus dem dritten Beispiele sieht man, dass das Quadrat eines Decimalbruches doppelt so viel Decimalen enthält, als der gegebene Decimalbruch, woraus folgt, dass im Quadrate die Decimalen immer in gerader Anzahl vorkommen müßen.

Die Quadrate der einziffrigen Zahlen sind:

Quadratwurzel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

Quadrat: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Um eine Zahl zum Cubus zu erheben, setzt man dieselbe 3mal als Factor; z. B.

$319^3 = 319 \times 319 \times 319 = 32461759,$

$(\frac{5}{8})^3 = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{125}{512},$

$1{\cdot}28^3 = 1{\cdot}28 \times 1{\cdot}28 \times 1{\cdot}28 = 2{\cdot}094592.$

Der Cubus eines Decimalbruches enthält immer 3mal so viel Decimalen als der gegebene Decimalbruch; daher muß in einem vollständigen Cubus die Anzahl der Decimalen stets ein Vielfaches von 3 sein.

Die dritten Potenzen der einziffrigen Zahlen sind:

Cubikwurzel:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9;
Cubus:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Eben so kann eine Zahl durch wiederholtes Multiplicieren auch zu jeder höheren Potenz erhoben werden.

Weit schwieriger ist das Wurzelausziehen. Hier soll nur das Verfahren entwickelt werden, wie aus einer gegebenen Zahl die Quadrat- oder die Cubikwurzel ausgezogen werden könne.

Das Ausziehen der Quadratwurzel.

§. 64.

Es ist

$1^2 = 1, \quad 10^2 = 100, \quad 100^2 = 10000,$

$9^2 = 81, \; 99^2 = 9801, \; 999^2 = 998001,$ u. s. w.

Daraus geht hervor, dass das Quadrat einer einziffrigen Zahl aus 1 oder 2 Ziffern, das Quadrat einer zweiziffrigen Zahl aus 3 oder 4 Ziffern, das Quadrat einer dreiziffrigen Zahl aus 5 oder 6 Ziffern besteht, und dass also überhaupt das Quadrat irgend einer mehrziffrigen Zahl entweder doppelt so viele Ziffern oder doppelt so viele Ziffern weniger eine, als die Wurzel selbst, enthält. Theilt man daher ein gegebenes Quadrat von der rechten gegen die linke in Classen von zwei Ziffern, so enthält die Quadratwurzel eben so viele Ziffern, als im Quadrate solche Classen vorkommen.

Es soll nun das Quadrat einer Zahl, die aus zwei Theilen bestehet, betrachtet werden, z. B. das Quadrat von $54 = 50 + 4$. Um $50 + 4$ mit $50 + 4$ zu multiplicieren, wird man jeden Theil des Multiplicands zuerst 50mal, dann 3mal nehmen, und diese Theilproducte addieren. Man hat daher, wenn die Multiplicationen nur angezeigt werden:

$$
\begin{array}{r}
50 + 4 \\
50 + 4 \\
\hline
50 \times 50 + 50 \times 4 \qquad\qquad \\
+\, 50 \times 4 + 4 \times 4 \\
\hline
(50 + 4)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 4 + 4^2.
\end{array}
$$

Das Quadrat einer aus zwei Theilen bestehenden Zahl ist demnach gleich dem Quadrate des ersten Theils, mehr dem doppelten Producte beider Theile, mehr dem Quadrate des zweiten Theiles.

Es sei nun aus 5184 die Quadratwurzel auszuziehen, d. i. eine Zahl zu suchen, welche mit sich selbst multipliciert 5184 zum Producte gibt. Da die gegebene Zahl, von der rechten gegen die linke abgetheilt zwei Classen zu zwei Ziffern gibt, so muß die Wurzel zweiziffrig sein; die höchste Stelle in der Wurzel bedeutet also Zehner, und das Quadrat derselben hat rechts zwei Nullen; es kann also von dem Quadrate dieser höchsten Stelle kein Theil in der ersten Classe rechts vorkommen, sondern es muß dasselbe ganz in der links stehenden Classe enthalten sein. Die höchste Zahl, deren Quadrat in 51 vorkommt, ist 7; also wird die gesuchte Quadratwurzel zwischen 70 und 80 liegen. Man kann daher die Wurzel als eine zweitheilige Zahl ansehen, deren erster Theil 70 und der zweite Theil noch unbekannt ist. Subtrahiert man nun das Quadrat des ersten Theiles 70, nämlich 4900 von 5184, so muß der Rest 284 das doppelte Product beider Theile und das Quadrat des zweiten Theiles enthalten. Dividiert man also jenen Rest durch den doppelten ersten Theil 2 × 70 = 140, so gibt der Quotient 2 den zweiten Theil der Wurzel. Sucht man nun das doppelte Product beider Theile und das Quadrat des zweiten Theiles, indem man sowohl 140 als auch 5 mit 5 multipliciert, und subtrahiert diese Producte von dem obigen Reste, so bleibt nichts übrig. Die Rechnung steht:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{51} & 84 = 70 + 2 \\
49 & 00 \\
\hline
2 & 84 : 140 + 2 \\
2 & 80 \\
 & 4 \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{= = =}
\end{array}
$$

Hat die gegebene Zahl, wie z. B. 20736, drei Classen, so wird auch die Wurzel 3ziffrig sein, und zwar ist das Quadrat der höchsten Stelle in der ersten Classe links, das Quadrat der zwei höchsten Stellen in den zwei ersten Classen der gegebenen Zahl enthalten. Sucht man auf die früher angegebene Weise die Wurzel aus den ersten zwei Classen links, wodurch man 100 + 40 erhält, so bleibt noch 1136 als Rest. Betrachtet man nun 100 + 40 = 140 als den ersten Theil der Wurzel, so wird man, um den zweiten Theil d. i. die noch folgende dritte Ziffer zu finden, 1136 durch 2 × 140 = 280 dividieren, wodurch man 4 erhält. Man hat dabei folgende Rechnung:

$$
\begin{array}{r|r|l}
\sqrt{}\ 2 & 07 & 36 = 100 + 40 + 4 \\
1 & 00 & 00 \\
\hline
1 & 07 & 36 : 200 + 40 \\
 & 80 & 00 \\
 & 16 & 00 \\
\hline
 & 11 & 36 : 280 + 4 \\
 & 11 & 20 \\
 & & 16 \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{= = = =}
\end{array}
$$

Berücksichtiget man, dass die Nullen wegen der besonderen Einrichtung des dekadischen Zahlensystems auch weggelassen werden können, wenn nur die Ziffern in der gehörigen Stellung angeschrieben werden, und dass man das doppelte Product der beiden Theile und das Quadrat des zweiten Theiles jedesmal dadurch erhält, dass man nach Weglassung der Nullen zu dem doppelten ersten Theile den zweiten Theil dazu schreibt, und die so entstehende Zahl mit diesem zweiten Theile multipliciert; so gestaltet sich die Rechnung für die früheren zwei Beispiele auf folgende Weise:

$$\begin{array}{l} \sqrt{51|84} = 72 \\ \;\;49 \\ \hline \;\;\;28_{\prime}4 : 142 \\ \;\;\;28\,4 \\ \hline \;\;\;= = = \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \sqrt{2|07|36} = 144 \\ \;\;1 \\ \hline \;\;10_{\prime}7 : 24 \\ \;\;\;9\,6 \\ \hline \;\;\;1\,13_{\prime}6 : 248 \\ \;\;\;1\,13\,6 \\ \hline \;\;\;= = = = \end{array}$$

oder, wenn man das Product aus dem jedesmaligen Divisor, nachdem man ihm die neu gefundene Ziffer anhängt, und aus dieser neuen Ziffer sogleich während des Multiplicierens von dem Dividende subtrahiert:

$$\begin{array}{l} \sqrt{51|84} = 72 \\ \;\;\;28_{\prime}4 : 142 \\ \;\;\;= = = \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \sqrt{2|0\,7|3\,6} = 144 \\ \;\;1\,0_{\prime}7 \quad : 24 \\ \;\;\;1\,13_{\prime}6 \quad : 284 \\ \;\;\;= = = = \end{array}$$

Beim Ausziehen der Quadratwurzel verfährt man daher nach folgenden Regeln:

1. Man theile die gegebene Zahl von der rechten gegen die linke in Classen von zwei Ziffern; die höchste Classe kann auch nur eine Ziffer enthalten. Sodann sucht man die größte Ziffer, deren Quadrat in der ersten Classe links vorkommt, schreibt dieselbe als erste Ziffer der Wurzel an, und subtrahiert ihr Quadrat von der ersten Classe.

2. Zu dem Reste setzt man die nächstfolgende Classe hinzu. Wird diese Zahl, mit Hinweglassung der niedrigsten Stelle, durch das doppelte der bereits gefundenen Wurzel dividiert, so gibt der

Quotient die zweite Ziffer der Wurzel, welche man nicht nur zu der Wurzel, sondern auch zu dem Divisor hinschreibt.

3. Der so ergänzte Divisor wird dann mit der neu gefundenen Ziffer der Wurzel multipliciert, und das Product von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer sogleich während des Multiplicierens selbst subtrahiert.

4. Zu dem Reste setzt man wieder die nächste Classe herab, und wiederholt dasselbe Verfahren wie früher, bis man alle Zifferclassen in Rechnung gezogen hat.

Beispiele und Aufgaben.

1) $\sqrt{1|5\,3|7\,6} = 124$
$5_{,}3 \quad : \quad 22 \times 2$
$9\,7_{,}6 \quad : \quad 244 \times 4$
⸗ ⸗ ⸗

2) $\sqrt{92|1\,6} = 96$
$11\,1_{,}6 \quad : \quad 186$
⸗ ⸗ ⸗ ⸗

3) $\sqrt{25|70|4\,9} = 507$
$70\,4_{,}9 \quad : \quad 1007$
⸗ ⸗ ⸗ ⸗

Findet man 0 als eine Ziffer der Wurzel, so wird sogleich die nächste Classe herabgesetzt, nur muß diese Null sowohl in die Wurzel als zu dem Divisor geschrieben werden.

4) $\sqrt{2999824} = ?$ 5) $\sqrt{404496} = ?$

6) $\sqrt{654481} = ?$ 7) $\sqrt{5943844} = ?$

8) $\sqrt{91068849} = ?$ 9) $\sqrt{104101209} = ?$

10) $\sqrt{1|5\,2\cdot 2\,7|56} = 12\cdot 34$
$5_{,}2 \quad : \quad 22$
$8\,2_{,}7 \quad : \quad 243$
$9\,8\,5\,6 \quad : \quad 2464$
⸗ ⸗ ⸗ ⸗

Bei Decimalbrüchen geschieht die Eintheilung der Ganzen vom Decimalpunkte gegen die linke, und die Eintheilung der Decimalen vom Decimalpunkte gegen die rechte; es wird dann in der Wurzel der Decimalpunkt gesetzt, bevor man die erste Classe von Decimalen in Rechnung zieht.

11) $\sqrt{0\cdot 2704} = ?$ 12) $\sqrt{59\cdot 29} = ?$

13) $\sqrt{5\cdot 4756} = ?$ 14) $\sqrt{229\cdot 2196} = ?$

15) $\sqrt{73\cdot8} = 27\cdot16\ldots$

$33_{,}8 \; : \; 47$

$90_{,}0 : 541$

$35\,90_{,}0 \; : \; 5426$

$3\,34\,4$

Bleibt beim Wurzelausziehen am Ende ein Rest, so ist die Wurzel nicht vollkommen genau; sie kann jedoch näherungsweise mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, indem man sich nämlich der vorgelegten Zahl beliebig viele Decimalclassen von Nullen beigefügt denkt, und dem jedesmaligen Reste eine Classe von zwei Nullen anhängt, übrigens aber wie vorhin verfährt. Soll man in der Quadratwurzel sehr viele Decimalstellen erhalten, so kann die Arbeit bedeutend abgekürzt werden; nachdem man nämlich um eine Ziffer mehr als die halbe Anzahl der Wurzelziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden hat, läſst man, anstatt zu dem Reste eine neue Classe von Nullen anzuhängen, in dem neuen Divisor die letzte Ziffer weg, und entwickelt die folgenden Wurzelziffern mittels der abgekürzten Division.

16) Man entwickle $\sqrt{17\cdot478}$ in 6 Decimalen.

a. nach dem gewöhnlichen Verfahren:

$\sqrt{17\cdot4\,7|8_0} = 4\cdot180669$

$1\,4_{,}7 \; : \; 81$

$6\,6\,8_{,}0 \; : \; 828$

$5\,600|0_{,}0 \; : \; 83606$

$583|6\,40_{,}0 \; : \; 836126$

$81|9\,64\,40_{,}0 \; : \; 8361329$

$6|7\,12\,43\,9$

b. abgekürzt:

$\sqrt{17\cdot4\,7|8_0} = 4\cdot1\,8\,0\,669$

$1\,4_{,}7 \; : \; 8\,1$

$6\,6\,8_{,}0 \; : \; 8\,2\,8$

$5\,60_{,}0 : 8_{,}3_{,}6_{,}0$

$58\,4$

$8\,2$

6

17) $\sqrt{5} = ?$

18) $\sqrt{7\cdot3} = ?$

19) $\sqrt{0\cdot08} = ?$

20) $\sqrt{228\cdot314} = ?$

21) $\sqrt{9\cdot0571} = ?$

22) $\sqrt{0\cdot008739} = ?$

23) $\sqrt{\frac{25}{576}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{576}} = \frac{5}{24}.$

24) $\sqrt{\frac{3}{25}} = \sqrt{0{\cdot}12} = 0{\cdot}3\,4\,641\ldots$

30,0 : 6 4
4 40,0 : 6 8 6
28 4 : 6,9,2
7

25) $\sqrt{\frac{16}{81}} = ?$ 26) $\sqrt{\frac{17}{24}} = ?$

27) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt 9216 □Centimeter beträgt? (§. 26, Aufg. 20.)

28) Ein Feldstück von der Form eines Quadrates misst gerade ein Joch; wie groß ist sein Umfang?

29) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches so groß ist als zwei andere Quadrate zusammengenommen, deren Seiten 1° 2′ 4″ und 1° 5′ 2″ sind?

30) Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten 4·52 Meter und 6·38 Meter sind?

31) In einem rechtwinkligen Dreiecke beträgt die Hypotenuse 31° 1′ und die eine Kathete 14° 4′; wie groß ist die andere Kathete?

32) Drei Balken werden so an einander gelegt, dass zwei derselben einen rechten Winkel bilden; wenn nun diese beiden Balken 1° 3′ 4″ und 1° 1′ 8″ lang sind, wie groß wird die Länge des dritten Balkens sein?

33) Man bestimme die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite 5·24 Decimeter beträgt.

34) Ein Messtischblatt ist ein Quadrat von 2′ 6″ Seitenlänge; wie lang ist die Diagonale?

35) Wie lang muß eine Leiter sein, um bis zur Spitze einer 8° hohen Mauer zu reichen, wenn sie unten 1° 5′ von der Mauer absteht?

36) Wie viel Fuß muß man eine 10·4 Meter lange Leiter von der Mauer eines 9·6 Meter hohen Giebels stellen, wenn sie bis zur Spitze reichen soll?

37) Eine 12 Met. 3 Decim. lange Leiter wird gegen eine verticale Wand so aufgestellt, dass der Fuß der Leiter 2 Met. 7 Decim. von der Wand absteht; wie weit ist das obere Ende der Leiter vom Fußboden entfernt?

38) Auf ein 28′ breites Haus soll ein 12′ hohes Dach gesetzt werden; wie lang müßen die Dachsparren sein, wenn sie 2′ Vorsprung erhalten?

39) Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes, wenn eine Seite $2^0\ 3'\ 4''$ beträgt?

40) Ein Garten von der Form eines Rechteckes ist 24 Meter 2 Decim. lang und 16 Meter 5 Decim. breit; ein anderer Garten hat denselben Flächeninhalt, aber die Form eines Quadrates; wie groß ist eine Seite desselben?

41) Die Oberfläche eines Würfels beträgt 1 □′ 88 □″; wie lang ist eine Kante desselben?

42) Welchen Durchmesser hat ein Kreis von 23 □Meter 93 □Decim. 14 □Centim. Inhalt? (§. 26, Aufg. 35.)

43) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 60□ Centimeter; wie groß ist der Halbmesser derselben? (§. 26, Aufg. 37.)

44) Auf einer falschen Wage wiegt ein Körper in der einen Wagschale 47 ℔ 12 Loth, in der anderen aber nur 45 ℔ 16 Lth.; wie groß ist das wahre Gewicht dieses Körpers? (Man multipliciert die beiden falschen Gewichte, und zieht aus dem Producte die Quadratwurzel.)

Das Ausziehen der Cubikwurzel.

§. 65.

Betrachtet man die dritten Potenzen der niedrigsten und höchsten ein-, zwei-, dreiziffrigen Zahlen, nämlich

$1^3 = 1, \qquad 10^3 = 1000, \qquad 100^3 = 1000000,$
$9^3 = 729, \qquad 99^3 = 970299, \qquad 999^3 = 997002999;$

so sieht man, daſs der Cubus einer Zahl entweder dreimal so viel Ziffern als die Cubikwurzel enthält, oder um zwei oder eine weniger als dreimal so viel. Theilt man daher den Cubus von der rechten angefangen in Classen von drei Ziffern, wo jedoch die letzte Classe auch nur zwei oder eine Ziffer enthalten kann, so läſst sich schließen: so viele solche Classen im Cubus vorkommen, eben so viele Ziffern muß die Wurzel enthalten.

Um eine zweitheilige Zahl z. B. $54 = 50 + 4$ zum Cubus zu erheben, wird man ihr Quadrat $50 \times 50 + 2 \times 50 \times 4 + 4 \times 4$ noch mit $50 + 4$ multiplicieren; man erhält:

$$
\begin{array}{rl}
 & 50\times50+2\times50\times4+4\times4 \\
 & 50+4 \\
\hline
 & 50\times50\times50+2\times50\times50\times4+\quad 50\times4\times4 \\
 & +\quad 50\times50\times4+2\times50\times4\times4+4\times4\times4 \\
\hline
(50+4)^3 = & 50^3 \quad +3\times50^2\times4+3\times50\times4^2+4^3.
\end{array}
$$

Der Cubus einer zweitheiligen Zahl besteht demnach aus dem Cubus des ersten Theiles, aus dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles multipliciert mit dem zweiten Theile, aus dem dreifachen ersten Theile multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Theiles, und aus dem Cubus dieses zweiten Theiles.

Es soll nun aus der Zahl 551368 die Cubikwurzel ausgezogen, d. i. eine Zahl gesucht werden, welche dreimal als Factor gesetzt, 551368 zum Producte gibt. Theilt man diese Zahl, von der rechten angefangen, in Classen von drei Ziffern, so erhält man zwei solche Classen; die Cubikwurzel wird also zweizifferig sein, und ihre höchste Ziffer Zehner bedeuten; der Cubus der Zehner hat rechts drei Nullen, daher er ganz in der links stehenden Classe enthalten sein muß. Die größte Zahl, deren Cubus in 551 enthalten ist, ist 8; es ist daher 80 der erste Theil der Cubikwurzel, der zweite Theil aber noch unbekannt. Zieht man den Cubus von 80, nämlich 512000, von der gegebenen Cubikzahl ab, so müßen in dem Reste 39368 noch die übrigen drei Bestandtheile, aus denen der Cubus einer zweitheiligen Zahl besteht, und zwar zunächst das dreifache Quadrat des ersten Theiles multipliciert mit dem zweiten Theile, enthalten sein. Dividiert man daher jenen Rest durch das dreifache Quadrat des schon gefundenen ersten Theiles, nämlich durch $3 \times 80^2 = 19200$, so gibt der Quotient 2 den zweiten Theil der Wurzel. Sucht man nun das dreifache Quadrat des ersten Theiles multipliciert mit dem zweiten Theile, den dreifachen ersten Theil multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Theiles, und den Cubus des zweiten Theiles, und subtrahiert die Summe dieser drei Zahlen von dem obigen Reste, so bleibt nichts übrig. Die Rechnung steht:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt[3]{551|368} = 80 + 2 \\
\quad 512\,000 \\
\hline
\quad\quad 39\,368 : 19200 \\
\quad\quad 38\,400 = 3 \times 80^2 \times 2 \\
\quad\quad\quad\;\; 960 = 3 \times 80 \times 2^2 \\
\quad\quad\quad\quad\;\; 8 = 2^3 \\
\hline
\quad\quad = = = = =
\end{array}
$$

Wenn man auch hier der Kürze wegen die Nullen wegläßt, und den Wert der Zahlen bloß durch die Stelle, welche sie einnehmen, bezeichnet, so läßt sich die Rechnung so darstellen:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt[3]{551|368} = 82 \\
\quad 512 \\
\hline
\quad\quad 39\,3{,}68 : 192 \\
\quad\quad 38\,4 \quad = 3 \times 8^2 \times 2 \\
\quad\quad\quad 9\,6 \quad = 3 \times 8 \times 2^2 \\
\quad\quad\quad\quad 8 = 2^3 \\
\hline
\quad\quad = = = = =
\end{array}
$$

Da bei dieser Anschreibweise der Divisor 192 das dreifache Quadrat von Zehnern ist, so müßen zu demselben rechts zwei Nullen hinzugedacht, und daher beim Dividieren selbst auch im Dividende die ersten zwei Stellen rechts weggelassen werden.

Besteht die gegebene Zahl aus drei oder mehr Classen, so sucht man, wie früher, die Cubikwurzel aus den ersten zwei Classen links, betrachtet diese als den ersten Theil der gesuchten Wurzel, und wiederholt das ganze obige Verfahren, bis alle Theile der Wurzel gefunden wurden. Z. B.

$$\begin{array}{rll}
\sqrt[3]{19|902|511} & = 200 + 70 + 1 & \\
8\,000\,000 & & \\
\hline
11\,902\,511 & : 120000 & 3 \times 200^2 = 120000 \\
8\,400\,000 & = 3 \times 200^2 \times 70 & \\
2\,940\,000 & = 3 \times 200 \times 70^2 & \\
343\,000 & = 70^3 & \\
\hline
219\,511 & : 218700 & 3 \times 270^2 = 218700 \\
218\,700 & = 3 \times 270^2 \times 1 & \\
810 & = 3 \times 270 \times 1^2 & \\
1 & = 1^3 & \\
\hline
= = = = = & &
\end{array}$$

oder mit Weglassung der Nullen:

$$\begin{array}{rll}
\sqrt[3]{19|9\,02|511} & = 271 & \\
8 & & \\
\hline
11\,9{,}02 & : 12 \;.\;.\;. & 3 \times 2^2 \\
84 & \;.\;. & 3 \times 2^2 \times 7 \\
294 & \;.\;. & 3 \times 2 \times 7^2 \\
343 & \;.\;. & 7^3 \\
\hline
2\,19\,5{,}11 & : 2187 \;.\;. & 3 \times 27^2 \\
2\,187 & \;.\;.\;. & 3 \times 27^2 \times 1 \\
81 & \;.\;.\;. & 3 \times 27 \times 1^2 \\
1 & \;.\;.\;. & 1^3 \\
\hline
= = = = = & &
\end{array}$$

Beim Ausziehen der Cubikwurzel ist daher folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Man theilt die Zahl von der rechten gegen die linke in Classen von je drei Ziffern; die links stehende Classe kann auch bloß eine oder zwei Ziffern enthalten. Sodann sucht man

die größte Zahl, deren Cubus in der ersten Classe zur linken enthalten ist, schreibt dieselbe als erste Ziffer in die Wurzel, und zieht ihren Cubus von der ersten Classe ab.

2. Die folgenden Ziffern der Cubikwurzel werden durch die Division gefunden. Man setzt nämlich zu dem jedesmaligen Reste die nächstfolgende Classe herab, und betrachtet die dadurch entstehende Zahl mit Ausschluss der zwei letzten Ziffern rechts als Dividend, das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Theiles der Wurzel aber als Divisor. Der Quotient wird als eine neue Ziffer in die Wurzel geschrieben.

3. Man bildet die Bestandtheile, welche diese neue Ziffer im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit dieser Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multipliciert mit dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren eigenen Cubus, schreibt den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter rechts darunter, und subtrahiert die Summe der so gesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern. Läſst sich diese Summe nicht subtrahieren, so ist die neue Ziffer der Wurzel zu groß; sie muß daher nach und nach kleiner genommen werden, bis man subtrahieren kann.

4. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt am Ende ein Rest, so ist die Cubikwurzel nicht vollkommen genau; sie kann aber mit jeder beliebigen Genauigkeit in Decimalen bestimmt werden, indem man nämlich jedem Reste eine Classe von drei Nullen anhängt, und übrigens wie vorhin verfährt.

Kommen in der gegebenen Zahl auch Decimalen vor, so werden diese vom Decimalpunkte angefangen gegen die rechte hin in Classen eingetheilt; hat die letzte Decimalclasse rechts weniger als drei Ziffern, so werden die fehlenden durch Nullen ersetzt. In der Wurzel setzt man den Decimalpunkt, bevor man die erste Decimalclasse in Rechnung zieht.

Beispiele und Aufgaben.

1) $\sqrt[3]{12|230|590|464} = 2304$

8
4 2,30 : 12
3 6
5 4
27
63 5904,64 : 158700
63 4800
1104 0
64
= = = = =

2) $\sqrt[3]{592704} = ?$

3) $\sqrt[3]{139798359} = ?$

4) $\sqrt[3]{7301384} = ?$

5) $\sqrt[3]{223648543} = ?$

6) $\sqrt[3]{1593413632} = ?$

7) $\sqrt[3]{60006085875} = ?$

8) $\sqrt[3]{9|295} = 21{\cdot}025\ \ldots$

8
1 2,95 : 12
1 2
6
1
340000,00 : 132300
264600
252 0
8
75147 920,00 : 13255212
66276 060
15 765 0
1 25
8856 093 75

9) $\sqrt[3]{7958} = ?$

10) $\sqrt[3]{85349} = ?$

11) $\sqrt[3]{5} = ?$ 12) $\sqrt[3]{123456} = ?$

13) $\sqrt[3]{371{\cdot}694|959} = 7{\cdot}19$

343

28 6,94 : 147

14 7

2 1

1

13 7 83 9,59 : 15123

13 6 10 7

1 72 5 3

7 29

= = = = =

14) $\sqrt[3]{5{\cdot}832} = ?$ 15) $\sqrt[3]{152273{\cdot}304} = ?$

16) $\sqrt[3]{25{\cdot}47382} = ?$ 17) $\sqrt[3]{0{\cdot}8035} = ?$

18) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$.

19) $\sqrt[3]{\frac{11}{40}} = \sqrt[3]{0{\cdot}275} = 0{\cdot}65029\ldots$

20) $\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = ?$ 21) $\sqrt[3]{\frac{17}{48}} = ?$

22) Wie groß ist die Seite eines Würfels, dessen Cubikinhalt 12 Cub.′ 328 Cub.″ beträgt? (§. 26, Aufg. 28.)

23) Wenn man 12167 gleiche würfelförmige Steine so in einen Haufen bringen würde, dass in der Länge, Breite und Höhe gleich viele Stücke sind; wie viel Steine kommen in jede Reihe?

24) Wie lang ist die Seite eines Würfels, welcher so viel Raum einnimmt, als 2 Würfel zusammengenommen, deren Seiten 3 Decim. 4 Centim. und 2 Decim. 7 Centim. sind?

25) Es soll ein würfelförmiger Kessel gefertigt werden, welcher 23 Eimer hält; wie lang wird eine Seite des Kessels werden? (1 Eimer = 1·792 Cubikfuß.)

26) Ein eiserner Würfel wiegt 36 Pfund; wie groß ist eine Seite, wenn der Cubikzoll Eisen $7\frac{7}{8}$ Loth wiegt?

27) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, wenn ihr Cubikinhalt 13·144256 Cub.-Decimeter beträgt? (§. 29, Aufg. 40.)

28) Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, welche mit einem Würfel von 1′ 5″ Seitenlänge gleichen Inhalt hat?

29) Wie groß ist der Durchmesser einer 24pfündigen Kanonenkugel, wenn ein Cubikzoll Eisen zu $8\frac{1}{4}$ Loth angenommen wird?

30) Aus einer bleiernen Kugel von 3 Centimeter Durchmesser sollen zwei andere gegossen werden; wenn nun die eine 2 Centimeter Durchmesser haben soll, welcher Durchmesser ist der anderen zu geben?

Achter Abschnitt.

Die Verhältnis-Rechnungen.

I. Verhältnisse.

§. 66.

Bei den meisten Rechnungen wird eine Vergleichung von gleichartigen Größen vorausgesetzt, wodurch man untersucht, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Eine solche Vergleichung von zwei gleichartigen Größen heißt ein **Verhältnis**; von den beiden Größen wird die erste das **Vorderglied**, die zweite das **Hinterglied** genannt. Z. B. Unter dem Verhältnisse von 12 zu 4 verstehet man die Angabe, wie oft 4 in 12 enthalten ist, durch diese Zahlen selbst ausgedrückt, somit den angezeigten Quotienten 12 : 4; der Dividend 12 ist das Vorderglied, der Divisor 4 das Hinterglied.

Wenn man das Vorderglied durch das Hinterglied wirklich dividiert, so heißt der Quotient der **Exponent** des Verhältnisses; in dem Verhältnisse 12 : 4 ist 3 der Exponent, und zeigt an, dass 4 in 12 3mal enthalten ist, oder dass 12 3mal so groß ist als 4.

Aus diesen Erklärungen folgt:

In jedem Verhältnisse ist das Vorderglied gleich dem Hintergliede multipliciert mit dem Exponenten.

Mit Rücksicht auf den Exponenten unterscheidet man *Verhältnisse der Gleichheit, fallende* und *steigende Verhältnisse*, je nachdem der Exponent gleich 1, größer als 1, oder kleiner als 1 ist; in einem Verhältnisse der Gleichheit sind beide Glieder gleich, in einem fallenden ist das Vorderglied größer, in einem steigenden kleiner als das Hinterglied.

1 : 1, 2 : 2, 7 : 7, 14 : 14 sind Verhältnisse der Gleichheit,
2 : 1, 5 : 2, 10 : 7, 37 : 14 „ fallende Verhältnisse,
1 : 3, 2 : 5, 7 : 20, 14 : 30 „ steigende Verhältnisse.

§. 67.

Die *Größe* eines Verhältnisses hängt von dem Exponenten ab; zwei Verhältnisse sind demnach *gleich*, wenn sie denselben Exponenten haben, und es bleibt ein Verhältnis so lange ungeändert, als es denselben Exponenten beibehält. Daraus folgt:

a) *Ein Verhältnis bleibt unverändert, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multipliciert.* So gibt das Verhältnis 10 : 2, wenn man beide Glieder mit 2, oder mit 3, oder mit 5 multipliciert, die Verhältnisse 20 : 4, 30 : 6, 50 : 10, welche alle dem ersten Verhältnisse gleich sind, weil sie denselben Exponenten 5 haben.

b) *Ein Verhältnis bleibt unverändert, wenn man beide Glieder durch dieselbe Zahl dividiert.* Z. B. Das Verhältnis 20 : 4 wird nicht geändert, wenn man beide Glieder durch 4 dividiert: man bekommt dadurch 5 : 1, welches Verhältnis mit dem gegebenen denselben Exponenten 5 hat.

Mit Hilfe des ersten Satzes kann ein Verhältnis, worin Brüche oder gemischte Zahlen vorkommen, *durch ganze Zahlen dargestellt werden*; man braucht nur beide Glieder mit dem wegzuschaffenden Nenner oder wenn ihrer zwei vorkommen, mit dem Vielfachen der Nenner zu multiplicieren. Z. B.

$$\frac{\frac{3}{4} : 5}{3 : 20} \times 4 \qquad \frac{3 : \frac{1}{2}}{6 : 1} \times 2 \qquad \frac{\frac{2}{5} : 2\frac{1}{4}}{8 : 45} \times 20$$

Man stelle folgende Verhältnisse in ganzen Zahlen dar:
$\frac{7}{8} : 4$, $3\frac{1}{2} : 5$, $2 : \frac{3}{4}$, $7 : 5\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, $\frac{7}{10} : \frac{5}{8}$, $\frac{9}{19} : \frac{7}{12}$, $8\frac{3}{7} : \frac{3}{8}$, $\frac{11}{25} : 5\frac{3}{20}$, $23\frac{2}{7} : \frac{7}{12}$.

Mit Hilfe des zweiten Satzes kann jedes Verhältnis, dessen beide Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, abgekürzt werden, indem man beide Glieder durch jenes Maß dividiert. Z. B.

$$\frac{15 : 6}{5 : 2} : 3 \qquad \frac{28 : 8}{7 : 2} : 4 \qquad \frac{10 : 5}{2 : 1} : 5$$

Man drücke folgende Verhältnisse durch die kleinsten Zahlen aus:

6 : 2, 10 : 18, 12 : 16, 32 : 24, 56 : 72, 120 : 48.

Folgende Verhältnisse sollen auf die einfachste Gestalt gebracht, d. i. in ganzen Zahlen dargestellt, und dann, wenn es angeht, abgekürzt werden:

$4 : 6\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{3} : 7\frac{1}{5}$, $3\frac{3}{8} : 8\frac{2}{5}$, $12\frac{6}{7} : 8\frac{4}{7}$, $11\frac{3}{5} : 2\frac{4}{5}$, $1\frac{7}{8} : \frac{6}{7}$, $\frac{15}{16} : 3\frac{3}{4}$, $6\frac{9}{16} : 15\frac{3}{4}$.

Aufgaben.

1) Eine Linie ist 12 Meter lang, eine andere 4 Meter; wie verhalten sich die Längen dieser Linien zu einander?

2) Wie verhält sich ein Fuß zu einer Klafter?

3) Ein kaiserlicher Ducaten gilt 480 Kreuzer, eine Krone 1380 Kreuzer; wie verhalten sich die Werte dieser Goldmünzen zu einander?

4) Ein Ctr. Kaffee kostet $75\frac{1}{2}$ fl., 1 Ctr. Zucker $32\frac{3}{4}$ fl., wie verhält sich der Preis vom Kaffee zum Preise des Zuckers?

5) Von zwei Mühlsteinen dreht sich der eine in jeder Minute 72mal, der andere 60mal um; in welchem Verhältnisse stehen ihre Geschwindigkeiten?

6) Von zwei Rädern macht das eine 300 Umdrehungen in $2\frac{1}{2}$ Minuten, das andere braucht zu eben so viel Umdrehungen nur $1\frac{2}{5}$ Minuten; wie verhält sich die Geschwindigkeit des

ersten Rades zu jener des zweiten? — Wie $1\frac{2}{5} : 2\frac{1}{2}$, oder $14 : 25$.

7) Wie verhält sich die englische Seemeile zur geographischen Meile, wenn auf einen Grad des Aequators 60 englische Seemeilen, und 15 geographische Meilen gehen? — Wie $15 : 60$, oder $1 : 4$.

8) 45 fl. österr. Währung enthalten ein Zollpfund feinen Silbers; eben so viel Silber ist in 30 Thalern der Thaler-Währung, und auch in $52\frac{1}{2}$ fl. süddeutscher Währung enthalten; wie verhält sich dem Werte nach

a) 1 fl. ö. W. zu 1 Thlr.?
b) 1 fl. ö. W. zu 1 fl. südd. W.?
c) 1 Thlr. zu 1 fl. südd. W.?

9) 1 Elle Tuch kostet 5 Gulden, 6 Ellen kosten daher 30 Gulden; welches Verhältnis findet zwischen den Längen, und welches zwischen den Werten des Tuches statt?

Verhältnis der Längen $1 : 6$,
Verhältnis der Werte $5 : 30$, oder $1 : 6$;

es sind also beide Verhältnisse einander gleich.

10) 5 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 8 Tagen, 10 Arbeiter werden für dieselbe Arbeit nur halb so viel Tage, also 4 Tage brauchen; wie verhalten sich die Zahlen der Arbeiter, und wie jene der Tage?

Verhältnis der Zahlen der Arbeiter $5 : 10$ oder $1 : 2$,
Verhältnis der Tage $8 : 4$ oder $2 : 1$;

es ist also das Verhältnis zwischen den Zahlen der Arbeiter gleich dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der Tage, aber in verkehrter Ordnung genommen.

11) Ein Kreis, dessen Durchmesser 1′ ist, hat $3\frac{1}{7}$′ Umfang; welches Verhältnis findet zwischen dem Durchmesser und dem Umfange statt?

12) Von zwei Locomotiven legt die eine in jeder Minute

320 Meter, die andere 360 Meter zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

13) Ein Zimmer ist $5\frac{3}{4}{}^{0}$ lang und $3\frac{5}{15}{}^{0}$ breit; wie verhält sich die Länge zu der Breite?

14) Ein Fenster ist 5′ 8″ hoch und 3′ 6″ breit; wie verhält sich die Höhe zu der Breite?

15) Ein Pariser Fuß hat 144 Pariser Linien, ein Wiener Fuß 140·127 Pariser Linien; wie verhält sich der Pariser zu dem Wiener Fuß?

16) Ein Joch hat 1600 □° oder 5754·6 französische Hektaren; wie verhält sich eine Quadratklafter zu einer Hektare?

17) Der Mond dreht sich in $27\frac{3}{10}$ Tagen um seine Achse; Jupiter, der größte unter den Planeten, in $9\frac{9}{10}$ Stunden; wie verhalten sich ihre Umdrehungszeiten?

§. 68.

Die bisher betrachteten Verhältnisse heißen *einfache*, im Gegensatze zu einem *zusammengesetzten*, dessen Vorderglied das Product aus den Vordergliedern mehrerer einfacher Verhältnisse und das Hinterglied das Product aus den Hintergliedern derselben Verhältnisse ist. Z. B.

Einfache Verhältnisse	4 : 3	Exponent $\frac{4}{3}$
	5 : 6	" $\frac{5}{6}$
	9 : 7	" $\frac{9}{7}$
Zusammengesetztes Verh.	4 . 5 . 9 : 3 . 6 . 7	" $\frac{4.5.9}{3.6.7}$
oder	10 : 7	" $\frac{10}{7}$

Der Exponent eines zusammengesetzten Verhältnisses ist also gleich dem Producte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse.

Zusammengesetzte Verhältnisse kommen in der Anwendung vor, wenn man Größen mit einander vergleichen will, die einzeln von zwei oder mehreren andern Größen abhängen. Z. B. A geht durch 10 Tage und legt täglich 8 Meilen zurück, B geht durch 12 Tage, macht aber täglich nur 7 Meilen; wie verhalten sich die von beiden zurückgelegten Wege? Diese hängen offenbar sowohl von der Zeit als von der Geschwindigkeit der Bewegung ab; da A im Ganzen 10×8 Meilen, und B 12×7 Meilen macht, so ist das Verhältnis der von beiden zurückgelegten Räume $10 \times 8 : 12 \times 7$. Man hat somit

Verhältnis der Zeiten	$10 : 12$
Verhältnis der Geschwindigkeiten	$8 : 7$
Verhältnis der Räume	$10 \times 8 : 12 \times 7$
oder	$20 : 21$

und sagt: Die zurückgelegten Räume stehen in zusammengesetztem Verhältnisse der Zeiten und Geschwindigkeiten.

Ein zusammengesetztes Verhältnis wird nicht geändert, wenn man irgend ein Vorderglied und zugleich irgend ein Hinterglied in den einfachen Verhältnissen mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert. Dadurch können die einzelnen Glieder der einfachen Verhältnisse noch vor ihrer Multiplication von Brüchen befreit und abgekürzt werden.

Aufgaben.

Man bilde das zusammengesetzte Verhältnis

1) aus $8 : 5$, $10 : 7$, $21 : 16$;

2) aus $3\frac{1}{4} : 2$, $5\frac{1}{8} : 6\frac{1}{2}$, $3 : 2\frac{1}{3}$;

3) aus $2\frac{5}{8} : \frac{1}{3}$, $7 : 3\frac{2}{5}$, $1 : 4\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} : \frac{3}{5}$;

4) aus $3\frac{3}{7} : 24$, $35 : 48$, $27\frac{1}{2} : 25$, $12 : 14\frac{3}{4}$;

5) aus $1 : 2$, $2 : 3$, $3 : 4$, $4 : 5$, $5 : 6$;

6) aus $13\frac{5}{6} : 12$, $15\frac{1}{2} : 8\frac{3}{4}$, $7 : 10\frac{2}{3}$, $30 : 35$, $25 : 25\frac{1}{2}$.

7) Von zwei Rechtecken ist das eine 15 Meter lang und 12 Meter breit, das andere 18 Meter lang und 16 Meter breit; wie verhalten sich die Flächen der beiden Rechtecke?

Verhältnis	der	Längen	$15 : 18$
"	"	Breiten	$12 : 15$
"	"	Flächen	$5 : 8$

8) Von zwei Gefäßen hat das eine 4′ 8″ Länge, 2′ 1″ Breite und 1′ 4″ Tiefe, das andere ist 3′ 6″ lang, 1′ 8″ breit

und 1′ 2″ tief; wie verhält sich der Inhalt des ersten Gefäßes zu jenem des zweiten?

Verhältnis der	Längen	56	:	42
„ „	Breiten	25	:	20
„ „	Tiefen	16	:	14
„ „	Inhalte	40	:	21

9) Die Längen zweier Gärten sind 22° 5′ und 18° 3′, die Breiten 15° 4′ und 16°; in welchem Verhältnisse stehen die Flächen?

10) Von zwei Dampfmaschinen ist die eine im Stande, 108 Ctr. 280′ hoch, die andere in derselben Zeit 152 Ctr. 325′ hoch zu schaffen; in welchem Verhältnisse stehen die Kräfte dieser beiden Maschinen?

II. Proportionen.

§. 69.

Wenn man zwei Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben, und somit gleich sind, durch das Gleichheitszeichen verbindet, so heißt ein solcher Ausdruck eine **Proportion** z. B. $10 : 5 = 12 : 6$ ist eine Proportion, und wird gelesen: 10 verhält sich zu 5, so wie sich 12 zu 6 verhält, oder kürzer: 10 zu 5 wie 12 zu 6; 10 ist das erste, 5 das zweite, 12 das dritte und 6 das vierte Glied der Proportion; das erste und vierte Glied nennt man die **äußeren**, das zweite und dritte die **inneren Glieder**.

Eine Proportion, in welcher das zweite und dritte Glied gleich sind, wird eine **stetige Proportion**, und jedes der inneren Glieder die **mittlere stetige Proportionale** zwischen den beiden äußern genannt. So ist $24 : 12 = 12 : 6$ eine stetige Proportion, und 12 ist die mittlere stetige Proportionale zwischen 24 und 6.

In einer Proportion können auch benannte Zahlen vorkommen; nur müßen die beiden Glieder eines jeden Verhältnisses gleichnamig sein; z. B. 12 Pfd. : 4 Pfd. = 30 fl. : 4 fl. Da übrigens die Benennungen, ohne die Proportion zu ändern, weggelassen werden können, und der Rechnung ohnehin nur die reinen Zahlen unterzogen werden, so werden wir in dem Nachfolgenden immer nur solche Proportionen voraussetzen, deren Glieder unbenannte Zahlen sind.

§. 70.

Setzt man in einer beliebigen Proportion $16 : 2 = 48 : 6$ statt eines jeden Vordergliedes das Product aus dem Hintergliede und dem Exponenten, so erhält man

$$2 \times 8 : 2 = 6 \times 8 : 6.$$

Daraus ist ersichtlich, das sowohl die äußeren als die inneren Glieder mit einander multipliciert, dieselben drei Factoren 2, 8 und 6 enthalten, daher auch dasselbe Product geben müßen.

In jeder Proportion ist also das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Umgekehrt müßen zwei Verhältnisse $16 : 2$ und $48 : 6$, in denen das Product der äußeren Glieder gleich ist dem Producte der innern, nothwendig einander gleich sein, und somit eine Proportion bilden. Wenn nämlich

$16 \times 6 = 2 \times 48$ ist, so muß auch $\frac{16 \times 6}{2 \times 6} = \frac{2 \times 48}{2 \times 6}$

oder $\frac{16}{2} = \frac{48}{6}$, oder $16 : 2 = 48 : 6$ sein.

Eine Proportion bleibt demnach so lange richtig, als das Product der äußeren Glieder dem Producte der inneren gleich bleibt. Daraus folgt:

1. Wenn man in einer Proportion die inneren Glieder mit einander vertauscht, so erhält man wieder eine Proportion. Z. B. aus $8 : 4 = 10 : 5$ folgt auch $8 : 10 = 4 : 5$.

2. Wenn man in einer Proportion die äußeren Glieder mit einander verwechselt, so erhält man wieder eine Proportion. Wenn z. B. $8 : 4 = 10 : 5$ ist, so hat man auch $5 : 4 = 10 : 8$.

3. Werden in einer Proportion die inneren Glieder mit den äußeren verwechselt, so hat man wieder eine richtige Proportion. Wenn $8 : 4 = 10 : 5$, ist so auch $4 : 8 = 5 : 10$.

4. Eine Proportion hört nicht auf richtig zu sein, wenn man ein inneres und ein äußeres Glied mit derselben Zahl multipliciert.

Z. B. Aus $8 : 4 = 10 : 5$ folgt auch

$8 \times 2 : 4 \times 2 = 10 : 5$ oder $16 : 8 = 10 : 5$,
$8 \times 2 : 4 = 10 \times 2 : 5$ „ $16 : 4 = 20 : 5$,
$8 : 4 \times 2 = 10 : 5 \times 2$ „ $8 : 8 = 10 : 10$,
$8 : 4 = 10 \times 2 : 5 \times 2$ „ $8 : 4 = 20 : 10$.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen; man braucht nur den Nenner eines äußern Gliedes als Factor in ein inneres, und den Nenner eines innern Gliedes in ein äußeres als Factor zu übertragen. Z. B. aus der Proportion

$$\tfrac{3}{2} : 5 = 4 : x$$

wo x ein noch unbekanntes Glied vorstellt, folgt:

$$3 : 5 \times 2 = 4 : x \text{ oder } 3 : 10 = 4 : x.$$

Aus $x : \frac{3}{5} = \frac{4}{9} : 2$ folgt $x : 3 = 4 : 2 \times 5 \times 9$ oder $x : 3 = 4 : 90$; aus $3\frac{1}{2} : x = 2\frac{1}{3} : 1$ folgt $7 : x = 7 \times 2 : 1 \times 3$ oder $7 : x = 14 : 3$.

Man stelle folgende Proportionen in ganzen Zahlen dar:

1) $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6} : x$ 2) $15\frac{1}{4} : 2 = 17 : x$
3) $\frac{6}{7} : 4 = x : \frac{2}{3}$ 4) $6\frac{1}{4} : 11\frac{2}{3} = x : 2\frac{1}{3}$
5) $\frac{1}{2} : x = \frac{5}{8} : 3$ 6) $5\frac{3}{4} : x = 2\frac{5}{6} : 3$
7) $x : \frac{3}{4} = 1 : \frac{4}{5}$ 8) $x : 2\frac{1}{4} = 18 : 3\frac{1}{2}$

5. Eine Proportion hört nicht auf richtig zu sein,

wenn man ein äußeres und ein inneres Glied durch dieselbe Zahl dividiert.

Z. B. Aus $8 : 12 = 16 : 24$ folgt auch

$(8 : 4) : (12 : 4) = 16 : 24$ oder $2 : 3 = 16 : 24$,
$(8 : 4) : 12 = (16 : 4) : 24$ „ $2 : 12 = 4 : 24$,
$8 : (12 : 4) = 16 : (24 : 4)$ „ $8 : 3 = 16 : 6$,
$8 : 12 = (16 : 4) : (24 : 4)$ „ $8 : 12 = 4 : 6$.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jede Proportion, in welcher ein äußeres und ein inneres Glied ein gemeinschaftliches Maß haben, in kleineren Zahlen ausdrücken, wenn man jene zwei Glieder durch das gemeinschaftliche Maß dividiert. Z. B.

aus $x : 4 = 3 : 20$ folgt $x : 1 = 3 : 5$
„ $10 : x = 60 : 12$ „ $1 : x = 1 : 2$
„ $6 : 15 = 8 : x$ „ $1 : 5 = 4 : x$.

Man drücke folgende Proportionen durch die kleinsten ganzen Zahlen aus:

1) $9 : 27 = 5 : x$ 2) $21 : 24 = 14 : x$
3) $27 : x = 6 : 8$ 4) $x : 8 = 56 : 64$
5) $9\frac{1}{3} : 3\frac{1}{2} = 2 : x$ 6) $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3} = x : 9\frac{1}{3}$
7) $x : 3\frac{3}{4} = 5\frac{3}{5} : \frac{7}{8}$ 8) $4\frac{4}{5} : x = 5\frac{1}{3} : 5\frac{5}{8}$
9) $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = x : \frac{1}{8}$ 10) $42\frac{7}{9} : x = 25\frac{5}{18} : 47\frac{3}{11}$
11) $\frac{35}{48} : 27\frac{9}{14} = 13\frac{13}{18} : x$
12) $81\frac{17}{72} : 110\frac{23}{60} = x : 58\frac{29}{40}$.

6. Wenn man in zwei oder mehreren Proportionen die ersten, die zweiten, dritten und vierten Glieder mit einander multipliciert, so bilden die Producte wieder eine Proportion. Z. B.

Aus den Proportionen

$$2 : 3 = 4 : 6$$
$$5 : 3 = 15 : 9$$
$$7 : 2 = 28 : 8$$

folgt auch

$$2 \times 5 \times 7 : 3 \times 3 \times 2 = 4 \times 15 \times 28 : 6 \times 9 \times 8$$

oder $70 : 18 = 1680 : 432$.

7. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder die Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Z. B. Aus $24 : 8 = 18 : 6$ folgt auch

$(24 + 18) : (8 + 6) = 24 : 8$ und $= 8 : 6$

$(24 - 18) : (8 - 6) = 24 : 8 \quad = 8 : 6.$

8. In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zu ihrer Differenz, wie die Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses zu ihrer Differenz.

Z. B. Aus $24 : 8 = 18 : 6$ folgt auch

$(24 + 8) : (24 - 8) = (18 + 6) : (18 - 6)$

oder $32 : 16 = 24 : 12.$

§. 71.

Aus einer Proportion, in welcher drei Glieder bekannt sind, das unbekannte Glied finden, heißt die Proportion auflösen. Das unbekannte Glied wird gewöhnlich mit einem der Buchstaben x, y, z bezeichnet.

Die Auflösung der Proportionen geschieht nach folgenden zwei Sätzen:

1. Jedes äußere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der beiden inneren Glieder, dividiert durch das andere äußere Glied. Z. B.

Aus $x : 12 = 3 : 4$ folgt $x = \frac{12 \times 3}{4} = 9,$

„ $4 : 5 = 12 : x$ „ $x = \frac{5 \times 12}{4} = 15.$

2. Jedes innere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der äußeren Glieder, dividiert durch das andere innere Glied. Z. B.

Aus $7 : x = 14 : 8$ folgt $x = \frac{7 \times 8}{14} = 4.$

„ $2 : 5 = x : 15$ „ $x = \frac{2 \times 15}{5} = 6.$

Wenn eine Proportion Brüche enthält oder wenn sie sich abkürzen läſst, so hat man dieselbe zuerst in den kleinsten ganzen Zahlen darzustellen, und dann erst aufzulösen. Dabei kann man sich sehr vortheilhaft der Strichmethode bedienen. Um z. B. die Proportion $\frac{7}{8} : 14 = 1\frac{1}{3} : x$ aufzulösen, hat man

$$\begin{array}{cccccc} \frac{\cancel{7}}{8} & : & \cancel{14} & = & 1\frac{1}{3} & : x \\ 3 & & 8 & & 4 & \\ & & 2 & & & \end{array}$$

$$x = \frac{8 \times 2 \times 4}{3} = 21\frac{1}{3}$$

oder

$$\begin{array}{r|l} & \cancel{14}\ \ 2 \\ \frac{\cancel{7}}{8} & 1\frac{1}{3})\ 4 \\ 3 & 8 \\ \hline 3 & 64 \mid 21\frac{1}{3} \end{array}$$

Aufgaben.

Man löse folgende Proportionen auf:

1) $x : 5 = 12 : 4$
2) $x : \frac{1}{2} = 2 : 7$
3) $3 : x = 5 : 30$
4) $\frac{2}{3} : x = \frac{1}{4} : \frac{3}{5}$
5) $3 : 4\frac{1}{2} = x : 18$
6) $\frac{1}{8} : \frac{8}{9} = x : 2\frac{1}{4}$
7) $3 : \frac{4}{5} = 5 : x$
8) $1 : \frac{5}{8} = 1\frac{3}{5} : x$
9) $x : 15 = 4 : \frac{6}{7}$
10) $x : \frac{5}{9} = 11 : 3\frac{1}{8}$
11) $22\frac{1}{5} : x = 18 : 13$
12) $3\frac{1}{2} : x = 2\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$
13) $\frac{5}{9} : \frac{11}{21} = x : \frac{11}{24}$
14) $15\frac{1}{3} : 8\frac{3}{4} = x : 3\frac{1}{2}$
15) $25\frac{5}{18} : 42\frac{7}{9} = 47\frac{3}{11} : x$
16) $11\frac{4}{5} : 12\frac{3}{10} = 7\frac{1}{5} : x$
17) $2175\frac{23}{64} : x = 341\frac{17}{56} : 93\frac{5}{72}$
18) $815\frac{113}{140} : 941\frac{19}{964} = x : 753\frac{313}{420}$.
19) $x : 35{\cdot}214 = 57{\cdot}24 : 88{\cdot}35$
20) $4{\cdot}156 : 71{\cdot}34 = 15{\cdot}749 : x$.

§. 72.

Wenn zwei Gattungen von Größen so von einander abhängen, daſs, wenn die eine Gattung größer wird, auch die andere in demselben Verhältnisse zunimmt, so heißen die beiden Gattungen von Größen gerade proportioniert. Z. B. 2mal so viel von derselben Waare kostet auch 2mal so viel Geld, für die 3fache Waare muß man auch das 3fache Geld bezahlen; der

Preis einer Waare nimmt also in demselben Verhältnisse zu, in welchem die Menge der Waare zunimmt; Waare und Preis sind demnach gerade proportioniert.

Bei gerade proportionierten Gattungen von Größen ist das Verhältnis zwischen je zwei Größen der einen Gattung gleich dem Verhältnisse der beiden zugehörigen Größen der andern Gattung in derselben Ordnung genommen.

Wenn zwei Gattungen von Größen so zusammenhängen, dass, wenn die eine Gattung zunimmt, die andere in demselben Verhältnisse kleiner wird, so heißen die beiden Gattungen von Größen verkehrt proportioniert. Z. B. 2 Arbeiter werden zu derselben Arbeit nur halb so viel Zeit, 3 Arbeiter werden nur den 3ten Theil so viel Zeit brauchen als 1 Arbeiter; wenn also die Zahl der Arbeiter 2mal, 3mal so groß wird, so beträgt die Arbeitszeit nur den 2ten, 3ten Theil, so dass die Zeit der Arbeit in demselben Verhältnisse abnimmt, in welchem die Zahl der Arbeiter zunimmt; die Anzahl der Arbeiter und die Zeit der Arbeit sind daher verkehrt proportioniert.

Bei verkehrt proportionierten Größenarten ist das Verhältnis zwischen je zwei Größen der einen Gattung gleich dem Verhältnisse der beiden zugehörigen Größen der andern Gattung, aber in umgekehrter Ordnung genommen.

Um zu beurtheilen, ob zwei Arten von Größen gerade oder verkehrt proportioniert sind, reicht es im Allgemeinen hin, die Größe der ersten Art doppelt so groß anzunehmen, und zu sehen, ob unter übrigens gleichen Umständen die dazu gehörige Größe der andern Art doppelt oder nur halb so groß wird; im ersten Falle sind die beiden Größenarten gerade, im zweiten verkehrt proportioniert.

So sind gerade proportioniert:

Waare und Preis; denn doppelt so viel Waare kostet auch doppelt so viel Geld.

Capital und Zins; doppelt so viel Capital trägt unter übrigens gleichen Umständen auch doppelt so viel Zins.

Zeit und Zins; in doppelt so viel Zeit bekommt man auch doppelt so viel Zins.

Dagegen sind verkehrt proportioniert:

Die Zahl der Arbeiter und die Zeit der Arbeit; denn doppelt so viel Arbeiter brauchen nur halb so viel Zeit.

Die Zahl der zu Nährenden und die Dauer der Lebensmittel; doppelt so viel Personen werden mit denselben Lebensmitteln nur halb so viel Zeit ausreichen.

Capital und Zeit; doppelt so viel Capital braucht nur halb so viel Zeit angelegt zu sein, um denselben Zins zu geben.

Man beurtheile, ob folgende Arten von Größen gerade oder verkehrt proportioniert sind:

1) Arbeitszeit und Lohn;
2) Geschwindigkeit und zurückgelegter Raum;
3) Zeit und zurückgelegter Raum;
4) Zeit und Geschwindigkeit;
5) Gewicht der Last und Frachtlohn;
6) Weite des Weges und Frachtlohn;
7) Gewicht der Last und Weite des Weges;
8) Länge und Inhalt;
9) Breite und Inhalt;
10) Höhe und Inhalt;
11) Länge und Breite bei gleichem Inhalte;
12) Einlage bei einer Unternehmung und Gewinn;
13) Größe der Einlage und die Zeit bei gleichem Gewinne;
14) Zahl der Erben und die Größe des Erbtheils;
15) Preis des Getraides und Gewicht eines Backwerks bei gleichem Preise des letztern.

III. Die einfache Regeldetri.

§. 73.

Wenn zwei Arten von Größen gerade oder verkehrt proportioniert sind, und es sind zwei Zahlen der einen Art gegeben, von den beiden zugehörigen Zahlen der andern Art aber nur eine bekannt, und die andere zu suchen; so heißt eine solche Aufgabe eine Aufgabe der einfachen Regeldetri.

Z. B. 2 Ellen einer Waare kosten 8 Gulden; wie viel Gulden kosten 5 Ellen? 20 Gulden. — Die beiden Arten von Zahlen, welche hier vorkommen, nämlich die Anzahl Ellen und die Anzahl Gulden, sind gerade proportioniert; von der ersten Art sind zwei Zahlen, 2 Ellen und 5 Ellen, gegeben, von der zweiten Art ist nur eine Zahl, 8 Gulden, bekannt, die andere, 20 Gulden, aber zu suchen. Dieß ist also eine Regeldetri-Aufgabe.

§. 74.

1. Jede Regeldetri-Aufgabe kann mit Hilfe einer Proportion aufgelöst werden. Man darf nur das Verhältnis zwischen zwei Zahlen der einen Art dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der andern Art, in derselben oder in umgekehrter Ordnung genommen, gleich setzen, je nachdem die beiden Arten gerade oder verkehrt proportioniert sind, und die so angesetzte Proportion auflösen. Es ist dabei gleichgiltig, in welches Glied die unbekannte Zahl, welche gewöhnlich durch x ausgedrückt wird, zu stehen kommt; am zweckmäßigsten erscheint es, dieselbe sogleich in das erste Glied zu setzen.

Z. B. 4 Meter kosten 22 fl.; wie viel fl. kosten 7 Meter? — Da hier die beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so setzt man das Verhältnis der Gulden $x : 22$ gleich dem Verhältnisse der dazu gehörigen Zahlen der Meter in derselben Ordnung, also gleich $7 : 4$, und hat die Proportion $x : 22 = 7 : 4$, durch deren Auflösung man $x = 38\frac{1}{2}$ fl. bekommt. — Hier erhält man eigentlich die Proportion x fl. : 22 fl. = 7 Meter : 4 Meter; allein bei der Auflösung muß wenigstens das zweite Verhältnis als unbenannt angesehen werden, denn man hätte sonst (nach §. 71, 1) zuerst 22 fl. mit 7 Meter zu multiplicieren, was keinen Sinn hat; es ist aber erlaubt, ein Verhältnis, dessen beide Glieder einerlei Namen haben, als unbenannt hinzustellen, weil z. B. die Verhältnisse 7 Meter : 4 Meter und 7 : 4 denselben Exponenten $1\frac{3}{4}$ haben, und somit das eine von ihnen für das andere gesetzt werden kann. Das erste Verhältnis in der Proportion kann benannt bleiben; denn aus x fl. : 22 fl. = 7 : 4 folgt x fl. = $\frac{22 \text{ fl.} \times 7}{4} = 38\frac{1}{2}$ fl., was keine Ungereimtheit in sich enthält; übrigens ist es am zweckmäßigsten, im Ansatze die Benennungen der Glieder ganz wegzulassen, und dann dem x jenen Namen beizulegen, den das damit gleichartige zweite Glied hat.

Hat man die folgende Aufgabe: 12 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 30 Tagen; wie viel Arbeiter muß man aufnehmen, damit dieselbe Arbeit in 20 Tagen vollendet werde? so muß man, da die beiden Arten von Größen verkehrt proportioniert sind, das Verhältnis der Zahlen der Arbeiter x : 12 dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der Tage in umgekehrter Ordnung genommen, also 30 : 20, gleich setzen; man erhält dadurch x : 12 = 30 : 20, welche Proportion x = 18 gibt.

2. Einfachere Aufgaben der Regeldetri können im Kopfe aufgelöst werden. Dabei wird im Allgemeinen aus der gegebenen Bestimmung für eine Mehrheit auf diejenige für die Einheit geschlossen, und sodann aus der gefundenen Bestimmung für die Einheit wieder die für eine andere Mehrheit gesucht.

Z. B. 9 Metzen Korn kosten 36 fl.; wie viel kosten 7 Metzen? — Wenn 9 Metzen 36 fl. kosten, so kostet 1 Metzen den 9ten Theil von 36 fl., also 4 fl.; 7 Metzen kosten daher 7mal 4 fl. d. i. 28 fl.

6 Arbeiter bringen eine Arbeit in 16 Tagen zu Stande; in wie viel Tagen bringen dieselbe Arbeit 8 Arbeiter zu Stande? — Wenn zu einer Arbeit 6 Arbeiter 16 Tage nöthig haben, so braucht dazu 1 Arbeiter 6mal 16 Tage, also 96 Tage; 8 Arbeiter aber werden nur den 8ten Theil von 96 Tagen d. i. 12 Tage brauchen.

3. Kommen in einer Regeldetri-Aufgabe größere ganze Zahlen, Brüche oder mehrnamige Zahlen vor, so können auch da dieselben Schlüsse, wie beim Kopfrechnen gemacht werden; bloß die Ausrechnung wird schriftlich durchgeführt, und heißt dann die Zweisatzrechnung.

Z. B. 35 Ellen kosten 65 fl.; wie viel kosten 49 Ellen?

$$
\begin{array}{lccl}
35 & \text{Ell.} & \text{kost.} & 65 \text{ fl.} \\
1 & " & " & \frac{65}{35} \; " \\
49 & " & " & \frac{65 \times 49}{35} \text{ fl.} = 91 \text{ fl.}
\end{array}
$$

Wie viel kosten $25\frac{1}{2}$ Hektoliter Wein, wenn $2\frac{1}{5}$ Hektoliter mit $37\frac{9}{50}$ fl. bezahlt werden?

$$
\begin{array}{lccl}
\frac{11}{5} & \text{Hektoliter} & \text{kost.} & \frac{1859}{50} \text{ fl.} \\
\frac{1}{5} & " & " & \frac{1859}{50 \,.\, 11} \; " \\
1 & " & " & \frac{1859 \,.\, 5}{50 \,.\, 11} \; " \\
\frac{1}{2} & " & " & \frac{1859 \,.\, 5}{50 \,.\, 11 \,.\, 2} \text{ fl.} \\
\frac{51}{2} & " & " & \frac{1859 \,.\, 5 \,.\, 51}{50 \,.\, 11 \,.\, 2} \text{ fl.} = 430\frac{19}{20} \text{ fl.}
\end{array}
$$

4. Häufig läßt sich bei der Auflösung von Regeldetri-Aufgaben auch die wälsche Praktik mit Vortheil anwenden.

Z. B. 30 ℔ kosten 23 fl. 20 kr.; wie hoch kommen 23 ℔ 20 Lth.?

30 ℔	fl. 23·2
15 ℔ = $\frac{1}{2}$ von 30 ℔ . .	fl. 11·6
6 „ = $\frac{1}{5}$ „ 30 „ . .	„ 4.64
2 „ = $\frac{1}{3}$ „ 6 „ . .	„ 1·547
16 Lth. = $\frac{1}{4}$ „ 2 „ . .	„ 0·387
4 „ = $\frac{1}{4}$ „ 16 Lth. .	„ 0·097
23 ℔ 20 Lth.	fl. 18·271 = fl. 18„27.

Aufgaben.

§. 75.

1) 6 Ellen Tuch kosten 18 fl.; wie viel kosten 12 Ellen?

Im Kopfe: Wenn 6 Ellen 18 fl. kosten, so kostet 1 Elle den 6ten Theil von 18 fl., also 3 fl.; 12 Ellen werden daher 12mal 3 fl. d. i. 36 fl. kosten. — Oder kürzer: 12 Ellen sind 2mal 6 Ellen, sie werden also auch doppelt so viel kosten als 6 Ellen, also 2mal 18 fl. d. i. 36 fl.

Schriftlich: 6 Ell. 18 fl. $\quad x : 18 = \cancel{12} : \cancel{6}$
12 „ x „ $\quad 2$

$x = 36$ fl.

oder 6 Ell. kosten 18 fl.
1 „ „ $\frac{18}{6}$ „ = 3 fl.
12 „ „ 3 „ $\times 12 = 36$ fl.

2) Ein Knecht hat jährlich 45 fl. Dienstlohn; wie viel kommt auf 5 Monate?

Im Kopfe: Auf ein Jahr kommen 45 fl., auf einen Monat also der 12te Theil von 45 fl. d. i. 3 fl. und 3 Viertelgulden; daher auf 5 Monate 5mal 3 fl. und 5mal 3 Viertelgulden, nämlich 18 fl. 75 kr.

Schriftlich: 12 Mon. 45 fl. $\quad x : 45 = 5 : 12$
5 „ x „ $\quad x = 18\frac{3}{4}$ fl.

3) In einer Mühle werden stündlich 8 Hektoliter Weizen gemahlen; wie lange dauert es, bis 60 Hektoliter gemahlen sind?

Im Kopfe: Um 8 Hektoliter zu mahlen, braucht man 1 Stunde; um 60 Hektoliter zu mahlen, braucht man so viele Stunden Zeit, als wie oft 8 in 60 enthalten ist, nämlich $7\frac{1}{2}$.

Schriftlich: 8 Hektoliter 1 Stunde $\quad x : 1 = 60 : 8$
60 „ x „ $\quad x = 7\frac{1}{2}$ Stunden.

4) Ein Fuhrmann verspricht für ein bestimmtes Frachtgeld 6 Centner 8 Meilen weit zu führen; wie viel Centner wird er für dasselbe Frachtgeld 12 Meilen weit führen?

Im Kopfe: Wenn 8 Meilen weit 6 Ctr. geführt werden, so wird man 1 Meile weit um dasselbe Geld 8mal so viel Ctr., als 48 Ctr. führen; und 12 Meilen weit nur den 12ten Theil so viel Ctr., als 1 Meile weit, nämlich den 12ten Theil von 48 Ctr., d. i. 4 Ctr.

Schriftlich:	6 Ctr.	8 Meil.	$x : 6 = 8 : 12$
	x „	12 „	$x = 4$ Ctr.

5) 16 Maurer können eine Mauer in 20 Tagen aufführen; in wie viel Tagen würde dieselbe Mauer von 10 Arbeitern aufgeführt werden?

Im Kopfe: Wenn 16 Maurer zu einer Arbeit 20 Tage brauchen, so braucht ein Maurer dazu 16mal so viel Zeit, also 320 Tage; 10 Maurer brauchen nur den 10ten Theil von der Zeit, die 1 Maurer braucht, also nur den 10ten Theil von 320 Tagen, d. i. 32 Tage.

Schriftlich:	16 Maurer	20 Tage	$x : 20 = 16 : 10$
	10 „	x „	$x = 32$ Tage.

6) 5 Ctr. Kaffee kauft man um 320 fl.; wie viel Kaffee bekommt man um 32 fl.?

7) Für 10 Ctr. verlangt der Fuhrmann 15 fl. Fracht; wie viel Ctr. wird er für 27 fl. aufladen?

8) Wenn 12 Schnitterinnen einen Acker Weizen in 8 Tagen schneiden; wie viel Schnitterinnen muß man aufnehmen, damit der Weizen in 6 Tagen geschnitten werde?

9) Wie lange können 18 Pferde mit einem Futter auskommen, welches für 12 Pferde auf 9 Wochen bestimmt ist?

10) Ein Manuscript gibt 126 Seiten zu 45 Zeilen; wie viel Seiten wird es geben, wenn auf die Seite nur 35 Zeilen kommen?

11) Um eine Mauer, welche 20 Meter lang ist, aufzuführen, sind 35 Arbeiter erforderlich; wie viel Arbeiter braucht man, damit eine eben so hohe und dicke Mauer, welche aber 28 Meter lang ist, in der nämlichen Zeit vollendet werde?

12) Ein Haus trägt 540 fl. jährlichen Zins; wie viel kommt auf 8 Monate?

13) Eine Familie braucht alle 6 Tage 1 ℔ Kaffee; wie viel Kaffee verbraucht diese Familie in 365 Tagen?

14) Um eine Waare 12 Meilen weit zu verführen, verlangt der Fuhrmann 2 fl.; wie viel wird er fordern, wenn dieselbe Waare 30 Meilen weit verführt werden soll?

15) Jemand zahlt jährlich 280 fl. Mietzins; wie viel kommt auf 11 Monate?

16) Wenn 16 Maurer täglich 12 Stunden arbeiten, so wird eine Mauer in 15 Tagen fertig; in welcher Zeit wird die Mauer fertig, wenn jene Maurer täglich nur 10 Stunden arbeiten?

17) 45 Menschen brauchen für eine Arbeit 24 Tage; wie viel Arbeiter muß man aufnehmen, damit die Arbeit in 15 Tagen vollendet werde?

18) Um eine Wiese abzumähen, braucht man 18 Mäher durch 4 Tage; in wie viel Tagen werden 12 Mäher damit fertig werden?

19) Ein bewegter Körper legt in 14 Minuten 735 Fuß zurück? wie viel in einer Stunde?

20) Auf den Umfang eines Rades gehen 30 Zähne, wenn sie 9 Centimeter von einander entfernt sind; wie viel Zähne gehen darauf, wenn sie 6 Centimeter auseinander stehen?

---

21) Zu einem Dache braucht man 6936 Stück Ziegel, wenn jeder Dachziegel 36 Quadratzoll deckt; wie viel Stück sind erforderlich, wenn jeder Ziegel nur 27 Quadratzoll deckt?

22) 5 Ellen Leinwand werden mit $2\frac{1}{2}$ fl. bezahlt; wie hoch kommen 12 Ellen?

23) 1 Ctr. kostet $25\frac{1}{4}$ fl., wie viel kosten 39 Pfund?

24) Wenn 4 Pfd. $1\frac{17}{25}$ fl. kosten; wie viel Pfund bekommt man für 15 kr.?

25) Wie viel kosten $3\frac{1}{5}$ Ctr., wenn 4 Pfd. für $9\frac{1}{2}$ fl. gekauft werden?

26) Wenn 30 Personen ein Werk in $4\frac{3}{10}$ Monaten vollenden; wie viel Zeit brauchen dazu 9 Personen?

27) Ein Mühlgang mahlt in $3\frac{1}{2}$ Stunden $14\frac{3}{4}$ Metzen Korn; wie viel in $13\frac{1}{4}$ Stunden?

28) Jemand braucht für seinen Unterhalt im Durchschnitte alle 10 Tage $34\frac{3}{4}$ fl.; wie lange wird er mit 792 fl. 30 kr. auskommen?

29) Ein Arbeiter verdient alle 3 Tage $2\frac{1}{2}$ fl.; wie lange muß er arbeiten, um $47\frac{1}{2}$ fl. zu verdienen?

30) Jemand zahlt je 5 Arbeitern zusammen täglich 4 fl. 75 kr., und hat im Ganzen 122 Arbeiter; wie viel beträgt der tägliche Arbeitslohn aller?

31) Eine Familie gibt im Durchschnitte wöchentlich 12 fl. 40 kr. aus; wie viel in 2 Monaten 10 Tagen?

32) 6 Taglöhner graben ein Feld in $4\frac{1}{2}$ Tagen um; wie viel Taglöhner müßen gedungen werden, damit jene Arbeit in 3 Tagen zu Stande komme?

33) Mit einem bestimmten Vorrathe können 20 Menschen $15\frac{3}{4}$ Monate ausreichen; wie lange werden damit 35 Menschen ausreichen?

34) 47 Maß Olivenöl wiegen eben so viel als 43 Maß Wasser; wie viel wiegt eine Maß Olivenöl, wenn eine Maß Wasser 2 Pfd. $16\frac{4}{5}$ Lth. wiegt?

35) Aus einer bestimmten Menge Garn kann der Weber 84 Ellen $\frac{4}{5}$ Ellen breite Leinwand weben; wie viel Ellen $\frac{7}{8}$ Ellen breiter Leinwand kann er daraus erzeugen?

36) Jemand braucht zu einem Kleide $3\frac{1}{4}$ Ellen Tuch, wenn dieses 2 Ellen breit ist; im Tuchladen findet sich aber nur Tuch von $\frac{7}{4}$ Ellen Breite; wie viel Ellen sind nun zu dem Kleide erforderlich?

37) Zur Bekleidung einer Wand hat man 35 Meter Tapeten zu $87\frac{1}{2}$ Centimeter breit gebraucht; als man später diese Wand neu tapezieren läſst, findet man nur Tapeten von 75 Centimeter Breite; wie viel Meter muß man davon nehmen?

38) Ein Garten ist 40 Meter lang und 28 Meter breit; es soll nun ein zweiter Garten um 16 Meter länger werden, aber dieselbe Fläche einschließen; wie groß wird seine Breite sein müßen?

39) Ein Gefäß, welches $2\frac{1}{2}$ Fuß hoch ist, hält 55 Maß; wie hoch muß ein Gefäß von gleicher Weite sein, wenn es 40 Maß halten soll?

40) Eine gleichmäßig ansteigende Straße steigt auf $2\frac{3}{4}$ Meilen $148\frac{1}{2}'$; wie groß ist die Steigung auf $\frac{1}{4}$ Meile?

---

41) Wie viel kosten 3 Loth einer Waare, wovon 1 Pfund 2 fl. 24 kr. kostet?

42) Wie viel kosten 28 Meter 35 Centim., wenn man 16 Met. 725 Millim. für $19\frac{1}{2}$ fl. bekommt?

43) Ein Acker von $55\frac{1}{2}$ $\square^0$ Fläche wird mit $8\frac{2}{5}$ fl. bezahlt; wie hoch kommt ein Joch Ackergrund von gleicher Güte?

44) 7 Loth Quecksilber kosten 26 kr.; wie theuer sind $13\frac{1}{4}$ Pfund?

45) Wenn $11\frac{1}{4}$ Meter Taffet 32 fl. 40 kr. kosten, wie hoch kommen $3\frac{3}{4}$ Meter?

46) Wie viel muß man für $48\frac{5}{8}$ ℔ einer Waare bezahlen, wovon der Centner $66\frac{1}{3}$ fl. kostet?

47) Wenn $1\frac{1}{4}$ Ctr. mit 145 fl. bezahlt wird, wie viel von derselben Waare bekommt man für 87 kr.?

48) $56\frac{7}{8}$ Eimer Wein kosten 834 fl.; wie viel Eimer bekommt man für 1112 fl.?

49) Wenn man für 3 Ctr. $8\frac{1}{2}$ fl. Fracht zahlen muß, wie viel wird die Fracht für $13\frac{3}{4}$ Ctr. betragen?

50) Um $6\frac{1}{4}$ fl. führt ein Fuhrmann eine bestimmte Waare $12\frac{1}{2}$ Meilen weit; wie weit wird er dieselbe um 2 fl. 75 kr. führen?

51) Für $8\frac{1}{4}$ Ctr. wird $6\frac{7}{8}$ fl. Fracht gezahlt; wie viel Ctr. werden für $2\frac{1}{2}$ fl. Fracht aufgeladen?

52) Ein Centner wird um 1 fl. 20 kr. 15 Meilen weit geführt; wie weit um 32 kr.?

53) 20 Schnitter mähen eine Wiese in 4 Tagen ab; es kommen nun noch 4 Schnitter dazu; in wie viel Tagen wird dann die Wiese abgemähet sein?

54) Mit dem Bau einer Eisenbahn können 3000 Arbeiter in 9 Monaten fertig werden; wie viel Arbeiter wird man noch aufnehmen müßen, damit der Bau in 6 Monaten fertig werde?

55) Eine Festung, welche 12000 Mann Besatzung hat, ist auf 10 Monate mit Lebensmitteln versehen; wenn nun 2000 Mann abziehen, wie lange werden jene Lebensmittel für die übriggebliebene Mannschaft ausreichen?

56) In einer Festung liegen 15000 Mann, welche auf 4 Monate Lebensmittel haben; der Commandant will aber damit ein Jahr ausreichen; um wie viel Mann muß er die Besatzung vermindern?

57) Ein Vater hinterläßt bei seinem Absterben 7 Kinder, und vermacht jedem 4500 fl.; nun sterben 3 Kinder ab; wie viel wird auf jedes der übriggebliebenen kommen?

58) Wenn der Metzen Weizen 4 fl. 20 kr. kostet, so wiegt eine Kreuzersemmel $1\frac{1}{2}$ Loth; wie schwer wird eine solche Semmel auszubacken sein, wenn der Preis des Weizens auf 4 fl. 69 kr. steigt?

59) Durch eine von zwei Röhren wird ein Wasserbehälter in $3\frac{3}{4}$, durch die andere in $2\frac{1}{2}$ Stunden gefüllt; die erste Röhre liefert stündlich 4 Hektoliter 90 Liter; wie viel liefert die zweite Röhre in jeder Stunde?

60) Jemand bekommt vier Fässer Zucker, welche zusammen 685 ℔ wiegen; die leeren Fässer wiegen 86 ℔; wie viel Zucker

ist in den Fässern, und wie viel ist er werth, wenn $2\frac{3}{8}$ Ctr. mit $66\frac{1}{2}$ fl. bezahlt werden?

---

61) 480 fl. Capital geben in einer bestimmten Zeit 45 fl. Zins; wie viel Capital muß man anlegen, damit es in derselben Zeit 80 fl. Zins gebe?

62) A hat an B 900 fl. auf 5 Monate geliehen, und zwar ohne Interessen; wie lange muß B an A ein Capital von 1250 fl. borgen, um jene Gefälligkeit auszugleichen?

63) Wie viel Zins gibt ein Capital in $2\frac{3}{4}$ Jahren, wenn es in 4 Monaten 28 fl. trägt?

64) Ein Capital bringt in 2 Jahren 123 fl. 40 kr. Zins; wie viel in 1 Jahre 7 Monaten?

65) 750 fl. Capital geben in einer gewissen Zeit $132\frac{13}{16}$ fl. Interesse; wie viel Interesse geben in derselben Zeit 240 fl. Capital?

66) Wie viel Capital muß man auf $5\frac{2}{5}$ Jahre verleihen, damit man eben so viel Interesse davon erhalte, als von 370 fl. in 9 Jahren?

67) Wie lange muß ein Capital angelegt bleiben, um 414 fl. 70 kr. Interesse einzutragen, wenn es in 1 Monate 15 fl. 95 kr. Interesse gibt?

68) Ein senkrechter Stab, welcher 4·5′ lang ist, wirft einen 6·2′ langen Schatten; wie hoch ist ein Thurm, welcher zu derselben Zeit einen 128′ langen Schatten wirft?

69) Um die Entfernung von der Sonne bis zur Erde, d. i. 21 Millionen Meilen zurückzulegen, braucht das Licht 8 Minuten 7·5 Secunden; in welcher Zeit würde das Licht von dem nächsten Fixsterne bis zu uns gelangen, wenn man diese Entfernung auf den kleinsten möglichen Betrag von 4261000 Millionen Meilen ansetzt?

70) Um an einen Ort in 15 Tagen zu gelangen, muß man täglich $5\frac{1}{4}$ Meilen zurücklegen; in wie viel Tagen wird man dahin kommen, wenn man täglich nur $4\frac{1}{2}$ Meilen macht?

71) A hat einen Weg, indem er täglich 7 Meilen geht, in 6 Tagen zurückgelegt; zur Rückreise braucht er 8 Tage; wie viel Meilen hat er täglich gemacht?

72) Bei einem Wagen hat das Vorderrad $2\frac{1}{2}$ Fuß, das Hinterrad $3\frac{3}{4}$ Fuß im Durchmesser; wenn sich nun das Hinterrad in einer gewissen Zeit 32mal umdreht, wie viele Umdrehungen macht in derselben Zeit das Vorderrad?

73) Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine 48, das andere 32 Zähne; wie oft wird sich das zweite Rad umdrehen, wenn sich das erste 38mal umgedreht hat?

74) Von zwei Rädern soll das eine 200 Umdrehungen machen, während sich das andere 80mal umgedreht hat; wie viel Zähne muß man dem zweiten Rade geben, wenn das erste 26 Zähne hat?

75) Während sich die Erde 201mal um ihre Achse dreht, vollendet die Sonne 8mal ihre Rotation; wie vielmal dreht sich die Sonne in 365 Tagen um ihre Achse?

76) Zwei Personen treten zu einem Geschäfte zusammen, und legen 1200 fl. ein. Wenn nun A 700 fl. eingelegt hat, und das Geschäft einen Gewinn von 480 fl. abwirft, wie viel gewinnt A, wie viel B?

77) Bei einer Unternehmung haben A 2400 fl., B 3000 fl. und C 3600 fl. stehen. Durch einen Unfall erleiden sie einen Schaden von 300 fl.; wie groß ist der Schaden, der jeden einzelnen trifft?

78) Bei einem Geschäfte gewinnt A 900 fl., B 700 fl.; wenn nun A zu diesem Geschäfte 4500 fl. hergegeben hat, wie groß war die Einlage des B?

79) Ein Acker von $6\frac{2}{3}$ Joch gibt einen Ertrag von $68\frac{1}{2}$ Metzen Weizen; a) wie viel Weizen trägt eine Ackerfläche von $3\frac{7}{8}$ Joch? b) auf wie viel Joch erhält man $37\frac{3}{4}$ Metzen Weizen?

80) Wenn ein Rad in 48 Minuten $262\frac{3}{4}$ Umdrehungen macht, a) wie viele Umdrehungen macht es in 2 Stunden 10 Minuten? b) in wie viel Minuten dreht es sich 840mal?

81) 55 Meter sind 174 W. Fuß; a) wie viel W. Fuß sind 253·6 Meter, b) wie viel Meter sind 98′ 3″ W. Fußmaß?

82) 60 Meter = 77 W. Ellen; a) wie viel W. Ellen sind 128·65 Meter, b) wie viel Meter sind $162\frac{3}{4}$ W. Ellen?

83) 1 W. Elle kostet 3 fl. 20 kr.; wie viel kostet 1 Meter desselben Stoffes?

84) 1 Meter kostet 5 fl. 36 kr.; wie viel kostet 1 W. Elle?

85) 61 Hektar = 106 n. ö. Joch; a) wie viel Joch sind 583 Ar, b) wie viel Hektar sind $73\frac{5}{8}$ Joch?

86) 1 Joch Ackergrund kostet 564 fl.; wie hoch kommt 1 Hektar?

87) 1 Hektar Weingartengrund kostet 1250 fl.; wie viel kostet 1 Joch?

88) 91 Hektoliter = 148 W. Metzen; a) wie viel W. Metzen sind 50 Hektoliter, b) wie viel Hektoliter sind $209\frac{7}{16}$ Metzen?

89) 1 W. Metzen Weizen kostet 5 fl. 8 kr.; wie hoch kommt 1 Hektoliter?

90) 1 Hektoliter Korn kostet 7 fl. 50 kr.; wie viel kostet 1 Wiener Metzen?

91) 58 Liter = 41 W. Maß; a) wie viel Maß sind 328 Liter? b) wie viel Liter sind 7 Eimer 28 Maß?

92) 1 W. Maß Wein kostet 48 kr.; wie viel kostet 1 Liter?

93) 1 Liter Bier kostet 18 kr.; wie viel ist 1 Maß werth?

94) 28 Zollpfund = 25 W. Pfund; a) wie viel W. Pfund sind 758 Zollpfund? b) wie viel Zollpfund sind $1304\frac{3}{4}$ W. Pfund?

95) 1 W. Pfund Kaffee kostet 72 kr.; welches ist der entsprechende Preis für 1 Zollpfund?

96) Wenn ein Zollpfund einer Waare 46 kr. kostet, wie viel ist 1 W. Pfund werth?

97) 19 Wiener Metzen enthalten 37 Cubikfuß; wie viel Cubikfuß sind $388\frac{3}{4}$ Metzen?

98) 1000 englische Seemeilen machen 244·52 österreich. Meilen; wie viel österr. Meilen sind $755\frac{1}{2}$ engl. Seemeilen?

99) 46 russ. Tschetwert sind 157 n. ö. Metzen; a) wie viel n. ö. Metzen sind $219\frac{3}{4}$ Tschetwert? b) wie viel Tschetwert sind $1023\frac{5}{8}$ n. ö. Metzen?

100) 20 schweiz. Ohm = 53 n. ö. Eimer; a) wie viel n. ö. Eimer sind 208·23 schweiz. Ohm? b) wie viel schweiz. Ohm sind $344\frac{7}{8}$ n. ö. Eimer?

101) Wie viel Mark 10löthiges Silber geben 24 Mark 13 löthiges Silber?

102) Wie viel Pfund Gold von 900 Tausendtheilen Gehalt geben $6\frac{1}{3}$ Pfund Gold à 720 Tausendtheilen?

103) Zu 12 Mark 13löthiges Silber nimmt man 3 Mark Kupfer; wie viel löthig wird die Legierung sein?

104) Wie viel Kupfer muß man zu 8 Pfund Silber von 720 Tausendtheilen dazuschmelzen, damit die Legierung 540 Tausendtheile Gehalt erhalte?

105) 45 Gulden enthalten 500 Gramm feinen Silbers; wie viel ist ein Gramm feinen Silbers wert?

106) 4824 k. Ducaten enthalten 71 kölnische Mark feines Gold; wie viel Gold enthalten 100 Ducaten?

107) Für eine gewisse Summe erhält man 70 Stück kais. Ducaten, wenn diese zu fl. 5 „ 40 stehen; wie viel Stück wird man für dieselbe Summe bekommen, wenn die Ducaten um 60 kr. im Werte steigen?

108) 45 fl. österr. Währung sind gleich $52\frac{1}{2}$ fl. süddeutscher Währ.; wie viel fl. ö. W. betragen $2358\frac{1}{2}$ fl. südd. Währ.?

109) 13 russ. Silberrubel machen $27\frac{5}{8}$ Hamburger Mark Banco; wie viel Mark Banco sind 2000 Rubel?

110) 9·718 Dollars in den nordamerikanischen Freistaaten sind gleich 51·934 Francs; wie viel Francs betragen 3240 Dollars?

111) Ein Wiener Kaufmann stellt auf Frankfurt einen Wechsel von 2085 fl. südd. Währ. aus; wie viel fl. österr. Währ. wird er dafür beziehen, wenn der Curs auf Frankfurt 97·8 ist (100 fl. südd. Währ. = 97·8 fl. österr. Währ.)?

Ein Wechsel ist eine Urkunde, durch welche sich der Aussteller unter wechselrechtlicher Haftung verpflichtet, eine Summe Geldes an eine bestimmte Person und zu einer bestimmten Zeit entweder selbst zu zahlen oder von einem Dritten zahlen zu lassen.

112) Ein Wiener kauft einen Wechsel auf Hamburg über 7484 Mark 12 Schill. Banco im Curse zu 86 (100 Mark Banco = 86 fl. österr. Währ.); wie viel in österr. Währ. muß er dafür bezahlen?

113) Ein Marseiller Kaufmann schuldet an einen Wiener 3857 fl.; welchen Wechselbetrag in Francs wird der Wiener dafür entnehmen, wenn der Curs auf Marseille 46·65 steht (100 Francs = 46·65 fl. österr. Währ.)?

114) Welcher Curs findet auf London statt (wie viel fl. österr. Währ. für 10 Pfund Sterling), wenn 518 Pfund Sterling 4 Shilling mit 6088 fl. 85 kr. österr. Währ. bezahlt werden?

115) Wie viel kostet ein Staatslos vom Jahre 1854 (Nennwert 250 fl. C. M.) im Course zu 95·5 (95·5 fl. österr. Währ. für je 100 fl. C. M. Nennwert)?

IV. Die Procentrechnung.

§. 76.

Bei verschiedenen Berechnungen des bürgerlichen Lebens pflegt man das Procent, d. i. den Ertrag von 100, zur Grundlage anzunehmen.

Z. B. wie groß ist der Ertrag von 1543 fl. zu 5% (5 Procent), d. i. wie viel kommt auf 1543 fl., wenn man auf je 100 fl. einen Ertrag von 5 fl. rechnet? Man hat

x fl. Ertrag von 1543 fl.	$x : 5 = 1543 : 100$
5 „ „ „ 100 „.	$x = \frac{1543 \times 5}{100}$ fl.

Daraus folgt:

Um den Ertrag einer Summe nach Procenten zu berechnen, multipliciere man die Summe, deren Ertrag gesucht wird, mit dem Procent, und dividiere das Product durch 100.

Aufgaben.

1) Wie viel sind 6% von 550?

$$\frac{550 \times 6}{33{\cdot}00 = 33}$$

2) Wie viel betragen:

a) 3% von 960? b) 5% von 384·2?

c) $4\frac{1}{2}$% von 74? d) $6\frac{1}{4}$% von 7952?

3) 500 fl. Capital sind zu 4% angelegt, d. h. jede 100 fl. Capital geben jährlich 4 fl. Zins; wie viel Zins bezieht man von dem ganzen Capitale?

Im Kopfe: 1 Hundert Capital gibt jährlich 4 fl. Zins, 5 Hundert geben 5mal so viel, also 20 fl.

Schriftlich:

$$\frac{500 \times 4}{20 \text{ fl.}}$$

4) Wie groß ist der jährliche Zins von 2549 fl. zu $4\frac{1}{2}$%?

$$\begin{array}{l} \underline{25\,49 \times 4\frac{1}{2}} \\ 101\,96 \\ \underline{\;\;12\,74{\cdot}5} \\ 114{\cdot}70\,5 = \text{fl. } 114 \text{ ,, } 70{\cdot}5. \end{array}$$

5) Wie viel beträgt der jährliche Zins a) von 825 fl. zu 5%? b) von 3000 fl. zu $5\frac{1}{2}$%?

6) Wie groß ist der jährliche Zins von a) 3754 fl. b) 1849 fl., c) 2475 fl., zu 4%, zu $4\frac{1}{2}$%, zu $4\frac{3}{4}$%, zu 5%, zu $5\frac{1}{2}$%, zu 6%?

7) Ein Wechselschuldner vergleicht sich mit seinem Gläubiger dahin, daß er ihm auf die Forderung von 3600 Thl. $66\frac{2}{3}$% gebe; wie viel wird der Gläubiger erhalten?

8) 100 fl. Capital zu 3% angelegt geben eben so viel Interesse, als ein anderes Capital zu $4\frac{1}{2}$% angelegt; wie groß muß dieses letztere Capital sein?

9) Zu wie viel % muß man ein Capital anlegen, damit es in 7 Jahren eben so viel Zins bringe, als es zu $3\frac{1}{2}$% in 8 Jahren bringen würde?

10) Von welcher Summe geben 6% den Betrag 75 fl.?

100 fl. geben 6 fl. $x : 100 = 75 : 6$
x „ „ 75 „ $x = 1250$ fl.

oder

6 fl. Betrag gehört zur Summe 100 fl.
1 „ „ „ „ „ $\frac{100 \text{ fl.}}{6} = 16\frac{2}{3}$ fl.
75 „ „ „ „ „ $16\frac{2}{3}$ fl. $\times 75 = 1250$ fl.

11) Wie viel Capital muß man zu $4\frac{1}{2}$% anlegen, damit die jährlichen Interessen $127\frac{3}{4}$ fl. betragen?

12) Ein Haus trägt an Wohnzins jährlich 548 fl.; wie groß ist der Wert dieses Hauses, wenn es sich zu 5% verzinset?

13) Wie viel % muß man von 7975 fl. nehmen, um 638 fl. zu erhalten?

x fl. geben 100 fl. $x : 638 = 100 : 7975$
638 „ „ 7975 „ $x = 8$ fl.

oder

zur Summe 7975 fl. gehören 638 fl.
„ „ 1 „ „ $\frac{638}{7975}$ fl.
„ „ 100 „ „ $(\frac{638}{7975} \times 100)$ fl. $= 8$ fl.

Man muß also 8 fl. von 100 fl. d. i. 8% nehmen.

14) Von 1675 fl. hat man in einem Jahre $83\frac{3}{4}$ fl. Interessen eingenommen; wie hoch waren 100 fl. Capital verzinset?

15) Jemand nimmt von 1 fl. Capital jährlich 20 kr. Zins; wie viel % macht dieses?

16) Eine Waare wog beim Empfange 4800 Pfd., nach einiger Zeit wog sie nur 4704 ℔.; wie viel % sind eingetrocknet?

17) In Oesterreich machen die Grundbesitzer 19·5% der Gesammtbevölkerung, welche 35071000 beträgt, aus; wie viel Grundbesitzer gibt es?

18) Wie groß ist die Bevölkerung eines Ortes, wenn 15% derselben 10881 betragen?

19) Von 409 35jährigen Menschen sterben 40% bis zum 60sten Jahre; wie viele erreichen demnach das 60ste Jahr?

20) Rom, die Hauptstadt der katholischen Christenheit, zählte im Jahre 1800 153004, im Jahre 1866 dagegen 210701 Einwohner; um wie viel Procent hat während dieser Zwischenzeit die Bevölkerung Roms zugenommen?

21) Jemand kauft um 6300 fl. Waaren, und gewinnt bei deren Verkaufe 9%; wie viel beträgt der ganze Gewinn?

22) Wenn die Elle Tuch im Einkaufe 3 fl. 20 kr. kostet, wie hoch muß sie im Verkaufspreise gesetzt werden, wenn man 12% gewinnen will?

23) Ein Kaufmann kauft $5\frac{2}{5}$ Ctr. Kaffee für 297 fl. und verkauft den Centner zu $61\frac{3}{5}$ fl.; wie viel % gewinnt er?

24) Eine Waare wiegt sammt dem Behältnisse 2350 Pfd.; wenn nun wegen des Gewichtes des Behältnisses 8% abgezogen werden, wie hoch stellt sich dieses Gewicht?

Das Gewicht einer Waare und des Behältnisses, worin sie sich befindet, heißt das Brutto- oder Sporco-Gewicht, das Gewicht des Behältnisses die Tara und das Gewicht der Waare allein das Netto-Gewicht.

25) Wie viel beträgt die Tara von

a) 738 Pfd. à 5%? b) 1249 Pfd. à $4\frac{1}{2}$%?
c) 648·2 Kilogr. à 6%? d) 216 Pud à $7\frac{1}{4}$%?

26) Eine Waare wiegt Brutto 565 Pfd.; wie viel beträgt a) die Tara à 10%, b) das Netto-Gewicht?

27) Von einer Waare ist das Brutto-Gewicht 2150 Pfd., das Netto-Gewicht 1978 Pfd.; wie viel % beträgt die Tara?

28) Jemand kauft für einen Kaufmann um 4200 fl. Waaren ein, und läßt sich als Vergütung für seine Mühe beim Einkaufe $1\frac{1}{2}$% bezahlen; wie viel beträgt seine ganze Vergütung?

Wenn Jemand die Vollziehung eines Geschäftes, z. B. den Einkauf oder Verkauf von Waaren, einem anderen aufträgt, so heißt die Person, welche diesen Auftrag erhält und vollzieht, der Commissionär, die Vergütung aber, welche dieser für seine Bemühung erhält, Provision.

29) Wie groß ist die Provision à 2% von

a) 758 fl.? b) 1044.54 fl.?
c) 349 Pfd. Sterling? d) 2590 Francs?

30) Für den Einkauf von Waaren im Betrage von 3548 fl. erhält der Commissionär 53 fl. 22 kr. als Provision; zu wie viel % wurde diese berechnet?

31) Wie viel beträgt bei einem Waarenbetrage von 4712 fl. die Sensarie à $\frac{1}{2}$ %?

Zur Abschließung von Geschäften desselben Ortes gibt es beeidete Personen, welche Sensale oder Mäkler heißen. Die Vergütung für ihre Mühe wird Sensarie genannt.

32) Wie groß ist die Sensarie à $\frac{5}{8}$ % von
a) 2348 fl.? b) 1207 fl. 72 kr.

Manchmal wird der Ertrag nach Promille (‰) d. i. nach 1000 berechnet. In diesem Falle muß die Summe, deren Ertrag man sucht, mit dem Promille multipliciert, und das Product durch 1000 dividiert werden.

33) Jemand hat 2‰ von 12560 fl. zu fordern d. i. 2 fl. von je 1000 fl.; wie viel beträgt dieses?

$$\frac{12560 \times 2}{25 \cdot 120} = \text{fl. } 25 \text{ „ } 12.$$

34) Ein Wechselsensal kauft für jemanden um 2500 fl. Staatspapiere ein, und erhält 1‰ Sensarie; wie viel beträgt diese?

35) Ein Haus, dessen Wert auf 18350 fl. geschätzt wurde, wird bei einer Feuer-Versicherungs-Gesellschaft zu $\frac{1}{10}$% assecuriert; wie viel beträgt die Versicherungsprämie?

36) Jemand hat ein jährliches Einkommen von 1645 fl.; wie viel beträgt davon die Einkommensteuer à 7 %?

37) Steiermark hat 3590069 Joch productives Flächenmaß, darunter $1\frac{1}{2}$ % Weingärten; wie viel Joch betragen diese?

38) Zu einem Baue hat man 64800 Ziegelsteine nöthig; wie viel Stück müßen geliefert werden, wenn man für Bruch und Verlust $8\frac{1}{2}$ % rechnet?

39) Wie viel löthig ist ein Silber, dessen Feingehalt 75%, $81\frac{1}{4}$%, 90% beträgt?

40) Wie viel karatig ist ein Gold, dessen Feingehalt $32\frac{23}{36}$%, $76\frac{53}{72}$%, 90% beträgt?

In den vorhergehenden Aufgaben war die Summe, von welcher die Procente berechnet wurden, durchgängig mit der Grundzahl 100 selbst gleichartig. Die Procentrechnung ist in diesem Falle eine Rechnung von Hundert, zum Unterschiede von der Rechnung auf Hundert und in Hundert, welche angewendet wird, wenn die Summe, von welcher das Procent berechnet wird, nicht mit der Grundzahl 100 selbst, sondern bezüglich mit der um das Procent vermehrten oder verminderten Grundzahl 100 gleichartig ist.

41) Wie groß ist der Betrag von 2173 fl. à 6% auf Hundert, d. i. wie viel wird von 2173 fl. berechnet, wenn man von 106 fl. 6 fl. berechnet?

$$x : 6 = 2173 : 106; \; x = 123 \text{ fl.}$$

42) Man berechne die Beträge auf Hundert von

a) 3148 fl. à 5%, b) 958 fl. 25 kr. à 8%,
c) 1507 Thlr. à $4\frac{1}{2}$%, d) $5033\frac{1}{2}$ Mark Banco à 2%.

43) Eine Waare kommt mit Einrechnung von 2% Provision auf 628 fl. 48 kr.; wie viel beträgt die Provision?

44) Jemand zahlte für eine ihm zu $5\frac{1}{2}$% geliehene Summe nach einem Jahre 2143 fl. 32 kr. an Capital und Interessen zurück; a) wie viel betrugen dabei die Interessen, b) wie groß war das Capital?

45) Wie viel % auf Hundert sind 27 fl. von 702 fl.?

46) Jemand, welcher nach einem Jahre 651 fl. zu zahlen hat, will die Zahlung sogleich leisten; wie viel muß ihm bei 5% Zins nachgelassen werden, damit weder dem Gläubiger noch dem Schuldner ein Schaden erwachse?

Hier muß auf Hundert gerechnet werden. Denn 100 fl. jetzt zahlbar haben bei 5% Zins gleichen Wert mit 105 fl. nach einem Jahre zahlbar;

folglich sind auch umgekehrt 105 fl. nach einem Jahre gleich 100 fl. sogleich zahlbar, also sind von je 105 fl. bei contantem Zahlen 5 fl. nachzulassen.

Wenn ein unverzinsliches Capital, ein Waaren- oder Wechselbetrag vor dem festgesetzten Zahlungstermine bezahlt wird, so heißt der Abzug, welcher wegen der Vorausbezahlung bewilligt wird, Discont, Sconto, auch Rabatt.

47) Wie viel beträgt der Discont auf Hundert von

a) 718 fl. à 4%? b) 1371·5 fl. à 2%?

c) 3102 Lire à $3\frac{1}{2}$ %? d) 2660 fl. südd. W. à $\frac{1}{2}$ %?

48) Wie viel würde für die Beträge und Procente der vorhergehenden Aufgabe der Discont vom Hundert betragen?

Wiewohl nach Aufg. 46 der Discont auf Hundert berechnet werden soll, so pflegt man doch bei Waaren- und Wechselbeträgen, da es sich dabei nur um kleinere Zeitabschnitte handelt, für diese aber die Resultate der Rechnung auf Hundert und von Hundert nur unbedeutend abweichen, den Discont allgemein nach der bequemeren Rechnung von Hundert zu berechnen. Wenn daher nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so versteht man unter Discont immer den von Hundert.

49) Jemand kauft um 3456 fl. Waaren auf 3 Monate Zeit; wenn er nun die Zahlung sogleich leistet, wird ihm ein Sconto von $1\frac{1}{2}$ % bewilligt; wie viel beträgt a) der Sconto, b) die contante Zahlung?

50) Wie viel beträgt die Barzahlung eines Waarenbetrages von 1048 fl. 56 kr. nach Abzug von a) 2%, b) $1\frac{3}{4}$ %, c) $1\frac{1}{3}$ % Sconto?

51) Eine Waare kostet bei A 88 kr. mit 5%, bei B 92 kr. mit 7% Sconto; wo ist sie wohlfeiler?

52) Eine Wechselsumme von 658 fl. wird 2 Monate vor der Verfallzeit mit 6% discontiert; a) wie viel beträgt der Discont, b) wie viel hat der Käufer zu bezahlen? (Der Discont für 2 Monate ist 1%.)

53) Wie viel beträgt eine Buchhändlerrechnung von 358 Thalern nach Abzug von 25% Rabatt?

Der Buchhändler-Rabatt, d. i. der Abzug am Ladenpreise der Bücher, wird stets von Hundert gerechnet.

54) Ein Buch kostet Netto 1 Thlr. 20 Ngr.; wie hoch wird der Ladenpreis bei $33\frac{1}{3}$ % Rabatt sein?

55) Wie groß ist der Betrag von 1224 fl. zu 4 % in Hundert, d. h. wie viel werfen 1224 fl. ab, wenn 96 fl. 4 fl. abwerfen?

$$x : 4 = 1224 : 96;\ x = 51 \text{ fl.}$$

56) Wie groß sind die Beträge im Hundert von

a) 982 fl. à $4\frac{1}{2}$ %? b) 692·64 fl. à 5 %?

c) 2805 Francs à 2 %? d) 5177 Mark B. à $3\frac{1}{4}$ %?

57) Für eine verkaufte Waare erhält man nach Abzug von 2 % Provision 2158 fl. 88 kr.; wie viel beträgt die Provision,

58) Jemand zahlte für einen Waarenbetrag, von welchem ihm ein Sconto von $1\frac{3}{4}$ % bewilligt wurde, 1551 fl.; wie groß war a) der Sconto, b) der Waarenbetrag?

59) Jemand zahlte für eine Steuer bei 4 % Nachlass 208 fl. 58 kr.; wie groß war die Steuer?

60) Wenn der Centner einer Waare contant um 27·99 fl. verkauft wird, wie theuer muß er auf Zeit mit $2\frac{1}{2}$ % Sconto verkauft werden?

V. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§. 77.

Wenn eine Art von Zahlen von zwei oder mehreren Arten so abhängt, dass sie mit ihnen einzeln genommen, theils in geradem, theils in verkehrtem Verhältnisse steht, und es ist eine Reihe zusammengehöriger Zahlen aller dieser Arten bekannt, von einer zweiten Reihe zusammengehöriger Zahlen aber eine derselben unbekannt; so heißt die Rechnung, durch welche man diese unbekannte Zahl findet, die **zusammengesetzte Regeldetri**.

1. **Jede zusammengesetzte Regeldetri kann in mehrere einfache zerlegt werden.** Z. B.

Wenn 18 Centner 20 Meilen weit um 24 fl. verführt werden; wie viel Centner werden 30 Meilen weit um 32 fl. verführt?

Man kann diese Aufgabe durch folgende zwei Ansätze der einfachen Regeldetri auflösen:

1) Wenn 18 Centner 20 Meilen weit um 24 fl. geführt werden; wie viel Centner werden 30 Meilen weit um 24 fl. verführt? — Zur Lösung hat man

18 Ctr. 20 Meilen	$y : 18 = 20 : 30$
y „ 30 „	$y = \frac{18 \times 20}{30} = 12$ Ctr.

2) Wenn $\left(\frac{18 \times 20}{30}\right)$ Ctr. 30 Meilen weit um 24 fl. verführt werden; wie viel Centner wird man 30 Meilen weit um 32 fl. führen? — Man hat die Rechnung:

$\frac{18 \times 20}{30}$ Ctr. 24 fl.	$x : \frac{18 \times 20}{30} = 32 : 24$
x „ 32 „	$x = \frac{18 \times 20 \times 32}{30 \times 24} = 16$ Ctr.

Aus dem Ausdrucke $x = \frac{18 \times 20 \times 32}{30 \times 24}$ ersieht man, dass die mit x gleichnamige Zahl 18 Ctr. mit einer der beiden Zahlen einer jeden Art multipliciert, durch die andere Zahl aber dividiert werden müße. Soll aber dieses jedesmal geschehen, so kann man, ohne erst die zusammengesetzte Regeldetri in mehrere Aufgaben der einfachen Regeldetri aufzulösen, sogleich folgern, dass die mit x gleichnamige Zahl, wenn x wegen einer Art von Zahlen größer als die damit gleichnamige Zahl ausfallen soll, mit der größeren von den beiden Zahlen dieser Art zu multiplicieren, und durch die kleinere zu dividieren ist; und umgekehrt, wenn x kleiner ausfallen soll.

Die Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri können daher am bequemsten durch das folgende V e r f a h r e n aufgelöst werden:

Man schreibt die mit x gleichnamige Zahl auf die rechte Seite eines aufrechten Striches und setzt darunter zu beiden

Seiten die Zahlen einer jeden Art gehörig an. Man vergleicht nämlich die Art, zu welcher x gehört, mit jeder andern Art, und beurtheilt, ob wegen dieser Art x größer oder kleiner ausfallen müße, als die mit x gleichnamige Zahl; soll x größer ausfallen, so wird die kleinere Zahl jener Art als Divisor links, und die größere als Factor rechts des Striches gesetzt; soll aber x kleiner ausfallen, so findet das Gegentheil statt. Die Auflösung erfolgt dann nach der Strichrechnung.

Für das vorhergehende Beispiel hätte man folgende Rechnung:

18 Ctr. 20 Meil. 24 fl.
x „ 30 „ 32 „

	~~18~~ Ctr. 2
~~30~~	~~20~~
3 ~~24~~	~~32~~ 4
	16 Ctr.

Um den Ansatz zu machen, vergleicht man die Art von x zuerst mit Meilen, indem man folgert: 20 Meilen weit werden 18 Ctr. geführt, 30 Meilen weit wird man um dasselbe Geld gewiß weniger Centner führen; wegen der Anzahl Meilen wird also x kleiner ausfallen als 18 Ctr., daher schreibt man von den beiden Zahlen der Meilen die größere 30 als Divisor links, und die kleinere 20, mit welcher man multiplicieren soll, rechts. Dann vergleicht man die Art von x auch mit Gulden: um 24 fl. Fuhrlohn kann man 18 Centner führen, um 32 fl. wird man gewiß mehr Ctr. führen können; wegen der Anzahl Gulden wird also x größer ausfallen, man muß daher mit der kleineren Zahl 24 dividieren, und mit der größeren 32 multiplicieren.

2. Jede Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri kann auch nach der **Zweisatzrechnung** aufgelöst werden.

Für die vorhergehende Aufgabe würde sich dabei die Rechnung so stellen:

20	Meil.	weit	um	24 fl.	18	Ctr.
1	„	„	„	24 „	18 . 20	„
1	„	„	„	**1** „	$\frac{18 . 20}{24}$	„
30	„	„	„	1 „	$\frac{18 . 20}{24 . 30}$	„
30	„	„	„	**32** „	$\frac{18 . 20 . 32}{24 . 30}$	„ = 16 Ctr.

Aufgaben.

§. 78.

1) 100 fl. Capital geben in 1 Jahr $4\frac{1}{2}$ fl. Interessen; wie viel Capital muß man anlegen, um in 3 Jahren 837 fl. Interessen zu bekommen?

100 fl. Cap. 1 Jahr $4\frac{1}{2}$ fl. Int.		100 fl. Cap.
x „ „ 3 „ 837 „ „	3	1
	$4\frac{1}{2}$	837
		6200 fl. Cap.

2) Aus 12 ℔ Garn verspricht der Weber 60 Meter Leinwand zu machen, welche $1\frac{1}{2}$ Meter breit sein soll; wie viel Ellen Leinwand wird man von 6 ℔ Garn bekommen, wenn die Leinwand nur $1\frac{1}{4}$ Meter breit ist?

12 ℔ 60 Meter $1\frac{1}{2}$ breit		60 Met.
6 „ x „ $1\frac{1}{4}$ „	12	6
	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$
		36 Met.

3) 8 Pferde brauchen in 15 Tagen 32 Metzen Hafer; wie viel Metzen braucht 1 Pferd in 7 Tagen?

4) Ein Garten, welcher 44 Meter lang und 18 Meter breit ist, wird um 360 fl. verkauft; wie viel wird nach demselben Verhältnisse ein anderer Garten kosten, welcher 68 Meter lang und 22 Meter breit ist?

5) 15 Arbeiter verrichten eine Arbeit in 10 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müßen, damit sie die nämliche Arbeit in 6 Tagen vollenden, indem sie täglich nur 10 Stunden arbeiten?

6) Ein Buch, dessen jede Seite 32 Zeilen zu 45 Buchstaben enthält, hat 240 Seiten; wie viele Buchstaben muß man im Durchschnitte in einer Zeile anbringen, um den Inhalt jenes Buches auf 200 Seiten, deren jede 36 Zeilen enthält, zu bringen?

7) Aus 2000 ℔ Garn erhält man 8 Stück Leinwand à 54 Ellen Länge und $\frac{3}{4}$ Ellen Breite; wie viel ℔ Garn sind

erforderlich, um 6 Stück à 60 Ellen Länge und $\frac{6}{4}$ Ellen Breite weben zu lassen?

8) Zu einem Fußboden braucht man 84 Bretter von 11' Länge und 11'' Breite; wie viele Bretter werden erforderlich sein, wenn die Länge derselben 10' und die Breite 1' beträgt?

9) Auf einem Acker von 150 Meter Länge und 30 Meter Breite können $1\frac{1}{2}$ Hektoliter Weizen gesäet werden; wie lang muß ein 36 Meter breiter Acker sein, um darauf $2\frac{2}{5}$ Hektoliter Weizen säen zu können?

10) Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine 56, das andere 21 Zähne; wenn nun das erste in $2\frac{5}{12}$ Minuten 58 Umläufe macht, wie vielmal dreht sich das zweite Rad in $3\frac{3}{4}$ Minuten um?

11) Zu einer Mauer, welche 15^0 lang, 5^0 hoch und $2\frac{1}{2}'$ dick ist, braucht man 60000 Ziegelsteine; wie viel braucht man von solchen Ziegelsteinen zu einer Mauer, welche 18^0 lang, 8^0 hoch und 3' dick ist?

12) Die Abschrift eines Werkes kann von 6 Schreibern, welche täglich $12\frac{1}{2}$ Stunden schreiben, in 8 Tagen vollendet werden; wie viele Schreiber wird man noch dazu aufnehmen müßen, damit sie mit der Abschrift desselben Werkes in 5 Tagen fertig werden, wo sie täglich nur 12 Stunden schreiben?

13) 4500 Mann haben auf 8 Monate Brot, wenn jeder täglich $2\frac{1}{4}$ ℔ bekommt. Nun kommen 500 Mann dazu; wie viel ℔ wird jeder täglich bekommen, damit das Brot auf $7\frac{1}{2}$ Monate ausreiche?

14) Wenn $5\frac{2}{5}$ Stück einer Waare, von der jedes Stück 18 Meter lang und $1\frac{1}{4}$ Meter breit ist, 742 fl. 30 kr. kosten; wie viel kosten $12\frac{3}{4}$ Stück von einem gleichwertigen Stoff, von welchem jedes Stück 25 Meter lang und $1\frac{1}{5}$ Meter breit ist?

15) Ein Capital gibt zu $5\frac{3}{4}$% in 4 Jahren 7 Monaten 1643 fl. 65 kr. Zins; wie viel Zins gibt dasselbe Capital zu 6% in 2 Jahren 9 Monaten?

16) Welches Capital gibt in 6 Jahren zu 5% eben so viel Zins, als 4250 fl. Capital zu $5\frac{1}{2}$% in 10 Jahren?

17) 750 fl. Capital zu 3% angelegt, bringen in einer gewissen Zeit 78 fl. 75 kr. Zins; zu wie viel % müßen 500 fl. Capital ausstehen, damit sie in der nämlichen Zeit 61 fl. 25 kr. Zins geben?

18) 20 Weber weben in $4\frac{1}{2}$ Wochen, die Woche zu 5 Tagen, den Tag zu 10 Stunden, 150 Stück Tuch, deren jedes 45 Ellen lang und $\frac{6}{4}$ Ellen breit ist; wie viel Stück von 36 Ellen Länge und $\frac{9}{4}$ Ellen Breite werden 25 Weber in 12 Wochen weben, wenn sie wöchentlich 6 Tage, und täglich 12 Stunden arbeiten?

19) 5 Pferde verzehren in 6 Tagen 320 ℔ Heu, und 10 Kühe in 5 Tagen 175 ℔ Heu; wie viel Heu werden 12 Pferde und 18 Kühe in 13 Tagen verzehren?

20) 100 fl. Capital geben in 1 Jahre $4\frac{1}{2}$ fl. Zins; a) wie viel Zins geben 7654 fl. 22 kr. in $2\frac{1}{2}$ Jahren; b) welches Capital gibt in $1\frac{3}{4}$ Jahren 542 fl. 50 kr. Zins; c) in welcher Zeit geben 4800 fl. Capital 540 fl. Zins?

21) $15\frac{1}{2}$ Centner werden $12\frac{1}{4}$ Meilen weit um $12\frac{3}{5}$ fl. geführt; a) wie viel Fuhrlohn wird man bezahlen müßen, damit $37\frac{3}{10}$ Ctr. $22\frac{1}{2}$ Meilen weit geführt werden; b) wie weit werden $20\frac{3}{4}$ Ctr. für $18\frac{1}{2}$ fl. geführt; c) wie viel Ctr. wird der Fuhrmann für $12\frac{7}{10}$ fl. 18 Meilen weit führen?

22) Aus 155 ℔ Garn werden 7 Stück Leinwand gewebt, deren jedes 48 Ellen lang und $\frac{5}{4}$ Ellen breit ist; a) wie viel Stück von 52 Ellen Länge und $\frac{6}{4}$ Breite wird man aus $237\frac{1}{2}$ ℔ Garn weben; b) wie viel ℔ Garn sind erforderlich, um 11 Stück von 45 Ellen Länge und 1 Elle Breite weben zu lassen; c) wie breit wird die Leinwand sein, wenn man aus $160\frac{1}{2}$ ℔ Garn 8 Stück zu 42 Ellen weben will; d) wie viel Ellen wird das Stück enthalten, wenn aus 130 ℔ 6 Stück $\frac{9}{8}$ Ellen breite Leinwand gewebt wird?

VI. Einfache Interessenrechnung.

§. 79.

Berechnung der Zinsen.

Ist z. B. ein Capital von 5380 fl. zu 5 % durch 3 Jahre angelegt, so erhält man die Zinsen für diese Zeit durch die zusammengesetzte Regeldetri; man hat nämlich:

100 fl. Cap.	1 Jahr	5 fl. Zins			5 fl. Zins
5380 „ „	3 „	„ „		100	5380
				1	3

$$\text{also } x = \frac{5380 \times 5 \times 3}{100};$$

d. h. die Zinsen sind gleich dem Producte aus dem Capital, dem Procent und der Zeit dividiert durch 100.

Aufgaben.

1) Wie viel Zins geben 2860 fl. Capital zu 4% in 4 Jahren?

$$x = \frac{2860 \times 4 \times 4}{100} = 457{\cdot}60 \text{ fl.} = \text{fl. } 457 \text{ „ } 60 \text{ kr.}$$

2) Ein Capital von 4321 fl. ist zu $4\frac{1}{2}$ % durch 2 Jahre angelegt; wie viel Zins trägt es?

3) Wie viel Zins bekommt man von 799 fl. 45 kr. zu $5\frac{1}{2}$ % in $2\frac{3}{4}$ Jahren?

4) Wie viel Zinsen geben 750 Francs Capital in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu 5 %?

5) Wie groß ist das Interesse von 1335 fl. 95 kr. in 2 Jahren zu $5\frac{1}{4}$ %?

6) Jemand hat 5238 fl. zu 5 % durch 2 Jahre 9 Monate, und 4855 fl. 35 kr. zu $4\frac{3}{4}$ % durch 3 Jahre 5 Monate ausgeliehen; welches Capital brachte ihm mehr Zinsen, und um wie viel mehr als das andere?

§. 80.

Am kürzesten und einfachsten werden die Zinsen auf Jahre, Monate und Tage nach der wälschen Praktik berechnet, und zwar:

1. Die Zinsen für ein Jahr berechnet man nach der Procentrechnung, indem man das Capital mit dem Procent multipliciert, und das Product durch 100 dividiert.
2. Um die Zinsen für mehrere Jahre zu finden, darf man nur die einjährigen Zinsen mit der Anzahl der Jahre multiplicieren.
3. Die Monate werden als aliquote Theile des Jahres, und die Tage als aliquote Theile des Monates betrachtet, die auf diese Theile entfallenden Zinsbeträge durch die Division bestimmt, und zuletzt zu den Zinsen auf Jahre addiert.

Aufgaben.

1) Wie viel Zins geben 2584 fl. zu 4 % in einem Jahre?

fl. 25 84 zu 4 %

103·36 = fl. 103 „ 36.

2) Wie viel Zins geben in einem Jahre:

a) 739 fl. à 5 %? b) 1346 fl. 60 kr. à 6 %?

c) 905 Thl. à 4 %? d) 2375 Francs à 7 %?

3) Wie groß ist der jährliche Zins von 3680 Thlr. preuß. zu $5\frac{1}{2}$ %?

Thl. 36 80 à $5\frac{1}{2}$ %?

184 00

18 40

202·40 = 202 Thl. 12 Sgr.

4) Jemand hat folgende Capitalien anliegen: bei A 2500 fl. zu $4\frac{1}{2}$ %, bei B 3850 fl. zu 5 %, bei C 4580 fl. zu 6 %; wie viel Zins bringen ihm jährlich alle drei Capitalien?

5) Wie viel Zins geben 2480 fl. zu 6 % in

a) 2 Jahren? b) 3 Jahren? c) 5 Jahren?

6) Wie groß sind die Interessen von 3450 fl. zu $4\frac{1}{3}\%$ in 2 Jahren 8 Monaten?

fl. 34 50 zu $4\frac{1}{3}\%$ in 2 Jahren 8 Monaten
138 00
11 50
149·50 für 1 Jahr
149·50 „ 1 „
49·833 „ 4 Mon. = $\frac{1}{3}$ Jahr
49·833 „ 4 „
398·666 = fl. 398 „ 67.

7) Wie viel Zins geben

a) 1426 fl. à 4% in 6 Monaten?
b) 905 Mark Banco à $4\frac{1}{2}\%$ in 4 Monaten?
c) 2306 Rubel à 6% in 5 Monaten?

8) Ein Capital von 2800 fl. ist zu 4% durch 3 Jahre 11 Monate und 7 Tage angelegt; wie viel Zins wirft es in dieser Zeit ab?

fl. 2800 zu 4% in 3 Jahren 11 Monaten 7 Tagen
112 für 1 Jahr
336 „ 3 Jahre
56 „ 6 Mon. = $\frac{1}{2}$ Jahr
37·333 „ 4 „ = $\frac{1}{3}$ „
9·333 „ 1 „ = $\frac{1}{4}$ von 4 Monaten
1·867 „ 6 Tage = $\frac{1}{5}$ Monat
9·311 „ 1 Tag = $\frac{1}{6}$ von 6 Tagen
440.844 = fl. 440 „ 84.

9) Wie viel Zins geben 4800 fl. Capital zu 6% in 1 Jahr 5 Monaten 20 Tagen?

10) Wie viel Interessen geben 2896 fl. Capital in 2 Jahren 9 Monaten 25 Tagen zu $5\frac{1}{2}\%$?

11) Wie viel Zins geben 7388 fl. 45 kr. zu 5% in 3 Jahren 1 Monat 17 Tagen?

Man berechne noch die Zinsen

12) von 2305 fl. 20 kr. in 2 Jahren 3 Monaten 20 Tagen zu $5\frac{3}{4}$ %;

13) von 3087 fl. in 8 Monaten 19 Tagen zu $4\frac{1}{2}$ %;

14) von 8055 fl. 33 kr. in 1 Monat 25 Tagen zu $4\frac{3}{4}$ %;

15) von 5540 Pfund Sterl. in 23 Tagen zu $5\frac{1}{4}$ %.

§. 81.

Häufig sind die Zinsen eines Capitals bloß für eine bestimmte Anzahl von Tagen zu berechnen. In diesem Falle sucht man zuerst die Interessen zu 6 %, und leitet daraus mittels der wälschen Praktik die Interessen für das gegebene Procent ab.

Sind z. B. die 6 % Interessen von 1357 fl. für 239 Tage zu berechnen, so hat man folgende zusammengesetzte Regeldetri:

100 fl. Cap. 360 Tage 6 fl. Int.
1357 „ „ 239 „ x „ „

$$\begin{array}{r|l} & \cancel{6} \text{ fl. Int.} \\ 100 & 1357 \\ 60\,3\cancel{6}\cancel{0} & 239 \end{array}$$

$$\text{also } x = \frac{1357 \times 239}{1000 \times 6}$$

d. h. die Interessen für eine bestimmte Anzahl Tage zu 6 % werden berechnet, wenn man das Capital mit der Anzahl Tage multipliciert, und das Product zuerst durch 1000 und dann durch 6 dividiert.

Wenn bei den Gulden des Capitals auch Kreuzer vorkommen, so läſst man sie gewöhnlich während der Rechnung weg, vergrößert jedoch, wenn 50 oder mehr als 50 Kreuzer vorhanden sind, die Anzahl der Gulden um 1; sonst werden die Kreuzer als Decimalen von Gulden angesetzt.

Aufgaben.

1) Wie viel Zins geben 3516 fl. zu 6 % in 38 Tagen?

$$\begin{array}{r} 3\,516 \times 38 \\ \hline 28\,128 \\ 105\,48 \\ \hline 133{\cdot}608 : 6 \\ \hline 22{\cdot}268 = \text{fl. } 22\,„\,27. \end{array}$$

2) Wie viel Zins geben zu 6%

a) 5400 fl. in 250 Tagen?

b) 1339 „ in 287 Tagen?

c) 8846 „ in 23 Tagen?

3) Wie viel Interessen geben 780 fl. Capital zu 6% vom 3. April bis 12. August?

Vom 3. April	bis 3. August	sind 4 Mon.	=	120 Tage
„ 3. Aug.	„ 12. „	„		9 „
				129 Tage

$$\begin{array}{r} 78\,0 \times 129 \\ 15\,60 \\ 7\,020 \\ \hline 100\,620 \\ \hline 16{\cdot}77 = \text{fl. } 16\,„\,77. \end{array}$$

4) Wie viel Zins geben fl. 748 „ 36 zu 6% vom 17. August bis 5. October?

5) Wie viel betragen die Interessen von 4560 fl. zu 8% in 57 Tagen?

$$\begin{array}{rl} 45\,60 \times 57 & \\ \hline 228\,00 & \\ 31\,920 & \\ \hline 259{\cdot}920 & \\ \hline 43{\cdot}32 & \text{Int. zu } 6\% \\ 14{\cdot}44 & „\quad „\ 2\% = \tfrac{1}{3} \text{ von } 6\% \\ \hline 57{\cdot}76 & = \text{fl. } 57\,„\,76 \text{ Int. zu } 8\%. \end{array}$$

6) Wie hoch belaufen sich die Interessen von fl. 2344 „ 25 zu 4% in 99 Tagen?

vollständig	mit Weglassung der Kreuzer
234 5·25 . . × 99	234 5 . . × 99
2 3 4525	2 345
232·1 7975	232·155
38·6 9662 à 6%	38·692 à 6%
—12·8 9887 à 2%	ab 12·897 à 2%
25·7 9775 = fl. 25 „ 80.	25·795 = 25 „ 80.

7) Wie viel Interessen geben fl. 9379 „ 19 à 5% vom 3. März bis 4. November?

8) Wie viel Zins bringen 3844 fl.

a) zu 3% in 125 Tagen?
b) zu 5% in 56 Tagen?
c) zu $6\frac{1}{2}$% in 88 Tagen?

9) Wie viel Zins geben 8888 fl. Capital zu 7% vom 25. Mai bis 3. October?

10) Wie hoch belaufen sich die Interessen von 945 fl. zu $5\frac{1}{4}$% vom 14. August bis 7. November?

Man berechne folgende Interessen:

11) von 9379 fl. zu $6\frac{1}{2}$% in 147 Tagen;
12) von 1230 fl. 39 kr. zu $4\frac{1}{2}$% in 305 Tagen;
13) von 4007 Thl. zu $9\frac{1}{2}$% vom 13. Juni bis 27. August;
14) von 983 fl. 72 kr. zu $5\frac{1}{2}$% in 181 Tagen;
15) von 3377 fl. zu 5% vom 20. April bis 15. Juli;
16) von 3025 Mark zu $4\frac{3}{4}$% vom 1. Juli bis 23. Nov.

§. 82.

Berechnung des Capitals.

Ist z. B. die Größe eines Capitals zu finden, welches in 2 Jahren zu 4% 188 fl. Zins trägt, so hat man folgende Regeldetri:

100 fl. Cap. 1 Jahr 4 fl. Zins			100 fl. Cap.
x „ „ 2 „ 188 „ „		2	1
		4	188

$$\text{also } x = \frac{188 \times 100}{4 \times 2},$$

d. h. das Capital ist gleich den 100fachen Zinsen, dividiert durch das Product aus dem Procent und den Jahren.

Aufgaben.

1) Jemand bezieht in 3 Jahren 556 fl. als Zins; wie groß ist das Capital bei 6 %?

$$x = \frac{556 \times 100}{6 \times 3} = 3088{\cdot}888 \text{ fl.} = \text{fl. } 3088 \,\text{„}\, 89.$$

2) Welches Capital gibt zu 5 % in 2 Jahren 586 fl. Zins?

3) Jemand bezieht jährlich 330 fl. als 6 % Zins; wie groß ist das Capital?

4) Wie groß muß das Capital sein, welches zu $4\frac{1}{2}$ % in $6\frac{1}{2}$ Jahren 320 Thl. Zins bringen soll?

5) Welches Capital wird zu $4\frac{1}{2}$ % in 3 Jahren ein Interesse von 837 Francs abwerfen?

6) Wie groß muß das Capital sein, welches zu $5\frac{1}{4}$ % in 2 Jahren 7 Monaten 398 fl. 58 kr. Zins gibt?

§. 83.

Berechnung der Zeit.

Ist z. B. die Anzahl Jahre zu suchen, in welcher ein Capital von 3800 fl. zu 6 % 684 fl. Zinsen gibt, so hat man,

100 fl. Cap. 1 Jahr 6 fl. Zins			1 Jahr
3800 „ „ x „ 684 „ „		3800	100
		6	684

$$\text{also } x = \frac{684 \times 100}{3800 \times 6}$$

d. h. die Zeit in Jahren ist gleich den 100fachen Zinsen, dividiert durch das Product aus dem Capital und dem Procent.

Aufgaben.

1) In welcher Zeit geben 4700 fl. Capital zu $4\frac{1}{2}$ % 423 fl. Zins?

$$x = \frac{423 \times 100}{4700 \times 4\frac{1}{2}} = 2 \text{ Jahre.}$$

2) Wie lange muß ein Capital von 6520 fl. zu 5 % ausstehen, um 320 fl. Interessen zu geben?

3) In wie viel Zeit geben 3541 Thl. Capital zu 4 % ein Interesse von 352 Thl.?

4) Wie lange müßen fl. 5244 „ 55 zu $5\frac{1}{4}$ % angelegt bleiben, damit sie fl. 956 „ 3 Zins bringen?

5) Wie lange muß ein Capital von 5460 Thl. zu $5\frac{1}{2}$ % angelegt bleiben, um 365 Thl. Zins zu bringen?

6) In wie viel Zeit tragen 6580 fl. 50 kr. Capital zu $4\frac{3}{4}$ % 849 fl. 82 kr. Zins?

§. 84.

Berechnung des Procentes.

Es sei z. B. zu bestimmen, zu wie viel % man 3460 fl. Capital anlegen müße, damit es in 3 Jahren 519 fl. Zins abwerfe. Nach der zusammengesetzten Regeldetri hat man:

x fl. Zins	100 fl. Cap.	1 Jahr		519 fl. Zins
519 „ „	3460 „ „	3 „	3460	100
			3	1

$$\text{also } x = \frac{519 \times 100}{3460 \times 3}$$

d. h. das Procent ist gleich den 100fachen Zinsen, dividiert durch das Product aus dem Capital und der Anzahl Jahre.

Aufgaben.

1) Zu wie viel % muß ein Capital von fl. 3250 angelegt werden, damit es in 3 Jahren fl. 420 Interesse gebe?

$$x = \frac{420 \times 100}{3250 \times 3} = 4\%.$$

2) Jemand leihet 16000 aus; wie viel % muß er verlangen, um davon ein jährliches Einkommen von 900 fl. zu genießen?

3) Zu wie viel % geben 4240 Rubel Capital in $3\frac{1}{2}$ Jahren 848 Rubel Zins?

4) 7840 fl. 50 kr. bringen in 1 Jahr 6 Mon. 705 fl. 65 kr. Zins; zu wie viel % geschieht die Verzinsung?

5) Zu wie viel % muß man 9110 fl. anlegen, damit sie vom 2. Mai bis 15. October 206 fl. 23 kr. Zins bringen?

§. 85.

Berechnung des Wertes einer Geldsumme nach einer bestimmten Zeit.

Um den Wert eines Capitals nach einer bestimmten Zeit zu finden, berechne man die Zinsen davon für diese Zeit, und addiere sie zu dem gegebenen Capitale; oder man suche unmittelbar den ganzen Belauf, indem man zuerst ausmittelt, wie viel 100 fl. sammt den Zinsen nach jener Zeit betragen werden, und dann die Regeldetri anwendet.

Aufgaben.

1) Auf einem Gute lastet eine Schuld von 8500 fl.; nach 2 Jahren zahlt der Besitzer die Schuld und die $5\frac{1}{2}$ % Interessen; wie viel muß er zahlen?

8500 à $5\frac{1}{2}$ %		
425		
42·5	Capital	fl. 8500
467·5 für 1 Jahr	Int. für 2 Jahre	„ 935
935 fl. für 2 Jahre	Belauf nach 2 Jahren	fl. 9435;

oder:

100 fl. geben zu $5\frac{1}{2}$ % in 2 Jahren 11 fl. Zins, folglich betragen 100 fl. sammt Zinsen nach 2 Jahren 111 fl.; man hat daher

100 fl. Cap. 111 fl. Belauf $\qquad x : 111 = 8500 : 100$
8500 „ „ „ „ „ $\qquad x = 9435$ fl.

2) Jemand nimmt 2560 fl. auf 6 Monat zu 5 % auf Zinsen; wie viel wird er nach Verlauf dieser Zeit zu zahlen haben?

3) Ein Kaufmann hatte eine Summe von 4108 fl. am 20. October zu zahlen, leistete aber die Zahlung erst am 31. December; wie viel hatte er da bei 6 % Zins zu bezahlen?

vom 20. Oct. bis 20. Dec. sind 60 Tage
„ 20. Dec. „ 31. „ „ 11 „
zusammen 71 Tage

4108 × 71		
28756	Schuld am 20. Oct.	fl. 4108
291·668	Int. für 71 Tage	„ 48 „ 61
48·611	Belauf am 31. Dec.	„ 4156 „ 61

Nach der Regeldetri würde sich dieses Beispiel minder bequem ausarbeiten lassen.

4) Jemand nimmt 1580 Thl. auf 22 Tage zu 6 % auf Zinsen; wie viel wird er nach Verlauf dieser Zeit zu zahlen haben?

5) Wenn 2518 fl. 24 kr. südd. Währ. durch 2 Jahre 5 Monate zu $5\frac{1}{4}$ % ausstanden, wie viel muß dann an Capital und Zins zurückgezahlt werden?

6) A hatte an B zu zahlen:
am 5. Juli fl. 2325 „ 82,
am 27. Sept. „ 978 „ 39,
am 19. Nov. „ 1815 „ 40;
dagegen hatte B an C zu bezahlen:
am 13. Aug. fl. 1546 „ 6,
am 5. Dec. „ 2410 „ —.

Am 31. December werden die gegenseitigen Schulden mit 5 % Zins ausgeglichen; wie viel hat da A an B zu bezahlen?

§. 86.

Berechnung des Wertes eines Geldbetrages vor einer bestimmten Zeit.

Um den Wert eines Geldbetrages vor einer bestimmten Zeit mit Rücksicht auf die gewöhnlichen Zinsen zu berechnen, bestimme man zuerst den Wert, den 100 fl. mit den Zinsen in jener Zeit erhalten, und wende dann die Regeldetri an.

Aufgaben.

1) Für ein Capital, welches durch 3 Jahre zu $5\frac{1}{2}$ % ausgestanden ist, erhält man an Capital und Zinsen 5359 fl.; wie groß war das Capital?

100 fl. betragen sammt den $5\frac{1}{2}$ % Zinsen nach 3 Jahren $116\frac{1}{2}$ fl.; man hat also

100 fl. Cap. $116\frac{1}{2}$ fl. Cap. mit Zins
x „ „ 5359 „ „ „ „

$$x : 100 = 5359 : 116\tfrac{1}{2}$$

also $x = 4600$ fl.

2) Jemand hat nach 4 Monaten 5240 fl. zu bezahlen, er wünscht aber seine Schuld sogleich zu berichtigen. Wie viel wird die contante Zahlung betragen, wenn man 6 % Zins rechnet?

3) Wie viel sind 850 fl., welche nach 2 Jahren bezahlt werden sollen, bei 5 % Zins jetzt wert?

4) Jemand zahlt für ein durch 6 Jahre benütztes Capital sammt den $5\frac{1}{2}$ % Zinsen fl. 452 „ 20 zurück; wie groß war das ursprüngliche Capital?

5) A soll an B nach 5 Jahren 1245 Francs bezahlen; wie viel hätte er bei $5\frac{1}{4}$ % nach 2 Jahren zu zahlen?

6) A bietet für ein Haus entweder 8410 fl. bar, oder 8785 fl. nach 9 Monaten zahlbar. Wenn nun der Verkäufer das Geld zu 5 % ausleihen kann; welches Anbot ist für den Käufer, und welches für den Verkäufer vortheilhafter?

VII. Die Terminrechnung.

§. 87.

Wenn eine Geldsumme theilweise in verschiedenen Zeitfristen oder Terminen zahlbar ist, so nennt man das Verfahren, durch welches ermittelt wird, zu welcher Zeit statt der ratenweisen Zahlungen das ganze Capital auf einmal abgetragen werden kann, ohne daß dabei der Schuldner oder der Gläubiger einen Nachtheil habe, die Terminrechnung.

Bei dieser Rechnung werden einfache Zinsen zu Grunde gelegt, und man kann demnach sagen: 500 fl. geben in 4 Jahren eben so viel Interesse, als 4 × 500 fl. in 1 Jahre; oder 700 fl. geben in 8 Monaten eben so viel Zins, als 8 × 700 fl. in 1 Monate.

Es sei nun folgende Aufgabe zu lösen. A hat ein Haus um 8000 fl. unter der Bedingung gekauft, daß die Zahlung in mehreren Terminen ohne Zins und zwar in folgender Weise geleistet werden soll: 3500 fl. nach 2 Monaten, 2000 fl. nach 3 Monaten, 1500 fl. nach 4 Monaten und 1000 fl. nach

5 Monaten; wenn nun A die ganze Kaufsumme auf einmal bezahlen will, wann muß dies geschehen?

Wenn die einzelnen Zahlungen in den festgesetzten Terminen gemacht werden, so genießt A die Zinsen

von	3500 fl.	auf	2 Mon.	oder von	2 × 3500 = 7000 fl.	auf	1	Mon.
„	2000 „	„	3 „	„ „	3 × 2000 = 6000 „	„	1	„
„	1500 „	„	4 „	„ „	4 × 1500 = 6000 „	„	1	„
„	1000 „	„	5 „	„ „	5 × 1000 = 5000 „	„	1	„
				also	zusammen von 24000 fl.	„	1	„

A wird daher die Zahlung der ganzen Sume von 8000 fl. so lange zurückhalten dürfen, bis die von derselben eingebrachten Zinsen gerade so viel betragen, als die Zinsen von 24000 fl. in 1 Monate, auf welche er bei der bedungenen Zahlungsweise das Recht hat. Damit nun 8000 fl. eben so viel Zinsen bringen, als 24000 fl. in 1 Monate, müßen sie so viele Monate angelegt bleiben, als wie oft 8000 fl. in 24000 fl. enthalten ist, somit durch 3 Monate. Die ganze Kaufsumme von 8000 fl. müßte also nach 3 Monaten gezahlt werden.

Um also den mittleren Zahlungstermin mehrerer Ratenzahlungen zu finden, multipliciert man jede Terminzahlung mit der Zeit, nach welcher sie geleistet werden soll, und dividiert die Summe dieser Producte durch die Summe aller Terminzahlungen; der Quotient zeigt den mittleren Termin an.

Aufgaben.

1) Wenn jemand 400 fl. nach 3, 500 fl. nach 6, und 600 fl. nach 8 Monaten bezahlen sollte, nach wie viel Monaten müßte die ganze Summe zugleich bezahlt werden?

400 fl.	nach	3	Monaten	= 1200
500 „	„	6	„	= 3000
600 „	„	8	„	= 4800
1500				9000

9000 : 1500 = 90 : 15 = 6 Mon.

2) Eine Summe von 10000 fl. ist in 4 Terminen zu bezahlen, und zwar: 3000 fl. nach 4 Monaten, 2500 fl. nach 6 Monaten, 2000 fl. nach 8 Monaten, und der Rest nach 1 Jahre. Wenn nun die ganze Summe auf einmal erlegt werden soll, wann wird dieses geschehen?

3) Jemand hat 6000 fl. sogleich, 4500 fl. nach 4 Monaten, 4500 fl. nach 8 Monaten, 4500 fl. nach 12 Monaten und 4500 fl. nach 16 Monaten zu entrichten. Wann wird die Zahlung geschehen müßen, wenn sie auf einmal geleistet werden soll?

4) Jemand soll 800 fl. in 4 Jahren bezahlen, und zwar am Ende eines jeden Jahres 200 fl. Er wünscht aber die ganze Schuld auf einmal zu tilgen; wann wird dieses geschehen müßen?

200	fl. nach	1	Jahre	=	200
200	„ „	2	Jahren	=	400
200	„ „	3	„	=	600
200	„ „	4	„	=	800
800					2000

20,00 : 8,00 = $2\frac{1}{2}$ Jahr.

Wenn die Terminzahlungen gleich groß sind, so erhält man den mittlern Zahlungstermin kürzer, wenn man nur die Zeiten addiert und die Summe durch die Anzahl der Terminzahlungen dividiert. In dem letzten Beispiele hätte man:

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $10 : 4 = 2\frac{1}{2}$ Jahr.

5) A kauft einen Garten für 1200 fl., wovon er sich nach je 3 Monaten 240 fl. zu zahlen verpflichtet. Wann müßte er die ganze Summe auf einmal entrichten?

6) Jemand hat 6000 Lire in drei gleich großen Raten zu zahlen, und zwar je 2000 Lire nach 1, nach 4, nach 10 Monaten; wann wird die Zahlung erfolgen, wenn er die ganze Summe auf einmal abtragen soll?

7) Jemand ist 900 fl. schuldig und zwar soll er 225 fl. nach 4, 150 fl. nach 6, 300 fl. nach 9, und den Rest nach

12 Monaten entrichten. Wenn nun die Summe auf einmal bezahlt werden soll, wann muß dieses geschehen?

8) A ist vertragsmäßig verpflichtet, 4800 Thl. sogleich, 2000 Thl. nach 1 Jahre, und 2200 Thl. nach 15 Monaten zu zahlen; wann kann er diese ganze Schuld auf einmal tilgen?

9) Es hat jemand nach und nach folgende Zahlungen zu leisten: den 17. März 250 fl., den 13. Juli 300 fl., den 21. August 400 fl., den 7. October 250 fl. und den 18. December 500 fl. An welchem Tage kann er statt dessen diese sämmtlichen Posten auf einmal abtragen? (Man berechne hier die einzelnen Zeiten vom 31. December angefangen, von welchem Zeitpunkt an dann auch das Resultat zu nehmen ist.)

10) Am 18. Mai erhält ein Commissionär folgende Wechsel zum Eincassieren zugesendet: 600 Thl. zahlbar nach 36 Tagen 800 Thl. zahlbar nach 45 Tagen und 400 Thl. zahlbar nach 60 Tagen. An welchem Tage wird er seinem Committenten die Summe derselben gutschreiben?

11) A ist an B zu zahlen schuldig: 200 fl. sogleich, 300 fl. nach 5 Monaten, 450 fl. nach 8 Monaten, 300 fl. nach 11 Monaten, 600 fl. nach 15 Monaten und 400 fl. nach 20 Monaten. Dagegen ist B an A zu zahlen schuldig: 350 fl. nach 3 Monaten, 500 fl. nach 7 Monaten und 600 fl. nach 1 Jahre. Nun wollen beide mit einander abrechnen und es soll der Rest auf einmal abgezahlt werden; wie viel beträgt der Rest, und wann muß seine Zahlung erfolgen?

VIII. Die Kettenrechnung.

§. 88.

Die **Kettenrechnung** wird angewendet, wenn aus einer bekannten Zahl einer Art die zugehörige unbekannte Zahl einer andern Art durch Hilfe einer oder mehrerer Mittelbestimmungen gefunden werden soll.

Z. B. Wie viel Kreuzer österr. Währung kosten 4 Loth von einer Waare, wovon $7\frac{1}{2}$ ℔ auf $4\frac{2}{5}$ Vereinsthaler kommen?

Um hier den zu 4 Loth gehörigen Preis in kr. öst. Währ. zu finden, muß man nebst der Angabe, daſs $7\frac{1}{2}$ ℔ $4\frac{2}{5}$ Vereinsthaler kosten, noch folgende Mittelbestimmungen zu Hilfe nehmen: 1 ℔ hat 32 Loth, 1 Vereinsthaler gilt 150 Kreuzer österr. Währ.; und die vollständige Aufgabe läſst sich dann in folgende Kettenverbindung bringen:

kr. ö. W. x kosten 4 Loth
wenn Loth 32 . . . . 1 ℔ machen,
wenn ℔ $7\frac{1}{2}$ . . . . $4\frac{2}{5}$ Vereinsthaler kosten,
und wenn Vereinsthl. 1 . . . . 150 kr. ö. W. gilt.

In diesem Ansatze hat jede Zahl auf der rechten Seite mit der links stehenden gleichen Wert; jede Zahl auf der linken Seite ist mit der nächstvorhergehenden auf der rechten Seite gleiches Namens und gleicher Natur, und die letzte Zahl rechts ist mit der ersten Zahl links d. i. mit x gleichnamig. Auf diese Art hängen alle Zahlen des Ansatzes wie die Glieder einer Kette zusammen.

Jede Kettenrechnung kann durch wiederholte Anwendung der einfachen Regeldetri ausgeführt werden. Für das frühere Beispiel hätte man folgenden Rechnungsgang:

1) Wie viel ℔ sind 4 Loth, wenn 32 Loth 1 ℔ ausmachen?

y ℔ 4 Loth $\qquad y : 1 = 4 : 32$

1 „ 32 „ $\qquad y = \frac{4 \times 1}{32} = \frac{1}{8}$ ℔

2) Wenn $7\frac{1}{2}$ ℔ $4\frac{2}{5}$ Vereinsthl. kosten, wie hoch kommen $\frac{4 \times 1}{32} = \frac{1}{8}$ ℔?

$7\frac{1}{2}$ ℔ $4\frac{2}{5}$ V. Thl. $\qquad z : 4\frac{2}{5} = \frac{4 \times 1}{32} : 7\frac{1}{2}$

$\frac{4 \times 1}{32}$ „ z „ $\qquad z = \frac{4 \times 1 \times 4\frac{2}{5}}{32 \times 7\frac{1}{2}} = \frac{11}{150}$ V. Thl.

3) Wie viel kr. ö. W. betragen $\frac{4 \times 1 \times 4\frac{2}{5}}{32 \times 7\frac{1}{2}} = \frac{11}{150}$ V. Thl., wenn 1 V. Thl. 150 kr. ö. W. gilt?

$$\begin{array}{ll} x \text{ kr. ö. W.} & \frac{4 \times 1 \times 4\frac{2}{5}}{32 \times 7\frac{1}{2}} \text{ V. Thl.} \\ 150 \quad " & \qquad 1 \quad " \end{array}$$

$$x : 150 = \frac{4 \times 1 \times 4\frac{2}{5}}{32 \times 7\frac{1}{2}} : 1$$

daher:

$$x = \frac{4 \times 1 \times 4\frac{2}{5} \times 150}{32 \times 7\frac{1}{2} \times 1} = 11 \text{ kr. ö. W.}$$

Es ist nun nicht nöthig, bei solchen Aufgaben alle diese weitläufigen Rechnungen durchzuführen. Vergleicht man nämlich den gefundenen Ausdruck $x = \frac{4 \times 1 \times 4\frac{2}{5} \times 150}{32 \times 7\frac{1}{2} \times 1}$ mit der oben in die Kettenverbindung gebrachten Aufgabe, so sieht man, daß x gleich ist dem Producte aller rechts stehenden Zahlen dividiert durch das Product aller links erscheinenden bekannten Zahlen. Zieht man daher bei dem obigen Kettensatze zwischen beiden Reihen von Zahlen einen aufrechten Strich, so kann der Wert von x sogleich aus dem Kettenansatze nach der gewöhnlichen Strichmethode gefunden werden.

Für die Kettenrechnung hat man daher Folgendes zu beobachten:

Man bilde zuerst den Kettenansatz. Zu diesem Ende schreibt man x mit seiner Benennung auf die linke Seite eines aufrechten Striches, und rechts die bekannte Zahl, deren Betrag gesucht wird; darunter setzt man alle Mittelbestimmungen, und zwar fängt man jedesmal links mit einer Zahl an, welche mit der nächstvorhergehenden Zahl auf der rechten Seite völlig gleichen Namen und gleiche Natur hat, und rechts neben jede Zahl kommt diejenige Zahl zu stehen, welche mit ihr gleichen Wert hat; die Kette muß mit einer Zahl schließen, die mit x gleichnamig ist. Die Auflösung der angesetzten Kette erfolgt nach der Strichrechnung.

Aufgaben.

1) Wie viel Wiener Centner machen 317 Londner Centner, wenn 100 Londn. Pfund = 81 Wien. Pfund sind, und wenn 1 Londn. Centner 112 Londn. Pfund enthält?

Wien. Ctr.	x	317 Londn. Ctr.
Londn. Ctr.	1	112 Londn. ℔
Londn. ℔	100	81 Wien. ℔
Wien. ℔	100	1 Wien. Ctr.

x = 297·5824 W. Ctr.

Man beginnt die Kette mit der Frage: x Wien. Ctr. machen 317 Londn. Ctr., indem man jene Zahl links, diese rechts des Striches schreibt. Da man mit Londn. Ctr. aufhört, so muß die folgende Mittelbestimmung mit Londn. Ctr. anfangen; dieß geschieht, indem man ansetzt: wenn 1 Londn. Ctr. 112 Londn. Pfd. gibt. Hier hört man rechts mit Londn. Pfd. auf, daher muß man wieder links mit Londn. Pfd. anfangen; man sagt: wenn 100 Londn. Pfd. 81 Wien. Pfd. machen. Man hört hier mit Wien. Pfd. auf; da aber x Wien Ctr. bedeutet, so muß man noch die Mittelbestimmung zu Hilfe nehmen: wenn 100 Wien. Pfd. 1 Wien. Ctr. geben.

Weil bei der Regeldetri höchstens das Verhältnis, in welchem x vorkommt, während der Rechnung als benannt betrachtet werden kann, und der Kettensatz eigentlich nichts anderes ist als die Zusammenfassung mehrerer Regeldetri-Ansätze, so folgt, dass man auch beim Kettensatze während der Rechnung nur x und die damit gleichnamige Zahl als benannt betrachten dürfe, wenn auch in dem Ansatze wegen der leichtern Anordnung auch den übrigen Zahlen ihre Benennung beigesetzt wird.

2) Wie viel kosten 2 Ctr. Quecksilber, wenn man 4 Loth um 12 kr. bekommt?

3) Jemand gibt für 4 Ctr. einer Waare 42 fl.; wie hoch kommt 1 ℔ davon zu stehen?

4) Jemand hat von seinem Freunde 20 Metzen Weizen geborgt, und will ihm statt des Weizens Wein zurückstellen. Wenn nun 1 Metzen Weizen 4 fl. 20 kr., der Eimer Wein aber 16 fl. kostet; wie viel Eimer Wein müßen für 20 Metzen Weizen gegeben werden?

5) Wie viel wiegt 1 Maß Wasser, da ein Cubikfuß Wasser $56\frac{3}{8}$ Pfd. wiegt und 1 Eimer = 1·792 Cubikfuß ist?

6) Wie viel Hektoliter enthält ein englischer Quarter, wenn 1 Hektoliter $5041\frac{1}{5}$ und 1 Quarter $14654\frac{1}{3}$ alte Pariser Cubikzoll hat?

7) Wie viel in ö. W. kostet 1 Wien. ℔, wenn 100 Zoll-Pfund in Hamburg mit $18\frac{1}{8}$ Mark Banco bezahlt werden? (100 W. ℔. = 112 Zoll ℔, 100 Mark B. = 86 fl. ö. W.)

8) Wie viel kostet 1 Loth Seide in Wien, wenn 1 Gramm in Frankreich 7 Centimes kostet, und wenn 500 Gramm = 1 Zoll ℔, 100 W. ℔ = 112 Zoll ℔ und 100 Francs = $46\frac{1}{2}$ fl. ö. W. sind?

9) In Aegypten kostet 1 Ardeb Weizen 92 Piaster; wie viel macht das in unserm Maße und Gelde, wenn 100 Ardeb = 223 Triester Star, wenn 5 Tr. Star = 6 Wien. Metzen, und wenn 100 Piaster = $8\frac{1}{2}$ fl. sind?

10) Eine Goldstange wiegt 6 Mark 5 Loth, und hat an Feingehalt $20\frac{1}{4}$ Karat; wie viel ist der Betrag davon in ö. W. zu 390 fl. per Mark fein?

11) Ein neuer österr. Gulden enthält 900 Tausendtheile feines Silber; wie viel Gramm wiegt er, wenn 45 Gulden 500 Gramm feinen Silbers enthalten?

12) Wie viel wiegen 36 Cubikfuß Eisen, wenn 1 Cubikfuß Eisen so viel wiegt als $7\frac{1}{2}$ Cubikfuß Wasser, und wenn 1 Cubikfuß Wasser $56\frac{3}{8}$ ℔ wiegt?

13) In England wiegen die Eisenbahnschienen 57 Pfund Adp. pr. Yard; wie viel Kilogramm gibt dieses auf ein Meter? (100 ℔ Adp. = $45\frac{9}{25}$ Kilogr., 10 Yard = $9\frac{1}{7}$ Met.)

14) Jemand kauft in Hamburg 3751 ℔ Kaffee um 1713 Mark Banco; wie viel Gulden ö. W. kostet ein Wiener Centner, wenn 112 Hamb. ℔ = 100 Wien. ℔, und wenn 100 Mark Banco = $76\frac{2}{5}$ fl. ö. W. sind?

15) Ein Pud Silber kostet in Rußland 825 Silberrubel; wie viel Francs kostet nach diesem Verhältnis ein Kilogramm in Frankreich? (1 Pud = 29.25 W. ℔, 56 Kilogramm = 100 W. ℔, 162 Francs = $40\frac{1}{2}$ Silberrubel.)

16) Wie viele alte österr. Zwanziger, von denen 60 auf eine köln. Mark fein Silber gehen, wiegen 1 Zollpfund, wenn sie $9\frac{1}{3}$ Loth fein sind? (1 Mark = 233·87 Gramm.)

17) Wie viele kais. Ducaten sind gleich einer Krone, da 1 Krone 10 Gramm feines Gold enthält, und aus einer köln. Mark (233·87 Gramm) $23\frac{2}{3}$ Karat feines Gold 67 Ducaten geprägt werden?

18) Wie viele Kronen können aus $22\frac{1}{2}$ köln. Mark Gold, welches $21\frac{1}{3}$ karatig ist, geprägt werden?

19) Ein Kaufmann in Odessa sendet nach Genua 5218 Tschetwert Weizen, welches dort zu $19\frac{3}{4}$ Lire pr. Mina verkauft wird, und erhält für den Betrag Baumöl, wovon 1 Barile 54 Lire kostet; wie viel Wedro Baumöl werden es sein? (10 Tschetwert = 17 Mine, 115 Wedro = 23 Barili.)

20) Ein Weinhändler verkauft das Liter Wein zu 40 kr. und gewinnt dabei 10%, d. h. für jede 100 fl., die beim Einkaufe ausgelegt wurden, nimmt er beim Verkaufe 110 fl. ein; wie theuer hat er beim Einkaufe das Hektoliter bezahlt?

21) Jemand kauft 3 Stück Tuch zu 32 Ellen um 315 fl. ein; wie theuer muß er die Elle verkaufen, um 12% zu gewinnen?

22) 12 Ctr. 36 ℔ kosten im Einkaufe 358 fl.; wie theuer muß das Pfund verkauft werden, damit man 8% gewinne?

23) Wenn $37\frac{1}{2}$ badische ℔ $22\frac{3}{4}$ fl. süddeutscher Währung kosten; wie hoch in österr. Währ. kommen in demselben Verhältnis 85 Wiener ℔, da 56 bad. ℔ = 50 Wien. ℔ und $52\frac{1}{2}$ fl. südd. W. = 45 fl. ö. W. sind?

24) Ein Wiener Cubikfuß Wasser wiegt 56·375 Wien. ℔; wie viel preußische ℔ wiegt ein preußischer Cubikfuß Wasser? (1000 preuß. Cubikfuß = 979 Wiener Cubikfuß, 1000 preuß. ℔ = 893 Wien. ℔.)

25) Wie viel österr. Meilen machen 238 russ. Wersten, wenn 1 österr. Meile 24000 Wien. Fuß enthält, wenn 100

Wersten = 14·3762 geogr. Meilen, 1 geogr. Meile = 23643 preuß. Fuß und 100 preuß. Fuß = 99·2859 Wien. Fuß sind?

26) Der Hamburger Ctr. hat 100 Hamb. ℔, wovon jedes 0·5 Kilogramm enthält, das Wien. ℔ wiegt 0·56 Kilogramm; wie viel fl. ö. W. kostet der Wiener Ctr. von einer Waare, wovon 4 Hamb. Ctr. $382\frac{1}{2}$ Mark Banco kosten, wenn man 100 Mark Banco zu 77 fl. ö. W. rechnet?

27) Von den Gasgesellschaften in Großbritannien und Irland werden jährlich 7600 Millionen engl. Cubikfuß Gas verkauft, welche ein Licht von gleicher Stärke wie 33 Millionen Gallons Oel liefern; wie viel Wien. Cubikfuß gibt das auf 1 Wien. ℔ Oel? (1000 englische Cubikfuß = 896 Wien. Cubikf., 100 Gallons = 321 Wien. Maß, 1000 Wien. Eimer = 1792 Wien. Cubikf, 1 Wien. Cubikf. Oel wiegt 53 W. ℔.)

IX. Die Gesellschaftsrechnung.

§. 89.

Wenn mehrere gleichartige Größen so beschaffen sind, dass die erste z. B. so vielmal 2 Einheiten enthält, als deren die zweite 5, und die dritte deren 7 enthält, so dass sich die erste zur zweiten wie 2 : 5, und die erste zur dritten wie 2 : 7 verhält, so sagt man, die drei Größen verhalten sich so wie die Zahlen 2, 5, 7, oder sie sind den Zahlen 2, 5, 7 proportional.

Die Rechnung, durch welche eine Zahl in mehrere Theile getheilt wird, welche gegebenen Zahlen proportional sind, wird die Gesellschaftsrechnung genannt.

Die Zahlen, in deren Verhältnisse die Theilung zu geschehen hat, heißen Verhältniszahlen.

Wenn in einer Aufgabe nur eine Reihe von Verhältniszahlen gegeben und somit eine Theilung nach einfachen Verhältnissen vorzunehmen ist, so heißt die Gesellschaftsrechnung eine *einfache*; dagegen eine *zusammengesetzte*, wenn die Theilung nach zusammengesetzten Verhältnissen zu geschehen hat, und daher *mehrere* Reihen von Verhältniszahlen gegeben sind.

§. 90.

Einfache Gesellschaftsrechnung.

Bei der *einfachen Gesellschaftsrechnung* dividiert man die zu theilende Zahl durch die Summe der auf die einfachste Form gebrachten Verhältniszahlen, und multipliciert den Quotienten mit jeder Verhältniszahl.

Ist z. B. die Summe von 3600 fl. unter drei Personen so zu theilen, dass A 2, B 3, C 7 Theile bekommt, dass sich also die Theile den Zahlen 2, 3, 7 proportional verhalten, so bilde man zuerst 2 + 3 + 7 = 12 gleiche Theile, indem man 3600 fl. durch 12 dividiert; man bekommt dadurch 300 fl. als die Größe eines Theiles; von solchen Theilen bekommt nun A 2, B 3, C 7; man muß also den Quotienten 300 fl. noch mit jeder Verhältniszahl multiplicieren.

Die Rechnung steht

A	2	300 × 2 =	600	fl. bekommt A,
B	3	300 × 3 =	900	„ „ B,
C	7	300 × 7 =	2100	„ „ C,
3600 : 12 =		300	3600	fl. zusammen.

Aufgaben.

1) Drei Personen treten zu einem Handlungsgeschäfte zusammen, und zwar gibt A 1800 fl., B 2700 fl., C 4500 fl. zu dem gemeinschaftlichen Fonde her; wenn nun bei dem Geschäfte 1570 fl. gewonnen werden, welchen Antheil an dem Gewinne wird jeder haben?

Hier muß der Gewinn den Einlagen 1800, 2700, 4500 oder, wenn man durch 900 abkürzt, den Zahlen 2, 3, 5 proportional getheilt werden. Man hat also

A	$18\cancel{0}\cancel{0}$	2	$157 \times 2 = 314$ fl. gewinnt A
B	$27\cancel{0}\cancel{0}$	3	$157 \times 3 = 471$ „ „ B
C	$45\cancel{0}\cancel{0}$	5	$157 \times 5 = 785$ „ „ C
	$1570 : 10 = 157$		1570 fl. ganzer Gewinn.

2) Zu feinem rothen Siegellack braucht man 4 Theile Terpentin, 1 Theil Kreide, 6 Theile Zinnober und 6 Theile Schellack; wie viel von jedem dieser Bestandtheile muß man zu 102 ℔ Siegellack nehmen?

3) Drei Personen legen zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen 12800 fl. zusammen, und zwar A 4300 fl., B 3800 fl., C den Rest; wenn sie nun dabei 3000 fl. gewinnen, wie viel gebührt einem jeden?

4) A legt in eine Handlung 5000 fl., B 7400 fl., C 8400 fl., D 6200 fl. Wenn sie nun zusammen 1800 fl. gewinnen, was erhält jeder vom Gewinne?

5) Jemand ist an A 500 fl., an B 700 fl., an C 400 fl., an D 300 fl. schuldig; er hat aber nur 1710 fl. im Vermögen; wie viel erhalten die Gläubiger nach Verhältnis ihrer Forderung?

6) Zu weißem Glase nimmt man 25 Theile Kiessand, 5 Theile Pottasche und einen Theil Kreide; wie viel braucht man von jedem dieser Bestandtheile zu einer Masse von 100 ℔?

7) Zu Porzellan nimmt man 25 Theile Thon, 1 Theil Gyps und 2 Theile Kies; wie viel von einem jeden braucht man zu einer Masse von 85 ℔?

8) Wie viel Sauerstoff und Stickstoff befindet sich in einem lufterfüllten Raume von 87 Cub. Meter, wenn in 100 Theilen atmosphärischer Luft 21 Theile Sauerstoff und 79 Theile Stickstoff enthalten sind?

9) An den Enden eines 3·8 Meter langen Hebels sollen zwei Gewichte, das eine von 264 ℔, das andere von 312 ℔,

ins Gleichgewicht gebracht werden; wohin muß der Stützpunkt des Hebels kommen?

10) Eine Waare ist bei zwei Assecuranzgesellschaften versichert, und zwar mit 5000 Francs und 7000 Francs; wie viel hat jede Gesellschaft von dem entstandenen Schaden von 3854 Francs zu tragen?

11) Zwei Kaufleute kaufen gemeinschaftlich 72 Ctr. einer Waare; A gibt dazu 280 fl., B 320 fl. Wie viel Centner erhält jeder?

12) Von 2734 ℔ Mandeln und 2891 ℔ Kaffee zahlt man 121 fl. 95 kr. Fracht; wie viel entfällt davon für die Mandeln, wie viel für den Kaffee?

13) Ein Kaufmann erhält 3 verschiedene Waaren, welche einzeln 385 Thl., 560 Thl. und 625 Thl. kosten. Wenn nun die nach Procenten gerechneten Spesen für alle drei Waaren $68\frac{1}{3}$ Thl. betragen, wie viel entfällt davon auf jede einzelne Waare?

14) Es sollen 252 fl. in drei den Zahlen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$ proportionale Theile getheilt werden.

Hier bringt man die Verhältnisbrüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner, und behält die neuen Zähler als Verhältniszahlen bei; denn zwischen Brüchen, welche einerlei Nenner haben, findet dasselbe Verhältnis statt, wie zwischen ihren Zählern.

	12		
$\frac{1}{4}$	3	3	$21 \times 3 = 63$ fl.
$\frac{1}{3}$	4	4	$21 \times 4 = 84$ "
$\frac{5}{12}$	1	5	$21 \times 5 = 105$ "
	$252 : 12 = 21$		252 fl.

15) Drei Personen kaufen ein Schiff um 24000 fl. Davon zahlt A 12000 fl., B 8000 fl., C den Rest; welchen Theil oder Part wird jeder am Schiffe haben?

Das ganze Schiff wird als Einheit angenommen.

A $12\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$	3	$\frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2}$ Part
B $8\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$	2	$\frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$ "
C $4\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$	1	$\frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$ "
$1 : 6 = \frac{1}{6}$		

16) An einem Schiffe hat A $\frac{1}{3}$, B $\frac{3}{8}$ und C $\frac{7}{24}$ Part; wenn nun dieses Schiff 1845 fl. Fracht verdient, wie viel wird der Antheil eines jeden betragen?

17) Vier Personen nehmen ein Lotterieloos; dazu gibt A 50 kr., B 1 fl., C 1 fl. 10 kr., D 2 fl.; sie gewinnen damit 8000 fl.; wie viel bekommt jeder?

18) Jemand ist an A 5000 fl., an B 6000 fl., an C 8000 fl., an D 9000 fl. schuldig; sein Vermögen beträgt nur 22820 fl.; wie viel wird jeder Gläubiger unter diesen Umständen erhalten?

19) Es sollen 67270 fl. nach dem Verhältnisse der Zahlen $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{13}{60}$ unter A, B, C, D und E getheilt werden; wie viel kommt auf jede Person?

20) Im Sprengpulver verhalten sich die Massen von Salpeter, Kohle und Schwefel, wie die Zahlen 1, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{10}$; wie viel von diesen Stoffen ist zu 5934 ℔ Sprengpulver nöthig?

21) Vier Personen sollen 48000 fl. so unter einander theilen, dass sich ihre Theile wie die Zahlen 2, $2\frac{1}{2}$, 3 und 4 verhalten; was bekommt jede Person?

22) Vier Dörfer sollen eine Kriegssteuer von 1500 fl. bezahlen, und zwar nach Verhältnis ihrer Grundsteuer. Das Dorf A zahlt 758 fl. 40 kr., B 813 fl. 22 kr., C 459 fl. 78 kr., D 908 fl. 60 kr. Grundsteuer; wie viel muß jedes Dorf zu jener Kriegssteuer beitragen?

23) Bei einem Geschäfte, zu welchem A 3500 fl., B 2850 fl., C 4180 fl. hergegeben hat, werden 11% gewonnen; wie viel gewinnt jeder?

24) Zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen gibt A $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{3}$ und C den Rest der Summe. Wenn nun der Gewinn von 1355 fl. so getheilt werden soll, dass A wegen seiner besonderen Dienstleistung außer seinem verhältnißmäßigen Antheile noch 6% des Gewinnes erhalte; wie viel bekommt jeder?

25) 3 Personen theilen 3060 fl. so unter einander, dass B doppelt so viel als A, und C 3mal so viel als B bekommt; wie viel erhält jede Person?

26) Wie viel erhält jeder von 688 fl., wenn A so oft 2 fl. als B 3 fl. und C so oft 6 fl. als B 5 fl. erhalten soll.

27) Drei Kaufleute haben 760 fl. im Handel gewonnen; der Antheil des A verhält sich zu dem des B wie 4 : 3, der Antheil des B zu dem des C wie 6 : 5. Wie viel bekommt jeder?

§. 91.

Zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

Bei der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung muß man die auf denselben Theil sich beziehenden Verhältniszahlen mit einander multiplicieren, und die Producte als Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung betrachten, nach welcher dann das weitere gerechnet wird.

Aufgaben.

1) Drei Kaufleute sind mit einander in Gesellschaft getreten und haben zusammen 4600 fl. gewonnen. Wenn nun A 2000 fl. durch 8 Monate, B 4000 fl. durch 6 Monate, und C 8000 fl. durch 5 Monate in dem Gesellschaftsfonde liegen ließ; wie viel von dem Gewinne wird jeder von ihnen bekommen?

A	fl. 2000	durch 8	Mon.	=	$16\cancel{000}$	2	
B	„ 4000	„ 6	„	=	$24\cancel{000}$	3	
C	„ 8000	„ 5	„	=	$40\cancel{000}$	5	
					4600 :	10	= 460

460 × 2 = 920 fl. bekommt A
460 × 3 = 1380 „ „ B
460 × 5 = 2300 „ „ C
4600 fl. ganzer Gewinn.

Hier werden je zwei neben einander stehende Verhältniszahlen multipliciert, denn es ist gleichviel,

ob A	2000 fl.	durch	8 Mon.	oder	16000 fl.	durch	1 Mon.
ob B	4000 „	„	6 „	„	24000 „	„	1 „
ob C	8000 „	„	5 „	„	40000 „	„	1 „

in dem Fonde liegen läßt. Da nun im zweiten Falle die Zeit bei allen gleich ist, nämlich 1 Monat, so hängen die einzelnen Antheile am Gewinne bloß von den Einlagen, nämlich den Producten 16000, 24000, 40000 ab, welche daher als Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung betrachtet werden.

2) Drei Personen handeln auf gemeinschaftlichen Gewinn. A legt ein 1500 fl. auf ein Jahr, B 1200 fl. auf 6 Monate, C 1000 fl. auf 8 Monate. Sie gewinnen 960 fl.; wie viel erhält jeder davon?

3) Zu einem gemeinsamen Geschäfte gibt A 1250 fl. auf 4 Monate, B 2380 fl. auf 5 Monate, C 3000 fl. auf 3 Monate und D 2710 fl. auf 10 Monate. Der Gewinn beträgt 2188 fl. 48 kr.; wie viel erhält jeder?

4) Vier Fleischhauer pachten einen Weideplatz. A läßt 30 Ochsen durch 4 Monate, B 40 Ochsen durch 6 Monate, C 60 Ochsen durch 3 Monate, D auch 60 Ochsen aber durch 5 Monate darauf weiden. Sie zahlen 126 fl. Pachtzins; wie viel hat jeder einzelne zu zahlen?

5) Bei einem Durchmarsch hatte A 4 Mann 7 Tage, B 5 Mann 4 Tage, C 4 Mann 8 Tage lang in Quartier; sie erhielten von der Regierung 8 fl. Vergütung; wie viel bekam jeder?

6) Zu einem Festungsbaue schickt das Dorf A 40 Mann durch 28 Tage, das Dorf B 25 Mann durch 24 Tage, und C 30 Mann durch 30 Tage. Es wird dafür eine Entschädigung von 850 fl. hergegeben; wie viel bekommt jedes Dorf?

7) A beginnt im Anfange des Jahres ein Handelsgeschäft mit einem Fonde von 8000 fl.; nach 3 Monaten tritt B mit 4000 fl. bei, und noch 2 Monate später gesellt sich auch C mit 5000 fl. dazu. Beim Jahresschlusse ergibt sich ein Gewinn von 1250 fl.; wie viel erhält jeder davon?

8) Es sollen in möglichst kurzer Zeit 1764 Hektoliter Roggen auf 4 Mühlen gemahlen werden, von denen A in 4 Stunden 15 Hektoliter, B in 3 Stunden 16 Hektoliter, C in 5 Stunden 14 Hektoliter, D in 2 Stunden 9 Hektoliter mahlt; wie viel Hektoliter sind jeder dieser Mühlen zuzutheilen, damit sie gleichzeitig fertig werden?

X. Die Mischungsrechnungen.

1. Durchschnittsrechnung.

§. 92.

Wenn der Wert der Einheit einer Mischung, welche aus gleichartigen Theilen von verschiedenem Werte hergestellt wird, gefunden werden soll, wendet man die Durchschnittsrechnung an. Der gefundene Wert wird der Durchschnitts- oder Mittelwert genannt.

Die Durchschnittsrechnung heißt einfach, wenn die Theile, aus denen die Mischung besteht, nur unter einer Beziehung, z. B. im Preise, ungleich sind, in den übrigen Umständen aber übereinstimmen; zusammengesetzt, wenn die einzelnen Bestandtheile in mehrfacher Beziehung, z. B. in der Quantität und im Preise, verschieden sind.

§. 93.

Bei der einfachen Durchschnittsrechnung addiert man die gegebenen Zahlen und dividiert die Summe durch die Anzahl derselben; der Quotient gibt den gesuchten Mittelwert.

Z. B. Jemand mischt 1 Maß Wein zu 36 kr., 1 Maß zu 40 kr. und 1 Maß zu 56 kr. zusammen; wie viel ist 1 Maß der Mischung wert?

1 Maß	des	ersten	Weines	kostet	36	kr.
1 „	„	zweiten	„	„	40	„
1 „	„	dritten	„	„	56	„
3 Maß	der	Mischung	kosten		132	kr.
						: 3

also kostet 1 Maß 44 kr.

Aufgaben.

1) Jemand mischt vier Gattungen Kaffee zu gleichen Theilen; von der ersten Gattung kostet das Pfund 60 kr., von der zweiten 72 kr., von der dritten 76 kr., von der vierten 92 kr.; welchen Wert hat 1 ℔ der Mischung?

2) Ein Goldarbeiter mischt feines (24 karatiges), 22 karatiges, 20 karatiges und 18 karatiges Gold zu gleichen Theilen zusammen; wie viel Karat Gold enthält eine Mark der Mischung?

3) Ein Gut gibt in 5 auf einander folgenden Jahren 2565 fl. 24 kr., 2844 fl. 64 kr., 2085 fl. 38 kr., 2633 fl., 2408 fl. 84 kr. reinen Ertrag; wie groß ist der jährliche Durchschnittsertrag?

4) Der Curs der Bankactien stand an einem Tage auf 728, 731, 732, 729, 726; wie hoch stellt sich der mittlere Curs derselben?

5) Im Laufe einer Woche war das Silberagio notiert: $19\frac{1}{2}$ %, $19\frac{3}{4}$ %, 20 %, $21\frac{1}{2}$ %, $20\frac{3}{4}$ %, $20\frac{1}{2}$ %; welches ist der Durchschnittscurs dieser Woche?

6) 5 Capitalien à 800 fl. sind für dieselbe Zeit zu 5 %, $5\frac{1}{2}$ %, 6 %, $4\frac{3}{4}$ %, $5\frac{1}{4}$ % verzinslich ausgeliehen; zu wie viel % ist im Durchschnitte das ganze Capital von 4000 fl. ausgeliehen?

7) 5 gleiche Capitalien sind den 31. Jänner, 31. März, 15. April, 20. Mai und 15. Juni fällig; auf welchen Tag fällt die mittlere Verfallzeit dieser Capitalien, wenn man zur Berechnung vom 31. December ausgeht? (Ein Monat zu 30 Tage.)

§. 94.

Bei der zusammengesetzten Durchschnittsrechnung bestimmt man den Betrag eines jeden Bestandtheiles durch Multiplication der dazu gehörigen Zahlen, addiert dann sowohl die Zahlen, welche die Menge der einzelnen Bestandtheile ausdrücken, als die erhaltenen Beträge, und dividiert die zweite Summe durch die erste; der Quotient ist der gesuchte Mittelwert der Einheit.

Z. B. Ein Kaufmann mischt dreierlei Kaffee: 7 ℔ à 96 kr., 9 ℔ à 72 kr. und 8 ℔ à 60 kr.; wie viel kostet 1 ℔ der Mischung?

7 ℔ à 96 kr. kosten	672 kr.
9 „ à 72 „ „	648 „
8 „ à 60 „ „	480 „
24 ℔ der Mischung kosten	1800 kr.
	: 24
also kostet 1 ℔	75 kr.

Aufgaben:

1) Ein Weinwirt mischt 4 Eimer Wein à 12 fl., 3 Eimer à 14 fl. und 5 Eimer à 15 fl.; wie viel ist 1 Eimer des so gemischten Weines wert?

2) Jemand mischt 4 Mark 15löthiges, 2 Mark 12löthiges und 3 Mark 10löthiges Silber; wie viel löthig ist die Mischung?

3) Es werden 5 ℔ Silber à 720 Tausendtheile und 2 ℔ à 900 Tsdth. zusammengeschmolzen; welchen Grad der Feinheit hat die Mischung?

4) Zu 2 ℔ Gold à 900 Tausendtheile setzt man 1 ℔ feines Gold und 1 ℔ Gold à 560 Tsdth.; welchen Gehalt hat die Mischung?

5) Jemand mischt 16 Hektoliter Spiritus à 80% (80 Grad)*) und 4 Hektoliter à 70%; welchen Gehalt hat die Mischung?

6) Zu 5 Eimer Spiritus à 90% schüttet man 25 Maß

*) Spiritus von 80% enthält unter 100 Raumtheilen 80 Theile Weingeist (Alkohol) und 20 Theile Wasser.

Wasser (à 0 %) zu; auf wie viel % wird dadurch der Gehalt des Spiritus erniedriget?

7) Auf einem Wochenmarkte werden 42 Metzen Weizen à fl. 5 „ 35, 37 Metzen à fl. 5 „ 60, 25 Metzen à fl. 5 „ 12 und 36 Metzen à fl. 3 „ 36 verkauft; wie groß ist der Mittelpreis pr. Metzen?

8) Jemand hat 3600 fl. à $4\frac{3}{4}$ %, 4500 fl. à 5 % und 1900 fl. à 6 % ausgeliehen; zu wie viel % müßte die Summe aller drei Capitalien ausgeliehen werden, um gleich viel Zinsen zu erhalten?

9) Jemand hat 60 ℔ einer Waare à 60 kr. und 80 ℔ à 55 kr.; er setzt noch 100 ℔ einer dritten Sorte dazu, und nun kostet 1 ℔ der Mischung 50 kr.; wie viel kostet das ℔ der letzten Sorte?

2. Die Allegationsrechnung.

§. 95.

Um das Verhältnis zu finden, in welchem gleichartige Dinge von verschiedenem Werte mit einander verbunden werden müßen, um eine Mischung von bestimmtem Mittelwerte zu erhalten, wird die Allegationsrechnung angewendet.

a. Wenn nur zwei Gattungen gemischt werden sollen.

Z. B. Ein Weinhändler will Wein zu 20 fl. pr. Hektoliter haben, er hat aber nur Weine zu 16 fl. und zu 30 fl.; in welchem Verhältnisse muß er diese beiden Gattungen mischen, damit ein Hektoliter der Mischung gerade den Preis von 20 fl. erhalte? — Ein Hektoliter der bessern Sorte kostet 30 — 20 = 10 fl. mehr, 1 Hektoliter der schlechtern Sorte 20 — 16 = 4 fl. weniger, als 1 Hektoliter der Mischung. Man wird also beim Verkaufe der Mischung an 4 Hektolitern der besseren Sorte, welche darin vorkommen, eben so viel verlieren, als an 10 Hektolitern der schlechteren Sorte gewonnen wird, nämlich 4 × 10 = 40 fl. Man wird daher, damit sich der Verlust und der Gewinn ausgleichen, je 4 Hektoliter der besseren Sorte mit 10 Hektolitern der schlechteren, oder man wird die bessere Sorte mit der geringeren in dem Verhältnisse 4 : 10 mischen.

Um daher das Mischungsverhältnis zweier Gattungen, damit daraus eine Mittelgattung erhalten werde, zu finden, setze man die beiden Gattungen unter einander, und schreibe links in der Mitte die Mittelgattung hin; sodann bestimme man den Unterschied zwischen der Mittelgattung und der geringeren, und setze denselben rechts neben der besseren Gattung; ebenso bestimme man auch den Unterschied zwischen der Mittelgattung und der besseren, und schreibe ihn rechts neben der geringeren. Diese Unterschiede sind die Verhältniszahlen der Mischung für die nebenstehenden Gattungen; sie werden, wenn sie durch dieselbe Zahl theilbar sind, noch dadurch abgekürzt.

Für das frühere Beispiel hat man folgenden Ansatz:

$$20\begin{array}{r|r|l} 30 & 4 & 2 \\ 16 & 10 & 5 \end{array}$$

Aufgaben.

1) Ein Weinwirt braucht zum Ausschanke einen Wein zu 40 kr. pr. Liter; er hat aber nur Weine, wovon das Liter 48 kr. und 36 kr. kostet; wie wird er diese beiden Gattungen mischen, um einen Wein zu dem gewünschten Preise zu erhalten?

$$40\begin{array}{r|r|l} 48 & 4 & 1 \\ 36 & 8 & 2 \end{array}$$

Die Verhältniszahlen der Mischung sind also 1 und 2, d. h. der Wirt muß von dem besseren Weine 1 Theil, von dem schlechteren aber 2 eben solche Theile zusammenmischen, oder er muß von dem Weine zu 36 kr. doppelt so viel zur Mischung nehmen, als von dem besseren zu 48 kr.

2) Ein Weinwirt will zweierlei Weine, wovon der erste 16 fl., der zweite 28 fl. pr. Eimer kostet, so mischen, dass er 24 Eimer zu 23 fl. bekommt; wie viel von jeder Gattung wird er zu der Mischung nehmen müßen?

Diese Aufgabe enthält zwei Theile: der erste Theil bildet eine **Vermischungsrechnung**, nämlich: in welchem Verhältnisse müßen zweierlei Weine zu 16 fl. und 28 fl. gemischt werden, um einen Wein zu 23 fl. zu erhalten?

$$23\begin{array}{r|l}16 & 5\\ 28 & 7\end{array}$$

Man muß also die Weine zu 16 fl. und 28 fl. in dem Verhältnisse 5 : 7 mischen.

Der zweite Theil der Aufgabe ist eine **Gesellschaftsrechnung**, welche so lautet: um einen Wein zu 23 fl. zu erhalten, muß man die Weine zu 16 fl. und 28 fl. in dem Verhältnisse 5 : 7 mit einander mischen; wie viel von jeder dieser Gattungen wird man nehmen müßen, um 24 Eimer zu 23 fl. zu erhalten?

5	$2 \times 5 = 10$ Eimer zu 16 fl.
7	$2 \times 7 = 14$ „ „ 27 „
24 : 12 = 2	

Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, wendet man die **Durchschnittsrechnung** an; man kehrt nämlich die Aufgabe um, und sagt: wenn man 10 Eimer Wein zu 16 fl. und 14 Eimer Wein zu 28 fl. mischt, wie viel wird ein Eimer von der Mischung kosten? Man hat

10 Eimer	à 16 fl. =	160 fl.
14 „	à 28 „ =	392 „
24 Eim. der Mischung		552 fl.
		: 24
also 1 Eim. „	„	23 fl.

3) Wie viel feines Silber und wie viel Kupfer (0löthiges Silber) braucht man zu einer Masse von 12 Mark 13löthigen Silbers?

$$13\begin{array}{r|l}16 & 13\\ 0 & 3\end{array}$$

$12 : 16 = \frac{3}{4}$.

$\frac{3}{4} \times 13 = \frac{39}{4}$ Mark = 9 Mark 12 Loth fein. Silber

$\frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}$ „ = 2 „ 4 „ Kupfer

4) Feines und 10löthiges Silber sollen zu 12löthigem Silber eingeschmolzen werden; wie viel von jedem Bestandtheile kommt auf 24 Mark?

5) Aus 14löthigem und 8löthigem Silber sollen 20 Mark 12löthiges Silber zusammengeschmolzen werden; wie viel von jeder Sorte wird man zu der Mischung verwenden?

6) Wie viel feines Silber und wie viel Kupfer muß man nehmen, um $12\frac{1}{2}$ Mark $12\frac{1}{2}$löthiges Silber zu bekommen?

7) Ein Goldschmied hat 20karatiges und 12karatiges Gold; wie viel von jeder Sorte muß er nehmen, um $1\frac{1}{4}$ Mark Gold zu erhalten, welches 18 Karat 5 Gran fein ist?

8) Wie viel feines Silber und Kupfer muß man zusammenschmelzen, um 4 ℔ Silber à 720 Tausendth. Gehalt zu bekommen?

9) Ein Goldschmied braucht zu einer Arbeit $\frac{3}{10}$ ℔ Gold à 700 Tausendth.; er will solches aus Gold von 650 und 900 Tsdth. Gehalt herstellen; wie viel muß er von jedem nehmen?

10) Wie viel 12karatiges Gold muß zu 3 Mark 18karatigen Gold gemischt werden, wenn 14karatiges Gold daraus entstehen soll?

11) Zwei Gattungen Kaffee, zu 76 kr. und 64 kr. das Pfund, sollen so gemischt werden, daß man einen Centner zu 72 kr. das ℔ erhält; wie viel von jeder Gattung muß dazu genommen werden?

12) Aus zwei Sorten Wein, von denen das Liter 40 und 72 kr. kostet, sollen 50 Liter so gemischt werden, daß ein Liter 60 kr. koste; wie viel von jeder Gattung wird man dazu nehmen?

13) Ein Getreidehändler hat zweierlei Korn; von der bessern Sorte gilt der Metzen 3 fl. 60 kr., von der schlechtern 3 fl. 20 kr.; er will nun 42 Metzen so mischen, daß er jeden Metzen um 3 fl. 36 kr. verkaufen kann; wie viel muß er von jeder Sorte dazu nehmen?

14) Jemand will Spiritus zu 90 % und zu 56 % zusammengießen, um 720 Maß zu 70 % zu erhalten; wie viel Maß muß er von jeder Sorte nehmen?

15) Wie viel Liter Wasser von 30° R. müssen zu 4 Liter Wasser von 15° R. hinzugegossen werden, damit die Mischung eine Temperatur von 24° R. habe?

16) Von einer Waarengattung kostet das Kilogramm 22 Francs, von einer anderen 12 Francs; wie viel muß man von

jeder Sorte zu einer Mischung von 70 Kilogramm nehmen, wenn das Kilogramm 18 Francs kosten soll?

§. 96.

b. Wenn mehr als zwei Gattungen zur Mischung verwendet werden sollen, so lassen sich verschiedene Zusammensetzungen vornehmen, welche alle auf die verlangte Mittelgattung führen.

Um die Verhältniszahlen der Mischung bei diesen verschiedenen Zusammenstellungen zu erhalten, verbindet man immer je eine bessere und eine geringere Gattung so, dass man die Mittelgattung erhält, und bestimmt dabei das Mischungsverhältnis nach der im vorhergehenden §. für zwei Gattungen gegebenen Vorschrift.

Z. B. Aus Silber von 500, 640 und 900 Tausendtheilen soll Silber von 720 Tsdth. Gehalt zusammengeschmolzen werden; in welchem Verhältnisse wird die Mischung geschehen?

	500	180	$18\cancel{0}$	3
720	640	180	$18\cancel{0}$	3
	900	220 + 80	$30\cancel{0}$	5

Hier verbindet man die erste Sorte mit der dritten, dann die zweite mit der dritten, und erhält so die Verhältniszahlen 3, 3 und 5.

Nimmt man z. B. 3 Pfund Silber à 500, 3 Pfund à 640 und 5 Pfund à 900 Tsdth., so erhält man 11 Pfd. à 720 Tsdth.: denn es ist

3 Pfund à 500 Tsdth.	=	1500 Tsdth.
3 „ à 640 „	=	1920 „
5 „ à 900 „	=	4500 „
11 Pfund der Mischung	=	7920 Tsdth.,
also kommen auf 1 Pfund		720 Tsdth.

Aufgaben.

1) In welchem Verhältnisse kann man drei Sorten einer Waare, von denen das Pfund 56, 60 und 80 kr. kostet, zusammensetzen, um eine Mischung zum Preise von 72 kr. pr. ℔ herzustellen?

2) Ein Silberarbeiter braucht $7\frac{3}{4}$ Mark 13löthiges Silber; er hat aber nur feines und 15löthiges Silber, und muß daher auch

Kupfer dazu mischen; wie viel Mark muß er von jeder Sorte zur Mischung nehmen?

3) Ein Kaufmann besitzt von einer Waare drei Sorten zu 30 kr., 33 kr., 40 kr. pr. ℔; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen, um durch die Mischung 340 ℔ à 36 kr. zu erhalten?

4) In welchem Verhältnisse kann man Weine à 26 fl., 20 fl., 16 fl. und 12 fl. pr. Eimer mischen, um einen Wein zu erhalten, wovon der Eimer 18 fl. wert ist?

5) Jemand will aus 4 Sorten Kaffee, à 80 kr., 72 kr., 64 kr. und 60 kr. pr. ℔, 240 ℔ à 68 kr. zusammensetzen; wie viel kann er von jeder Sorte nehmen?

6) Wie viel Wasser muß man zu 6 Eimer Spiritus à 92 %, 3 Eimer à 88 % und 2 Eimer à 80 % gießen, um den Gehalt auf 84 % zu bringen?

Neunter Abschnitt.

Elemente der allgemeinen Arithmetik.

I. Das Rechnen mit algebraischen Zahlen.

§. 97.

Durch fortgesetztes Hinzufügen einer Einheit kann man in der natürlichen Zahlenreihe ohne Ende vorwärts schreiten. Wenn man eben so von irgend einer Zahl aus durch fortgesetztes Wegnehmen einer Einheit in der Zahlenreihe rückwärts schreitet, so gelangt man nach und nach zu 1, und endlich, wenn noch eine Einheit weggenommen wird, zur 0. Es ist nun nicht nöthig, bei der 0 stehen zu bleiben; man kann nach demselben Gesetze die Zahlenreihe von 0 aus auch weiter rückwärts fortsetzen, sobald der Gegensatz der von 0 nach vorwärts und nach rückwärts fortschreitenden Zahlen entsprechend ausgedrückt wird. Letzteres geschieht, indem man die ursprünglich vorhandenen Zahlen, welche von 0 aus immer um eine Einheit vorwärts schreiten, positiv, die Zahlen aber, zu denen man gelangt, wenn man von 0 nach dem gleichen Bildungsgesetze rückwärts schreitet, negativ nennt, und die ersteren mit dem Vorzeichen $+$ (mehr), die letzteren mit dem Vorzeichen $-$ (weniger) bezeichnet. Die dadurch entstehende zweiseitige Zahlenreihe ist daher

$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4 \ldots$$

Während hier die positiven Zahlen die ursprünglichen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe vorstellen, treten die negativen Zahlen als Zahlen einer neuen Form auf, die den Gegensatz zu den positiven ausdrücken.

Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden *relative* oder *algebraische Zahlen* genannt, im Gegensatze zu den ursprünglichen Zahlen, welche *absolute Zahlen* heißen.

Jede algebraische Zahl, z. B. + 3 oder — 3, besteht aus einem Vorzeichen + oder — und einem Zahlenwerte, hier 3. Das Vorzeichen zeigt an, ob sich die Zahl auf der positiven oder negativen Seite der Zahlenreihe befindet; der *Zahlenwert* ist eine absolute Zahl und zeigt an, welche Stelle die Zahl in der Reihe der positiven oder der negativen Zahlen einnimmt.

Das Vorzeichen + wird am Anfange eines Zahlenausdruckes und nach dem Gleichheitszeichen nicht angeschrieben; das Zeichen — darf nie weggelassen werden. Wenn daher vor einer Zahl kein Vorzeichen steht, ist sie als positiv anzusehen; z. B. 3 bedeutet so viel als + 3.

Eine algebraische Zahl, welche mit einer andern durch eine Rechnungsoperation zu verbinden ist, umgibt man mit *Klammern*; z. B. + 3 — (—5) bedeutet die Differenz der Zahlen + 3 und — 5.

Zwei Zahlen, welche gleichen Zahlenwert, aber verschiedene Vorzeichen haben, z. B. + 3 und — 3, heißen einander *entgegengesetzt*.

Zur Darstellung der algebraischen Zahlen dient die nachstehende Zahlenlinie, auf welche von 0 aus nach vorwärts und nach rückwärts gleiche Strecken aufgetragen werden:

— 4 — 3 — 2 — 1   0 + 1 + 2 + 3 + 4

Die Erweiterung des Zahlengebietes durch die Einführung der negativen Zahlen macht es erst möglich, die Subtraction zweier Zahlen auch dann auszuführen, wenn der Subtrahend größer als der Minuend ist. Um z. B. die Differenz 4—7 zu bestimmen, soll man nach dem Begriffe der Subtraction von 4 aus um 7 Einheiten zurückschreiten; dieses ist unmöglich, so lange man auf das Gebiet der absoluten Zahlen beschränkt ist. Wird aber die durch die Aufnahme der negativen Zahlen erweiterte Zahlenreihe zu Grunde gelegt, so gelangt man, von 4 um 7 Einheiten zurückschreitend, zur Zahl -3, und erhält sonach die Differenz $4-7=-3$ ihre ganz bestimmte Bedeutung.

Der Begriff des Gegensatzes, welcher zwischen den positiven und negativen Zahlen bestehet, tritt in zahlreichen Fällen des praktischen Lebens hervor, z. B. bei der Bewegung nach aufwärts und abwärts, nach rechts und links, bei der Zeit vor und nach Christi Geburt, bei Vermögen und Schulden, Einnahme und Ausgabe, Gewinn und Verlust u. dgl. Der Gegensatz besteht darin, dass alle diese Größen einander entweder ganz oder theilweise aufheben.

Die Einführung der negativen Zahlen hat zur Folge, dass mit Rücksicht auf den Gegensatz derselben zu den positiven Zahlen auch die Begriffe der Rechnungsoperationen angemessen erweitert werden müßen.

§. 98.

Das Addieren algebraischer Zahlen.

Bei der Addition absoluter Zahlen schreitet man in der natürlichen Zahlenreihe vom ersten Summand um so viele Einheiten vorwärts, als der zweite Summand angibt.

Um algebraische Zahlen zu addieren, schreitet man in der algebraischen Zahlenreihe vom ersten Summand um die Einheiten des zweiten ebenfalls vorwärts, wenn der zweite Summand positiv, dagegen rückwärts, wenn derselbe negativ ist, also allgemein in derselben Richtung fort, welche das Vorzeichen des zweiten Summanden angibt; die Zahl der Zahlenreihe, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Ist z. B. die Summe $+5+(+3)$ zu suchen, so schreitet man von $+5$ aus in positiver Richtung um 3 Einheiten fort, wodurch man zur Zahl $+8$ gelangt; also

$$+5+(+3)=+(5+3)=+8.$$

Um ferner die Summe $-5+(-3)$ zu erhalten, schreitet man von -5 aus in negativer Richtung um 3 Einheiten fort, wodurch man zur Zahl -8 gelangt; folglich

$$-5+(-3)=-(5+3)=-8.$$

Eben so erhält man

$$+5+(-3)=+(5-3)=+2,$$
$$-5+(+3)=-(5-3)=-2.$$

Zwei algebraische Zahlen werden also addiert, indem man der Summe ihrer absoluten Werte das gemeinschaftliche Vorzeichen, oder der Differenz ihrer absoluten Werte das Vorzeichen der größeren gibt, je nachdem dieselben gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Die Summe zweier Gewinne wie zweier Verluste ist wieder ein Gewinn oder ein Verlust; die Summe eines Gewinnes und eines Verlustes gibt den Ueberschuß des einen über den andern als Gewinn oder Verlust.

Aufgaben.

1) $+7+(+2)=?$ 2) $+7+(-2)=?$
3) $-4+(+5)=?$ 4) $-4+(-5)=?$
5) $-38+(+13)=?$ 6) $+35+(-35)=?$
7) $+297+(-128)=?$ 8) $-3048+(-1763)=?$
9) $+15+(-8)+(+5)=+7+(+5)=12$
10) $-31+(+57)+(-38)=?$
11) $-217+(-196)+(+790)=?$
12) $-9+(-7)+(+12)+(-3)=?$
13) $+22{\cdot}9+(+31{\cdot}7)+(-50{\cdot}1)+(-19)=?$
14) $-702{\cdot}13+(+819{\cdot}92)+(-563{\cdot}09)+(+85{\cdot}58)=?$

§. 99.

Das Subtrahieren algebraischer Zahlen.

Bei der Subtraction absoluter Zahlen schreitet man in der natürlichen Zahlenreihe vom Minuend aus um so viele Einheiten rückwärts, als der Subtrahend anzeigt.

Um algebraische Zahlen zu subtrahieren, schreitet man in der algebraischen Zahlenreihe vom Minuend aus um die Einheiten des Subtrahends ebenfalls rückwärts, wenn dieser positiv, dagegen vorwärts, wenn derselbe negativ ist, also allgemein in der entgegengesetzten Richtung fort, als sie das Vorzeichen des Subtrahends angibt; die Zahl der Zahlenreihe, zu welcher man auf diese Art gelangt, ist die gesuchte Differenz.

Um z. B. die Differenz $+5-(+3)$ zu finden, schreite man von $+5$ aus um 3 Einheiten in negativer Richtung fort; man gelangt dadurch zu der Zahl $+2$. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man zu $+5$ die Zahl -3 addiert; folglich

$$+5-(+3)=+5+(-3)=+2.$$

Es sei ferner $+5-(-3)$ zu bestimmen. Hier muß man von $+5$ aus um 3 Einheiten in positiver Richtung fortschreiten; wodurch man zu der Zahl $+8$ gelangt. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man zu $+5$ die Zahl $+3$ addiert; also

$$+5-(-3)=+5+(+3)=+8.$$

Ebenso findet man

$$-5-(+3)=-5+(-3)=-8,$$
$$-5-(-3)=-5+(+3)=-2.$$

Daraus folgt:

Algebraische Zahlen werden subtrahiert, wenn man zu dem Minuend den Subtrahend mit entgegengesetztem Zeichen addiert.

Statt Jemandem 3 fl. Vermögen zu nehmen, kann man ihm 3 fl. Schulden (die Verpflichtung, so viel zu bezahlen) geben; statt ihm 3 fl. Schulden abzunehmen, kann man ihm 3 fl. Vermögen (die Schuld damit selber zu zahlen) geben.

Aufgaben.

1) $+8-(+3)=?$ 2) $+8-(-3)=?$
3) $-13-(+15)=?$ 4) $-13-(-15)=?$
5) $+210-(98)=?$ 6) $-317-(-509)=?$

7) $-5786-(+2214)=?$ 8) $+1234-(+945)=?$
9) $-378-(-249)-(+518)=?$
10) $+7552-(-5864)+(-9046)=?$
11) $+987+[-368-(-245)]=?$
12) $-37{\cdot}68-[+24{\cdot}02-(+10{\cdot}08)]=?$
13) $+95358-[-13561+\{+58912-(-3796)\}]=?$

§. 100.

Das Multiplicieren algebraischer Zahlen.

Bei der Multiplication absoluter Zahlen setzt man den Multiplicand so oft als Summand, wie der Multiplicator anzeigt.

Um algebraische Zahlen zu multiplicieren, wird, wenn der Multiplicator positiv ist, auch der Multiplicand selbst unverändert, wenn aber der Multiplicator negativ ist, das Entgegengesetzte des Multiplicands, d. i. der Multiplicand mit entgegengesetztem Vorzeichen, so oft als Summand gesetzt, wie der Zahlenwert des Multiplicators anzeigt.

Hiernach ist

$$+4 \,.\, +3 = +4+(+4)+(+4) = +12,$$
$$+4 \,.\, -3 = -4+(-4)+(-4) = -12,$$
$$-4 \,.\, +3 = -4+(-4)+(-4) = -12,$$
$$-4 \,.\, -3 = +4+(+4)+(+4) = +12.$$

Zwei algebraische Zahlen werden demnach mit einander multipliciert, indem man das Product aus ihren absoluten Werten positiv oder negativ nimmt, je nachdem beide Factoren gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Man drückt diesen Satz auch so aus:

Zwei gleichbezeichnete Factoren geben ein positives, zwei ungleichbezeichnete Factoren ein negatives Product.

Wer 4 Schritte nach vorwärts 3mal macht, kommt 12 Schritte nach vorwärts; wer 4 Schritte nach rückwärts 3mal macht, legt 12 Schritte nach rückwärts zurück. Jemandem 4 fl. Gewinn 3mal hinwegnehmen (ihn darum verkürzen), ist so viel, als ihm einen Verlust von 12 fl. zuzuziehen. Jemandem 4 fl. Verlust 3mal hinwegnehmen (ersparen), ist so viel, als ihm einen Gewinn von 12 fl. zumitteln.

Für drei oder mehrere Factoren ergibt sich aus dem vorhergehenden Satze:

1. Sind alle Factoren positiv, so ist auch das Product positiv.

2. Sind alle oder auch nur einige Factoren negativ, so ist das Product positiv oder negativ, je nachdem die negativen Factoren in gerader oder ungerader Anzahl vorkommen.

Aufgaben.

1) $+9 \,.\, +5 = ?$ 2) $+9 \,.\, -5 = ?$
3) $-15 \,.\, +3 = ?$ 4) $-15 \,.\, -3 = ?$
5) $-118 \,.\, +63 = ?$ 6) $+307 \,.\, -41 = ?$
7) $-53{\cdot}28 \,.\, -7{\cdot}49 = ?$
8) $-1328 \,.\, +299 = ?$
9) $-19 \,.\, -27 \,.\, +31 = ?$
10) $+83 \,.\, -25 \,.\, +49 = ?$
11) $-72{\cdot}8 \,.\, -125 \,.\, -991 \,.\, -4{\cdot}17 = ?$
12) $+83 \,.\, -11 \,.\, -70 \,.\, +72 \,.\, -91 = ?$
13) $[-345 + (+209)] \,.\, [+596 - (-374)] = ?$
14) $[+2315 - (+788)] \,.\, [-749 - (+385)] \,.$
$[+569 + (-219)] = ?$

§. 101.

Das Dividieren algebraischer Zahlen.

Der Quotient muß so beschaffen sein, dass er mit dem Divisor multipliciert den Dividend gibt.

Ist nun $+12$ durch $+3$ zu dividieren, so ist der Quotient der Zahlenwerte 4, und zwar muß derselbe positiv sein, weil nur eine positive Zahl $+ 4$ mit einer positiven $+ 3$ multipliciert ein positives Product $+ 12$ geben kann; also

$$+ 12 : + 3 = + 4.$$

Es sei ferner $+ 12$ durch $- 3$ zu dividieren. Hier soll der Quotient mit $- 3$ multipliciert $+ 12$ geben, welcher Forderung nur $- 4$ entspricht; folglich

$$+ 12 : - 3 = - 4.$$

Eben so erhält man

$$- 12 : + 3 = - 4,$$
$$- 12 : - 3 = + 4.$$

Zwei algebraische Zahlen werden demnach durch einander dividiert, indem man den Quotienten ihrer absoluten Werte positiv oder negativ nimmt, je nachdem Dividend und Divisor gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Aufgaben.

1) $+ 72 : + 9 = ?$ 2) $+ 72 : - 9 = ?$
3) $- 144 : + 6 = ?$ 4) $- 144 : - 6 = ?$
5) $+ 2185 : - 5 = ?$ 6) $- 3840 : - 30 = ?$
7) $- 73 \cdot 242 : + 13 = ?$ 8) $+ 10416 : - 48 = ?$
9) $+ 5070736 : - 752 = ?$
10) $- 342 \cdot 316 : + 52 = ?$
11) $- 56035 \,.\, + 4923 : - 34461 = ?$
12) $[+ 74608 - (- 14816)] : [- 278 - (- 422)] = ?$

II. Das Rechnen mit allgemeinen Zahlenausdrücken.

§. 102.

Jede durch Ziffern ausgedrückte Zahl kann nur eine bestimmte Menge von Einheiten vorstellen. Man nennt eine solche

Zahl eine besondere Zahl, im Gegensatze zu einer allgemeinen Zahl, welche irgend eine beliebige Menge von Einheiten vorstellen kann.

Die allgemeinen Zahlen werden durch Buchstaben bezeichnet. So bedeutet z. B. a irgend eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, b^2 das Quadrat irgend einer beliebigen Zahl.

Die Lehre vom Rechnen mit allgemeinen Zahlen heißt die allgemeine Arithmetik, zum Unterschiede von der besonderen Arithmetik, welche nur die besonderen Zahlen in Betrachtung zieht.

§. 103.

Die Operationszeichen für allgemeine Zahlen sind dieselben, wie für besondere Zahlen.

Sind zwei oder mehrere allgemeine Zahlen mit einander zu multiplicieren, so wird das Multiplicationszeichen $\times$ oder . gewöhnlich weggelassen; z. B.

statt $a \times b$	oder $a \,.\, b$	schreibt man ab
„ $a \times b \times c$	„ $a \,.\, b \,.\, c$	„ „ abc,
„ $a \times b^2 \times c^3$	„ $a \,.\, b^2 \,.\, c^3$	„ „ ab^2c^3.

Das 2fache, 3fache, 4fache, . . . einer allgemeinen Zahl a wird durch 2a, 3a, 4a, . . . ausgedrückt. Die vor einem Buchstabenausdruck stehenden besonderen Zahlen heißen Coefficienten.

Der Coefficient einer allgemeinen Zahl kann immer als Factor derselben betrachtet werden; denn

$$2a = a \times 2 = a + a,$$
$$3a = a \times 3 = a + a + a,$$
$$4a = a \times 4 = a + a + a + a.$$

1 wird als Coefficient nicht angeschrieben; es bedeutet daher a soviel als 1a.

§. 104.

Ein Zahlenausdruck, welcher durch ein Zeichen, einen Coefficienten und einen Buchstaben oder auch mehrere ohne Zeichen mit einander verbundene Buchstaben dargestellt ist, heißt ein eingliedriger algebraischer Ausdruck oder ein Monom; z. B. a, $3b$, $-4ac$, $5a^2bx^3$.

Ein Zahlenausdruck, welcher mehrere durch das Zeichen $+$ oder $-$ verbundene eingliedrige Ausdrücke enthält, heißt ein mehrgliedriger algebraischer Ausdruck oder ein Polynom. Die einzelnen durch das Zeichen $+$ oder $-$ verbundenen Bestandtheile eines solchen Ausdruckes nennt man seine Glieder. Kommen in einem Ausdrucke zwei Glieder vor, so heißt er insbesondere ein Binom; kommen darin drei Glieder vor, so heißt er ein Trinom. So ist z. B. $2x - 3y$ ein Binom, $a^2 - ax + x^2$ ein Trinom, und beide Ausdrücke sind mehrgliedrig.

Mehrgliedrige Ausdrücke werden, wenn damit Rechnungsoperationen vorzunehmen sind, in Klammern eingeschlossen.

Wenn in einem Polynom mehrere Potenzen derselben Wurzel vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Uebersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten der gemeinschaftlichen Wurzel zu ordnen, indem man entweder mit der höchsten Potenz beginnt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läßt, oder indem man zuerst jenes Glied setzt, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinschaftlichen Wurzel enthält und dann zu immer höheren Potenzen hinaufsteigt. Im ersten Falle heißt das Polynom fallend, im zweiten steigend geordnet. So erhält z. B. der Ausdruck

$$3x^2 + 4 + 5x - 6x^3 + x^4$$

fallend geordnet die Form:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 4,$$

und steigend geordnet:

$$4 + 5x + 3x^2 - 6x^3 + x^4.$$

Ausdrücke, in denen dieselben Buchstaben und diese auch in gleicher Anzahl vorkommen, heißen gleichnamig; die Zeichen und Coefficienten können darin auch verschieden sein. Ausdrücke, in denen entweder verschiedene Buchstaben, oder gleiche Buchstaben, aber in ungleicher Anzahl vorkommen, heißen ungleichnamig; die Zeichen und Coefficienten können darin auch gleich sein. Z. B.

$$\left.\begin{matrix} 2a, \ 3a \\ -a^2x, 4a^2x \end{matrix}\right\} \text{sind gleichnamige,}$$

$$\left.\begin{matrix} 2a, \ 3b \\ -5ax, -5a^2x \end{matrix}\right\} \text{ungleichnamige Ausdrücke.}$$

§. 105.

Das Addieren allgemeiner Zahlenausdrücke.

Bei allgemeinen Zahlen kann die Addition nicht, wie bei besonderen Zahlen, wirklich verrichtet werden; man kann die Summe nur anzeigen, indem man die Glieder der Summanden mit ungeänderten Zeichen neben einander setzt.

Nur gleichnamige Ausdrücke können wirklich addiert, d. i. auf einen einfacheren Ausdruck reduciert werden.

Es ist zunächst

$$+a - a = +a - (+a) = 0$$
$$+3a - 3a = +3a - (+3a) = 0,$$

d. h. zwei entgegengesetzte Ausdrücke heben sich auf (geben 0 zur Summe).

Ferner ist

$$+5a + 3a = +a + a + a + a + a + a + a + a = +8a,$$
$$-5a - 3a = -a - a - a - a - a - a - a - a = -8a;$$

d. h. zwei gleichnamige Ausdrücke, welche dasselbe Vorzeichen haben, werden reduciert, wenn man die Summe der Coefficienten mit dem gemeinschaftlichen Vorzeichen vor den gemeinschaftlichen Buchstabenausdruck setzt.

Endlich ist

$+5a-3a=+a+a+a+a+a-a-a-a=+a+a=+2a,$
$-5a+3a=-a-a-a-a-a+a+a+a=-a-a=-2a;$

d. h. zwei gleichnamige Ausdrücke, welche verschiedene Vorzeichen haben, werden reduciert, wenn man die Differenz der Coefficienten mit dem Vorzeichen des größeren vor den gemeinschaftlichen Buchstabenausdruck setzt.

Allgemeine Zahlenausdrücke werden also addiert, wenn man die Glieder der Summanden mit unveränderten Zeichen neben einander setzt, und wenn darunter gleichnamige Zahlen vorkommen, diese reduciert.

Aus diesem Satze folgt auch:

Steht vor einer Klammer das Zeichen $+$, so bleiben bei Weglassung der Klammern die Zeichen innerhalb derselben unverändert; z. B.

$a-b+c+(p-q+r)=a-b+c+p-q+r.$

Aufgaben.

Man addiere folgende Zahlen:

1) $2a$, $3b$; 2) $3a$, $5b$;
3) $-7mx^2$, $8ny^2$; 4) $7a$, $-2b$, $-3c$;
5) $-5x^2$, $9y^2$, $-7z^2$; 6) $8mn$, $-8mp$, $6mq$.

Man reduciere folgende gleichnamige Ausdrücke:

7) $7a+8a$; 8) $19bx-5bx$;
9) $3ay+7ay-5ay$;
10) $12m-9m-17m+3m$;
11) $9a-8m-13m-2a$;
12) $20x+13y-9x+7y$;

Man addiere folgende Ausdrücke:

13) $\begin{array}{l} 2a-3b \\ 2c+5d \\ \hline \end{array}$ 14) $\begin{array}{l} 9a-5b \\ 6a-3b \\ \hline \end{array}$

15) $\begin{array}{r} a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline \end{array}$ 16) $\begin{array}{r} 13x+7y \\ -4x+3y \\ 8x-10y \\ \hline \end{array}$

17) $\begin{array}{r} 7m - 13n \\ 8m - n \\ m + 6n \\ \hline \end{array}$ 18) $\begin{array}{r} 3x - 2y + z \\ -x + 3y + 2z \\ 2x + y + 3z \\ \hline \end{array}$

19) $4a^2x - 3b^2y + (2a^2x + 7b^2y) + (8b^2y - 9a^2x) = ?$

20) $9a - 5b + c + [4a + 12b - 6c + (a - 3b + 5c)] = ?$

§. 106.

Das Subtrahieren allgemeiner Zahlenausdrücke.

Allgemeine Zahlenausdrücke werden subtrahiert, wenn man zu dem Minuend den mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Subtrahend addiert, und wenn gleichnamige Ausdrücke vorkommen, diese reduciert.

Für einen eingliedrigen Subtrahend folgt die Richtigkeit dieses Satzes unmittelbar aus §. 99.

Für einen mehrgliedrigen Ausdruck kann man sich davon auf folgende Art überzeugen:

Es sei $a - b$ der Minuend und $p - q + r$ der Subtrahend. Den Minuend kann man auch so darstellen:

$$a - b + p - p + q - q + r - r.$$

Nimmt man nun von dem so ausgedrückten Minuend den Subtrahend $+ p - q + r$ hinweg, so bleibt $a - b - p + q - r$ als Rest; mithin

$$a - b - (p - q + r) = a - b - p + q - r.$$

Daraus folgt auch:

Steht vor einer Klammer das Zeichen $-$, so müßen bei Weglassung der Klammern die Zeichen innerhalb derselben in die entgegengesetzten verändert werden.

Aufgaben.

Man subtrahiere folgende Zahlen:

1) $\begin{array}{r} 5a \\ 3b \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 7x \\ -2b \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 8a \\ -3a \\ \hline \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} -7ax \\ 2ax \\ \hline \end{array}$

5) $\begin{array}{l} -a^2b^2 \\ \underline{-9a^2b^2} \end{array}$ 6) $\begin{array}{l} 5x - 7a \\ \underline{2y + 4b} \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 8m - 5n \\ \underline{3m - 2n} \end{array}$ 8) $\begin{array}{l} a^2 + 7ab - 6b^2 \\ \underline{a^2 - ab} \end{array}$

9) $3a^2x + 5ax^2 - (-5a^2x + 3ax^2) = ?$
10) $5 - 4a + 3a^2 - 2a^3 - (1 - 2a + 3a^2 - 4a^3) = ?$
11) $37by^3 - (-18by^3) - (+13by^3) = ?$
12) $9x - 7y - (5x + y) + (8y - x) = ?$
13) $50xyz - [25xyz + (-10xyz)] = ?$
14) $17ax + 8by - [3ax - 5by - (2ax - 3by)] = ?$
15) $9a - 5b - [7a - 4b - \{3a + 10b - (4b - 7a)\}] = ?$

§. 107.

Das Multiplicieren allgemeiner Zahlenausdrücke.

1. Es seien die eingliedrigen Ausdrücke $4a$ und $-3b$ mit einander zu multiplicieren. Da die Coefficienten als Factoren der allgemeinen Zahlen betrachtet, und die Factoren in jeder beliebigen Ordnung mit einander multipliciert werden können, so ist $4a \,.\, -3b = 4 \,.\, -3 \,.\, a \,.\, b = -12 \,.\, ab = -12\,ab$.

Eingliedrige algebraische Ausdrücke werden daher mit einander multipliciert, indem man das Product der Coefficienten mit dem entsprechenden Vorzeichen (§. 100) dem Producte der allgemeinen Zahlen voraussetzt.

Kommen in den Factoren Potenzen derselben Wurzel vor, so läßt die Rechnung eine bedeutende Vereinfachung zu. Es ist

$$a \,.\, a^2 = a \,.\, aa = aaa = a^3,$$
$$a^2 \,.\, a^3 = aa \,.\, aaa = aaaaa = a^5,$$
$$a^5 \,.\, a^2 = aaaaa \,.\, aa = aaaaaaa = a^7.$$

Potenzen derselben Wurzel werden also multipliciert, indem man der gemeinschaftlichen Wurzel die Summe der Exponenten der Factoren zum Potenzexponenten gibt.

2. Ist ein mehrgliedriger Ausdruck $a + b$ mit einem eingliedrigen m zu multiplicieren, d. i. $a + b$ $m$mal als Summand zu setzen, so hat man

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot m &= (a+b) + (a + b) + (a + b) + \ldots m\text{mal}\\ &= a + a + a + \ldots m\text{mal} + b + b + b + \ldots m\text{mal}\\ &= am + bm,\end{aligned}$$

also

$$(a + b) \cdot m = am + bm,$$

d. h. **ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem eingliedrigen multipliciert**, indem man jedes Glied des ersteren mit dem eingliedrigen Factor multipliciert und die Theilproducte addiert.

Da das Product nicht geändert wird, wenn man die Factoren vertauscht, so ist auch

$$m \cdot (a + b) = am + bm.$$

3. Sollen zwei mehrgliedrige Factoren $a + b + c$ und $p + q + r$ multipliciert werden, so hat man, wenn der Multiplicand $a + b + c$ vorläufig durch m bezeichnet wird,

$$m \cdot (p + q + r) = m \cdot p + m \cdot q + m \cdot r;$$

folglich, wenn man statt m wieder seinen Wert setzt,

$$\begin{aligned}(a + b + c) \cdot (p + q + r) = \;&(a + b + c) \cdot p\\ &+ (a + b + c) \cdot q\\ &+ (a + b + c) \cdot r,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(a + b + c) \cdot (p + q + r) = \;&ap + bp + cp\\ &+ aq + bq + cq\\ &+ ar + br + cr;\end{aligned}$$

d. h. **zwei mehrgliedrige Ausdrücke werden mit einander multipliciert**, indem man jedes Glied des Multiplicands mit jedem Gliede des Multiplicators multipliciert und die Theilproducte addiert.

Man pflegt die mehrgliedrigen Factoren unter einander zu stellen, wie auch die Theilproducte so zu schreiben, dass die etwa vorkommenden gleichnamigen Ausdrücke gerade unter einander zu stehen kommen.

4. Wichtig sind folgende Ergebnisse der Multiplication:

a) $\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \qquad \end{array}$ also $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$;

d. h. die Summe zweier Zahlen multipliciert mit deren Differenz gibt die Differenz der Quadrate dieser Zahlen.

b) $\begin{array}{r} a + b \qquad \\ a + b \qquad \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$ also $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Eben so erhält man

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Das Quadrat eines Binoms besteht also aus dem Quadrate des ersten Gliedes, dem doppelten Producte beider Glieder und dem Quadrate des zweiten Gliedes. (§. 64.)

c) $(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Ebenso ist

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Der Cubus eines Binoms besteht also aus dem Cubus des ersten Gliedes, dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciert mit dem zweiten, dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem

Quadrate des zweiten, und dem Cubus des zweiten Gliedes. (§. 65.)

Aufgaben.

1) $7x \cdot 3y = ?$ 2) $9ab \cdot -5c = ?$

3) $-7a \cdot -3a = ?$ 4) $5ab \cdot -8bc = ?$

5) $-2a^2 \cdot 7a^3 = ?$ 6) $8ax^2 \cdot -2a^2x = ?$

7) $7a^2b^3 \cdot 4a^2c^3 \cdot 3bc = ?$

8) $5mx^2 \cdot -6nxy \cdot 7py^2 = ?$

9) $(2a + 3b - 5c) \cdot 4m = ?$

10) $(8x^2 - 3xy + 5y^2) \cdot -2xy = ?$

11) $(1 - 5x + 6x^2 + 3x^3 - 2x^4) \cdot -5x^2 = ?$

12) $5y(6y^3 - 4y^2 - 8y + 1) - 6y^2(3y^2 - 4y + 5) = ?$

13) $(7a - 2b)(4m + 3n) = ?$

14) $(5x + 8y)(2x - 3y) = ?$

15) $(3a + 2b)(3a - 2b) = ?$

16) $(4x^2 - 3y^2)(4x^2 + 3y^2) = ?$

17) $(4x - 5y)^2 = ?$ 18) $(3m + 8n)^2 = ?$

19) $(9a + b)^3 = ?$ 20) $(2x - 3y)^3 = ?$

21)
$$\begin{array}{rrrrr}
3x^2 & -4x & -5 & & \\
2x^2 & -3x & +4 & & \\
\hline
6x^4 & -8x^3 & -10x^2 & & \\
 & -9x^3 & +12x^2 & +15x & \\
 & & +12x^2 & -16x & -20 \\
\hline
6x^4 & -17x^3 & +14x^2 & -x & -20
\end{array}$$

22) $(a^3 - 5a^2 + 6)(4a - 7) = ?$

23) $(3a^2x^2 - 4ax - 9)(7ax + 8) = ?$

24) $(9x^2 - 24x + 16)(3x - 4) = ?$

25) $(x + 3)(x - 5)(x + 6) = ?$

26) $(3x - 5a)(6x - 7a)(7x + 4a) = ?$

27) $(1 - 2x + 3x^2)(2 - 3x + 4x^2) = ?$

28) $(5b^2 + 3by - y^2)(2b^2 - 4by + 5y^2) = ?$

29) $(5a^3 + 2a^2 - 7a + 8)(3a^2 - 7a - 6) = ?$

30) $(7a^2x^2 - 4ax + 1)(3a^2x^2 + 3ax + 2)$ $(a^2x^2 - 2ax + 3) = ?$

§. 108.

Das Dividieren allgemeiner Zahlenausdrücke.

1. Es ist

$$ab \cdot c = abc, \quad \text{daher} \quad abc : c = ab;$$
$$3bx \cdot -2a = -6abx, \quad „ \quad -6abx : -2a = 3bx;$$
$$-7m \cdot -3mn = 21mmn, \quad „ \quad 21mmn : -3mn = -7m.$$

Eingliedrige algebraische Ausdrücke werden daher durch einander dividiert, indem man den Quotienten der Coefficienten mit dem entsprechenden Vorzeichen (§. 101) dem Quotienten der allgemeinen Zahlen voraussetzt. Man erhält aber den Quotienten der allgemeinen Zahlen, wenn man im Dividende diejenigen Buchstaben, welche auch im Divisor vorkommen, und zwar in gleicher Anzahl wegläſst.

Kommen im Divisor Buchstaben vor, welche der Dividend nicht enthält, so kann man die Division durch diese Buchstaben nur anzeigen, indem man sie in den Nenner des Quotienten setzt; z. B.

$$abx : by = \frac{abx}{by} = \frac{ax}{y}.$$

Einfach gestaltet sich die Division allgemeiner Zahlen, wenn sie Potenzen derselben Wurzel sind. Man hat

$$a^3 : a = aaa : a = aa = a^2,$$
$$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3,$$
$$a^7 : a^3 = aaaaaaa : aaa = aaaa = a^4.$$

Potenzen derselben Wurzel werden also dividiert, indem man von dem Exponenten des Dividends den

Exponenten des Divisors subtrahiert, und die erhaltene Differenz der gemeinschaftlichen Wurzel zum Potenzexponenten gibt.

Dieser Satz hat vorerst nur Sinn und Giltigkeit, wenn der Potenzexponent des Dividends größer ist als jener des Divisors. Sind beide Exponenten gleich, so würde man nach diesem Satze eine Potenz mit dem Exponenten Null erhalten; ist der Exponent des Dividends kleiner als der des Divisor, so käme bei Anwendung des obigen Satzes eine Potenz mit negativem Exponenten zum Vorschein. Es muß daher zunächst noch die Bedeutung solcher Potenzen festgestellt werden.

Nach dem obigen Satze ist

$$a^3 : a^3 = a^0;$$

es ist aber auch

$$a^3 : a^3 = aaa : aaa = 1;$$

folglich

$$a^0 = 1;$$

d. h. eine Potenz mit dem Exponenten 0 ist gleich 1.

Nach dem obigen Satze hat man ferner

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3};$$

es ist aber auch

$$a^2 : a^5 = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3};$$

folglich

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3};$$

d. h. eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich 1 dividiert durch dieselbe Potenz mit positivem Exponenten.

Nach dieser Erweiterung des Begriffes einer Potenz hat nun der oben für die Division zweier Potenzen derselben Wurzel aufgestellte Satz allgemeine Giltigkeit.

2. Es ist

$$(a + b + c) \, . \, m = am + bm + cm,$$

folglich umgekehrt

$$(am + bm + cm) : m = a + b + c.$$

Ein mehrgliedriger Ausdruck wird also durch einen eingliedrigen dividiert, indem man jedes Glied desselben durch den eingliedrigen Divisor dividiert.

Wenn der Dividend eingliedrig und der Divisor mehrgliedrig ist, so kann man den Quotienten nur anzeigen; z. B.

$$a : (m + n) = \frac{a}{m + n}.$$

3. Wenn man $a + b + c$ mit $p + q + r$ multipliciert, so erhält man

Multiplicand	$a + b + c$	Divisor
Multiplicator	$p + q + r$	Quotient
Product	$\left\{\begin{array}{r} ap + bp + cp \\ + aq + bq + cq \\ + ar + br + cr \end{array}\right\}$	Dividend

Wird hier das Product als Dividend und der Multiplicand als Divisor angenommen, so muß der Multiplicator als Quotient herauskommen. Aus dem Gesetze, nach welchem die Glieder des Divisors und des Quotienten in ihrem Producte, dem Dividende, zusammengestellt erscheinen, ergibt sich nun für die Division zweier mehrgliedriger Ausdrücke folgendes Verfahren:

1) Man dividiere das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors, so erhält man das erste Glied des Quotienten. Mit diesem multipliciere man den vollständigen Divisor und subtrahiere das Product vom Dividende.

2) Man dividiere das erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors, wodurch man das zweite Glied des Quotienten erhält, und wiederhole das vorhergehende Verfahren, bis alle Glieder des Dividends in Anspruch genommen wurden.

Sind der Dividend und der Divisor Polynome, welche Potenzen derselben Wurzel enthalten, so müßen sie vor der Division übereinstimmend geordnet werden.

4. Es ist

$$
\begin{array}{l}
(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b, \\
\;\; a^2 + ab \\
- \quad - \\
\hline
\quad - ab - b^2 \\
\quad - ab - b^2 \\
\quad + \quad + \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b; \\
\;\; a^2 - ab \\
- \quad + \\
\hline
\quad + ab - b^2 \\
\quad + ab - b^2 \\
\quad - \quad + \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

d. h. die Differenz zweier Quadrate durch die Summe der Wurzeln dividiert, gibt die Differenz der Wurzeln; die Differenz zweier Quadrate durch die Differenz der Wurzeln dividiert, gibt die Summe der Wurzeln.

Aufgaben.

1) $15ab : 3b = ?$
2) $-24mxy : -4xy = ?$
3) $8a^3 : 4a^2 = ?$
4) $16x^4y^4 : 8x^3y^3 = ?$
5) $54ab^2x^3 : 6bx^2 = ?$
6) $-7a^2m^5 : 4a^2m = ?$
7) $(20ac - 12bc) : 4c = ?$
8) $(15a^2 - 18ab) : -5a = ?$
9) $(21m^4 + 15m^3 - 18m^2) : 3m^2 = ?$
10) $(5a^3 - 25a^4 - 10a^5 + 15a^6) : 5a^2 = ?$
11) $(16x^3y^3 - 12x^2y^2 + 8xy + 4) : 4x^2y^2 = ?$

12) $(15a^2 + 19ab - 10b^2) : (5a - 2b) = 3a + 5b$

$$
\begin{array}{l}
15a^2 - 6ab \\
\underline{- \qquad +} \\
\qquad + 25ab - 10b^2 \\
\qquad + 25ab - 10b^2 \\
\qquad \underline{- \qquad\qquad +} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

13) $(9x^2 - 49) : (3x + 7) = ?$

14) $(25a^2 - 80ay + 64y^2) : (5a - 8y) = ?$

15) $(15 + 8x - 32x^2 + 32x^3 - 15x^4) : (3 + 4x - 5x^2)$
$= 5 - 4x + 3x^2$

$$
\begin{array}{l}
15 + 20x - 25x^2 \\
\underline{- \quad - \quad +} \\
\quad -12x - 7x^2 + 32x^3 \\
\quad -12x - 16x^2 + 20x^3 \\
\quad \underline{+ \quad + \quad -} \\
\qquad\quad + 9x^2 + 12x^3 - 15x^4 \\
\qquad\quad + 9x^2 + 12x^3 - 15x^4 \\
\qquad\quad \underline{- \quad - \quad +} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

16) $(15a^3 + 4a^2b - 29ab^2 + 10b^3) : (3a + 5b) = ?$

17) $(a^6 - 9a^4x^2 + 27a^2x^4 - 27x^6) : (a^4 - 6a^2x^2 + 9x^4) = ?$

18) $(12 + x - 18x^2 - 73x^3 + 36x^5) : (4 - 5x - 6x^2) = ?$

19) $(8m^6 + 27) : (4m^4 - 6m^2 + 9) = ?$

20) $(12a^4 - 37a^3 + 29a^2 + 13a - 20) : (3a^2 - 7a + 5) = ?$

21) $(x^6 - 16x^3y^3 + 64y^6) : (x^4 + 4x^3y + 12x^2y^2 + 16xy^3 + 16y^4) = ?$

22) $(15x^4 + 8x^3y - 41x^2y^2 + 10xy^3 + 8y^4) : (5x^2 + 6xy - 8y^2) = ?$

§. 109.

Das Substituieren.

In einem Zahlenausdrucke an die Stelle der allgemeinen Zahlen (Buchstaben) besondere Zahlenwerte setzen, und mit diesen die vorgeschriebenen Rechnungen ausführen, heißt **substituieren**.

Z. B. Ist der Ausdruck $y = ax^2 + 2bx$ für $a = 2$, $b = 1$ und $x = 4$ zu berechnen, so hat man

$$y = 2 \,.\, 4^2 + 2 \,.\, 1 \,.\, 4 = 32 + 8 = 40.$$

Aufgaben.

Man bestimme die Zahlenwerte folgender Ausdrücke für die beigefügten Substitutionen:

1) $A = a + 2b - 3c$ für $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$.

2) $B = 2m - 3n + 4p$ für $m = 8$, $n = -3$, $p = -1$.

3) $C = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ für $x = 5$.

4) $D = 3ab - 5ac + 3bc$ für $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$.

5) $E = 6x^3 - 15x^2 + 48x - 10$ für $x = 3$.

6) $F = 72x^2 - 17xy - 72y^2$ für $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{2}{3}$.

7) $G = \dfrac{ab}{a + b}$ für $a = 450$, $b = 23{\cdot}84$.

8) $H = \dfrac{MC + mc}{M + m}$ für $M = 80$, $m = 20$, $C = 5$, $c = 8$.

9) $K = ax^3 - bx^2 + cx - d$ für $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ $d = 4$, $x = 2$.

10) $L = m^4 - 4m^3n + 6m^2n^2 - 4mn^3 + n^4$ für $m = 3$, $n = -2$.

11) $M = (3x + 5y - 6z)\,(7x - 2y + 3z)$ für $x = 4$, $y = 5$, $z = 6$.

12) $N = \dfrac{a^3b^3 - 3a^2b^2c + 3abc^2 - c^3}{ab - c}$ für $a = 9$, $b = 7$, $c = -5$.

13) $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ für $a = 75{\cdot}8$, $b = 55{\cdot}4$, $c = 50{\cdot}2$ und $s = \frac{a+b+c}{2}$.

14) $Q = \dfrac{x - \frac{a}{b}}{\frac{c}{d} - y}$ für $x = -\frac{5}{2}$, $y = \frac{7}{4}$, $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 4$, $d = 2$.

15) $R = \dfrac{MTW + mtw}{MW + mw}$ für $M = 1$, $m = 10$, $T = 100$, $t = 22{\cdot}5$, $W = 8$, $w = \frac{1}{30}$.

16) $S = \dfrac{a}{1+b}\left[\dfrac{l+c}{m} \cdot k\left(\dfrac{n}{q} + P\right) - \left(\dfrac{n}{q} + p + f\right)\right]$

für $a = 6{\cdot}287$, $b = 0{\cdot}14$, $c = 1$, $f = 144$, $k = 0{\cdot}025$, $l = 19$, $m = 8$, $n = 0{\cdot}000142$, $P = 2176$, $p = 10330$, $q = 0{\cdot}00000023$.

Anhang.

Uebersicht der Maße, Gewichte und Münzen.

I. Zeit- und Winkelmaße.

Die Einheiten zur Zeitbestimmung sind Jahre, Monate, Wochen, Tage u. s. f.

Ein Jahr hat 12 Monate, 1 Monat wird in der Zinsrechnung gewöhnlich zu 30 Tagen, somit das Jahr zu 360 Tagen angenommen. Nach dem Kalender hat der Februar 28 oder 29 Tage, April, Juni, September, November haben je 30 und die übrigen Monate haben je 31 Tage, so dass auf ein gemeines Jahr 365, auf ein Schaltjahr 366 Tage kommen. Eine Woche hat 7 Tage, 1 Tag 24 Stunden, 1 Stunde 60 Minuten, 1 Minute 60 Secunden.

Der Umfang eines jeden Kreises wird in 360 Grade eingetheilt. Jedem Bogengrade entspricht am Mittelpunkte des Kreises ein Winkel, welcher auch ein Grad genannt wird. Ein Grad (°) hat 60 Minuten, 1 Minute (′) 60 Secunden (″).

II. Mengeneinheiten.

Ein Schock hat 60, ein Schilling 30, ein Mandel 15, ein Dutzend 12 Stück.

Ein Bund Federn sind 25 Stück.

Ein Ballen Papier hat 10 Rieß, 1 Rieß 20 Buch, 1 Buch 24 Schreibbogen oder 25 Druckbogen.

III. Maße, Gewichte und Münzen der österreichisch-ungarischen Monarchie.

1. Maßeinheiten.

Die Maße unterscheidet man in Längen-, Flächen- und Körpermaße.

a. Längenmaße.

Um Längen zu messen, nimmt man irgend eine bekannte Länge als Einheit an. Bei Linien wird gewöhnlich ein Fuß oder Schuh, bei Tüchern, Zeugen und anderen Schnittwaaren die Elle als Längeneinheit angenommen.

Der Werkfuß ('), dessen man sich im gewöhnlichen Leben bedient, wird in 12 Zoll und der Zoll in 12 Linien (''') eingetheilt; 6 Werkfuß nennt man eine Klafter (°). Beim Feldmessen wird der Fuß in 10 Zoll, und der Zoll in 10 Linien eingetheilt. 10 Fuß nennt man eine Ruthe. Jenes Maß heißt das Duodecimal-, dieses das Decimalmaß.

4000 Wiener Klafter machen eine österreichische Postmeile; 1 österr. Meile = 1·022302 geographische oder deutsche Meilen; 1 geogr. Meile = 0·978184 österr. Meilen.

Als Schnittwaarenmaß dient die Elle, welche in Halbe, Viertel, Achtel, oder in Drittel eingetheilt wird. Die n. ö. Elle ist = 2·465 Wiener Fuß.

b. Flächenmaße.

Zum Messen der Flächen, als Länder, Wiesen, Aecker u. dgl. bedient man sich des Quadratmaßes.

1 Quadratklafter (□°) hat 36 Quadratfuß (□'), 1 Quadratfuß 144 Quadratzoll (□''), und 1 Quadrat-

zoll 144 Quadratlinien (□‴); 1 Quadratmeile enthält 16000000 □°; 1 österr. □ Meile = 1·045102 geogr. □ Meilen; 1 geogr. □ Meile = 0·956844 österr. □ Meilen.

Das Joch zu 3 Metzen Aussaat hat 1600 □°.

c. Körpermaße.

Zur Bestimmung des Inhaltes eines Körpers dient das Cubikmaß.

1 Cubikklafter = 216 Cubikfuß, 1 Cub.′ = 1728 Cubikzoll, 1 Cub.″ = 1728 Cubiklinien.

Zum Körpermaße gehört auch das sogenannte Hohlmaß, womit das Getreide und die Flüssigkeiten gemessen werden.

Beim Getreidemaße hat man folgende Eintheilung:

1 Mut hat 30 Metzen, 1 Metzen 2 Halbe, 4 Viertel oder 8 Achtel; 1 Achtel = 2 Müllermaßel oder 8 Futtermaßel zu 2 Becher; 1 n. ö. Metzen hat 1·9471 Cubikfuß.

Das Flüssigkeitsmaß hat nachstehende Verwandlungszahlen:

1 Fuder Wein = 32 Eimer; 1 Fass Wein hat 10, und 1 Fass Bier 2 Eimer; 1 Eimer = 40 Maß zu 4 Seidel; 1 n. ö. Eimer hat 1·792 Cubikfuß.

2. Gewichtseinheiten.

In der österreichisch-ungarischen Monarchie sind folgende Gewichte üblich:

a. Das Handelsgewicht. Ein Centner hat 100 Wiener Pfund (℔), 1 Pfund 32 Loth, 1 Loth 4 Quentchen.

b. Das Markgewicht, dessen man sich beim Abwägen des Silbers und der daraus verfertigten Sachen bedient. Die Einheit desselben ist die Wiener Mark; sie hat 16 Loth, 1 Loth 4 Quentchen, 1 Quentchen 4 Pfennige oder Denar, 1 Pfennig 2 Heller, 1 Heller 128 Richtpfennige, so dass auf eine Mark 65536 Richtpfennige kommen. Ein Loth des Markgewichtes ist etwas schwerer als 1 Loth Handelsgewicht.

Beim Münzwesen bediente man sich früher in Deutschland meistens der kölnischen Mark, welche etwas leichter ist als die Wiener Mark; es gehen nämlich 6 köln. Mark auf 5 Wiener Mark. Gegenwärtig wird bei der Ausmünzung das Zollpfund, welches beiläufig $28\frac{4}{7}$ Loth des Wiener Handelsgewichtes beträgt, zu Grunde gelegt. Dieses Pfund wird als Münzgewicht in 1000 Tausendtheile und jeder solche Theil wieder in 10 gleiche Theile, welche Ass heißen, eingetheilt.

(Das Zollpfund à 30 Zollloth wird auch bei Postsendungen angewendet.)

c. Das Ducatengewicht zum Abwägen des Goldes und der daraus verfertigten Sachen. Der Ducaten (#) als Gewicht wird in 60 Ducatengran eingetheilt; 5 # wiegen ungefähr 1 Loth Handelsgewicht.

d. Das Juwelengewicht. 1 Karat = 4 Juwelengran; 85 Juwelenkarat sind ungefähr 1 Loth Handelsgewicht schwer.

e. Das Apothekergewicht. 1 Pfund = 12 Unzen, 1 Unze = 8 Drachmen, 1 Drachme = 3 Skrupel, 1 Skrupel = 20 Apothekergran. Ein Apothekerpfund enthält genau 24, daher eine Unze genau 2 Loth des Handelsgewichtes.

f. Das symbolische Gewicht zur Prüfung des Goldes und des Silbers. Die Einheit ist die verjüngte Mark, welche einen Pfennig des Mark- und Silbergewichtes enthält. Für Gold wird die Mark in 24 Karat zu 12 Grän eingetheilt, und es heißt z. B. 23karatig solches Gold, welches 23 Theile feines Gold und 1 Theil Zusatz enthält. Beim Silber theilt man die Mark in 16 Loth zu 18 Grän und nennt z. B. 13löthig solches Silber, in welchem 13 Theile feines Silber, und 3 Theile Zusatz vorkommen.

Der Feingehalt der Gold- und Silbermünzen der neuen Währung wird in Tausendtheilen ausgedrückt. So z. B. enthält der neue österr. Gulden 900 Tausendtheile feines Silber und 100 Tausendtheile Kupfer; sein Feingehalt ist also $\frac{900}{1000}$ oder $\frac{9}{10}$.

3. Geld- und Münzeinheiten.

In Oesterreich rechnete man früher nach Gulden, Kreuzern und Pfennigen Conventions-Münze, wornach aus einer kölnischen Mark feinen Silbers 20 Gulden ausgeprägt wurden. 1 Gulden (fl.) hatte 60 Kreuzer, 1 Kreuzer 4 Pfennige.

Seit 1. November 1858 ist die österreichische Währung, in welcher aus einem Zollpfund feinen Silbers 45 Gulden geprägt werden, das alleinige gesetzliche Geld der ganzen Monarchie. Ein neuer Gulden wird in 100 Neukreuzer (kr.) eingetheilt.

100 fl. C. M. = 105 fl. ö. W.

Die gegenwärtig geprägten Münzen sind theils Vereins-, theils Landes-, theils Scheide-, theils Handelsmünzen.

Vereinsmünzen sind jene, die nicht nur im Gebiete des Kaiserreiches, sondern auch in den deutschen Staaten zum vollen gesetzlichen Werte angenommen werden müßen.
Sie werden in Silber ausgeprägt, und zwar:

Zwei-Vereinsthalerstücke, 15 aus einem Zollpfund feinen Silbers, mithin à 3 fl. ö. W.

Ein-Vereinsthalerstücke, 30 aus einem Zollpfund feinen Silbers, mithin à $1\frac{1}{2}$ fl. ö. W.

Landesmünzen werden ebenfalls in Silber ausgeprägt, müßen jedoch nur innerhalb des Kaiserstaates bei allen Zahlungen zum vollen gesetzlichen Werte angenommen werden. Es sind dieselben: Zweiguldenstücke zu $22\frac{1}{2}$, Einguldenstücke zu 45, und Viertelguldenstücke zu 180 aus einem Zollpfund feinen Silbers.

Scheidemünzen dienen nur zur Ausgleichung von Beträgen, die kleiner sind als 25 kr. Sie werden theils in Silber, theils in Kupfer ausgeprägt; jedoch haben die Silberscheidemünzen einen geringeren Feingehalt, als sie verhältnismäßig zu den Landesmünzen haben sollten.

In Silber werden Stücke zu 20, 10 und 5 kr., in Kupfer Stücke zu 4, 1 und $\frac{1}{2}$ kr. ausgeprägt.

Handelsmünzen endlich haben die Eigenschaft eines allgemeinen Zahlungsmittels; ihr Wert gegen die Landeswährung bleibt deshalb auch nicht unveränderlich, sondern richtet sich nach den Bedürfnissen des Handels. Als Handelsmünzen werden nach dem neuen Münzgesetze ausgeprägt:

1) Vereinsgoldmünzen, nämlich Kronen und halbe Kronen; von den ersteren entfallen 50, von den letzteren 100 auf ein Pfund feinen Goldes. Eine Krone gilt ungefähr 13 fl. 80 kr. und wird weiter in 10 Kronzehntel getheilt.

2) Die kais. Ducaten, 67 Stück auf eine köln. Mark Gold, welches $23\frac{2}{3}$ Karat fein ist.

3) In Silber die sogenannten Levantiner-Thaler mit dem Bildnis der Kaiserin Maria Theresia und der Jahreszahl 1780, 10 Stück aus einer köln. Mark feinen Silbers.

Außerdem hat man in Oesterreich als Papiergeld die Banknoten à 10, 100, 1000 Gulden, und Staatsnoten à 1, 5 und 50 Gulden.

In den meisten österreichischen Provinzen rechnete man früher auch noch in Scheinen oder Wiener-Währung 100 fl. W. W. = 40 fl. C. M. = 42 fl. ö. W. Dieses Geld ist jedoch seit 1. Juli 1858 außer Umlauf gesetzt.

IV. Die metrischen Maße und Gewichte.

Den metrischen Maßen und Gewichten, deren Einführung gegenwärtig auch in Oesterreich bevorsteht, liegt das Meter, welchen man als den zehnmillionsten Theil der Länge eines Erdmeridian-Quadranten angenommen hat, als **Normaleinheit** zu Grunde. Für die nach dem Decimalsystem angenommenen Oberabtheilungen sowohl des Meter, als der darauf beruhenden Flächen- und Körpermaße, und selbst der Gewichte bedient man sich der griechischen Wörter: Deka für 10, Hekto für 100, Kilo für 1000, Myria für 10000; für die Unterabtheilungen der aus dem Lateinischen entlehnten Wörter: Deci für $\frac{1}{10}$, Centi für $\frac{1}{100}$, Milli für $\frac{1}{1000}$.

Beim **Längenmaße**, dessen Einheit der **Meter** ist, hat man also

1 Dekameter	=	10	Meter
1 Hektometer	=	100	"
1 Kilometer	=	1000	"
1 Myriameter	=	10000	"
1 Decimeter	=	$\frac{1}{10}$	"
1 Centimeter	=	$\frac{1}{100}$	"
1 Millimeter	=	$\frac{1}{1000}$	"

1 Meter = 3·163750 Wien. Fuß = 1·283468 Wien. Ellen.

1 Myriameter = 1·318229 österr. Meilen.

1 Wiener Fuß = 0·316081 Meter.

1 Wiener Elle = 0·779139 "

1 österr. Meile = 0·7585937 Myriameter.

Die Einheit des **Flächenmaßes** ist das **Ar**, ein Quadrat, dessen Seite ein Dekameter beträgt. 100 Ar = 1 Hektar.

1 Ar = 27·8036 Wien. □° = 0·01737727 n. ö. Joch.

1. Wien. □ Klafter = 0·03597 Ar.

1 n. ö. Joch = 57·54644 Ar.

Als Einheit des **Körpermaßes** nimmt man einen Würfel an, dessen Seite ein Decimeter beträgt, und welcher **Liter** genannt wird. 100 Liter = 1 Hektoliter. 1000 Liter = 1 Kiloliter oder Ster.

1 Hektoliter = 3·166694 Wien. Cubikfuß = 1·62364 n. ö. Metzen = 1·76713 n. ö. Eimer.

1 Wien. Cubikfuß = 0·31579 Hektoliter.
1 n. ö. Metzen = 0·61487 „
1 n. ö. Eimer = 0·56589 „

Als Einheit des Gewichtes betrachtet man das Gewicht des reinen Wassers, welches in einem hohlen Würfel, dessen Seite einen Centimeter beträgt, enthalten ist; man nennt diese Gewichtseinheit Gramm. 1000 Gramm = 1 Kilogramm ist das metrische Pfund.

1 Kilogramm = 1·785676 Wiener Pfund.
= 3·563233 Wiener Mark.
1 Wien. Pfd. = 0·560012 Kilogramm.
1 Wien. Mark = 0·280644 „

V. Die wichtigsten ausländischen Maße, Gewichte und Münzen.

1. Längenmaße.

Baiern. 1 Fuß hat 12 Zoll à 12 Linien; 1 geom. Ruthe = 10 Fuß. 1 baier. Fuß = 0·9233 W. Fuß. 1 baier. Elle = 1·069 W. Ellen.

England. 1 Yard à 3 Fuß = 2·8926 W. Fuß = 1·1735 W. Ellen.

Frankfurt a. M. 1 Elle = 0·7024 W. Ellen. 1 Frankfurter Brabanter Elle = 0·8973 W. Ellen. 1 Frankfurter Stab = 1·5169 W. Ellen.

Frankreich. Das Meter, wie oben unter IV.
1 alte Toise hat 6 Pariser Fuß à 12 Zoll à 12 Linien.
1 Pariser Fuß = 1·027612 W. Fuß.

Hamburg. 1 Elle = 0·7355 W. Ellen. 1 Hamburger Brabanter Elle = 0·8873 W. Ellen.

Italien. Der Metro, wie in Frankreich.

Preußen. 1 Fuß hat 12 Zoll à 12 Linien; Ruthe 1 = 12

Fuß. 1 preuß. Fuß = 0·9929 W. Fuß. 1 preuß. Elle = 0·8559 W. Ellen.

Rußland. 1 Saschen = 3 Arschin = 7 Fuß. 1 russ. Fuß = 0·9642 W. Fuß. 1 Arschin = 0·9127 W. Ellen.

Sachsen. 1 Klafter hat 6 Fuß à 12 Zoll. 1 sächs. Fuß = 0·8959 W. Fuß. 1 Leipziger Elle = 0·7269 W. Ellen.

Schweiz. 1 Klafter hat 6 Fuß à 10 Zoll à 10 Linien; 1 Ruthe = 10 Fuß. 1 schweiz. Fuß = 0·949 W. Fuß. 1 schweiz. Elle = 0·77 W. Ellen.

2. Getreidemaße.

Aegypten. 1 Arbeb von Cairo = 2·9037 n. ö. Metzen.

Baiern. 1 Scheffel à 6 Metzen = 3·6153 n. ö. Metzen.

England. 1 Quarter hat 8 Bushels à 8 Gallons. 1 Quarter = 4·7278 n. ö. Metzen.

Frankreich. Das Hektoliter, wie oben unter IV.

Italien, wie Frankreich.

Preußen. 1 Wispel hat 24 Scheffel à 16 Metzen. 1 Scheffel = 0·8936 n. ö. Metzen.

Rußland. 1 Tschetwert hat 8 Tschetwerik à 4 Tschetwerka. 1 Tschetwert = 3·4128 n. ö. Metzen.

Sachsen. 1 Wispel hat 2 Malter à 12 Scheffel à 16 Metzen. 1 Scheffel = 1·692 n. ö. Metzen.

Schweiz. 1 Malter hat 10 Viertel à 10 Immi oder à 16 Mäßlein. 1 Malter = 2·4388 n. ö. Metzen.

3. Flüssigkeitsmaße.

Baiern. 1 Schenkeimer hat 60, 1 Visiereimer 64 Maß. 1 baier. Maß = 0·7554 n. ö. Maß.

England. Die Tonne für Wein hat 252, für Ale 192 Gallons. 1 Gallon = 3·2106 n. ö. Maß.

Frankreich. Das Liter, wie unter IV.

Italien, wie Frankreich.

Preußen. 1 Oxhoft hat $1\frac{1}{2}$ Ohm à 2 Eimer à 2 Anker à 30 Quart. 1 Quart = 0·8081 n. ö. Maß.

Rußland. 1 Fass hat 40 Wedro à 10 Kruschke. 1 Kruschka = 0·8691 n. ö. Maß.

Sachsen. 1 Fuder hat 12 Eimer à 72 Kannen. 1 Kanne = 0·6611 n. ö. Maß.

Schweiz. 1 Ohm hat 100 Maß. 1 schweiz. Maß = 1·06 n. ö. Maß.

4. Gewichte.

Baiern. 1 Centner hat 100 Pfund à 32 Loth. 1 baier. Pfund = 0·999979 W. Pfund.

England. Das Handels- oder Avoir-du-poids-Gewicht (adp.): die Tonne hat 20 Centner zu 4 Quarters oder 8 Stein oder 112 Pfund à 16 Unzen à 16 Drachmen. 1 Pfd. adp. = 0·81 W. Pfund. — Das Troy-Pfund von 12 Unzen à 20 Pennyweights à 24 Grains = 0·6665 W. Pfund.

Frankfurt a. M. 1 Centner hat 100 Pfund (Zollpfund) à 32 Loth à 4 Quint à 4 Richtpfennige. 1 Zollpfund = 0·8928 W. Pfund.

Frankreich. Das Kilogramm, wie oben unter IV.

Hamburg. 1 Centner hat 100 Pfund (Zollpfund) à 10 Neuloth à 10 Quint à 10 Halbgramm.

Italien, wie Frankreich.

Preußen. 1 Centner hat 100 Pfund (Zollpfund) à 30 Loth à 10 Quentchen à 10 Cent à 10 Korn.

Rußland. 1 Pud hat 40 Pfund à 96 Solotnik à 96 Doli. 1 russ. Pfund = 0·7313 W. Pfund.

Sachsen, wie Preußen.

Schweiz. 1 Centner hat 100 Pfund (Zollpfund) à 32 Loth à 4 Quentchen.

Zollverein. 1 Zollcentner = 100 Zollpfund à 30 Loth. 1 Zollpfund = $\frac{1}{2}$ Kilogramm = 0·8928 W. Pfund.

5. Rechnungsmünzen.

Baden rechnet nach Gulden süddeutscher Währung, von denen 52$\frac{1}{2}$ aus einem Zollpfund feinen Silbers geprägt werden. 1 fl. südd. W. = $\frac{6}{7}$ fl. ö. W. 1 Gulden hat 60 Kreuzer à 4 Pfennige.

Baiern, wie Baden.

Belgien, wie Frankreich.

Dänemark rechnet nach Reichsthalern à 6 Mark à 16 Schillinge. 1 Reichsthl. = 1·1377 fl. ö. W.

England rechnet nach Pfund oder Livres Sterling à 20 Schilling à 12 Pences oder Deniers. 1 Pfund Sterling = 10·1051 fl. ö. W.

Frankfurt a. M., wie Baden.

Frankreich rechnet nach Francs à 100 Centimes. 1 Franc = 0·405 fl. ö. W.

Griechenland rechnet nach Drachmen à 100 Lepta. 1 Drachme = 0·3626 fl. ö. W.

Hamburg rechnet nach Mark à 16 Schillinge à 12 Pfennige. 1 Mark Banco = 0·7584 fl. ö. W.; 1 Mark Courant = 0·6 fl. ö. W.

Holland rechnet nach Gulden à 100 Cents. 1 fl. holl. = 0·8505 fl. ö. W.

Italien rechnet nach Lire nuove à 100 Centesimi. 1 Lira nuova = 1 Franc = 0·405 fl. ö. W.

Kirchenstaat rechnet nach Scudi à 10 Paoli à 10 Bajocchi. 1 Scudo = 2·1787 fl. ö. W.

Nordamerikanische Freistaaten rechnen nach Dollars à 100 Cents. 1 Dollar = 2·0155 fl. ö. W.

Portugal rechnet nach Millereis à 1000 Reis. 1 Millereis = 2·2435 fl. ö. W.

Preußen rechnet nach Thalern der norddeutschen Thalerwährung à 30 Silbergroschen à 12 Pfennige. 1 Thlr. = $1\frac{1}{2}$ fl. ö. W.

Rußland rechnet nach Rubeln à 100 Kopeken. 1 Silberrubel = 1·6192 fl. ö. W.

Sachsen rechnet nach Thalern Thalerwährung à 30 Neugroschen à 10 Pfennige. 1 Thl. = $1\frac{1}{2}$ fl. ö. W.

Schweden rechnet nach Reichsthalern Reichsmünze à 100 Oere. 1 Reichsthaler = 0·5739 fl. ö. W.

Schweiz rechnet nach Franken à 100 Rappen. 1 Frank = 0·405 fl. ö. W.

Spanien rechnet nach Duros (Piaster) à 20 Reales. 1 Duro = 2·1298 fl. ö. W.

Türkei rechnet nach Piastern à 40 Para. 1 Piaster = 0·0899 fl. ö. W.

Würtemberg, wie Baden.

[illegible]

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Sechster Abschnitt.

Siebenter Abschnitt.

Achter Abschnitt.

Die Verhältnisrechnungen.

Neunter Abschnitt.

Elemente der allgemeinen Arithmetik.

Anhang.

Uebersicht der Maße, Gewichte und Münzen.