

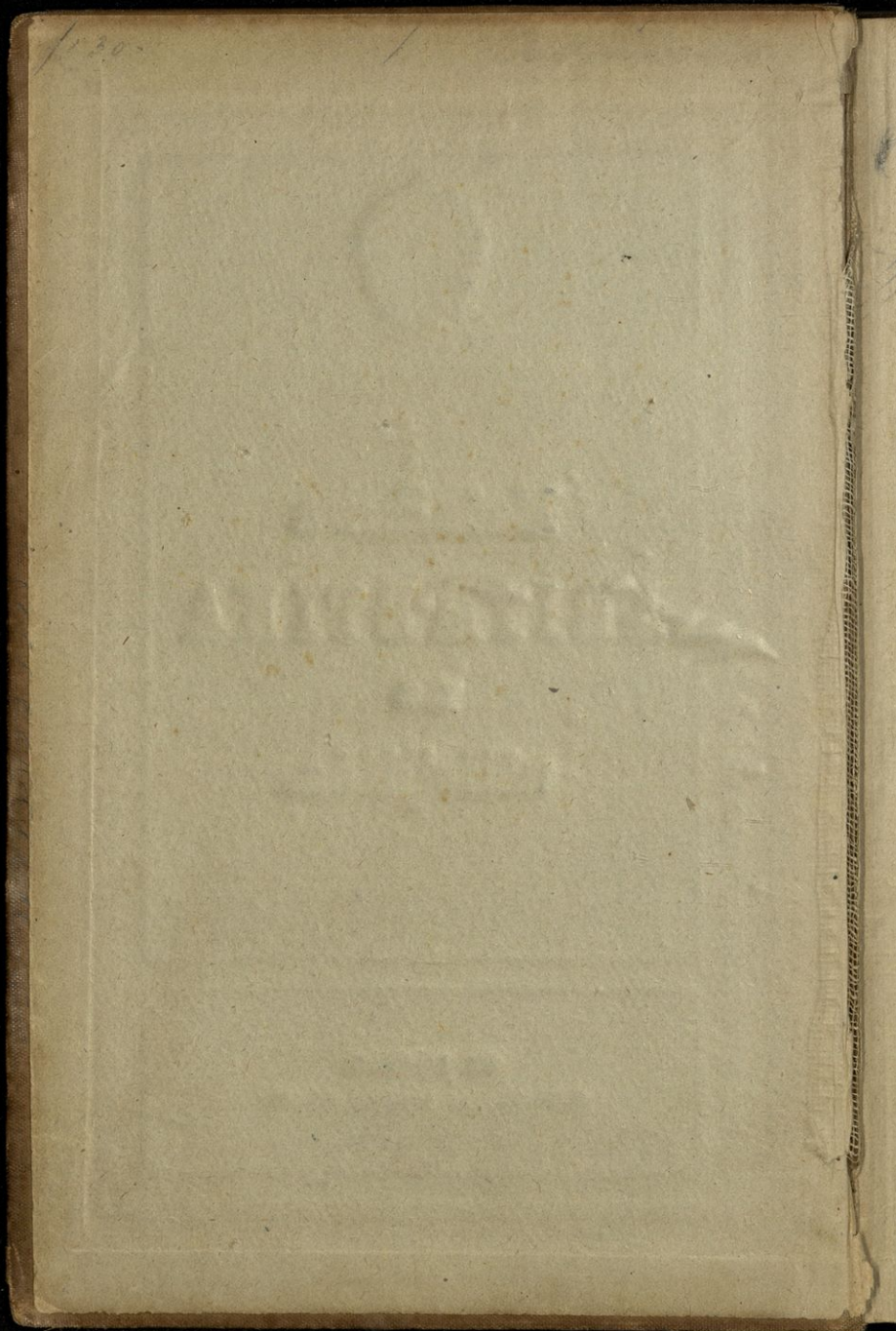
41499



III
Močnikova
ARITMETIKA
za
učiteljska.

NA DUNAJI.
C. KR. ZALOGA ŠOLSKIH KNJIG.

Aritmetika za učiteljska.



(a+b)h

učiteljišča.

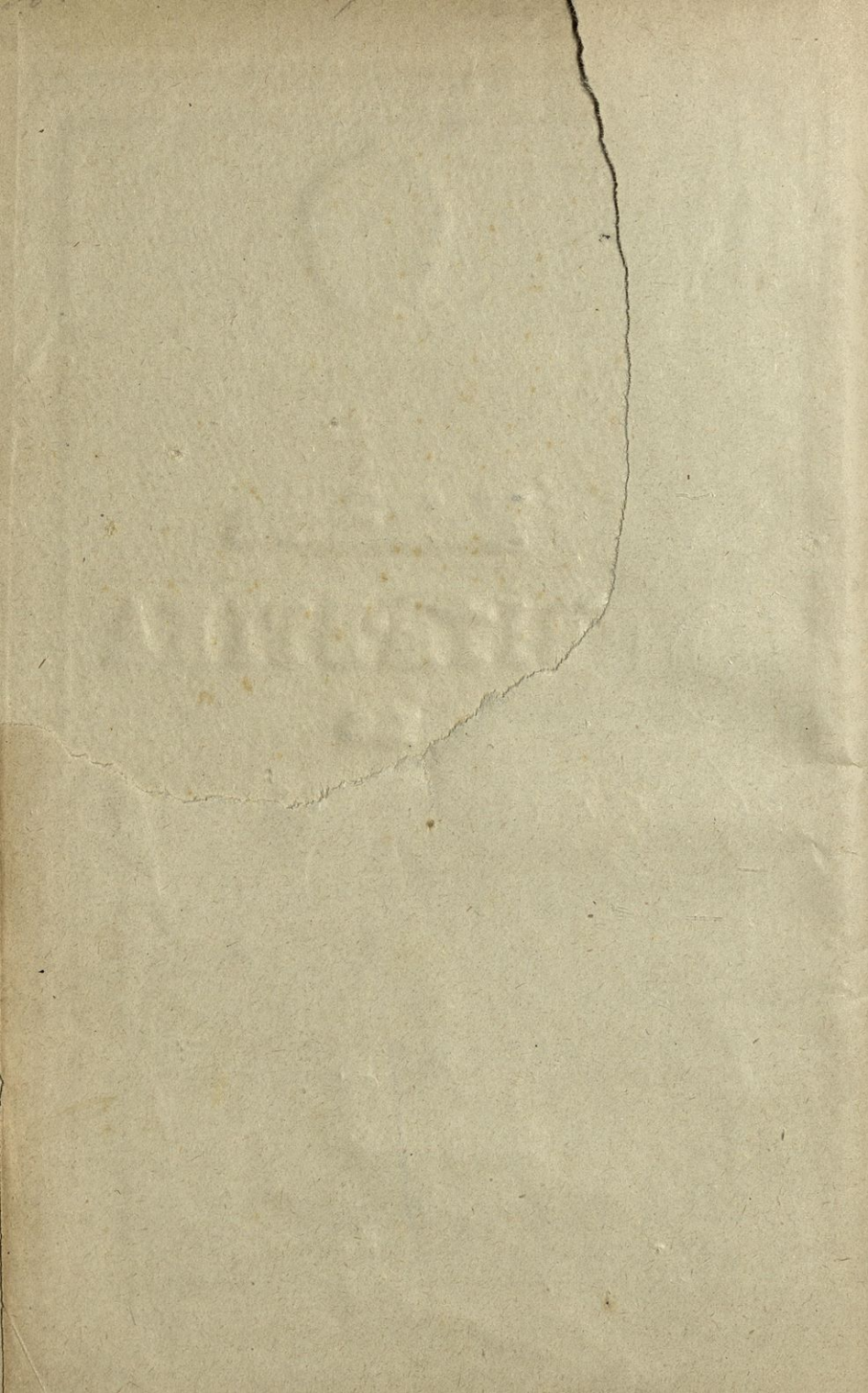
32.

von Behackerja,

učiteljišču v Libercach,

venski prevod.

148081
270.4



Močnikova knjiga

posebne in občne

ARITMETIKE

za

učiteljišča.

Po četrti nemški

od

Anton Behackerja,

c. kr. ravnatelja na učiteljišču v Liberech,

predelani izdaji urejeni slovenski prevod.



Velja v platnu vezana 2 K 60 h.

Na Dunaju.

V cesarski kraljevski zalogi šolskih knjig.

1895.

19. Juli 1900.
B. Juli 1912.
10. März 1900
2. 10. Nov.

41499

Šolske knjige, v c. kr. zalogi šolskih knjig na svetlo dane, ne smejo
se prodajati draže, kakor je na čelnem listu postavljeno.



030038223

U v o d.

§ 1. Karkoli je sestavljeno iz istovrstnih delov, ali kar si vsaj moremo misliti sestavljeno iz istovrstnih delov, imenujemo količino (*Größe*). Vsaka količina se da povečati, ako ji pridenemo še nove dele, ali zmanjšati, ako od nje odvezamemo jeden ali več delov.

Znanstvo o količinah imenujemo matematiko (*Mathematik*).

Ako hočemo natančno dognati, kolika je kaka reč, moremo to storiti le tako, da jo primerjamo z drugo istovrstno rečjo, kateri smo veličino natančno določili in s katero primerjamo potem sploh vse istovrstne reči. Tako določeno množino kake reči imenujemo jednoto (*Einheit*). Kar ima jednoto večkrat v sebi, imenuje se množina (*Vielheit*). Izraz, kateri pove, kolikokrat ima množina v sebi jednoto, zovemo število (*Zahl*).

Oni del matematike, kateri se peča s števili, imenujemo aritmetiko ali računstvo (*Arithmetik*).

§ 2. Tvoreč števila začenjamo z jednoto. Ako pridenemo jednoti še jedno jednoto, številu, tako dobljenemu, zopet jednoto, in tako dalje, dobimo vrsto naravnih števil (*natürliche Zahlen*).

Jednoto samo in tudi vsako število, katero smo dobili dodajoč jednoto, imenujemo celo število (*ganze Zahl*). Ako hočemo povedati, da še niti jednote ni, rabimo izraz ničla (*Null, 0*). Ker nastane število še le takrat, ako vzamemo jednoto vsaj jedenkrat, tedaj je ničla pričetek vsaki tvorbi števil.

Iz danih števil s pomočjo določenih izprememb druga števila iskati, pravi se računati (*rechnen*). Število, katero računajoč dobimo, imenujemo rezultat ali znesek računa (*Resultat*).

§ 3. Ako štejoč ne jemljemo v poštev, kakšna je jednota, imenujemo dobljena števila neimenovana ali brezimenska števila (*unbenannte Zahlen*); ako pa gledamo tudi na to, kakšna je

jednota, dobimo imenovana števila (*benannte Zahlen*). Na pr. 5 je neimenovano, 5 kron pa imenovano število; izraz „krona“ je ime drugega števila.

§ 4. Števila, katera izražajo določeno množino jednot, zovemo posebna števila (*besondere Zahlen*); pismeno jih izražamo s številkami (*Ziffern*). Na pr. 5 je posebno število, ker izraža le 5 jednot, ne več ne menj.

Števila, katera izražajo sploh le neko množino jednot, so občna števila (*allgemeine Zahlen*); zaznamujemo jih s črkami. Na pr. a kot občno število lahko zaznamuje katerokoli množino jednot, lahko pomeni 1, 5, 20 ali tudi vsako drugo število. Le to je treba pomniti, da mora vsaka črka pridržati v vsem računu tisto vrednost, katero smo ji dali v pričetku računa.

Za občna števila (črke) postavljati posebne številne vrednosti ter s temi izvrševati zahtevane račune, pravi se zamenjavati (*substituieren*).

Ako se peča aritmetika le s posebnimi števili, imenujemo jo posebno aritmetiko ali računanje s številkami (*besondere Arithmetik oder Zifferrechnen*); ako pa se peča s posebnimi in občnimi števili, imenujemo jo občno aritmetiko ali računanje s črkami (*allgemeine Arithmetik oder Buchstabenrechnen*).

§ 5. Dve števili, ki imata isto vrednost, ki jih tedaj lahko zamenjamo med seboj, imenujemo jednaki (*gleich*). Ako hočemo naznačiti, da sta števili a in b jednaki, pišemo $a = b$; v tem slučaju je vselej tudi $b = a$. Takšen izraz, kakor $a = b$, imenujemo jednačbo (*Gleichung*); $b = a$ je obrat jednačbe $a = b$.

Dve števili, kateri nimata jednake vrednosti, sta nejednaki (*ungleich*); in sicer imenujemo manjše ono, kateremu je treba še kaj dodati, da dobimo drugo; to pa imenujemo večje. Da je število a večje od števila b , izražujemo z $a > b$; v tem slučaju je tudi število b manjše od števila a , kar zaznamujemo z $b < a$. Takšne izraze, kakor $a > b$ ali $b < a$, imenujemo nejednačbe (*Ungleichungen*).

§ 6. Podstava matematiki so nekatere resnice, katere so jasne same ob sebi, katerih tedaj ni treba posebej dokazovati. Take resnice imenujemo osnovne resnice ali aksijome (*Grundsätze oder Axiome*).

Reki, kateri niso jasni sami ob sebi, katerih resničnost je treba še le izvajati iz drugih že spoznanih resnic, imenujemo izreke ali teoreme (*Lehrsätze oder Theoreme*); te je treba vselej dokazati (*beweisen*).

Rek, čegar resničnost neposredno izvira iz kakega pojma ali dokazanega izreka, imenujemo izvod (*Folgesatz*).

§. 7. Občne matematične osnovne resnice.

1. Vsaka količina je jednaka sama sebi.

$$a = a,$$

$$3 = 3.$$

2. Celota je jednaka vsem delom skupaj.

3. Celota je večja nego nje del.

4. Ako sta dve količini jednaki tretji, jednaki sta tudi med seboj.

Ako je $a = c$ in $b = c$, tedaj je tudi $a = b$.

5. Jdnake količine, izpremenjene na enak način, dajo zopet jednako.



Prvi oddelek.

Četvero osnovnih računov s posebnimi in občnimi celimi števili.

I. O dekadnem številnem sistemu.

§ 8. Vsa cela števila, naj so še toliko, moremo z malo besedami natančno in določeno izraževati ustno, in še z manj znaki pismeno. V ta namen vzamemo vselej določeno število nižjih jednot za novo višjo jednoto, za jednoto nastopnega višjega reda, in kot taki ji damo tudi posebno ime. Vsako, na to načelo oprto izraževanje vseh posebnih števil imenujemo številni sistem (*Zahlensystem*). Število, katero pove, koliko nižjih jednot vselej daje višjo jednoto, zovemo osnovno število (*Grundzahl*) številnega sistema.

Sedaj nam rabi v obče dekadni (desetni) številni sistem (*dekadisches Zahlensystem*), čegar osnovno število je deset (grški deka).

V tem sistemu tvori po deset jednot jednega reda jednoto višjega reda. Začenši pri jednoti štejemo z znanimi imeni števil: jedna, dve, tri, . . . do deset. Deset prvotnih jednot, tudi jednice (*Einer*) imenovanih, tvori novo višjo jednoto, katero imenujemo desetico (*Zehner*); deset desetic da stotico (*Hunderter*), deset stotic tisočico (*Tausender*), deset tisočic desettisočico (*Zehntausender*), deset desettisočic stotisočico (*Hunderttausender*), deset stotisočic milijon (*Million*), i. t. d. Vsako število je sestavljeno iz jednic, desetic, stotic, . . . in je popolnoma določeno, ako povemo, koliko ima jednic, desetic, stotic, . . .

Z ustnim izraževanjem števil se zлага tudi njih pismeno pred-očevanje. V to potrebujemo le številke za prvih deset števil, namreč 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in znaka 0 (ničle), kateri kaže, da dotično število nima jednot določenega reda. Da pa moremo, sestavljajoč teh desetero števil, izraževati vsa mogoča števila, postopamo po načelu,

da pomeni vsaka številka na prvem mestu, ako začnemo od desne proti levi, jednice, in na vsakem nastopnem mestu proti levi desetkrat toliko, kolikor na prejšnjem. Tedaj pomeni vsaka številka na drugem mestu od desne proti levi toliko desetice, na tretjem toliko stotice, na četrtem toliko tisočice i. t. d., kolikor na prvem jednic.

V napisanem številu ima vsaka številka dvojno vrednost, vrednost znaka (*Wert der Ziffer oder Nennwert*), katera ji gre po znaku ter pomeni število enot, in mestno vrednost (*Stellenwert*), katera ji gre po mestu ter pomeni število enot dotičnega reda. Gledé na vrednost znaka pravimo, da je na pr. številka 7 večja od številke 4, kar nam je tako razumevati, da je število, katero izraža številka 7 večje od števila, katero izraža številka 4. Oziraje se na mestno vrednost pa imenujemo kar ono številko višjo, katera izraža jednote višjega reda ter stoji na kakem daljšem mestu proti levi.

§ 9. Pravilno napisavanje in pravilno čitanje napisanih števil imenujemo numeracijo ali številkovanje (*Numeration*).

Da moremo razumevati in pismeno izraževati poljubno velika števila z malo številnimi števnik, razdeljujemo številna mesta, kakor sledé zaporedoma drugo za drugim, v razrede (*Classen*) po šest mest, in po tri mesta vsakega razreda v vrste (*Ordnung*). Prvih šest mest od desne proti levi tvori razred jednic, nastopnih šest mest tvori razred milijonov; za tema se vrsté razredi bilijonov, trilijonov, kvadrilijonov i. t. d. — Tisoč milijonov skupaj imenujemo milijardo.

Prva tri mesta vsakega razreda (od leve proti desni) tvorijo vrsto jednic, druga tri vrsto tisočic.

Obrazec:

.....	stotisoč. bilijonov	stotice. bilijonov	stotisoč. milijonov	stot. milijonov	stotisočice	stotice
	desettisoč. bilijonov	deset. bilijonov	desettisoč. milijonov	deset. milijonov	desettisočice	desetice
	tisoč. bilijonov	jedn. bilijonov	tisoč. milijonov	jedn. milijonov	tisočice	jednice
	tisočice	jednice	tisočice	jednice	tisočice	jednice
	bilijoni		milijoni		jednice.	

Da laže čitamo mnogoštevilčna števila, postavljamo za razredom milijonov vejico, za razredom bilijonov dve vejici i. t. d. Na nižji stopnji pouka ločimo obe vrsti jednega razreda s piko. Na pr. 2.843,,597.384,901.834.

Naloge.

Čitaj ta-le števila:

1. 2000, 7000, 5600, 2750, 2904, 1039, 5138, 2718, 38090, 27026, 80912, 12345.

2. 630427, 938824, 732084, 493220, 815500, 408010, 276939, 356805, 1246829, 538191378.

3. Najvišja gora v Avstriji je Ortljev vrh na Tirolskem, čegar nadmorska višina znaša 3900 metrov.

4. Solnce je 1413879krat toliko kakor naša zemlja.

5. Ako udari žila pri zdravem človeku po 75krat v jedni minuti, udari v jednom dnevi 108000, in v jednom letu 39420000 krat.

6. Ako je krogov premer 1000000000 metrov dolg, ima njegov obod 3141592654 metrov.

Zapiši ta-le števila, izražena z besedami:

7. Dva tisoč in štirideset, pet tisoč sedem sto štiri in devetdeset, osem tisoč in tri, tisoč tri sto in deset, dvanajst tisoč pet in dvajset milijonov in osemdeset, enajst milijard.

8. Svetloba preleti pot od solнца do zemlje, katera je dvajset milijonov šest sto tri in osemdeset tisoč tri sto in deset milj dolga, v osmih minutah in trinajstih sekundah.

9. Razdeli nekatera števila druge naloge v skupine ter čitaj posamezne skupine, oziraje se na mestno vrednost! Na pr. 63|042|7 ali 6|304|27 i. dr.

10. Koliko tisočic, koliko stotic, koliko desetmilijonov imajo števila 2. naloge? — Podobni drugi primeri!

II. Seštevanje.

§ 10. 1. Številu a prištevati število b se pravi, iskati število c , katero ima toliko jednot, kakor števili a in b skupaj. Znak seštevanju je $+$ (več ali plus); torej pišemo $a + b = c$. Števili a in b imenujemo seštevanca, sumanda ali adenda, $a = b$ vsoto in c vrednost vsote.

Da seštejemo števili a in b , treba le, da se v naravni številni vrsti, pričenši pri a , pomaknemo za toliko enot dalje, kolikor jih ima število b ; število, do katerega tako pridemo, je iskana vsota. Ako treba prišteti na pr. številu 5 število 3, pomaknemo se v številni vrsti od števila 5 za 3 enote dalje, s čemer pridemo do števila 8; tedaj je $5 + 3 = 8$.

Iz pojma o seštevanju izvajamo:

Ako je jeden sumand enak 0, je vsota jednaka drugemu sumandu.

$$0 + a = a, \quad a + 0 = a, \quad 0 + 0 = 0.$$

Kadar je treba z naznačeno vsoto $a + b$ ali sploh s katerokoli številno spojino računati še dalje, denemo jo med oklepaje (*Klammern*). Na pr.

$(6 + 5) + 7$ pomeni, da je treba vsoti števil 6 in 5 prišteti še število 7.

$6 + (5 + 7)$ pomeni, da je treba številu 6 prišteti vsoto števil 5 in 7.

2. Vsoto več števil imenujemo število, katero dobimo prištevajoč vsoti prvih dveh števil tretje, novi vsoti četrto i. t. d. Tedaj je

$$a + b + c = (a + b) + c$$

$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d, \text{ i. t. d.}$$

Imenovana števila moremo seštevati le tedaj, kadar imajo isto ime; prav tisto ime dobi tudi vsota.

Izreki o vsotah.

§ 11. Ako deneš na mizo jedenkrat 3 krone in tem prideneš še 4 krone, drugikrat pa najprej 4 krone in tem prideneš še 3 krone, tedaj se nahaja na mizi v obeh slučajih isto število (7) kron. Torej je $3 + 4 = 4 + 3$.

Prav tako je:

$$a + b = b + a \text{ in}$$

$$a + b + c = a + c + b = b + c + a = \dots$$

Vrednost vsote se ne izpremeni, ako sumande med seboj zamenjamo.

§ 12. 1. Ako vzameš v primeru § 11. namesto 3 kron 5 kron več, dobiš tudi na mizi za 5 kron več.

Ako povečamo jeden sumand za kako število, poveča se tudi vsota za tisto število. In obratno:

Vsoti prištejemo število, ako je prištejemo jednemu sumandu.

$$54 + 30 = (50 + 4) + 30 = (50 + 30) + 4 = 80 + 4$$

$$54 + 3 = (50 + 4) + 3 = 50 + (4 + 3) = 50 + 7.$$

V obče:

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

2. Obrnivši zadnjo jednačbo dobimo izrek:

Številu prištejemo vsoto, ako prištejemo sumande drugega za drugim. *medine*

Torej moremo tudi vsoto prištevati vsoti. Na pr.

$$(60 + 5) + (20 + 4) = (60 + 20) + (5 + 4).$$

Kako je seštevati istoimenske izraze.

§ 13. Vsoto, v kateri se nahaja jedno in isto občno število večkrat kot sumand, zaznamujemo krajše na ta način, da zapišemo občno število le jedenkrat, pred to število pa postavimo število kaže, kolikokrat se nahaja občno število kot sumand; na pr.

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

V izrazu $5a$ imenujemo a glavno količino (*Hauptgröße*), 5 pa koeficijent (*Coëfficient*.)

Koeficijent pove, kolikokrat naj se glavna količina postavi kot sumand.

Koeficijent more biti tudi občno število; na pr.

$$ma = a + a + a + \dots (m \text{ krat}).$$

Izraze, kateri imajo isto glavno količino, zovemo istoimenske (*gleichnamig*), na pr. $5a$ in $6a$, $3x$ in x . Izrazi z različnimi glavnimi količinami so raznoimenski (*ungleichnamig*), na pr. $3a$ in $7b$, $5x$ in $5y$.

§ 14. Vsoto istoimenskih izrazov lahko zapišemo v bolj jednostavni obliki, lahko jo skrajšamo (*reducieren*).

$$3a = a + a + a$$

$$4a = a + a + a + a$$

$$3a + 4a = a + a + a + a + a + a + a = 7a.$$

Istoimenske izraze seštejemo, ako seštejemo njih koeficijente ter to vsoto postavimo pred glavno količino.

Seštevanje dekadnih števil.

$$\begin{array}{r}
 \S\ 15. \quad 324 = 300 + 20 + 4 = 3 \text{ stot.} + 2 \text{ des.} + 4 \text{ jedn.} \\
 \quad 571 = 500 + 70 + 1 = 5 \text{ " } + 7 \text{ " } + 1 \text{ " } \\
 \hline
 \quad 895 = 800 + 90 + 5 = 8 \text{ stot.} + 9 \text{ des.} + 5 \text{ jedn.}
 \end{array}$$

Vsako dekadno število lahko smatramo za vsoto iz jednic, desetice, stotice, i. t. d. Kakó je dekadna števila seštevati, povedó izreki § 12.; le to je še pomniti, da se morejo seštevati le jednote jednakega reda.

V ta namen pišemo sumande tako drugega pod drugega, da pridejo jednice pod jednice, desetice pod desetice, ...; potem seštejemo najprej jednice, za temi desetice, stotice i. t. d. Na pr.

$$\begin{array}{r}
 6719 \quad 9 \text{ jed.} + 8 \text{ jed.} + 4 \text{ jed.} = 21 \text{ jed.} = 2 \text{ des.} + 1 \text{ jed.} \\
 348 \quad 2 \text{ des.} + 1 \text{ des.} + 4 \text{ des.} + 6 \text{ des.} = 13 \text{ des.} = 1 \text{ stot.} + 3 \text{ des.} \\
 7864 \quad 1 \text{ stot.} + 7 \text{ stot.} + 3 \text{ stot.} + 8 \text{ stot.} = 19 \text{ stot.} = 1 \text{ tis.} + 9 \text{ stot.} \\
 \hline
 14931 \quad 1 \text{ tis.} + 6 \text{ tis.} + 7 \text{ tis.} = 14 \text{ tis.} = 1 \text{ des.-tis.} + 4 \text{ tis.}
 \end{array}$$

Vsakokratno vsoto zapišemo, ako je jednoštevilkna, pod seštete jednote; ako pa je vsota kateregakoli reda dvoštevilkna, zapišemo le jednice onega reda pod seštete jednote, desetice pa prištejemo jednotam nastopnega višjega reda.

Pri ustnem računanju izgovarjamo le vsote: devet, sedemnajst, **jeden** in dvajset; dve, tri, sedem, **trinajst** i. t. d.

O pravosti vsote se lahko prepričaš uporabljajoč izrek § 11.

Pri računanju na pamet prištevamo prvemu sumandu najprej višje in potem nižje jednote drugega sumanda. Na pr. Koliko je 345 in 136?

345 in 100 je 445, in 30 je 475, in 6 je 481.

Naloge.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. $a + a.$ | 2. $x + x + x.$ |
| 3. $2b + b.$ | 4. $3m + 2m.$ |
| 5. $6y + y + 3y.$ | 6. $4c + 7c + 9c.$ |
| 7. $3a + 5a + 7a + 9a.$ | 8. $2x + 4x + 6x + 12x.$ |
| 9. $(x + 3) + 5.$ | 10. $(4a + 6) + 2a.$ |
| 11. $(6 + 5x) + 7x.$ | 12. $(5y + 2a) + 4y.$ |
| 13. $(2m + 5n + 3p) + 4p.$ | 14. $(a + 6b + 10c) + 7a.$ |
| 15. $[(3x + 14y) + y] + 2x.$ | 16. $[(5m + 2a) + 3m] + 6n.$ |
| 17. $5 + (2a + 1).$ | 18. $7x + (12x + 9).$ |

19. $9m + (3m + 5n)$.

21. $4a + [3a + (2a + 7)]$.

23. $(a + 7) + (2a + 1)$.

25. $5x + 2y + 8z$

$4x + 7y + 3z$

$8x + 5y + 6z$

20. $12y + (23x + 11y)$.

22. $x + [3x + (8x + 9y)]$.

24. $(8b + 5c) + (3b + 4c)$.

26. $m + 2n + 3p + 4q$.

$2m + 4n + 6p + 8q$

$4m + 8n + 12p + 16q$

Izračuni vrednost teh-le vsot za $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$:

27. $5a + 6(b + c)$;

28. $5b + 6(a + c)$;

29. $5c + 6(a + b)$;

30. $5(a + b) + 6c$.

Z zvezdico * zaznamovane naloge razreši tu in pozneje na pamet!

*31. a) $40 + 20$; b) $50 + 60$; c) $43 + 10$; d) $38 + 20$; e) $47 + 50$.

*32. a) $45 + 13$; b) $67 + 21$; c) $38 + 42$; d) $57 + 45$; e) $63 + 57$.

*33. a) $520 + 100$; b) $370 + 200$; c) $761 + 300$; d) $254 + 500$.

*34. a) $317 + 450$; b) $436 + 324$; c) $321 + 654$; d) $827 + 173$.

35. 785

364

130

819

36. 2637

6071

958

8705

37. 35630

39987

41865

7986

38. 924492

827726

776462

61678

39. $73308 + 905476 + 217663 + 8978 + 544879$.

40. $369258 + 741852 + 15307 + 847941 + 403507$.

41. Seštej sledeča števila, in sicer najprej ona v vertikalnih, potem ona v horizontalnih vrstah; seštej dalje vsote vertikalnih in potem one horizontalnih vrst:

$234 + 5793 + 89075 + 345206 + 298876$

$7896 + 10248 + 367853 + 789640 + 75665$

$62785 + 837034 + 956788 + 68032 + 9978$

$509539 + 963690 + 37932 + 4879 + 524358$

$791864 + 837 + 426079 + 29685 + 82057$

42. Seštej števila: 8337091 , 2578903 , 9107053 , 7905438 , 9834157 , 19805 , 842739 , 6590365 .

43. Pri stavbi neke hiše se je potrošilo: za stavbišče 1712 K, za stavbeni material 12616 K, za mojsterska dela 19490 K in za različna dela 4164 K; koliko je stala vsa stavba?

44. V neki vinorodni deželi so pridelali v 5 letih zaporedoma 78506, 80253, 38975, 63428, 74070 hektolitrov vina; koliko hektolitrov vina so pridelali v vseh 5 letih skupaj?

45. Neka železnica je imela dohodkov: v prvem četrletju 1270584 K, v drugem 1583614 K, v tretjem 1609375 K, v četrtem 1364227 K; koliko vse leto?

46. V četverokotniku merijo koti posamič $73^{\circ} 12' 47''$, $88^{\circ} 40' 52''$, $67^{\circ} 39' 48''$ in $130^{\circ} 26' 33''$; kolika je njih vsota?

47. Cesar Ferdinand I. je začel v Avstriji vladati dne 2. marcija 1. 1835., odpovedal pa se je vladanju po 13 letih in 9 mesecih; kdaj se je to zgodilo?

48. Prešeren je bil porojen v Vrbi na Gorenjskem dne 3. decembra 1. 1800., umrl pa je 48 let 2 meseca in 5 dnij star; kdaj je umrl?

49. Od jednega ščipa do drugega (sinodski mesec) mine 29 dnij 12 ur in 3 sekunde; ako je tedaj dne 16. aprila ob 8ih 45 minut 35 sekund ščip, kdaj bode prihodnji?

III. Odštevanje.

§ 16. Obrat seštevanju je odštevanje (*Subtraction*). Od števila a odštevati število b se pravi, iz a kot vsote dveh števil in b kot jednega sumanda iskati drugi sumand d . Znak odštevanju je — (manj ali minus). Tedaj pišemo $a - b = d$ ter imenujemo a minuend ali zmanjševanec (*Minuend*), b subtrahend, zmanjševalec ali odštevaneč (*Subtrahend*) in $a - b$ diferenco ali ostanek (*Differenz oder Rest*); d imenujemo vrednost difference.

Iz tega pojasnila razvidimo, da je minuend neka dana vsota, subtrahend jeden sumand te vsote in diferenca drugi sumand, katerega je treba poiskati.

Pri imenovanih številih morata imeti minuend in subtrahend isto ime; prav tisto ime dobi tudi diferenca.

V prvi vrsti si mislimo, da je minuend večji kakor subtrahend, ali da vsaj ni manjši.

Ako vzamemo, da je $13 - 7 = x$, torej $7 + x = 13$, tedaj dobimo diferenco ali takó, da prištejemo številu 7 toliko enot, da dobimo vsoto 13 (število (6), katero smo tako dobili, je diferenca), ali takó da od 13 enot odvzamemo (odštejemo) 7 enot; število enot (6), katero pri tem še preostane, je iskani drugi sumand (diferenca).

Odštevanje dveh števil a in b moremo izvršiti na dvojen način. Pomaknemo se namreč lahko v številni vrsti od minuenda a za toliko enot nazaj, kolikor jih ima subtrahend b ; število, do katerega pridemo tako, je iskana diferenca. Pomaknemo pa se lahko v številni vrsti tudi od subtrahenda b za toliko enot naprej, da pridemo do minuenda a ; število, ki pove, koliko enot smo subtrahendu prišteli, je iskana diferenca.

§ 17. Iz pojasnila o odštevanju izvajamo:

1. Ako prištejemo diferenci dveh števil subtrahend, dobimo minuend. (Preskušnja za pravost odštevanja).

$$(a - b) + b = a.$$

2. Ako odštejemo od vsote dveh števil jeden sumand, dobimo drugi sumand.

$$(a + b) - b = a.$$

3. Število ostane neizpremenjeno, ako isto število prištejemo in odštejemo. (Obrat poprejšnjih jednačeb).

4. Ako je minuend enak subtrahendu, tedaj je diferenca jednaka ničli.

$$a - a = 0.$$

5. Ako je subtrahend enak 0, je diferenca jednaka minuendu.

$$a - 0 = a, 0 - 0 = 0.$$

Izreki o diferencah.

§ 18. 1. Ako ima učenec 20 pol papirja v zalogi, in ako porabi 12 pol, ostane mu 8 pol. Ako mu zalogo povečamo za 1, 2, 3, ... pole, ne da bi se povečala poraba, poveča se mu tudi ostanek za 1, 2, 3, ... pole.

Zaloga	Poraba	Ostanek	Zaloga	Ostanek
20 —	12	= 8		
21 —	12	= 9	za 1 večja	za 1 večji
22 —	12	= 10	za 2 večja	za 2 večji
...	...	...	...	...

Čim večja je zaloga, od katere vzamemo določeno količino, tem večji je ostanek. — V obče:

Zaloga	Poraba	Ostanek	Zaloga	Ostanek
$a - b = (a - b)$				
$(a + 1) - b = (a - b) + 1$			za 1 večja	za 1 večji
$(a + 2) - b = (a - b) + 2$			za 2 večja	za 2 večji
...	...	...	...	...
$(a + c) - b = (a - b) + c$			za c večja	za c večji

Prav jasno razvidimo, da je trditev resnična, ako naredimo za vsako odštevanje preskušnjo (§. 17., 1.).

Ako povečamo minuend (a) dane difference ($a - b$) za 1, 2, 3, ... c jednot, poveča se tudi diferenca ($a - b$) za 1, 2, 3, ... c jednot, če se subtrahend pri tem ne izpremeni.

$$(a + c) - b = (a - b) + c \dots\dots\dots I.$$

2. Ako učenec, imajoč zalogo 20 pol papirja, zmanjša porabo za 1, 2, 3, ... pole, preostaje mu papirja za 1, 2, 3, ... pole več.

Zaloga	Poraba	Ostanek	Poraba	Ostanek
20 —	12	= 8		
20 —	11	= 9	za 1 manjša	za 1 večji
20 —	10	= 10	za 2 manjša	za 2 večji
...	...	...	...	...

Čim menj odvzamemo od iste količine, tem večji je ostanek. — V obče:

Zaloga	Poraba	Ostanek	Poraba	Ostanek
$a - b = (a - b)$				
$a - (b - 1) = (a - b) + 1$			za 1 manjša	za 1 večji
$a - (b - 2) = (a - b) + 2$			za 2 manjša	za 2 večji
...	...	...	...	...
$a - (b - c) = (a - b) + c$			za c manjša	za c večji

Napravi za vsako diferenco preskušnjo (§ 17., 1.)!

Ako zmanjšamo subtrahend (b) dane difference ($a - b$) za 1, 2, 3, ... c jednot, ne da bi izpremenili minuend, tedaj je nova diferenca za 1, 2, 3, ... c jednot večja nego diferenca ($a - b$).

$$a - (b - c) = (a - b) + c \dots\dots\dots \text{II.}$$

3. Čim manjša je zaloga, od katere vzamemo določeno količino, tem manjši je ostanek. — O pravosti tega izreka se prepričajš, ako postopaš na enak način, kakor smo učili pri 1.

Ako zmanjšamo minuend (a) dane difference ($a - b$) za 1, 2, 3, ... c jednot, zmanjša se tudi diferenca za 1, 2, 3, ... c jednot. (Utemeljitev podobna kakor v § 18., 1.) V obče:

$$(a - c) - b = (a - b) - c \dots\dots\dots \text{III.}$$

4. Čim več odvzamemo od dane količine, tem manjši je ostanek. (Primeri in natančnejši razvoj kakor pri 2.)

Ako povečamo subtrahend (b) difference ($a - b$) za 1, 2, 3, ... c jednot, zmanjša se diferenca za 1, 2, 3, ... c jednot, če je treba, da ostane vsota (a) kot minuend neizpremenjena. (Utemeljitev ista kakor v § 18., 2.) V obče:

$$a - (b + c) = (a - b) - c \dots\dots\dots \text{IV.}$$

§ 19. Obrnivši jednačbi I. in II. dobimo:

$$\begin{aligned} a) \dots\dots (a - b) + c &= (a + c) - b \\ &= a - (b - c). \end{aligned}$$

Diferenci prištejemo število, ako je prištejemo minuendu (Obrat izreka I.) ali odštejemo od subtrahenda. (Obrat izreka II.)

Prvi del tega računa uporabljamo pri računanju na pamet. Na pr.

$$97 + 85 = (100 - 3) + 85 = 185 - 3 = 182.$$

Obrnivši jednačbi III. in IV. dobimo:

$$\begin{aligned} b) \dots\dots (a - b) - c &= (a - c) - b \\ &= a - (b + c). \end{aligned}$$

Od difference odštejemo število, ako je odštejemo od minuenda (Obrat izreka III.) ali pa prištejemo subtrahendu. (Obrat izreka IV.)

§ 20. Resnice, katere imajo v sebi jednačbe I., II., III., IV. moremo z besedami izraževati na več načinov. Tako dobimo te-le važne izreke:

Iz jednačbe I.: $(a - c) - b = (a - b) + c$

a) Od vsote $(a + c)$ odštejemo število (b) , ako je odštejemo od jednega sumanda.

$$(70 + 8) - 20 = (70 - 20) + 8.$$

Katero vrednost dobi vsota, ako jednemu sumandu število prištejemo, od drugega sumanda pa prav tisto število odštejemo? (Prim. §. 12., 1.)

b) Ako je treba številu (a) drugo število (c) prišteti in tretje število (b) pa od njega odšteti, tedaj je vse jedno, ali prej prištevamo in potem odštevamo ali obratno.

Zatorej pišemo za $(a + c) - b$ in za $(a - b) + c$ kratko le: $a + c - b$ ali $a - b + c$.

Po obratu: $c + (a - b) = (c + a) - b$

c) Številu (c) prištejemo diferenco $(a - b)$, ako minuend prištejemo in subtrahend odštejemo.

Ta izrek uporabljamo pri računanju na pamet. Na pr.

$$357 + 96 = 357 + (100 - 4) = 457 - 4 = 453.$$

Iz jednačbe II.: $a - (b - c) = (a - b) + c$

d) Od števila (a) odštejemo diferenco $(b - c)$, ako minuend odštejemo in subtrahend prištejemo.

Uporaba pri računanju na pamet. Na pr.

$$543 - 194 = 543 - (200 - 6) = (543 - 200) + 6 = 343 + 6 = 349.$$

Iz jednačbe III.: $(a - c) - b = (a - b) - c$

e) Kadar je od števila odšteti zaporedoma dve števili, lahko ji odštejemo v kateremkoli redu.

Zatorej pišemo za $(a - b) - c$ in $(a - c) - b$ kratko le $a - b - c$ in $a - c - b$.

Iz jednačbe IV.: $a - (b + c) = (a - b) - c$

f) Od števila odštejemo vsoto, ako sumande zaporedoma odštejemo.

Zaradi tega moremo tudi odštevati vsoto od vsote. Na pr.

$$(700 + 40 + 8) - (200 + 30 + 5) = (700 - 200) + (40 - 30) + (8 - 5).$$

Ako obrnemo jednačbo, dobimo: $(a - b) - c = a - (b + c)$

g) Kadar je treba odšteti zaporedoma dve števili, lahko odštejemo kar ob jednom njiju vsoto. Na pr.

$$(628 - 48) - 52 = 628 - (48 + 52) = 628 - 100 = 528.$$

§ 21. 1. Uporabljač ob jednom izrek 1. in 4. v § 18. dobimo izrek:

Vrednost difference se ne izpremeni, ako minuendu in subtrahendu prištejemo isto število.

2. Iz izreka 2. in 3. v § 18. izvajamo:

Vrednost difference se ne izpremeni, ako od minuenda in subtrahenda odštejemo isto število.

$$\begin{array}{r} \S\ 22. \qquad 5a = a + a + a + a + a \\ \qquad \qquad 2a = a + a \\ \hline 5a - 2a = a + a + a = 3a. \end{array}$$

Istoimenske izraze odštejemo, ako odštejemo koeficiente in postavimo njih difference pred skupno glavno količino.

Odštevanje dekadnih števil.

§ 23. Odštevanje dekadnih števil se opira v obče na izrek *f*) § 20.

978 = 9 stot. + 7 des. + 8 jed. Govori: 5 in 3 je 8 i. t. d.

265 = 2 „ + 6 „ + 5 „

713 = 7 stot. + 1 des. + 3 jed.

Subtrahend pišemo pod minuend tako, da pridejo jednice pod jednice, desetice pod desetice, . . . ; potem odštejemo najprej jednice, za temi desetice, stotice i. t. d. in sicer tako, da prištejemo vsaki subtrahendovi številki toliko enot, da dobimo nad njo stoječo minuendovo številko; vsakokrat prišteto številko zapišemo na dotično mesto v ostanek. — Ako je katera številka v subtrahendu večja nego nad njo stoječa v minuendu, tedaj povečamo zadnjo za 10 ter odštejemo; da se pa difference ne izpremeni, moramo ob enem povečati tudi številko naslednjega višjega reda za jedno enoto (= 10 enotam predstoječega reda). [§ 21., 1.] Na pr.

3582 Govori: 3 in 9 je 12;

1853 jedna (1 desetica = 10 jed.), 6 in 2 je 8 i. t. d.

1729

Pri odštevanju na pamet odštevamo od neizpremenjega minuenda najprej stotice, potem desetice in naposled jednice. Na pr. Koliko je 791 menj 548?

791 menj 500 je 291, menj 40 je 251, menj 8 je 243.

Dostikrat moremo ugodno uporabiti tudi izrek v § 20., *d*) Na pr.

$$853 - 298 = 855 - 300 = 555.$$

Naloge.

- | | |
|---|--|
| 1. $3a - 3a$. | 2. $8x - 5x$. |
| 3. $(10 - a) + 2$. | 4. $(m - 10) + 3$. |
| 5. $(15 - b) - 7$. | 6. $(n - 3) - 4$. |
| 7. $(18 - n) - 4$. | 8. $(2r - 8) - 2$. |
| 9. $(a - 2) + 5a$. | 10. $(7y - 9) + 6$. |
| 11. $(15x - 18y) + 5y$. | 12. $[(10a - 8) + 3a] + 7$. |
| 13. $(9m - 4) - 5$. | 14. $(12a - 7b) - 7a$. |
| 15. $[(4z - 1) - 7] - z$. | 16. $7n + 3n - 5n - 2n$. |
| 17. $7 + (x - 3)$. | 18. $2y + (5y - 6m)$. |
| 19. $6x - (2x + 5)$. | 20. $9a - (4a + 5b)$. |
| 21. $(a + 6) - 2$. | 22. $(5m + 7) - 2m$. |
| 23. $(3x + 5y) - (2x + y)$. | 24. $(9m + 13n) - (3m - 5n)$. |
| 25. $12a - 7b$
$5a - 3b$
— + | 26. $8x - 9y$
$4x - 8y$
— + |
| 27. $[(12x - \frac{3}{4}) + 5x] - \frac{1}{2}$. | 28. $[(10x + 9) + 3y] - 5\frac{1}{2}$. |
| 29. $[(7 - 3a) - 4a] - 6\frac{1}{2}$. | 30. $[(6a - 3) - 4a] + 2\frac{1}{3}$. |
| 31. $2a + 10b + 15c - (a + 3b + c)$. | |
| 32. $8x - (4x - \frac{3}{5}) + \frac{2}{5} + x$. | 33. $10\frac{1}{3} - (5y - \frac{1}{6})$. |

Utemelji izreke o diferencah na posameznih navedenih primerih!

Izračuni vrednost teh-le izrazov za $a = 4$, $b = 3$:

34. $(8a + 7b) - (5a - 4b) - (2a - b)$;
 35. $8a + (7b - 5a) - [(4b - 2a) - b]$;
 36. $8a + (7b - 5a) - [4b - (2a - b)]$;
 37. $(8a + 7b) - [5a - (4b - 2a) - b]$.
-
- *38. a) $70 - 20$; b) $140 - 50$; c) $54 - 20$; d) $81 - 40$; e) $187 - 59$.
 *39. a) $59 - 47$; b) $65 - 24$; c) $167 - 53$; d) $73 - 44$; e) $715 - 60$.
 *40. a) $340 - 200$; b) $770 - 400$; c) $843 - 500$; d) $667 - 300$.
 *41. a) $865 - 340$; b) $598 - 324$; c) $528 - 461$; d) $952 - 507$.

Izračuni, uporabljajoč izrek v § 21.:

- *42. a) $314 - 95$; b) $248 - 73$; c) $477 - 197$; d) $632 - 303$.

Izračuni, uporabljajoč izrek v § 20., c:

- *43. a) $137 + 29$; b) $225 + 198$; c) $367 + 402$; d) $543 + 290$.

$$\begin{array}{rclcl}
 44. & 785 & & 45. & 6318 & & 46. & 123456 & & 47. & 302858 \\
 & -261 & & & -4165 & & & -78907 & & & -190579
 \end{array}$$

$$48. 471708 - 345725 \qquad 49. 6092743 - 5694146.$$

$$50. (837145 + 24093) - 618814. \quad 51. (732801 - 93786) - 48079.$$

52. Seštej števila 650890, 126604, 531899, 863925, potem pa odštej od vsote zaporedoma prve tri sumande; kolik je ostanek?

53. Odštej od 4736256 število 789376, od difference zopet število 789376, in tako dalje po vrsti 6krat!

$$54. \qquad \qquad \text{Od števila} \quad 731542$$

$$\begin{array}{rcl}
 & & \left\{ \begin{array}{l} 82591 \\ 72859 \\ 127986 \\ 231578 \end{array} \right. \\
 \text{odštej} & & \\
 \text{števila} & &
 \end{array}$$

$$\text{ostanek} \quad 216528.$$

Seštevajoč števila, katera je treba odšteti (§ 20., g), prav lahko od danega minuenda ob jednom tudi odštevaš. V ta namen seštej najprej jednice vseh števil, katera je treba odšteti, ter poišči, koliko je treba njih vsoti 24 še dodati, da dobiš nastopno višje število, katero ima na mestu jednic 2, t.j. 32; prav tako postopaj pri deseticah, stoticah i. t. d. Računajoč govori: 8, 14, 23, 24 in 8 je 32, ostane 3; 3, 10, 18, 23, 32 in 2 je 34, ostane 3; i. t. d.

$$55. 40189 - (13921 + 9107 + 3570 + 10277).$$

$$56. 5404791 - (87935 + 93788 + 70479 + 68955).$$

$$57. 392462 - (157280 + 37988) - (2369 + 1875).$$

58. Mont Blank v Savoji je 4810 m, Ortljev vrh na Tirolskem pa 3917 m visok; za koliko je prva gora višja od druge?

59. Oče je zapustil svojemu starejšemu sinu 6840 K, mlajšemu pa 1580 K menj; koliko sta dobila oba sina skupaj?

60. Mesec ni vedno od zemlje jednako oddaljen; njegova najmanjša razdalja znaša 48020 milj, največja pa 54680 milj; za koliko je v prvem slučaju zemlji bliže kakor v drugem?

61. Za koliko je dolžina ekvatorja naše zemlje (4000 μ m) daljša nego zemeljska os (1270 μ m)?

62. Praga ima 50° 5' 20", Dunaj 48° 12' 35", Gradec 47° 4' 2", Trst 45° 38' 8" zemljepisne širine; za koliko širinskih stopinj je Praga severnejša nego vsako drugo teh treh mest? (Uporabi izrek v § 21., 1.)

63. Goethe je umrl dne 28. marcija l. 1832., star 82 let 7 mesecev; kdaj je bil porojen?

64. Cesar Fran Josip I. je bil porojen dne 18. avgusta l. 1830., vladati pa je začel dne 2. decembra l. 1848.; koliko let je imel takrat? b) koliko jih ima danes? c) koliko časa že vlada?

Relativna števila.

§ 24. Doslej smo učili odštevanje s pogojem, da je minuend večji, ali da vsaj ni manjši nego subtrahend. Ako pa je minuend manjši od subtrahenda, dobimo čisto nov slučaj.

V vsakdanjem življenju imamo dovolj takih slučajev.

Navesti hočemo tri, da jih primerjamo:

1. Trгоvec ima pri prvi kupčiji 5 K dobička, pri drugi kupčiji pa 3 K izgube. Kolik je njegov dobiček?

$$5\text{ K} - 3\text{ K} = 2\text{ K dobička.}$$

2. Trгоvec ima pri prvi kupčiji 5 K dobička, pri drugi kupčiji pa 5 K izgube. Kolik je njegov dobiček?

$$5\text{ K} - 5\text{ K} = 0. \text{ (Trгоvec nima nobenega dobička).}$$

3. Trгоvec ima pri prvi kupčiji 5 K dobička, pri drugi kupčiji pa 7 K izgube. Koliko ima dobička?

$$5\text{ K} - 7\text{ K} = ?$$

Trгоvec ima 2 K izgube, katero mora poplačati iz svojega imetja. Ako nima nobenega imetja, imel bi 2 K dolga.

Po izreku v § 21., 2. je $5 - 7 = 0 - 2$.

Takšno diferenco imenujemo **negativno število** (*negative Zahl*) ter jo pišemo kratko „-2“ (2 K izgube v nasprotju z 2 K dobička), kar je isto kakor „0 - 2“.

Takih nasprotij je veliko, na pr.: dobiček in izguba, imetje in dolgovi, premikanje proti severu in premikanje proti jugu, povišanje in znižanje temperature, čas pred Kristom in čas po Kristu i. t. d. Da taka nasprotja v matematiki zaznamujemo, potrebujemo posebnega znaka. Ako zaznamimo izgubo 2 K z „-2 K“, tedaj označimo 2 K dobička s „+ 2 K“.

Ako rabimo znaka „+“ in „-“ v tem zmislu, imenujemo ja predznaka (*Vorzeichen*).

Če zapišemo tudi ničlo, moremo predznaka smatrati tudi za računski znak (za seštevanje, odštevanje), kakor je razvidno iz gori navedenih primerov.

V obče:

$$a - (a + n) = 0 - n = -n.$$

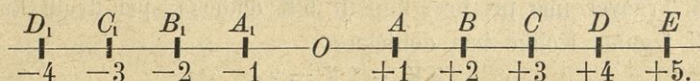
Negativno število „ $-n$ “ dobimo, ako od števila a odštejemo število, katero je za n večje.

Nasproti negativnim številom imenujemo vsa druga števila pozitivna števila (*positive Zahlen*).

Števila, katera imajo predznak, zovemo **relativna**, oziralna ali algebrajska **števila** (*relative oder algebraische Zahlen*). Števila brez predznaka, pri katerih ni podobnega nasprotja, so **absolutna** (samoobsebn) **števila** (*absolute Zahlen*). Absolutna vrednost števila -5 je 5 .

Pismeno predočevanje relativnih števil.

§ 25. Ako uvedemo negativna števila, raztegnemo si naravno številno vrsto. To razvidimo prav dobro, ako si številno vrsto predočimo na številni črti (*Zahlenlinie*).



Ako je točka O izhodišče, tedaj predstavljajo točke A , B , C , D , E , ..., katere so za 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... jednot od O proti desni oddaljene, števila $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$, ...

Vsoto $2+3$ predočuje potem točka E . Dobimo jo, ako se od izhodišča na desno pomaknemo najprej za 2 in potem še za 3 jednote.

Diferenco $5-3$ predočuje točka B . Dobimo jo tako, da se najprej pomaknemo za 5 jednot proti desni, potem pa od točke, do katere smo tako prišli, zopet za 3 jednote nazaj (proti levi).

Po istem tvorbnem zakonu predočujemo tudi $5-6$ ali $5-7$ tako, da se pomaknemo od izhodišča za 5 jednot naprej (proti desni), potem pa za 6 , oziroma 7 jednot nazaj (proti levi). Zato moramo številno črto podaljšati na levo. Točke A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 , ..., katere so od O za 1 , 2 , 3 , ... jednote proti levi oddaljene, predočujejo torej števila -1 , -2 , -3 , -4 , ...

Kako se razločujejo predznaki in računski znaki.

§ 26. Ako hočemo označiti, da je znaka $+$ in $-$ treba v poštev jemati kot predznaka, stavimo vrednost, ki ima predznak, v oklepaj. Predznaka $+$ vendar ne pišemo niti v začetku računa niti za oklepajem niti za enačajem:

$a + (+b)$ pomeni, da se naj številu $+a$ prišteje število $+b$.

$a + (-b)$ " " " " " " $+a$ " " $-b$.

$a - (-c)$ " da se naj od števila $+a$ odšteje število $-c$.

V teh primerih je prvi znak računski znak, drugi pa predznak.

Seštevanje relativnih števil.

§ 27. V § 24. smo določili, da je negativno število „ $-n$ “ rezultat odštevanja $0 - n$, natančneje $0 - (+n)$. Iz tega določila izvajamo to-le, kar se tiče pomena negativnih števil:

Ker je $-n = 0 - (+n)$, zato je $0 = (+n) + (-n)$ (Naredi preskušnjo!)

Vsako negativno število $(-n)$ uničuje tedaj isto toliko pozitivno število $(+n)$, alin juna skupna vrednost se skrči na vrednost ničle.

Kdor ima na pr. 5 K izgube, mora pridobiti 5 K dobička, če hoče izgubo poravnati.

Dve relativni števili, (kakor $+5$ in -5), kateri imata isto absolutno vrednost, pa različna predznaka, imenujemo nasprotni števili (*entgegengesetzte Zahlen*).

I. pravilo: Vsota dveh nasprotnih števil je jednaka ničli. (Števili se uničujeta).

§ 28. 1. Ako ima kdo 5 K dobička ter pridobi še 2 K dobička, ima skupaj $5 + 2 = 7$ K dobička.

2. Ako ima trgovec pri prvi kupčiji 5 K izgube ter pri drugi izgubi zopet 2 K, izgubi vsega skupaj $5 + 2 = 7$ K. Torej je

$$1) +5 + (+2) = +(5+2) = +7. \quad 2) -5 + (-2) = -(5+2) = -7.$$

V obče:

$$+a + (+b) = +(a+b) \qquad -a + (-b) = -(a+b).$$

Prav tisto dobimo tudi, uporabljajoč izreke o diferencah:

$$\begin{aligned} -5 + (-2) &= (0-5) + (0-2) = (0-5) + (0-2) \quad (\S 20., c.) \\ &= (0-5) - 2 = 0 - (5+2) \quad (\S 19., 2). \end{aligned}$$

II. pravilo: Dvoje jednako zaznamovanih števil seštejemo, ako postavimo pred vsoto njunih absolutnih vrednostij skupni predznak.

Ako uporabimo to pravilo pri istoimenskih sumandih, moremo vsoto izraziti z jednim samim izrazom. Tako postopanje imenujemo krčenje (*Reducieren*).

$$-2x + (-5x) = -(2x + 5x) = -(2 + 5)x = -7x.$$

Jednako zaznamovana, istoimenska števila skrčimo, ako postavimo vsoto koeficijentov s skupnim predznakom vred pred glavno količino.

Za istoimenske pozitivne sumande velja isto, kar smo učili v § 14.

$$\begin{aligned} \S 29. \quad +7 + (-3) &= +4 + 3 + (-3) = +4 = +(7-3). \\ -7 + (+3) &= -4 + (-3) + (+3) = -4 = -(7-3). \end{aligned}$$

Ako seštejemo pozitivno in negativno število, uničujeta se dve jednaki a nasprotni števili (§ 27.), od absolutno večje vrednosti pa še preostaje toliko jednot, kolikor jih ima diferenca absolutnih vrednostij.

$$\begin{aligned} \text{V obče: } +a + (-b) &= +(a-b) \text{ ako je } a > b, \\ &= -(b-a) \text{ ako je } b > a. \end{aligned}$$

III. pravilo: Dvoje različno zaznamovanih števil seštejemo, ako postavimo pred diferenco njunih absolutnih vrednostij predznak večjega števila.

Istoimenska, različno zaznamovana števila moremo zopet skrčiti:

$$\begin{aligned} +7x + (-3x) &= +4x + 3x + (-3x) = +4x = +(7-3)x \\ +7y + (-9y) &= +7y + (-7y) + (-2y) = -2y = -(9-7)x. \end{aligned}$$

Različno zaznamovana, istoimenska števila skrčimo, ako postavimo diferenco koeficijentov s predznakom (absolutno) večjega števila vred pred glavno količino.

Kadar prištevaš negativna števila, pazi še na to-le pojasnilo:

Ako ima kdo gotovo zalogo jednot ter njej pridene -5 (v obče $-n$) jednot, uniči s tem $+5$ (v obče $+n$) jednot svoje zaloge; torej pomeni „ -5 prištevati“ ravno isto kakor „ $+5$ odštevati“.

Negativno število prištejemo danemu številu, ako od tega odštejemo njega absolutno vrednost.

Samo ob sebi se umeje, da pozitivno število prištejemo, ako prištejemo njega absolutno vrednost.

§ 30. Pravila v § 28. veljajo tudi za več kakor dva sumanda. Na pr.

$$-4y + (-8y) + (-3y) = (-12y) + (-3y) = -15y = -(4+8+3)y.$$

Ako je treba sešteti več deloma pozitivnih, deloma negativnih sumandov, tedaj poiščemo (ker smemo sumande zameniti) najprej vsoto vseh pozitivnih, potem vsoto vseh negativnih sumandov ter končno seštejemo obe delski vsoti (po § 29.) Na pr.

$$3a + (-5a) + (-a) + (a) + 18a = 22a + (-6a) = 16a.$$

Ako ni o vsi sumandi istoimenski, tedaj je primernejše, da seštejemo istoimenska števila záse. Na pr.

$$2b + (-8) + (4b) + (-3b) + (-9) + (-b) = 6b + (-4b) + (-17) = \\ = 2b + (-17) = 2b - 17.$$

Ko si se nekoliko privadil računanju, moreš vmesne račune zvršiti na pamet.

Seštevanje veččlenskih izrazov.

§ 31. Številne izraze, katere smo dobili po seštevanju ali odštevanju dveh ali več števil, na pr.

$$a + b, \quad a - b, \quad a + c - b, \quad a - c - b \quad (\S 20., \quad b \text{ in } e), \\ m + 2n + r + 6s,$$

imenujemo veččlenske izraze ali polinome (*mehrgliedrige Ausdrücke oder Polynome*).

Posebej imenujemo izraz z dvema členoma dvočlenec ali binom (*Binom*), s tremi členi tričlenec ali trinom (*Trinom*), z jednim samim členom jednočlenec, jednočlenski izraz ali monom (*Monom*).

$5a$, ab , $6(m+n)$, $\frac{m+n}{r+s}$ so jednočlenski izrazi, kajti $(m+n)$ in $(r+s)$, katera moramo po § 10. smatrati kot jedno število, nista spojena po seštevanju in odštevanju, marveč po višji računski operaciji. A izrazi

$5+a$, $a-b$, $6-(m+n)$, $8b + \frac{m+n}{r+s}$ so dvočlenski izrazi ali binomi.

Vsako vsoto relativnih števil, na pr.

$$a + (-b), \quad a + (+c) + (-b), \quad a + (-c) + (-b)$$

imenujemo algebrasko vsoto (*algebraische Summe*.)

Po pojasnilu v § 29. je algebrajska vsota

$$a + (-b) = a - b.$$

Torej smemo diferenco $a - b$ (binom) smatrati za algebrajsko vsoto iz števil $(+a)$ in $(-b)$, ne da bi se ji vrednost količkaj izpremenila.

Če to storimo, izpustili smo le znak seštevanja.

Po podobnem razmišljanju najdemo, da je

$$(a - c) - b = a - c - b = a + (-c) + (-b).$$

Ker je seveda tudi $+a + (+m) + (+n) = a + m + n$, izvajamo:

V vsaki algebrajski vsoti prištevne znake lahko kar izpustimo.

Ta izrek izražamo dostikrat v obliki pravila za mehanično računanje tako-le: Relativna (algebrajska) števila seštejemo, ako ja pripišemo z njih predznaki drugo k drugemu.

Vsak veččlenski izraz smatramo torej lahko za algebrajsko vsoto, sestoječo iz toliko sumandov, kolikor je členov; a prezreti ne smemo, da pripadata posamezne člene vežoča znaka $(+, -)$ kot predznaka k tem členom. Izraz:

$$2a - \frac{2x+1}{3} + (2y-4) - [2x - (y+1)] \text{ ima torej štiri člene:}$$

$$+ 2a, \quad - \frac{2x+1}{3}, \quad + (2y-4), \quad - [2x - (y+1)].$$

Vsota v oglatem oklepaju sestoji iz dveh členov:

$$+ 2x \text{ in } - (y+1).$$

Polinom prištejemo torej ravno tako kakor vsoto (§ 12., 2):

Polinom prištejemo danemu številu, ako vse člene zaporedoma prištejemo (z njih predznaki pripišemo). Na pr.

$$m + (3a - b + x) = m + 3a - b + x; \quad m + (-x - 1) = m - x + 1.$$

Nahajali se v vsoti več istoimenskih števil, moremo ja (po § 28. in § 29.) skrócić. Radi pišemo istoimenska števila kar drugo pod drugo. Na pr.

$$\begin{aligned} a - 2b - c + (5b - 8c + 14d) + (-3c + 10d) &= a - 2b - c \\ &\quad + 5b - 8c + 14d \\ &\quad - 3c + 10d \\ &= a + 3b - 12c + 24d. \end{aligned}$$

Odštevanje relativnih števil.

$$\S 32. \quad 1. \quad +7 - (+3) = 7 - 3 = 7 + (-3) \\ +a - (+b) = a - b = a + (-b).$$

Pozitivno število odštejemo od drugega relativnega števila, ako odštejemo njega absolutno vrednost, ali (kar je po § 29. isto) ako prištejemo isto toliko število z nasprotnim predznakom.

2. Ako ima kdo 8 K tako, da ima dejanski 11 K, od katerih pa je 3 K dolžan, tedaj se mu imetje poveča za 3 K, ako se mu dolg izbriše (odšteje).

„Dolgove odjemati (brisati)“ ali „gotovino izdajati“, to je isto.

$$8 - (-3) = 8 + (+3) = 11,$$

$$a - (-b) = a + (+b).$$

Negativno število odštejemo, ako prištejemo isto toliko število z nasprotnim predznakom.

O pravosti obeh pravil se prepričaj, ako narediš preskušnjo (po § 17., 1.):

$$1. \quad a + (-b) + (+b) = a. \quad 2. \quad a + (+b) + (-b) = a.$$

$$\text{diferenca} + \text{subtr.} = \text{min.} \quad \text{diferenca} + \text{subtr.} = \text{min.}$$

Pravilo: Relativno (algebrajsko) število odštejemo, ako prištejemo isto toliko število z nasprotnim predznakom. Na pr.

$$+3 - (+2) = +3 - 2 = +1; \quad -7 - (+3) = -7 - 3 = -10; \\ +2a - (-5a) = +2a + 5a = 7a; \quad -6a - (-5a) = -6a + 5a = -a.$$

O pravosti teh primerov prepričaj se (po § 20., d) tako, da vzameš namesto $-5a$ izraz $(0 - 5a)$.

Poučno je tudi to, da napišeš na desko $+2a$ v obliki $+2a + 5a - 5a$ ter potem izbrišeš (odšteješ) $-5a$.

Odštevanje veččlenskih izrazov.

§ 33. Ker moremo vsak veččlenski izraz smatrati za algebrajsko vsoto, opira se odštevanje veččlenskih izrazov na § 20., f):

Polinom odštejemo, ako prištejemo vse člene, vsakega z nasprotnim predznakom. Na pr.

$$2a - (1 + 3a - 4b) = 2a - 1 - 3a + 4b = -a - 1 + 4b \\ 10x - [-4 - (x + 3) + 8y] = 10x + 4 + (x + 3) - 8y = \\ = 10x + 4 + x + 3 - 8y = 11x + 7 - 8y.$$

§ 34. Mehanično računsko postopanje pri seštevanju in odštevanju polinomov imenujemo razreševanje oklepajev (*Klammerauflösung*). Na pr.

$$\begin{aligned} & 4y - (2y + 5 - 8a) + (6y - 4) + (2a - 1) = \\ & = 4y - 2y - 5 + 8a + 6y - 4 + 2a - 1 = 8y - 10 + 10a. \end{aligned}$$

Mehaničnim potem razrešuj oklepaje po tem-le pravilu: Ako stoji pred oklepajem znak „+“, prištej vse v oklepaju stoječe člene z neizpremenjenimi znaki; ako pa stoji pred oklepajem znak „-“, prištej vse v oklepaju stoječe člene, vsakega z nasprotnim predznakom.

Ima li račun več oklepajev, lahko jih razrešiš v kateremkoli redu. Na pr. (Naloga iz § 33.):

$$\begin{aligned} 10x - [-4 - (x + 3) + 8y] &= 10x - [-4 - x - 3 + 8y] = \\ &= 10x + 4 + x + 3 - 8y = \\ &= 11x + 7 - 8y. \end{aligned}$$

Zaradi večje preglednosti pišemo prav radi istoimenska števila algebranske vsote drugo pod drugo.

Naloge.

1. $a + 4 + (-4)$.
2. $5a + 3b + (-5a)$.
3. $5 \cdot 5 + (+8 \cdot 2) + (+9 \cdot 3)$.
4. $3x + (+2x) + (8 \cdot 5x)$.
5. $2y + (+5y) + (+4y) + (-5y) + (4 \frac{1}{2}y)$.
6. $-15 + (-5)$.
7. $(-18 \frac{1}{2}) + (-5 \frac{3}{4})$.
8. $-2z + (-7z)$.
9. $(-8 \cdot 2u) + (-1 \cdot 8u)$.
10. $-18 + (-1) + (-4)$.
11. $2a + (+3a) + (+5a)$.
12. $-6 \frac{1}{2} + (-3 \frac{1}{2}) + (-8 \frac{1}{4})$.
13. $(-2b) + (-2 \cdot 5b) + (-3 \cdot 6b)$.
14. $+31 + (-14)$.
15. $+95 + (-84)$.
16. $-28 \frac{1}{2} + (+13 \frac{1}{2})$.
17. $-8 \frac{1}{3} + (6 \frac{1}{2})$.
18. $+8a + (-7a)$.
19. $6m + (-4m)$.
20. $-2 \cdot 5x + (+5 \cdot 5x)$.
21. $-10y + (+18y)$.
22. $+24 + (-17) + (-8) + (+10) + (-14) + (-25)$.
23. $-2 \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{3}{4}) + (4 \frac{1}{2}) + (-2 \frac{1}{4}) + (-6 \frac{1}{2}) + (+10)$.
24. $2r + (-3r) + (+4r) + (-r) + (+8r) + (-10r)$.
25. $2a + (-5a) + (+4a) + (+3) + (-4a) + (-3a) + (-2)$.
26. Iz števil: 2, 3, in a tvori po dva jednočlenska, dvočlenska in tričlenska izraza ter določi vsakemu vrednost, ako je $a = 5$!
27. $12p + (3p + 2) + (5 - p)$.

$$28. 25z + (8z - 3) + (-4z - 2) + (z - 1).$$

$$29. 6a - 3b - 9c + (-4a + 5b - c).$$

$$30. (6a - 3b - 9c) + (-4a + 5b - c) + (6a - b - c).$$

Seštej ta-le števila, stoječa drugo pod drugim!

$$\begin{array}{r} 31. \quad 8a - 6b + 4c \\ - 5a - 3b + 7c \\ \hline a + 4b - 9c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32. \quad 3 - 4x + 5y \\ - 4 - 3x - 3y \\ \hline 2 + 9x - 3y \end{array}$$

$$33. 2c + [(2a + c) + (a - c) + (4a - 3c) + (-7a + c)].$$

$$34. 7r + \{a + [r - 2a + (a + 2r)]\}$$

35. Koliko členov imata zadnja dva izraza? Kako se glasé? Koliko členov stoji v vsakem oklepaju?

$$36. + 26 - (+ 14).$$

$$37. - 18 - (-7).$$

$$38. - 15 - (-13).$$

$$39. - 8\frac{1}{2} - (10\frac{3}{4}).$$

$$40. 2e - (+ 5e).$$

$$41. 4f - (+ 3f).$$

$$42. - 15z - (-4z).$$

$$43. - 6\frac{1}{3}x - (10\frac{1}{2}x).$$

$$44. - 14\cdot 3a - (5\cdot 5a).$$

$$45. + 16\cdot 8b - (-5b).$$

$$46. 14m - (2m + 1).$$

$$47. 18a - (4x + a).$$

$$48. 9b - (m - b).$$

$$49. 10x - (10 - 3x).$$

$$50. 15 + 8x - (2a + 3x - 25).$$

$$51. 18\cdot 5 + 2x - y - (6\cdot 2 - 5x + 3y).$$

$$52. 6a - 3b + 4c - (a + b + c) - (7b - c).$$

$$53. 6a - 3b + 4c - [(a + b + c) - (7b - c)].$$

$$54. 6a - 3b + 4c - [(a + b + c) - 7b - c].$$

55. Določi vrednost izrazov v nalogi 52., 53. in 54. za $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$!

56. Odštej od števil v prvi vrsti
števila v drugi vrsti
po zraven stoječem vzorcu:

$$\begin{array}{r} 3a - 5b + 3c \\ a + 2b - 4c \\ - - + \\ \hline 2a - 7b + 7c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a) \quad 17m - 15n + 13p \\ 12m - 14n + 10p \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 15u + 38x - 9y - 21z \\ 8u + 22x + 9y - 11z \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} c) \quad 9a + 8b - 7c \\ 2a + 8b - 6c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d) \quad 23a - 26b + 19c - 7d \\ 18a + 14b - c + 8d \\ \hline \end{array}$$

$$57. (27a - 18b + 15c) - (20a + 2b - 15c) + (8a - 5b + 30c).$$

$$58. (a + b) - \{a - [x - (b - a)] + 2x\}.$$

$$59. 2x - [(3a + 4x) - (4x - 1)] - (x - 2a - 2).$$

$$60. (x + y - z) - (x - y + z) + (-x + y + z) - (-x - y + z).$$

$$61. [(a - b) - b] - (b - a). \quad 62. 5a - [3a - (a - b)].$$

$$63. x + [(y - x) - (y - x)]. \quad 64. x - [x + z - (y + z)].$$

65. Nekdo gre 65 korakov naprej, potem 37 korakov nazaj, potem zopet 48 korakov naprej; a) koliko korakov je naredil sploh? b) za koliko korakov se je oddaljil od svojega prvotnega stališča?

66. Po reki plavajoč parnik naredi vsled parne sile same v vsaki minuti pot 312 m, voda sama pa zanese parnik v vsaki minuti 65 m navzdol; koliko metrov dolgo pot naredi parnik v jedni minuti, a) ako plava po reki navzdol, b) po reki navzgor?

67. Pri posameznih nalogah naredi tudi preskušnjo!

IV. Množenje.

§ 35. Število a s številom b množiti se pravi, število a tolikokrat postaviti kot sumand, kolikor ima b jednot. Število a imenujemo multiplikand ali množenec (*Multiplicand*), b multiplikator ali množitelj (*Multiplicator*) in oba skupaj faktorja ali činitelja (*Factoren*); število pa, katero dobimo pri množenju, produkt ali vzmnožek (*Product*). Produkt je torej vsota enakih sumandov; multiplikand je jeden izmed teh enakih sumandov, multiplikator pa kaže, koliko takih sumandov treba vzeti. Produkt iz multiplikanda a in multiplikatorja b zaznamujemo z $a \times b$ ali $a \cdot b$ (t. j. a bkrat), ali tudi kar z ab .

Produkt dveh celih števil imenujemo tudi multiplikandov mnogokratnik. Na pr. $12 = 4 \cdot 3$; 12 je 3kratnik števila 4.

§ 36. 1. Iz pojma o množenju izvajamo:

$$1. a = a; 0 \cdot a = 0.$$

a) Produkt je enak multiplikatorju, ako je multiplikand 1.

b) Produkt je enak ničli (0), ako je multiplikand 0.

c) Multiplikator je vselej neimenovano število. Multiplikand je lahko ali neimenovano ali imenovano število; v zadnjem slučaju ima tudi produkt isto ime kakor multiplikand.

d) Multiplikator mora biti celo število ter večji nego 1, sicer bi pojasnilo o množenju ne imelo nobenega zmisla.

2. Produkt več nego dveh števil je tisti produkt, katerega dobimo, pomnoživši produkt prvih dveh števil s tretjim, ta novi produkt s četrtem številom i. t. d. Tedaj

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot c &= (a \cdot b) \cdot c, \\ a \cdot b \cdot c \cdot d &= [(a \cdot b) \cdot c] \cdot d, \text{ i. t. d.} \end{aligned}$$

Izreki o produktih.

§ 37. Vrednost produkta se ne izpremeni, ako oba faktorja zamenimo.

Vzemimo, da sta na pr. 5 in 3 dana faktorja. Ako razstavimo 5 na pet jednot in te v horizontalni vrsti predočimo ter potem napišemo tri take vrste drugo pod drugo,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

dobimo očitno prav isto število jednot, naj že seštejemo jednote vseh horizontalnih ali jednote vseh vertikalnih vrst. V prvem slučaju dobimo 5 jednot 3krat, ali $5 \cdot 3$; v drugem slučaju 3 jednote 5krat, ali $3 \cdot 5$.

V obče: $a \cdot b = b \cdot a$.

Ta izrek velja tudi za več nego za dva faktorja:

$$\begin{aligned} 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \\ 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \\ 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \end{aligned}$$

Ako seštejemo najprej horizontalne vrste, dobimo:

$$(4 \times 5) + (4 \times 5) + (4 \times 5) = (4 \times 5) \times 3.$$

Seštevši vertikalne vrste dobimo:

$$(4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3) = (4 \times 3) \times 5.$$

Ako seštejemo jednote, ne oziraje se na vrste, dobimo 15 (t.j. 5×3) krat število 4, torej

$$4 \times (5 \cdot 3) = (5 \cdot 3) \times 4.$$

Zato je $(4 \cdot 5) \cdot 3 = (4 \cdot 3) \cdot 5 = (5 \cdot 3) \cdot 4$.

V obče: $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = (b \cdot c) \cdot a$, ali

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot c \cdot a.$$

Dokaži to, kar smo tukaj razvili, tudi z občnimi števili!

Torej je za produkt iz več faktorjev vse jedno, v katerem redu jih množimo.

Dostavka. *a*) Da bode veljal prejšnji izrek v obče, treba, da je tudi $1 \cdot a = a \cdot 1$ in $0 \cdot a = a \cdot 0$. Tako pa dobita tudi izraza $a \cdot 1$ in $a \cdot 0$ natančno določen pomen, katerega po pojasnilu o množenju, danem v § 35., doslej nista imela. Dobimo namreč:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ in } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \text{ t. j.:}$$

1. Vsako število, pomnoženo z 1, da samo sebe za produkt.

2. Vsako število z 0 (ničlo) pomnoženo, da 0 za produkt.

b) Koeficijent lahko smatramo za faktor glavne količine, pred katero stoji.

$$3a = a + a + a = a \cdot 3 = 3 \cdot a.$$

§ 38. Iz jednačbe v § 37.:

$$(4 \cdot 5) \cdot 3 = (4 \cdot 3) \cdot 5 = 4 \cdot (3 \cdot 5), \quad \text{ali v obče}$$

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{izvajamo:}$$

1. Produkt $(a \cdot b)$ pomnožimo s številom (c) , ako jeden faktor ž njim pomnožimo.

2. Število (a) pomnožimo zaporedoma z dvema številoma $(b$ in $c)$, ako je pomnožimo v kateremkoli redu z vsakim številom posamič, ali kar ob enem z njiju produktom.

Obrnivši zadnjo jednačbo dobimo izrek:

3. Število pomnožimo s produktom, ako je pomnožimo z jednim faktorjem in dobljeni produkt še z drugim faktorjem.

Po tem izreku pomnožimo število s številom 80 ($= 8 \cdot 10$), ako je pomnožimo najprej z 8 in dobljeni produkt z 10. Podobno $312 \times 48 = (312 \times 6) \cdot 8$ i. dr.

§ 39. Produkt, čegar faktorji so vsi jednaki, zaznamujemo krajše tako, da zapišemo samo jeden tak faktor, k temu zgoraj na desno pa število, katero kaže, kolikokrat je postaviti le-ta faktor. Na pr.

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6.$$

Produkt iz več enakih faktorjev imenujemo potenco (*Potenz*); število, katero kaže, koliko je enakih faktorjev, imenujemo potenčni eksponent ali tudi kar eksponent (*Potenzexponent*), faktor pa podlogo ali osnovno število (*Basis oder Grundzahl*). V potenci

a^m , katero čitamo: „ a na m to“ (potenco povišan ali vzmnožen) ali „ a vzmnožen (potenciran) z m “, je a podloga, m eksponent. Drugo potenco a^2 imenujemo posebej tudi kvadrat, tretjo potenco a^3 kub števila a . Na pr.

$$10 \cdot 10 = 10^2 = 100.$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000, \text{ i. t. d.}$$

Vsako število a smatramo za prvo potenco od a , tedaj $a = a^1$, $10 = 10^1$.

Kadar je v veččlenskem izrazu več potenc iste podloge, uredimo jih navadno, da posamezne člene lažje pregledamo, po potenčnih eksponentih one podloge. V ta namem denemo na prvo mesto najvišjo potenco in za to nižje in nižje potence, ali pa postavimo najprej člen brez potence ali z najnižjo potenco in potem višje in višje potence. V prvem slučaju pravimo, da smo polinom uredili (*geordnet*) po padajočih (*fallend*), v drugem po rastočih (*steigend*) potencah skupne podloge. Tako je na pr. polinom

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

urejen po padajočih potencah podloge x in zajedno po rastočih potencah podloge y .

§ 40. $a^5 \cdot a^3 = aaaaa \cdot aaa = aaaaaaaaa = a^8$.

V obče: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Potence iste podloge pomnožimo, ako vzmnožimo (potenciramo) skupno podlogo z vsoto eksponentov.

Primeri: $m^2 \cdot m^7 \cdot m = m^{10}$; $2n^2 \cdot 3n^4 \cdot n^3 = 6n^9$

$$3a^2 \cdot 4ab \cdot b^3 = 12a^3b^4.$$

Dostavek: Ako je treba poiskati produkt jednočlenskih izrazov, tedaj pomnožimo najprej koeficiente, potem pa pripišemo druge faktorje v abecednem redu, ravnaje se po prejšnjem izreku.

Množenje vsot in diferenc.

§ 41. 1. Ako ima neki deček 2 jabolki, 3 hruške in 5 orehov, tedaj ima drug deček 2- ali 3krat toliko kakor prvi le takrat, če ima od vsakega posameznega sadu 2- ali 3krat toliko. V obče:

$$(a + b) \cdot c = (a + b) + (a + b) + (a + b) + \dots \text{ (ckrat)}$$

$$= a + a + a + \dots \text{ (ckrat)} + b + b + b + \dots \text{ (ckrat)}$$

$$= ac + bc.$$

Vsoto pomnožimo s številom, ako vsak sumand s številom pomnožimo, dobljene delske produkte pa seštejemo.

$$\text{Na pr. } (200 + 80 + 3) \cdot 5 = 200 \cdot 5 + 80 \cdot 5 + 3 \cdot 5.$$

$$8\frac{1}{2} \times 3 = (8 + \frac{1}{2}) \cdot 3 = 24 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 24\frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2. (a-b) \cdot c &= (a-b) + (a-b) + (a-b) + \dots (\text{ckrat}) \\ &= [a + a + a + \dots (\text{ckrat})] - [b + b + b + \dots (\text{ckrat})] \\ &= ac - bc. \end{aligned}$$

Diferenco pomnožimo s številom, ako pomnožimo s številom minuend in subtrahend ter drugi produkt odštejemo od prvega.

Vprašanje: Za koliko je produkt 3×87 manjši nego produkt 3×90 ?

$$(a - b - c) \times 3 = 3a - 3b - 3c;$$

$$(a + b - c - d) \times 2 = 2a + 2b - 2c - 2d. \text{ (Dokaz!)}$$

§ 42. Obrnivši jednačbi v § 41. dobimo:

$$ac + bc = (a + b) \cdot c,$$

$$ac - bc = (a - b) \cdot c, \text{ t. j.:}$$

Produkte, imajoče skupen faktor, seštejemo ali odštejemo, ako pomnožimo s skupnim faktorjem oziroma vsoto ali diferenco njih neskupnih faktorjev.

Ta račun imenujemo izločevanje skupnega faktorja.

$$\begin{aligned} \text{Na pr. } 5a + 5b - 10c &= 5(a + b - 2c), \\ 5a + 10ab - 15ac &= 5a(1 + 2b - 3c). \end{aligned}$$

§ 43. Ako v § 41. zamenimo faktorja $(a + b)$ in c , dobimo:

$$1) \quad c(a + b) = ac + bc.$$

$$2) \quad c(a - b) = ac - bc.$$

1. Število (c) pomnožimo z vsoto $(a + b)$, ako je pomnožimo z vsakim sumandom ter delske produkte seštejemo. Na pr.

$$68 \cdot (50 + 3) = 68 \cdot 50 + 68 \cdot 3.$$

„68 pomnožiti s 53 se pravi, število 68 vzeti tri in petdesetkrat za sumand“. Torej moramo 68 vzeti za sumand petdesetkrat (68×50) in potem še trikrat (68×3); tedaj $68 \times 50 + 68 \times 3$.

2. Število (c) pomnožimo z diferenco $(a - b)$, ako je pomnožimo z minuendom in s subtrahendom ter drugi delski produkt odštejemo od prvega.

Ta izrek uporabljamo kaj ugodno pri računanju s posebnimi števili. Na pr.

$$758 \cdot 994 = 758 \cdot (1000 - 6) = 758 \cdot 1000 - 758 \cdot 6.$$

§ 44. Ako nadomestimo v § 43., 1. število c z vsoto $(m+n+p)$, dobimo pravilo za produkt dveh vsot:

$$(m+n+p)(a+b) = (m+n+p) \cdot a + (m+n+p) \cdot b.$$

Vsoto pomnožimo z vsoto, ako pomnožimo multiplikand z vsakim členom multiplikatorjev ter delске produkte seštejemo.

Ako izračunimo zadnja produkta po § 41., 1. dobimo:

$$(m+n+p)(a+b) = am + an + ap + bm + bn + bp.$$

Vsoto pomnožimo z vsoto, ako vsak člen jednega faktorja pomnožimo z vsakim členom drugega faktorja ter delске produkte seštejemo. Na pr.

$$\begin{aligned} (9a^2 + 7a + 3)(8a^2 + 5a + 4) &= \\ = 72a^4 + 56a^3 + 24a^2 &\dots\dots\dots = (9a^2 + 7a + 3) 8a^2, \\ + 45a^3 + 35a^2 + 15a &\dots\dots\dots = (9a^2 + 7a + 3) 5a, \\ + 36a^2 + 28a + 12 &\dots\dots\dots = (9a^2 + 7a + 3) 4. \\ \hline = 72a^4 + 101a^3 + 95a^2 + 43a + 12 \end{aligned}$$

Namesto prvega faktorja moremo za multikand vzeti tudi drugega.

Množenje dekadnih števil.

§ 45. Dekadno število pomnožimo z 10, 100, 1000, ... ako mu na desni pripišemo jedno, oziroma, dve, tri ... ničle.

Kajti, ako mu na desni pripišemo 1, oziroma 2, 3, ... ničle, pride vsaka številka za 1, oziroma 2, 3, ... mesta dalje proti levi ter dobi tako 10 krat, 100 krat, 1000 krat ... toliko vrednost (§ 8.); zatorej postane tudi število samo (§ 41., 1.) 10 krat, 100 krat, 1000 krat ... toliko. Na pr.

$$376 \cdot 10 = 3760, \qquad 583 \cdot 1000 = 583000.$$

V obče pomeni $A \cdot 10^m$ dekadno število, čegar številčna vrsta A ima na desni m ničel.

Dostavek. Vsako dekadno število lahko smatramo za polinom, kateri je urejen po padajočih potencah števila 10. Na pr.

$$\begin{aligned} 6547 &= 6000 + 500 + 40 + 7 \\ &= 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7. \end{aligned}$$

Red (*Rang*) vsake posamične številke je določen po eksponentu one potence od 10, katere koeficijent je dotična številka; zató ta eksponent števila 10 tudi lahko imenujemo redovni eksponent (*Rangexponent*). Na pr. v številu 6547 je 1 redovni eksponent številke 4 in 3 redovni eksponent najvišje številke 6.

V vsakem dekadnem številu je redovni eksponent najvišjega mesta za 1 manjši nego je število številok.

Tedaj je

$$r \cdot 10^{m-1} + q \cdot 10^{m-2} + \dots + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$$

občni izraz m številčnega dekadnega števila, imajočega a enic, b desetice, ... r enot ($m-1$) reda.

§ 46. Ako je $M = d$ tisoč. + c stot. + b des. + a jed.

$$= d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a, \text{ tedaj je}$$

$$M \cdot p = dp \text{ tisoč.} + cp \text{ stot.} + bp \text{ des.} + ap$$

$$= dp \cdot 10^3 + cp \cdot 10^2 + bp \cdot 10 + ap.$$

Večštevilčno število pomnožimo z jednoštevilčnim, ako z multiplikatorjem pomnožimo multiplikandove jednice, desetice, stotice, ...

Ako je katerikoli produktov ap , bp , cp , ... dvoštevilčen, ondaj prištejemo desetice kot jednote produktu nastopnega višjega mesta. Da te jednote laže prištevamo nastopnemu višjemu mestu, pričenjamo pismeno množenje pri jednicah. Na pr.

$$793 \times 8 = \begin{cases} 24 \text{ jed.} = 24 & = 24 \text{ Govori: štiri in dvajset, dve;} \\ 72 \text{ des.} = 72 \cdot 10 & = 720 \text{ dva i. sedem des., štiri i. sedemdes., sedem;} \\ 56 \text{ stot.} = 56 \cdot 100 & = 5600 \text{ šest in petdeset, tri in šestdeset.} \end{cases}$$

6344

Računajoč na pamet pomnoži z jednoštevilčnim multiplikatorjem najprej višje in potem nižje jednote. Na pr. Koliko je 6krat 78?

6krat 70 je 420, 6krat 8 je 48; 420 in 48 je 468.

§ 47. Ako je M večštevilčno število in

$$N = p \cdot 10^3 + q \cdot 10^2 + r \cdot 10 + s, \text{ ondaj je}$$

$$M \cdot N = Mp \cdot 10^3 + Mq \cdot 10^2 + Mr \cdot 10 + Ms.$$

Dve večštevilčni števili pomnožimo drugo z drugim, ako pomnožimo multiplikand z vsako multiplikatorjevo številko, z jednicami začenshi, ter dobljene delske produkte po vrsti še

z rastočimi potencami števila 10, pomaknivši v ta namen vsak naslednji produkt za jedno mesto dalje proti levi; deske produkte treba potem še sešteti in to tako, kakor stojé drugi pod drugim.

Na pr.

973×854	krajše:	973×854	ali:	973×854
<u>3892</u>		<u>3892</u>		<u>7784..</u>
48650		4865		4865.
<u>778400</u>		<u>7784</u>		<u>3892</u>
830942		830942		830942

Ako začnemo množiti z najvišjo multiplikatorjevo številko, moramo vsak naslednji produkt pomakniti za jedno mesto proti desni. — Primerjaj zadnji račun s primerom v § 44., 2.

Pomni tudi to, da se pri množenju z enicami mestna vrednost številke ne izpremeni, a da se pri množenju z deseticami, stoticami, ... poviša za 1, 2, 3 ... mesta!

N a l o g e.

- | | | |
|--|---|---------------------------------|
| 1. $4a \cdot b$. | 2. $3xy \cdot 2$. | 3. $5a \cdot b \cdot 3$. |
| 4. $m \cdot 3n$. | 5. $a \cdot 6bc$. | 6. $2x \cdot 3y \cdot 4z$. |
| 7. $a^2 \cdot a$. | 8. $x^5 \cdot x^3$. | 9. $m^3 \cdot m^2 \cdot m$. |
| 10. $a^2y \cdot a^2y$. | 11. $3m^4 \cdot m^3$. | 12. $5a^2x^3 \cdot 3a$. |
| 13. $z^2 \cdot 3z \cdot 5z^4$. | 14. $8x^5 \cdot 3b^2 \cdot a$. | 15. $a^3b^4c^5 \cdot a^3b^2c$. |
| 16. $x^4y^3 \cdot 5x^2z^5 \cdot 3y^5z$. | 17. $2ab^2c^3d^4 \cdot 3a^2c^2d^2 \cdot 4b^3c^2d^3$. | |
| 18. $(x+2) \cdot 3$. | 19. $(a+5) \cdot x$. | |
| 20. $(a+4b) \cdot 5x$. | 21. $(x^2y + xy^2) \cdot xy$. | |
| 22. $(a-b) \cdot x$. | 23. $(2a^2 - 3a) \cdot 4a$. | |
| 24. $(2x^2 - 5) \cdot 4 + 2x^2$. | 25. $(x^3 - 2x^2) \cdot 3x - 2x^4$. | |
| 26. $(m+n) \cdot x + (m-n) \cdot x$. | 27. $(m+n)x - (m-n) \cdot x$. | |
| 28. $7 \cdot (a+2)$. | 29. $m \cdot (a^2 + x^2)$. | |
| 30. $8(3-y)$. | 31. $5a(mx^3 - ny^3)$. | |
| 32. $n^2 \cdot (x^2 - 2m^2) + m^2n^2$. | 33. $2a^2b^2(a^2b - ab^2) - a^4b^3$. | |

Izloči v nalogi 34., 35. in 36. skupni faktor:

- | | | |
|---|------------------|-----------------|
| 34. $5a + 5b$; | $ax^2 + bx^2$; | $(a+m)x - mx$. |
| 35. $a \cdot 10^3 - b \cdot 10^3$; | $9ax^2 - 6y^3$; | $ax + ay + a$. |
| 36. $a(2x-3) - 2b(2x-3) + a(2x-3) - (2x-3)b$. | | |
| 37. $(3x^2 + 2xy + y^2)(2x+y) + (x^3 + 4x^2y + xy^2)(1+3y)$. | | |
| 38. $(3c^2 + 4c + 5)(6c^2 + 2c + 1)$. | | |
| 39. $(8x^2 + ax + a^2)(x^2 + 2ax + 3a^2)$. | | |

40. $(y^2 + 2y + 3)(4y^2 + 8y + 3) - (y + 1)(y + 3)$.
41. Pomnoži a) 358, b) 8070 z 10, 100, 1000, 10000.
- *42. Koliko je 3krat 21? 2krat 36? 4krat 41? 7krat 69?
- *43. Koliko je 2krat 180? 4krat 213? 3krat 236? 6krat 149?
44. Pomnoži a) 875, b) 2168, c) 15786, s 5, 6, 7, 8.
45. Izračuni vrednost izrazu:

$$4a(3x^2 - 5xy) - 5b(2x^2 - 6y^2)$$
za $a = 5$, $b = 3$, $x = 6$, $y = 4$.
46. 286712 . 7 . 4 . 8 . 3 . 6.
- *47. Koliko je 15krat 40? 12krat 27? 21krat 43? 13krat 34?
48. 639 . 57. 49. 52029 . 475. 50. 7664 . 94.
51. 74509 . 3049. 52. 91234 . 7100. 53. 65800 . 978000.
54. Pomnoži 9283 a) s 386, b) s 7405, c) z 91034.
55. Izračuni $A = ab$, $B = ac$, $C = ad$, $D = bc$, $E = bd$,
 $F = cd$, za $a = 325694$, $b = 816$, $c = 903$, $d = 981$.
56. 6789 . 2345 . 7890.
- *57. Določi mestno vrednost številke na najvišjem mestu v nalogi 50., 51., 52., 53., 54. in 55., ne da bi tvoril produkt!
- *58. Določi produkt katerihkoli dveh števil z ozirom na njega mestno vrednost, na pr. 5×5 , 7×9 , 4×5 v nalogi 49.;
 1×1 , 7×2 , 7×3 v nalogi 52. in drugih!
59.
$$\begin{array}{r} 86325 \\ 86325 \\ \hline 949575 \end{array}$$
60. 709458 . 11.
61. 288797 . 11.
62. 3705866 . 110.
63.
$$\begin{array}{r} 64538 . 41 \\ 258152 \\ \hline 2646058 \end{array}$$
64.
$$\begin{array}{r} 357946 . 128. \\ 715892 \\ \hline 2863568 \\ \hline 45817088 \end{array}$$
65. 905643 . 31.
66. 447653 . 17.
67. 583076 . 371.
68. 290884 . 185.
- *69. Izračuni, uporabljajoč izrek v § 40., 2: a) 37 . 24; b) 17 . 18;
c) 23 . 32.
70. 83452 . 45.
71. 149335 . 72.
72. 265824 . 64.
73. 703796 . 320.
74.
$$\begin{array}{r} 753467^{00} . 98 \\ 1506934 \quad 100 - 2 \\ \hline 73839766 \end{array}$$
75.
$$\begin{array}{r} 69374 . 399 \\ 27749600 \quad 400 - 1 \\ \hline 27680226 \end{array}$$

76. 357908 . 997.

77. 662452 . 9996.

78. 480267 . 599.

79. 534426 . 99990.

*80. Koliko velja a) 8 l po 72 h; b) 18 kg po 47 h?

*81. Koliko velja a) 9 m po 1 K 82 h; b) 12 hl po 20 K 38 h;

82. V Avstro-Ogrski se izkoplje vsako leto povprek 37180 kg čistega srebra; koliko goldinarjev, po 90 na 1 kg, moremo iz njega nakovati?

83. Nekdo prehodi vsako minuto povprek pot 83 m ter hoče narediti v vsem 15 km 310 m dolgo pot; koliko še mora prehoditi, ako je hodil že 2 uri?

84. Vsak kraj, ki je za 1 stopinjo bolj proti vzhodu, ima za 4 časovne minute poprej poldne; koliko kaže ura v Parizu, ki je za 14° bolj proti zahodu nego Dunaj, ako kaže ura na Dunaju 10 ur 28 minut dopoldne?

85. Avstro-Ogrska monarhija meri 6220 μm^2 ; koliko ima prebivalcev, ako se računi na 1 μm^2 povprek po 6500 prebivalcev?

Množenje algebraskih števil.

§ 48. Ako je multiplikator pozitivno število, ondaj računimo ravno tako kakor z absolutno vrednostjo. Torej je:

$$(+4) \cdot (+3) = (+4) \cdot 3 = (+4) + (+4) + (+4) = +12 \dots I.$$

$$(-4) \cdot (+3) = (-4) \cdot 3 = (-4) + (-4) + (-4) = -12 \dots II.$$

Ako je multiplikator negativno število, ne moremo porabiti pojma o množenju, kakeršnega smo podali § 35. Računimo pa lahko po § 43., 3.:

$$a \cdot (-3) = a \cdot (0 - 3) = a \cdot 0 - [a \cdot 3] = 0 - [a \cdot 3] = -a \cdot 3.$$

Za $a = +4$ dobimo:

$$(+4) \cdot (-3) = 0 - [(+4) \cdot 3] = 0 - [+12] = -12 \dots III.$$

Za $a = -4$ pa:

$$(-4) \cdot (-3) = 0 - [(-4) \cdot 3] = 0 - [-12] = +12 \dots IV.$$

V obče: I. ... $(+a) \cdot (+b) = +ab$.

II. ... $(-a) \cdot (+b) = -ab$.

III. ... $(+a) \cdot (-b) = -ab$.

IV. ... $(-a) \cdot (-b) = +ab$.

1. Dva jednako zaznamovana faktorja dasta pozitiven, dva nejednako zaznamovana faktorja dasta negativen produkt.

Da je jednačba III. prava, spoznaš tudi iz jednačbe II., ako v njej faktorja zameniš.

2. Za tri ali več faktorjev izvirata iz prejšnjega izreka pravili:

a) Ako so vsi faktorji pozitivni, pozitiven je tudi produkt.

b) Ako so vsi ali vsaj nekateri faktorji negativni, tedaj je produkt pozitiven ali negativen, kakor je število negativnih faktorjev sodo ali liho. Na pr.

$$(-2a)(+3ab)(-4ab^2)(-8ac) = -192a^4b^3c.$$

$$(-4a)(+ab^3)(-ac^2)(+bc^3) = +4a^3b^4c^5.$$

§ 49. Ker moremo veččlenske izraze smatrati za algebrajske vsote, veljajo za produkt iz veččlenskih izrazov pravila v § 44.; predznak produktu vsakih dveh členov določujemo po § 48., 1. Na pr.

$$(2ab-3ax+4)(-5a) = (2ab)(-5a) + (-3ax)(-5a) + (4)(-5a) =$$

$$= -10a^2b + 15a^2x - 20a.$$

$$(4a^2-3a-4)(3a^2-7a+5) =$$

$$= 12a^4 - 9a^3 - 12a^2 \dots \dots \dots = (4a^2-3a-4)(+3a^2).$$

$$-28a^3 + 21a^2 + 28a \dots \dots \dots = (4a^2-3a-4)(-7a).$$

$$+20a^2 - 15a - 20 \dots \dots = (4a^2-3a-4)(+5).$$

$$= 12a^4 - 37a^3 + 29a^2 + 13a - 20 \text{ produkt.}$$

§ 50. 1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2; \text{ t. j.}$$

Kvadrat vsote ali difference dveh števil je enak vsoti kvadratov obeh števil, več, oziroma menj, dvojnemu produktu teh števil.

2. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2, \text{ t. j.}$

Produkt iz vsote in difference dveh števil je enak diferenci kvadratov onih dveh števil.

Naloge.

*1. $+9. - 7.$

*2. $-19. + 8.$

3. $-128. + 39.$

4. $-217. 25.$

5. $+14. + 9. - 8.$

6. $+27. - 6. - 9.$

7. $-2. - 7. - 11. - 20.$

8. $+9. - 5. - 12. - 25.$

9. $[-2345 - (+730)]. [+1357 + (-1468)].$

10. $4.(-3) - 5(-6) + 7(-5) - 9(+8).$

11. Izračuni $(x-1)(x-4)(x-7)(x-10)$ za $x=3.$

12. Izračuni $x^2 - 6x - 16$ za $x = +8$ in za $x = -2$.
- *13. Izračuni vrednost y^2, y^3, y^4 za $y = 2, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -3$.
14. $6a \cdot -3$. 15. $-7ab \cdot 2ac$.
16. $-a^2 \cdot -4a$. 17. $3x \cdot -5xy$.
18. $-12x^4 \cdot 8x^2y^2$. 19. $-8ay^3 \cdot 15a^3y$.
20. $-5x \cdot -5x \cdot -5x$. 21. $8ab^2 \cdot 7ac \cdot -18c^2$.
22. $-6ab^2y^3 \cdot 2b^3y^3 \cdot -8a^2y$. 23. $12x^2y^3z \cdot -9xy^2z^3 \cdot -2x^2z^2$.
24. $(6a - 5b) \cdot -8c$. 25. $(7x^2 - 6y^2) \cdot 2xy$.
26. $(2 + 3a - 4a^2 - 5a^3) \cdot 6a^2$.
27. $-15a^2x^2 \cdot (2a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2)$.
28. $(7ax^2 - 10by^2) \cdot 4abx^2 - (9bx^2 + 5ay^2) \cdot 5aby^2$.
29. $(3ay - a^2y^2) \cdot (-2a) - (4a - 3a^2y) \cdot (-5ay)$.
30. $(+2ab) \cdot (-\frac{1}{2}a^2b^3) \cdot (-4ab^5) \cdot (-3a) \cdot (2a + b) \cdot (-3a)$.
31. $(3x - 2y) \cdot (-4x^2) - 2x(\frac{1}{4}x) \cdot (-6xy) \cdot (-y^2)$.
-
32. $(8x + 6y + 5)(3a - 4)$. 33. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.
34. $(y^2 - 2y + 1)(6y - 3)$. 35. $(5x^2 + 6x - 7)(4x - 5)$.
36. $(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x + 1)$.
37. $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$.
38. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$.
39. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$.
40. $(16x^4 + 8x^2y^2 + y^4)(4x^2 - y^2)$.
41. $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b) + (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$.
42. $(5x^3 + 4x - 3)(4x + 8) - (4x^2 - 3x - 6)(5x + 4)$.
43. $(x + 3)(y + 2)$. 44. $(x + 3)(y - 2)$.
45. $(x - 3)(y + 2)$. 46. $(x - 3)(y - 2)$.
47. $(3x + 2y)(2x - 3y)$. 48. $(5a^2 - 3b^2)(3a^2 - 4b^2)$.
49. $(2x^2 + 3a^2)(5x^2 - 4a^2) - (10x^4 - 12a^4)$.
50. $(5 - x^2)(7 + y^2) + (7 - x^2)(6 + y^2)$.
51. $(10x^4y + 4x^3y^2 - 5x^2y^3)(9x^2y - 5xy^2 + 7y^3)$.
52. $(x^4 + x^3y + xy^3 + y^4)(x^2 - xy + y^2)$.
53. $(3a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 2b^3)(4a^2 - 3ab + b^2)$.
54. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. 55. $(x + 3)(x - 2)(x - 1)$.
56. $(x - a)(x + b)(x - c)$. 57. $(x - a)(x - b)(x - c)$.
58. $(3a - 2b + c)^2$. 59. $(ax^2 + by^2 - cz^2)^2$.
60. $(2x - 3)(3x - 4)(4x - 5)(5x - 6)$.
61. $(4a^2 + 3b^2 - 2c^2)(4a^2 - 3b^2 + 2c^2)$.

62. $(a + 2)^2$. 63. $(2a + 5b)^2$. 64. $(3x^2 + 4y^2)^2$.
 65. $(3 - x)^2$. 66. $(10m - n)^2$. 67. $(5a^2 - 2b^2)^2$.
 68. $(a + 5)^2 - 10a$. 69. $(x - 4)^2 + 8x$.
 70. $(x + a)^2 + (x - a)^2$. 71. $(x + a)^2 - (x - a)^2$.
 72. $(x + 3)(x - 3)$. 73. $(a + 5)(a - 5)$.
 74. $(a + 7)(a - 7) + 49$. 75. $x^2 - (x + 4)(x - 4)$.
 76. $(5a - 6b)(5a + 6b)$. 77. $(3y^2 + 2b^2)(3y^2 - 2b^2)$.
 78. $(3x^2 + 5y^2)(3x^2 - 5y^2) - (2x^2 - 4y^2)(2x^2 + 4y^2)$.
 79. $(3a - 4b + 5) \cdot 8$. 80. $(7 + 5a - 3a^2)(-4a^2)$.
 81. $5x^2 \cdot (6a^2 - 9ab + 4b^2)$. 82. $3ax \cdot (2a^2 + 7ax + 5x^2)$.
 83. $(5a + 6b)(-2a + 3b)$. 84. $(1 - m^2)(1 + m^2)$.
 85. $(x^2 + 2xy + y^2)(-x^2 + 2xy - y^2)$.
 86. $(3 - 4x + 6x^2)(3 - 4x - 6x^2)$.
 87. $(1 - 2a + 3a^2 - 4a^3)(1 - 2x - 3a^2 + 4a^3)$.
 88. $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$.

V. Deljenje.

§ 51. Množenju nasproten račun je deljenje (delitev).

Število a deliti s številom b se pravi, iz a kot produkta dveh faktorjev in iz b kot jednega teh faktorjev iskati drugi faktor. Dani produkt a imenujemo dividend ali deljenec (*Dividend*), dani faktor b divizor ali delitelj (*Divisor*) in faktor, katerega iščemo, kvocijent ali količnik (*Quotient*). Kvocijent zaznamujemo z $a : b$ ali $\frac{a}{b}$.

Kakor prav jasno razvidimo na primerih s posebnimi števili, dá vsaka množitev dveh števil, na pr.

$$5 \text{ K} \times 3 = 15 \text{ K},$$

ako jo obrnemo v delitev, dve po pojmu različni delitveni nalogi, namreč jedno, če je razven vsakokrat danega produkta 15 K, t. j. dividenda, kot divizor dan multiplikand 5 K, drugo, če je kot divizor dan multiplikator 3.

1. Ako je dan kot divizor multiplikand 5 K, tedaj je treba poiskati ono število, ki kaže, kolikokrat je treba 5 K postaviti kot sumand, da dobimo 15 K za vsoto. To število 3 dobimo, če preiščemo, kolikokrat moremo divizor 5 K odšteti od dividenda 15 K,

ali kolikokrat se nahaja divizor 5 K v dividendu 15 K. Delitev je tu **merjenje** (*Messen*).

Pri merjenju imata dividend in divizor (produkt in multiplikand) isto ime, kvocijent pa (kot multiplikator) je vselej neimenovano število. Kvocijent pove, kolikokrat se nahaja divizor v dividendu (kolikokrat ga moremo od divenda odšteti), ime se mu more določiti le po drugem umovanju. Na pr.

1 m velja 5 K; koliko metrov se dobi za 15 K? Tu sklepamo tako-le: Za 5 K se dobi 1 m, za 15 K se dobi torej tolikokrat 1 m, kolikorkrat se nahaja 5 K v 15 K. Tu merimo 15 K s 5 K ter dobimo $15 K : 5 K = 3$.

Kvocijent (3) je neimenovano število, vendar je po navedenem umovanju jasno, da dobimo za 15 K trikrat jeden meter ali kratko tri metre.

2. Ako pa je dan multiplikator 3 kot divizor, tedaj nam je poiskati ono število, katero daje, 3krat kot sumand vzeto, dividend 15 K za vsoto. Da dobimo to število (5 K), treba dividend 15 K razdeliti na 3 jednake dele. Delitev je tu **deljenje v ožjem pomenu** (*Theilen*).

Pri deljenju v ožjem pomenu je divizor kot multiplikator vselej neimenovano število; kvocijent kot multiplikand pa ima z dividendom kot produktom isto ime ter pove, kolik je jeden pripadajoči del. Na pr.

3 m veljajo 15 K; koliko velja 1 m? Tu sklepamo: 1 m je tretji del od 3 m, 1 m velja torej tretji del od 15 K. Tedaj je treba 15 K razdeliti na 3 jednake dele; kolikor K ima jeden takšen del, toliko K velja 1 m. Na ta način dobimo $15 K : 3 = 5 K$.

Dasi tudi sta oba delitvena načina merjenja in deljenja po pojmu različna, dasta vendar oba za isti dividend in divizor, ne gledé na ime, isto število za kvocijent in sta zato v izvršitvi jeden sam računski način:

$$10 m : 2 m = 5,$$

$$10 m : 2 = 5 m.$$

Kolikorkrat se dasta 2 jednoti odšteti od 10 jednot, prav toliko jednot ima jeden del, če razdelimo število 10 na 2 jednaka dela, kar razvidimo iz tega obrazca:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Da število razdelimo s številom, poiščemo v številni vrsti ono število, katero dá dividend, ako je tolikokrat vzamemo kot sumand, kakor kaže divizor. Deljenje dveh števil moremo v številni vrsti izvršiti le tedaj, kadar je dividend divizorjev mnogokratnik.

§ 52. Iz pojma o deljenju izvira:

$$1) \frac{a}{b} \cdot b = (a : b) \cdot b = a \quad \text{in} \quad 2) ab : b = a.$$

1. Kvocijent, pomnožen z divizorjem, da dividend. (Preskušnja za pravost delitve.)

2. Ako razdelimo produkt dveh faktorjev z jednim teh faktorjev, dobimo drugi faktor.

Mehanično izvršimo delitev z jednostavnim divizorjem tako, da „izpustimo skupni faktor“. Če pa se divizor v dividendu ne nahaja kot faktor, delitve ne moremo izvršiti; moremo jo le nakazati. Na pr.

$$2abc : 2a = bc, \quad 2abc : m = \frac{2abc}{m}.$$

3. Število ostane neizpremenjeno, ako je s katerimkoli številom pomnožimo, potem pa z istim številom razdelimo. (Obrat jednačbe 1) in 2).

Iz $a \cdot 1 = a$ izvira: $a : a = 1$ in $a : 1 = a$. Torej:

4. Vsako število da, samo s seboj razdeljeno, 1 za kvocijent.

5. Vsako število da, z 1 razdeljeno, samo sebe za kvocijent.

Ker je $a \cdot 0 = 0$, tedaj je $0 : 0 = a$.

6. Ničla, razdeljena z ničlo, da lahko vsaktero število za kvocijent.

Izraz $\frac{0}{0}$ rabi nam zato kot znamenje nedoločnosti.

Izreki o kvocijenti.

§ 53. Produkt razdelimo s številom, ako ž njim razdelimo jeden faktor.

$$1) (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b, \quad 2) (a \cdot b) : c = a \cdot (b : c).$$

O pravosti teh izrekov se prepričaš naredivši preskušnjo po § 52., 1.:

kvocijent $\times$ divizor = dividend.

$$1) (a : c) \cdot b \times c = (a : c) \cdot c \cdot b \text{ [po § 38., 1.] } = a \cdot b$$

$$2) a \cdot (b : c) \times c = a \cdot (b : c) c = a \cdot b$$

Izvod. Ako je treba število pomnožiti z drugim številom in s tretjim razdeliti, tedaj je vse jedno, v katerem redu množimo in delimo. Na pr.

$$(8 \cdot 100) : 4 = (8 : 4) \cdot 100.$$

§ 54. Število razdelimo s produktom, ako je razdelimo z jednim faktorjem in dobljeni kvocijent še z drugim faktorjem.

$$1) a : (b \cdot c) = (a : b) : c, \quad 2) a : (b \cdot c) = (a : c) : b.$$

Dokaz po preskušnji (§ 52., 1.):

kvocijent $\times$ divizor = dividend.

$$(a : b) : c \times (bc) = [(a : b) : c] \cdot c \times b = (a : b) \times b = a$$

$$(a : c) : b \times (bc) = [(a : c) : b] \cdot b \times c = (a : c) \times c = a.$$

Razdeli na pamet 360 s 24 (= 3.8), 30 (= 3.10) i dr.

Izvod. Ako je treba število razdeliti z dvema številoma, razdelimo je lahko z vsakim posamič v kateremkoli redu, ali pa ob enem z njiju produktom. Na pr.

$$(70 : 2) : 5 = (70 : 5) : 2 = 70 : (2 \cdot 5) \\ 35 : 5 = 14 : 2 = 70 : 10 = 7.$$

§ 55. Ako pomnožimo jeden faktor v produktu, pomnožimo ob enem tudi produkt (§ 38., 1); ako razdelimo jeden faktor, razdelimo tudi produkt; ako izvršimo oba računa istočasno, ne izpremeni se produkt (§ 52., 3). Torej:

Vrednost produktu se ne izpremeni, ako mu jeden faktor s katerimkoli številom pomnožimo, drugi faktor pa z istim številom razdelimo.

$$\text{V obče:} \quad a \cdot b = am \cdot (b : m), \\ a \cdot b = (a : m) \cdot bm.$$

$$\text{Zato je: } 64 \times 25 = 16 \times 100 = 1600.$$

O pravosti zadnjih jednačeb se prepričaj, ako izvršiš množitev $(b : m) \cdot am$:

$$(b : m) \cdot am = (b : m) \cdot m \times a = b \times a.$$

$$\text{§ 56.} \quad a^8 : a^3 = a^5; \text{ kajti } a^5 \cdot a^3 = a^8.$$

$$\text{V obče:} \quad a^m : a^n = a^{m-n},$$

ako je $m > n$.

Potence iste podloge razdelimo, ako od dividendo-vega eksponenta odštejemo divizorjev eksponent ter s to diferenco potenciramo (vzmnožimo) skupno podlogo.

Dostavek: Ako je $m = n$, dobimo, uporabljajoč ta izrek, $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$; ker pa potenca imajoča 0 za eksponent po pojmu o potenci (§ 39.) nima nobenega pomena, treba tej potenčni obliki pomen še le določiti. Po § 52., 4. je $a^m : a^m = 1$; a^0 pomeni torej 1.

Vsako število, vzmnoženo z ničlo, je jednako 1.

Primeri: $x^{10} : x^7 = x^3$; $8x^{10} : x^7 = 8x^3$;

$$24x^6 y^2 : 3x^2 y = 8x^4 y.$$

Dostavek: Delitev monoma z mononom izvršujemo v obče po § 53. in 54. Uporabljajoč navedene izreke razdelimo najprej dividendov koeficijent s koeficijentom divizorjevim in sploh dividend (oziroma vselej po jeden pripraven njegov faktor) zaporedoma z vsemi faktorji divizorjevimi.

Ako kakega divizorjevega faktorja ni v dividendu, moremo delitev le nakazati. Na pr.

$$8a : b = \frac{8a}{b}, \quad 8a : 2b = \frac{4a}{b}, \quad 8a^3 : 4ab = \frac{2a^2}{b}.$$

Deljenje vsot in diferenc.

§ 57., 1. Ako ima deček 12 hrušek in 36 orebov, ima drug deček le takrat polovico ali tretjino tega, ako ima od vsake vrste polovico ali tretjino tistega, kar ima prvi deček.

$$\text{V obče: } (a + b) : c = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

$$\text{Preskušnja (po § 52., 1.): } \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) c = \frac{a}{c} c + \frac{b}{c} c = a + b \text{ (dividend).}$$

Vsoto razdelimo s številom, ako vsak sumand razdelimo s številom in dobljene delske kvocijente seštejemo.

$$\text{Na pr. } (90 + 6) : 3 = (90 : 3) + (6 : 3).$$

$$2. \quad (a - b) : c = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

$$\text{Preskušnja (po § 52., 1.): } \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) c = \frac{a}{c} c - \frac{b}{c} c = a - b \text{ (dividend).}$$

Diferenco razdelimo s številom, ako minuend in subtrahend razdelimo s številom ter drugi kvocijent odštejemo od prvega. Na pr.

$$(100 - 8) : 4 = (100 : 4) - (8 : 4).$$

Dostavek. Ako združimo prvo enačbo z drugo, dobimo:

$$(a + b - c - d) : n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} - \frac{d}{n}.$$

§ 58. Uporabljajoč izreka v § 57., 1. in § 41., 1. dokažemo lahko tudi ta-le važen izrek:

Kvocijentu se vrednost ne izpremeni, ako dividend in divizor z istim številom pomnožimo, ali oba z istim številom razdelimo.

Dokaz: Kvocijent pove, kolikokrat se nahaja divizor kot sumand v dividendu kot vsoti iz enakih sumandov. Na pr.

$$12 : 4 = 3, \text{ ker je } 4 + 4 + 4 = 12 (= 4 \times 3).$$

$$\text{Po § 41., 1. je: } 4m + 4m + 4m = 12m;$$

$$\text{po § 57., 1. je: } \frac{4}{m} + \frac{4}{m} + \frac{4}{m} = \frac{12}{m}.$$

Iz tega je razvidno, da se nahaja 2, 3, ... m krat večje število v 2, 3, ... m krat večji vsoti prav tolikokrat, kolikokrat se nahaja prvotno število (divizor) v prvotni vsoti (dividendu) in kolikokrat se nahaja 2, 3, ... m krat manjše število v 2, 3, ... m krat manjši vsoti (dividendu).

$$\text{V obče: } am : bm = a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}.$$

Tudi ta izrek se da prav ugodno uporabljati. Na pr.

$$325 : 25 = (325 \cdot 4) : (25 \cdot 4) = (325 \cdot 4) : 100.$$

$$7125 : 125 = (7125 \cdot 8) : (125 \cdot 8) = (7125 \cdot 8) : 1000.$$

§ 59. Kako je deliti vsoto z vsoto, razvidimo najlažje iz tega, kako je nastal dividend, ko smo pomnožili divizor s kvocijentom.

Upoštevaj primer v § 44., 2.

Ako sta dividend in divizor po črki vodnici v istem zmislu (na pr. po padajočih potencah) urejena:

$$\text{dividend} = 72a^4 + 101a^3 + 95a^2 + 43a + 12,$$

$$\text{divizor} = 9a^2 + 7a + 3,$$

uvidimo takoj, da je moral najvišji (prvi) člen dividendov pri množitvi divizorjevi s kvocijentom nastati iz produkta najvišjega (prvega) člena divizorjevega z najvišjim (prvim) členom kvocijentovim.

Zato dobimo prvi člen kvocijenta tako, da razdelimo, najvišji člen dividend^a z najvišjim členom divizorja:

$$72a^4 : 9a^2 = 8a^2 = \text{prvi člen kvocijenta.}$$

Prvi člen dá pri množenju (§ 44.) nastopne člene v dividendu:

$$(9a^2 + 7a + 3) 8a^2 = 72a^4 + 56a^3 + 24a^2.$$

Ako odštejemo to vsoto od dividenda:

$$\begin{array}{r} 72a^4 + 101a^3 + 95a^2 + 43a + 12 \\ 72a^4 + 56a^3 + 24a^2 \end{array}$$

$$45a^3 + 71a^2 + 43a + 12 = \text{ostanek.}$$

nahaja se v ostanku vsota onih delskih produktov, ki so nastali iz drugega in tretjega kvocijentovega člena.

Najvišji člen tega, na isti način urejenega ostanka, je zopet produkt iz najvišjega (prvega) člena divizorjevega in drugega člena kvocijentovega.

Drugi člen kvocijenta dobimo torej tako, da razdelimo prvi člen urejenega ostanka s prvim členom v istem zmislu urejenega divizorja.

$$45a^3 : 9a^2 = 5a = \text{drugi \u0107len kvocijentov.}$$

Ako zopet odštejemo od prejšnjega ostanka vse delske produkte, katere je dal člen 5a pri množenju, nahaja se v novem ostanku vsota delskih produktov iz tretjega člena in kvocijenta.

$$\begin{array}{r} 45a^3 + 71a^2 + 43a + 12 \\ 45a^3 + 35a^2 + 15a \end{array}$$

$$36a^2 + 28a + 12$$

Tretji člen kvocijenta dobimo, ako razdelimo prvi (najvišji) člen novega ostanka s prvim členom v istem zmislu urejenega divizorja.

$$36a^2 : 9a^2 = 4 = \text{tretji \u0107len kvocijentov.}$$

Račun izvršimo tako-le:

$$(72a^4 + 101a^3 + 95a^2 + 43a + 12) : (9a^2 + 7a + 3) = 8a^2 + 5a + 4$$

$$72a^4 + 56a^3 + 24a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a^2 + 7a + 3)8a^2.$$

$$45a^3 + 71a^2 + 43a$$

$$45a^3 + 35a^2 + 15a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a^2 + 7a + 3) 5a.$$

$$36a^2 + 28a + 12$$

$$36a^2 + 28a + 12$$

$$(9a^2 + 7a + 3) 4.$$

Odtod izvajamo, da treba vsoto z vsoto deliti po tem-le pravilu:

Uredivši člene v dividendu in divizorju v istem zmislu, razdeli prvi dividendov člen s prvim divizorjevim členom; tako dobiš prvi člen kvocijenta; s tem delskim kvocijentom pomnoži ves divizor, produkt pa odštej od dividenda. Ako ravnaš z ostankom, katerega je treba takisto urediti, kakor sta urejena dividend in divizor, prav tako kakor s prvotnim dividendom, dobiš drugi kvocijentov člen i. t. d.

Izračuni prejšnji primer še jedenkrat z rastoče urejenimi števili!

Deljenje dekadnih števil.

§ 60. Dekadna števila moremo smatrati za vsote, urejene po padajočih potencah števila 10. Potenco števila 10, ki pristopi k vsaki številki (koeficientu dotičnega člena), spoznamo takoj po mestni vrednosti številke (§ 45., dostavek). Iz tega razvidimo, da je z ozirom na § 59. dvoje dekadnih števil deliti po tem-le pravilu:

Za prvi delski produkt vzemi toliko najvišjih dividendovih števil, kolikor jih ima divizor, ali pa jedno več, ako bi bilo število, katero izražajo one številke, manjše od divizorja; tako dobiš najvišjo kvocijentovo številko in s to pomnoži ves divizor, produkt pa odštej od prvega delskega dividenda. K ostanku pripiši nastopno dividendovo številko, iz tega novega delskega dividenda določi potem drugo kvocijentovo številko ter to nadaljuj, dokler nisi vzel v račun vseh dividendovih števil. — Pomniti pa treba, da mora biti ostanek, katerega si dobil pri vsakokratnem odštevanju delskih produktov, manjši od divizorja, kajti sicer bi dobil v kvocijentu še drugo številko istega reda. Na pr.

$$830942 : 973 = 854$$

$$\text{krajše: } 830942 : 973 = 854$$

$$\begin{array}{r} 7784. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 973 \times 8 \\ \hline 5254 \\ 4865. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 973 \times 5 \\ \hline 3892 \\ 3892. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 973 \times 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$5254$$

$$3892$$

$$0$$

Govôri: 24 in 5 je 29; 56, 58 in 2 je 60 i. d. t.

V drugem slučaju smo delske produkte takoj pri množenju odštevali in zapisavali le ostanke.

Naloge.

1. $15a : 5$.
2. $6a : a$.
3. $5xy : y$.
4. $12ab : 2a$
5. $8mxy : 2x$.
6. $abxy : by$.
7. $a^5 : a^2$.
8. $a^4 : a$.
9. $a^m + n : a^m$.
10. $8x^3 : 2x^2$.
11. $6y^2z : 3y$.
12. $7a^3x^5 : ax^2$.
13. $16a^4b^4 : 4ab^2$.
14. $9a^2x^3y : 3xy$.
15. $2a^6m^3x^2 : a^3mx^2$.
16. $(6ab \cdot 2x) : 3ax$.
17. $(4a^2x \cdot 5ax^2) : 2a^2x^2$.
18. $(12a^2x^3 : 2a) : 6x^2$.
19. $(18a^2b^3c^4 : 3ab^2c) : 2ac^2$.
20. $(ax + ay) : a$.
21. $(ax - bx) : x$.
22. $(a^2x + ax^2) : ax$.
23. $(6a^2y - 3ay^2) : 3ay$.
24. $(8x^3y^3 - 12x^2y^2z^2) : 4x^2y^2$.
25. $(12a^3x^2 + 8ax^4) : 3ax^2$.
26. $(36ax - 12bx + 24cx) : 6x$.
27. $(21m^4 + 15m^3 - 18m^2) : 3m^2$.
28. $(5a^3 - 25a^4 - 10a^5 + 15a^6) : 5a^2$.
29. $(10x^4y^2z - 25x^3y^2z^2 - 15x^2y^2z^3 + 5xy^2z^4) : 5xy^2z$.
30. $(16a^3b^2c^8 + 8a^4b^3c^6 - 12a^5b^4c^4 - 20a^6b^5c^2) : 4a^2b^2c^2$.
31. $(x^2 + 2xy + y^2) : (x + y)$.
32. $(9a^2 + 6ab + b^2) : (3a + b)$.
33. $(m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3) : (m + n)$.
34. $(4a^3 + 12a^2b + 11ab^2 + 3b^3) : (2a + 3b)$.
35. $(3x^4 + 10x^3y + 14x^2y^2 + 17xy^3 + 10y^4) : (x^2 + 3xy + 2y^2)$.
36. $(14x^2y^2 + 10x^3y + 17xy^3 + 10y^4 + 3x^4) : (5y^2 + 3x^2 + xy)$.
37. $(8b^3 + 12b^2 + 6b + 1) : (4b^2 + 4b + 1)$.
38. $(12c^3 + 20c^2 + 11c + 2) : (3c + 2)$.
39. Razdeli 2735000 z 10, 100, 1000.
- *40. Kolikokrat je: 4 v 240? 4 v 8400? 6 v 186?
- *41. Kolikokrat je: 3 v 54? 6 v 720? 7 v 301?
42. Razdeli a) 4240, b) 29680, c) 72080, d) 769560 s 5, 6, 7, 8, 9.
43. $140261 : 41$.
44. $5791338 : 63$.
45. $134676 : 29$.
46. $309644 : 778$.
47. $530376 : 123$.
48. $5606912 : 752$.
49. Razdeli vsako števil: a) 24655445, b) 191205 s 607, 315.
50. $1472692768 : 14734$.
51. $36263918357 : 62883$.
- *52. V nalogah 43. do 51. povej mestno vrednost najvišje kvocijenteve številke, ne da bi izvršil delitev.

53. $66688 : 32$ (§ 54). 54. $125860 : 35$. 55. $321111 : 63$.
 56. $278725 : 25$ (§ 58). 57. $92278 \times 25 = 9227800 : 4$ (§ 55).
 58. $764625 : 25$. 59. $7753675 : 25$. 60. 345673×25 .
 61. 814041×250 . 62. 572375×125 . 63. 39271×125 .

*64. Koliko velja 1 *m*, če se dobi za 15 K 12 h a) 6 *m*, b) 7 *m*?

*65. Koliko velja 1 *l*, če se dobi za 7 K 56 h a) 9 *l*, b) 12 *l*?

66. Ekvator naše zemlje ima 5400 zemljepis. milj v obsegu; kako dolga je jedna ekvatorjeva stopinja?

67. V drevesnici je v pravih vrstah nasajenih 31928 rastlin in sicer so v vsaki vrsti 104 rastline; koliko vrst je v drevesnici?

*68. Kranjska ima $100 \mu m^2$ površine in 498153 prebivalcev; koliko prebivalcev pride povprek na $1 \mu m^2$?

69. Češka ima 5799560 prebivalcev, in sicer po 11153 na $1 \mu m^2$; kolika je nje površina?

70. Trgovec plača za 3200 *kg* sladkorja 3566 K ter hoče pri vsakih 100 *kg* imeti 8 K 50 h dobička; po čem mora prodajati *kg*?

71. Nekdo je zmešal 12 *hl* vina à 72 K s 4 *hl* à 56 K; koliko velja 1 *hl* tega zmešanega vina?

72. Zlatar je zlil 7 *kg* srebra s čistino 720 tisočin z 2 *kg* srebra s čistino 540 tisočin; koliko tisočin čistega srebra je v 1 *kg* zlitine?

73. Neki oče zapusti 16800 K. To imetje je med njegovo ženo, 3 sine in 3 hčere tako razdeliti, da dobi mati 4 dele, vsak sin 3 in vsaka hči 2 isto tolika dela. Koliko dobi mati in koliko vsak otrok?

Deljenje algebraskih števil.

§ 61. Pojem o deljenju absolutnih števil (§ 51.) velja neizpremenjen tudi za algebraska števila.

Kvocijent dveh algebraskih števil je pozitiven ali negativen, kakor sta obe števili ali jednako ali različno zaznamovani.

$$(+a) : (+b) = +k,$$

$$(-a) : (-b) = +k,$$

$$(+a) : (-b) = -k,$$

$$(-a) : (+b) = -k;$$

pri čemer pomeni *k* absolutno vrednost kvocijento.

Dokaz. Ako je dividend (produkt) pozitiven, morata imeti (po § 48., 1.) divizor in kvocijent (oba faktorja) jednaka predznaka;

torej je $(+a) : (+b) = +k$ in $(+a) : (-b) = -k$.

Ako je dividend negativen, morata imeti divizor in kvocijent različna predznaka;

torej je $(-a) : (+b) = -k$ in $(-a) : (-b) = +k$.

§ 62. Ker moremo vsak veččlenski izraz smatrati kot algebrasko vsoto, zato veljajo izreki o deljenju vsote (§ 57., 1 in § 59.) tudi za deljenje veččlenskih izrazov. Predznake kvocijentom iz posameznih členov določujemo po § 61. Na pr.

$$(12a^4b^3 - 8a^2b^2 - 6a) : (-2ab) = -6a^3b^2 + 4ab + \frac{3}{b}$$

$$(3a^2 - 4ab - 4b^2) : (3a + 2b) = a - 2b$$

$$3a^2 + 2ab$$

$$\begin{array}{r} - \quad - \\ \hline -6ab - 4b^2 \\ -6ab - 4b^2 \\ \hline + \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

§ 63. Posebej pomni:

$$1) (a^2 - b^2) : (a + b) = a - b,$$

$$2) (a^2 - b^2) : (a - b) = a + b; \text{ t. j.}$$

Ako razdelimo diferenco kvadratov dveh števil z vsoto ali diferenco teh števil samih, dobimo za kvocijent diferenco oziroma vsoto teh števil.

Naloge.

1. $+63 : -7$.

2. $-48 : +12$.

3. $+264 : 4$.

4. $-3840 : -30$.

5. $[2760 - (+732)] : [-62 - (-23)]$.

6. Izračuni $\frac{x-14}{5-x} - x + \frac{x-10}{7-x} - \frac{5(x-2)}{3(6-x)}$ za $x=8$.

*7. Termometer je kazal nekega dne zjutraj -8°R. , opoludne $+36^{\circ}\text{R.}$, zvečer -5°R. ; kolika je bila srednja temperatura tega dneva?

8. $12a^4 : -3a$.

9. $-14a^4b^2 : 2a^2b$.

10. $-4a^2m^4x^5 : -2m^2x^3$.

11. $36x^3y^2z^4 : -9xy^2z^3$.

12. $(8ab - 12ac) : -4a$.

13. $-(16a^3 - 24a^2) : -8a^2$.

14. $(18am^2y^3 - 27bmy^2 + 36cy) : -3y$.
 15. $(-16a^3b^2c^5 + 8a^4b^3c^4 - 12a^5b^4c^3) : 4a^2b^2c^2$.
 16. $(1 - x^5) : (1 - x)$.
 17. $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10) : (-2x + 5)$.
 18. $(-30x^4 + 2x^3 + 125x^2 + 51x - 27) : (-6x^2 - 8x + 3)$.
 19. $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4a) : (-2a^2 + 3a - 4)$.
 20. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 21x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x^2)$.

 21. $(x^2 - 1) : (x - 1)$.
 22. $(x^2 - 2xy + y^2) : (x - y)$.
 23. $(9a^2 - 4b^2) : (3a + 2b)$.
 24. $(16x^2 - y^2) : (4x - y)$.
 25. $(x^4 - 1) : (x + 1)$.
 26. $(x^4 - 1) : (x - 1)$.
 27. $(a^5 + b^5) : (a + b)$.
 28. $(a^6 - b^6) : (a^2 - b^2)$.
 29. $(28a^2 - 67ab + 40b^2) : (7a - 8b)$.
 30. $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2) : (4a^2 - 2ab)$.
 31. $(a^3 + a^2 - 2a - 8) : (a - 2)$.
 32. $(15x^3 + 4x^2y - 29xy^2 + 10y^3) : (3x + 5y)$.
 33. $(15 + 8x - 32x^2 + 32x^3 - 15x^4) : (3 + 4x - 5x^2)$.
 34. $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 + 2ab + b^2)$.
 35. $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) : (a^2 - 2ab + b^2)$.
 36. $(15x^4 + 8x^3y - 41x^2y^2 + 10xy^3 + 8y^4) : (5x^2 + 6xy - 8y^2)$.
 37. $(4x^6 + 15a^2x^4 + 10a^4x^2 - 9a^6) : (2x^3 + ax^2 + 4a^2x + 3a^3)$.
 38. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 + 16b^6) :$
 $: (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3)$.

VI. 0 deljivosti števil.

§ 64. O številu pravimo, da je deljivo z drugim številom, ako dá, s tem razdeljeno, celo število za kvocijent. Dividend imenujemo v tem slučaju divizorjev mnogokratnik (*Viefaches*), divizor pa dividendovo mero (*Maß*). Tako je na pr. 18 deljivo s 6, ab deljiv z a ; ab je mnogokratnik števila a , in a je mera števila ab .

Vsako število je deljivo z 1 in samo s seboj. Ona števila, ki so deljiva jedino le z 1 in sama s seboj, imenujemo praštevila (*Primzahlen*); na pr. 3, 11, 29. — Število, izraženo

s katerokoli črko, treba smatrati za praštevilo, če se izrecno ne poudarja kaj nasprotnega. $\times$ Ona števila, katera so deljiva ne le z 1 in sama s seboj, ampak tudi z drugimi števili, so sestavljena števila (*zusammengesetzte Zahlen*); na pr. 8, 15, *abc*.

$\times$ Število, s katerim moremo razdeliti dve ali več drugih števil, zovemo skupno mero (*gemeinschaftliches Maß*) teh števil; na pr. 3 je skupna mera števil 12 in 21; m je skupna mera števil amx , bmy , cmz .

Števila, katera nimajo razven 1 nikakeršne druge skupne mere, imenujemo relativna (medsebojna) praštevila (*relative Primzahlen*); na pr. 2 in 9 sta relativni praštevili; isto tako tudi *ab* in *cd*.

$\times$ Število, katero je deljivo z dvema ali več drugimi števili, imenujemo skupni mnogokratnik (*gemeinschaftliches Vielfache*) teh števil; na pr. 20 je skupni mnogokratnik števil 2, 4, 5, 10; *8abcd* pa števil *2abc*, *4d*, *8acd*. $\times$

Ako število a ni deljivo s številom b , imenujemo število r , katero dobimo, odštevši od dividenda a največji mnogokratnik divizorja b , ki ga ima dividend v sebi, na pr. bk , delitveni ostanek (*Divisionsrest*). Tedaj je $r = a - bk$ in $a = bk + r$. Na pr. 38, 7 ($38:7$) Ostanek $3 = 38 - 5 \cdot 7$ in $38 = 5 \cdot 7 + 3$.

1. Občni izreki.

§ 65. 1. Ako ima dvoje ali več števil kako skupno mero, deljiva je ž njo tudi njih vsota. $\times$

Dokaz. Vzemimo, da so števila a , b in c deljiva z m , tedaj je z m deljiva tudi vsota $a + b + c$.

Recimo, da je $a:m = k$, $b:m = k_1$, $c:m = k_2$, kjer pomenijo, k , k_1 , k_2 cela števila, tedaj je $a = mk$, $b = mk_1$, $c = mk_2$. Ker pa dajo jednake količine, prištete jednakim količinam, jednake vsote, dobimo $a + b + c = mk + mk_1 + mk_2$; ali, ako razdelimo obe strani jednačbe z m , $(a + b + c):m = k + k_1 + k_2$. Vsota $a + b + c$, razdeljena z m , dá torej za kvocijent celo število $k + k_1 + k_2$. Zato je vsota $a + b + c$ res deljiva z m .

$\times$ 2. Ako imata dve števili kako skupno mero, deljivo je ž njo tudi njiju diferenca. $\checkmark$

Dokaz. Po pogoju v točki 1. je

$(a - b) : m = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = k - k_1$ (celo število). Torej je res diferenca $a - b$ deljiva z m .

§ 66. 1. Ako je število deljivo s kakim drugim številom, deljiv je s tem številom tudi vsak njegov mnogokratnik.

Dokaz. Vzemimo, da je a deljiv z m in sicer da je $a : m = k$, torej $a = mk$; tedaj je $ar = mkr$ in $ar : m = kr$ (celo število). a -jev mnogokratnik ar je torej res deljiv s številom m .

2. Ako je število deljivo s katerimikoli relativnimi praštevili, deljivo je tudi z njih produktom.

Dokaz. Vzemimo, da je število a deljivo z relativnima praštevila m in n . Ker te dve števili nimata nobenega skupnega faktorja in ker mora a imeti vse faktorje števil m in n , zato mora število a imeti tudi vse faktorje produkta mn , torej biti deljivo s produktom mn .

Ako je število deljivo na pr. z 2 in 3, mora biti deljivo tudi z njih produktom 6.

§ 67. 1. Ako imata dividend in divizor kako skupno mero, deljiv je s to mero tudi delitveni ostanek.

Dokaz. Vzemimo, da sta števili a in b deljivi s številom m , in da dobimo, razdelivši a z b , za kvocijent število k in r za ostanek; tedaj je $r = a - bk$. Ker je a deljiv z m , prav tako b , in torej tudi njegov mnogokratnik bk , mora biti z m deljiva tudi diferenca $a - bk$, in ta je jednaka r .

2. Ako imata skupno mero divizor in delitveni ostanek, deljiv je ž njo tudi dividend.

Dokaz. Vzemimo, da dobimo, a z b razdelivši, k za kvocijent in r za ostanek, in da je m skupna mera od b in r ; tedaj je $a = bk + r$. Če pa je z m deljiv b , tedaj tudi njegov mnogokratnik bk , in prav tako r , mora z m biti deljiva tudi vsota $bk + r$, ki pa je jednaka a .

3. Ker imata po navedenih dveh izrekih dividend in divizor ravno iste skupne mere kakor divizor in ostanek, izvajamo iz tega:

Največja skupna mera med divizorjem in ostankom je tudi največja skupna mera med dividendom in divizorjem.

2. Kako spoznavamo deljivost dekadnih števil.

§ 68. Vsako dekadno število lahko razstavimo na mnogokratnik števila 10 in na jednice; na pr.

$$3576 = 357 \cdot 10 + 6, \quad 4385 = 438 \cdot 10 + 5.$$

Število 10 pa je deljivo z 2 in 5, prav tako tudi vsak mnogokratnik števila 10; ako so še jednice danega števila deljive z 2 in 5, deljivo je število samo.

Dekadno število je deljivo z 2 ali 5, ako so njega jednice deljive z 2, oziroma s 5.

Dostavek. Dekadno število je deljivo z 10, ako ima na mestu jednic ničlo.

Pojasnilo. Ona števila, ki imajo na mestu jednic 0, 2, 4, 6, 8 ter so torej deljiva z 2, imenujemo soda števila (*gerade Zahlen*). Sodo število zaznamujemo, ker je mnogokratnik števila 2, v obče z $2m$, pri čemer pomeni m katerokoli celo število. — Ona števila pa, katera imajo na mestu jednic 1, 3, 5, 7, 9, ki tedaj niso deljiva z 2, so liha števila (*ungerade Zahlen*). Taka števila zaznamujemo v obče z $2m + 1$ ali z $2m - 1$. 3 je drugo, 5 tretje ... $(2m - 1)$ mto liho število.

§ 69. Vsako dekadno število lahko razstavimo na dva dela, na mnogokratnik števila 100 in na število, izraženo z njega deseticami in jednicami; na pr.

$$9132 = 91 \cdot 100 + 32, \quad 8475 = 84 \cdot 100 + 75.$$

100 je deljivo s 4 in 25, prav tako tudi vsak njegov mnogokratnik; ako je s 4 in 25 deljiv še drugi del, imajoč desetice in jednice, deljivo je tudi število samo.

Dekadno število je deljivo s 4 ali s 25, ako je deljivo s 4 ali s 25 število, katero izražata njegovi dve najnižji številki.

Dostavek. Dekadno število je deljivo s 100, ako sta njega najnižji dve številki ničli.

§ 70. Vsako dekadno število lahko razstavimo na dva dela, na mnogokratnik števila 1000 in na število, katero izražajo njega stotice, desetice in jednice; na pr.

$$37912 = 37 \cdot 1000 + 912, \quad 56875 = 56 \cdot 1000 + 875.$$

Vsak mnogokratnik števila 1000 je deljiv z 8 in 125; ako je deljivo z 8 ali 125 tudi število iz treh najnižjih mest, deljivo je tudi število samo.

Dekadno število je deljivo z 8 ali 125, ako je deljivo z 8 ali 125 število, katero izražajo njega tri najnižje številke.

Dostavek. Dekadno število je deljivo s 1000, ako so njega tri najnižje številke ničle.

§ 71. Vsako dekadno število lahko razstavimo na dva dela takó, da ima prvi del same mnogokratnike števila 9, drugi pa številčno vsoto danega števila; na pr.

$$75624 = \begin{array}{|c|} \hline 70000 \\ 5000 \\ 600 \\ 20 \\ 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 10000 \cdot 7 \\ 1000 \cdot 5 \\ 100 \cdot 6 \\ 10 \cdot 2 \\ 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline (9999 + 1)7 \\ (999 + 1)5 \\ (99 + 1)6 \\ (9 + 1)2 \\ 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 9999 \cdot 7 + 7 \\ 999 \cdot 5 + 5 \\ 99 \cdot 6 + 6 \\ 9 \cdot 2 + 2 \\ + 4 \\ \hline \end{array}$$

Prva vertikalna vsota ima same mnogokratnike števila 9 ter je deljiva s 3 in 9; ako je torej s 3 ali 9 deljiva tudi druga vertikalna vsota, deljivo je tudi število samo.

Dekadno število je deljivo s 3 ali 9, ako je njega številčna vsota deljiva s 3 ali 9.

Dostavek. Sodo število, katero je deljivo s 3, deljivo je tudi s 6 (§ 66., 2).

Naloge.

1. Katera izmed števil 3924, 1038, 5016, 8033, 9062, 8752, 16536, 24300, 39235, 74636 so deljiva z 2, katera tudi s 4, katera niso deljiva niti s 4 niti z 2?

2. Katera izmed števil 352, 1630, 2876, 4756, 9492, 12478, 22062, 25864, 30508 so deljiva z 2, s 4, z 8?

3. Katera izmed števil 273, 1540, 5926, 8028, 12345, 20475, 38124, 67089, 705426, 791426, 310629 so deljiva s 3, katera tudi z 9, katera niso deljiva niti z 9 niti s 3?

4. S katerimi izmed števil 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 25, 100, 125, 1000 so deljiva ta-le števila:

a) 312; b) 6225; c) 17280; d) 71016; e) 948656?

f) 720; g) 8625; h) 76450; i) 484572; k) 567000?

5. Katera števila so deljiva s 15, 18, 24, 36?

3. Razstavljanje števil na faktorje.

§ 72. Vsako sestavljeno število moremo razstaviti vsaj na dva faktorja. Ako sta ta faktorja sestavljeni števili, moremo ja zopet razstaviti na faktorje, kateri so ali praštevila ali sestavljena števila. Če v zadnjem slučaju razstavljanje nadaljujemo, moramo naposled dobiti same prafaktorje.

Vsako končno število se da razstaviti na same prafaktorje.

§ 73. Da razstaviš sestavljeno število na njegove prafaktorje, razdeli dano število z najmanjšim praštevilom, s katerim je deljivo, ne oziraje se na 1; kvocijent zopet razdeli z najmanjšim praštevilom, s katerim je deljiv, ne izimši prejšnjega praštevila, in tako ravnaj z vsakim nastopnim kvocijentom, dokler ne dobiš kvocijenta, ki je sam praštevilo. Drug za drugim uporabljeni divizorji in zadnji kvocijent so prafaktorji danega števila. Ako je treba na pr. 630 razstaviti na prafaktorje, dobimo:

$$\begin{array}{rcl}
 630 : 2 = 315 & \text{ali} & 630 \overline{) 2} \\
 315 : 3 = 105 & & 315 \overline{) 3} \\
 105 : 3 = 35 & & 105 \overline{) 3} \\
 35 : 5 = 7 & & 35 \overline{) 5} \\
 & & 7 \overline{) 7}
 \end{array}$$

zato je $630 = 2 \cdot 315 = 2 \cdot 3 \cdot 105 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

§ 74. Da razstavimo občni številni izraz na faktorje, treba pomniti to-le:

1) Pri jednočlenskih izrazih so posamezne črke same prafaktorji; ako ima tak izraz tudi potence, vzemi podlogo tolikokrat kot faktor, kakor kaže eksponent.

Na pr. $abc = a \cdot b \cdot c$; $21a^2mx^3 = 3 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot m \cdot x \cdot x$.

2) Kako je razstavljati polinome na faktorje, za to nimamo splošnih pravil; zaradi tega navajamo tukaj le dva posebna slučaja, katera se večkrat uporabljata.

a) Polinom, čegar vsi členi imajo skupno mero, razstavimo po § 42. na dva faktorja, ako vzamemo izločeno skupno mero kot jeden

faktor, za drugi faktor pa kvocijent, katerega dobimo, razdelivši dani izraz s skupno mero. Na pr.

$$1) 3ax - 4bx = x(3a - 4b).$$

$$2) 20x^4 - 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(5x^2 - 4x + 3).$$

b) Oziraje se na § 50. dobimo:

$$1) a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b),$$

$$2) a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b),$$

$$3) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Naloge.

Razstavi ta-le števila na prafaktorje:

$$1. a) 420; \quad b) 504; \quad c) 1260; \quad d) 1694; \quad e) 2025.$$

$$2. a) 2268; \quad b) 3075; \quad c) 3828; \quad d) 5376; \quad e) 10528.$$

$$3. a) 76a^3; \quad b) 66ab^2; \quad c) 26x^2y^2; \quad d) 72x^3b^2; \quad e) 60ax^2y^4.$$

Razstavi na dva faktorja, uporabljajoč § 74., 2, a):

$$4. 18ab - 15ac.$$

$$5. 9x^2 - 24xy.$$

$$6. 2a^4 - 4a^3 + 6a^2.$$

$$7. ax^4y^2 + bx^3y^3 + cx^2y^4.$$

$$8. a^3b^2x - a^2b^2x^2 + ab^2x^3.$$

$$9. 5x^3z^2 - 15x^2z^3 + 25xz^4.$$

Razstavi na dva faktorja, uporabljajoč § 74., 2, b):

$$10. x^2 + 2x + 1.$$

$$11. m^2 - 2m + 1.$$

$$12. 4a^2 + 12a + 9.$$

$$13. 9b^2 - 12b + 4.$$

$$14. y^2 + 10y + 25.$$

$$15. x^2 - 6xy + 9y^2.$$

$$16. 4x^2 - 1.$$

$$17. 9a^2 - 16b^2.$$

$$18. 25x^2 - 16y^2.$$

$$19. 6x^2 - 54a^2.$$

$$20. a^2 - (b + c)^2.$$

$$21. (b - c)^2 - a^2.$$

4. O največji skupni meri.

§ 75. Največjo skupno mero dveh ali več števil imenujemo največje število, s katerim so vsa ta števila deljiva.

Da dobiš največjo skupno mero dveh ali več števil, razstavi vsako število na njega prafaktorje, potem pa izloči izmed teh prafaktorjev one, ki so skupni vsem danim številom; njih produkt je iskana največja skupna mera.

Dokaz. Ta produkt je vsakako skupna mera vseh danih števil, kajti vsako ima vse njegove faktorje; a ta produkt je tudi največja skupna mera, ker bi ne bilo vsako danih števil ž njim deljivo, ko bi mu dodali še katerikoli faktor.

Na pr. Poišči največjo skupno mero števil 300 in 420.

$$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5,$$

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7; \quad \text{najv. sk. mera} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

§ 76. Največjo skupno mero dveh števil dobiš, ne da bi števili razstavil na prafaktorje, tudi tako-le:

Večje danih dveh števil razdeli z manjšim, potem divizor z delitvenim ostankom, novi divizor z novim ostankom, i. t. d., dokler ne dobiš za ostanek ničle; zadnji divizor je največja skupna mera danih dveh števil.

Dokaz. Ako sta a in b dani števili, in sicer $a > b$, in $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ zaporedoma dobljeni delitveni ostanki, ondaj stoji račun tako-le:

1. delitev:	dividend a ,	divizor b ,	ostanek r_1 ,
2. "	" b ,	" r_1 ,	" r_2 ,
3. "	" r_1 ,	" r_2 ,	" r_3 ,
4. "	" r_2 ,	" r_3 ,	" r_4 , i. t. d.

Jasno je, da moramo, deljenje nadaljujoč, priti naposled do ostanka $= 0$, kajti vsakokratni ostanek mora biti celo število in vsaj za 1 manjši od divizorja, kateri je bil v prejšnji delitvi ostanek. Recimo, da je $r_4 = 0$.

Potem je r_3 gotovo največja skupna mera števil a in b . Iz zadnje delitve namreč izvira, da je r_3 največja skupna mera števil r_2 in r_3 ; r_2 in r_3 pa sta v prejšnji delitvi divizor in ostanek, torej je (§ 67., 3) r_3 tudi najv. skupna mera med dividendom r_1 in divizorjem r_2 . Prav tako je zaradi predprejšnje delitve, v kateri sta r_1 in r_2 divizor in ostanek, r_3 najv. skupna mera med b in r_1 , in slednjič zaradi prve delitve je r_3 tudi največja skupna mera med a in b .

Primer: 1. Recimo, da nam je poiskati najv. sk. mero števil 1134 in 3654. Tu dobimo

$$\begin{array}{rcll} 3654 : 1134 = 3 & \text{in ostanek } 252 & \text{ali} & 1134 \overline{) 3654} 3 \\ 1134 : 252 = 4 & \text{"} & & \underline{126} \quad 252 \quad 4 \\ 252 : 126 = 2 & \text{"} & & \underline{0} \quad 0 \quad 2 \end{array}$$

Najv. sk. mera $= 126$.

2. Poišči najv. sk. mero števil 377 in 848.

377 | 848 | 2 Najv. sk. mera = 1.

1 | 94 | 4 Števili 377 in 848 sta relativni praštevili.
0 | 94

Ako hočeš na ta način dobiti največjo skupno mero za več nego dve števili, poišči najprej najv. sk. mero za dve števili, potem za to mero in tretje število, takisto za to novo mero in četrto število i. t. d.; zadnja najv. sk. mera je zajedno najv. sk. mera vseh danih števil.

Naloge.

*1. Poišči najv. skupno mero števil a) 12 in 16, b) 15 in 20, c) 40 in 56, d) 72 in 96, e) 45 in 75!

Razstavi ta-le števila na prafaktorje, potem pa poišči njih najv. sk. mero:

2. 84 in 308.

3. 360 in 680.

4. 108, 450 in 540.

5. 560, 620 in 760.

6. 693, 819 in 945;

7. 504, 756, 1260 in 1764;

8. $12acx$, $14a^2x$ in $16ax^2$;

9. $10x^2y^4$, $5x^3y^3$ in $20x^4y^2$;

10. $m^2 + 2mn + n^2$ in $m^2 - n^2$;

11. $a^2 - 2ab + b^2$ in $a^2 - b^2$;

12. $a^2 + 4ab + 4b^2$ in $a^2 + 2ab - 3ab^2 - 6b^3$;

Poišči najv. skup. mero teh-le števil, ne da bi jih razstavil na prafaktorje:

13. 637 in 4277;

14. 2091 in 1353;

15. 1404 in 8658;

16. 3552 in 5143;

17. 7774 in 3718;

18. 27671 in 21708;

19. 39215 in 73997;

20. 65429 in 145957;

21. 1701, 6426, 10521;

22. 120582, 145530, 167706.

5. O najmanjšem skupnem mnogokratniku.

§ 77. Najmanjši skupni mnogokratnik dveh ali več števil imenujemo najmanjše število, katero je deljivo z vsemi onimi števili.

Da dobiš najmanjši skupni mnogokratnik dveh ali več števil, razstavi vsako dano število na prafaktorje in izmed teh prafaktorjev vzemi vse različne faktorje in sicer vsakega

tolikokrat, kolikorkrat se največkrat nahaja v katerem danem številu; produkt teh faktorjev je iskani najm. sk. mnogokratnik.

Dokaz. Ta produkt je vsakako skupni mnogokratnik danih števil, kajti ima vse faktorje vsakega števila; a ta produkt je tudi najm. sk. mnogokratnik, kajti ni več deljiv z vsemi danimi števili, če mu izpustimo le jednega njegovih faktorjev.

Primer. Poišči najm. sk. mnogokratnik števil 60, 108 in 1050.

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7;$$

$$\text{najm. sk. mnogokratnik} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 18900.$$

Uporabljajoč to razrešitev najdeš najm. sk. mnogokratnik več števil kratko tako-le:

1. Dana števila zapiši v jedno vrsto drugo poleg drugega ter kar prečrtaj ona manjša števila, katera so mera večjih.

2. Preišči, ali ni kako praštevilo skupna mera dveh ali več ostalih števil. Ako je, zapiši to mero na desno ter razdeli ž njo vsa ona števila, katerim je mera; kvocijente in vsa nedeljiva števila zapiši spodaj v novo vrsto drugo poleg drugega.

3. S to novo vrsto ravnaj prav tako kakor s prvo, in tako nadaljuj, dokler ne dobiš vrste s samimi relativnimi praštevili.

4. Naposled pomnoži drugo z drugim vsa relativna števila zadnje vrste in na desno zapisane skupne mere; produkt iz teh števil je iskani najm. sk. mnogokratnik.

Primer. Poišči najm. sk. mnogokratnik števil 4, 6, 15, 60, 108, 1050.

4, 6, 15, 60, 108, 1050	2
30, 54, 525	2
15, 27, 525	3
9, 175	

$$\text{Najm. sk. mnogokratnik} = 175 \times 9 \times 3 \times 2 \times 2 = 18900.$$

Ker so vsa števila, katera so deljiva s 60, deljiva tudi s 4, 6, 15, mora biti najm. sk. mnogokratnik ravnoličnik, kolikerkšnega smo dobili v poprejšnji nalogi.

§ 78. Ako se dana števila ne dajo z lahka razstaviti na pra-faktorje, ondaj iščemo najm. sk. mnogokratnik na drug način, ki se opira na to-le umovanje.

Ako razdelimo dve števili z njiju največjo skupno mero, dobimo za kvocijenta relativni praštevili. Produkt, katerega dobimo, pomnoživši pri delitvi jednega števila dobljeni kvocijent z drugim številom, ima faktorje obeh števil in je torej deljiv z obema številoma; a ni več deljiv, če mu izpustimo le jeden faktor. Ta produkt je najmanjši skupni mnogokratnik danih dveh števil.

Da dobiš na ta način najm. sk. mnogokratnik dveh števil, poišči najprej največjo skupno mero obeh števil, razdeli s to mero jedno število in z dobljenim kvocijentom pomnoži drugo. Produkt je iskani najm. skup. mnogokratnik danih števil. Na pr. poišči najm. sk. mnogokratnik števil 648 in 972.

$$\begin{array}{r|l} 648 & 972 \\ \hline 0 & 324 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \quad 324 \text{ je najv. sk. mera.}$$

$$648 : 324 = 2;$$

$$972 : 2 = 1944, \text{ ali}$$

$$972 : 324 = 3;$$

$$648 : 3 = 1944;$$

$$\text{najm. sk. mnogokratnik} = 1944.$$

Ako je treba na ta način poiskati najm. sk. mnogokratnik treh ali več števil, poišči najm. sk. mnogokratnik za prvi dve števili, potem za ta najm. sk. mnogokratnik in tretje število, za tem za drugi najm. sk. mnogokratnik in četrto število i. t. d. Zadnji najm. sk. mnogokratnik je ob jednom najm. sk. mnogokratnik vseh danih števil.

Naloge.

- *1. Kolik je najm. sk. mnogokratnik števil a) 8 in 15? b) 10 in 25? c) 24 in 36? d) 12 in 52? e) 30 in 48?

Razstavi ta-le števila na prafaktorje, potem pa poišči njih najm. sk. mnogokratnik.

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 2. 300 in 620; | 3. 240 in 486; |
| 4. 120, 168 in 182; | 5. 105, 144, 270; |
| 6. 3, 4, 6, 10 in 25; | 7. 2, 5, 9, 20, 21 in 24; |
| 8. 4, 5, 6, 12, 18, 25, 70; | 9. 10, 12, 14, 15, 16, 18, 21; |
| 10. 4, 6, 7, 26, 35, 40, 56; | 11. 8, 12, 16, 24, 32, 36, 256; |
| 12. a , $2a^2$, $3ab^2$, $12abm$; | 13. $6amn$, $10am^2n$, $5a^2n^2$; |
| 14. $3x$, $3(x+1)$, $x-2$, $5(x+2)$, $20(x^2-4)$ in $6(x+2)^2$. | |

Poišči najm. skupni mnogokratnik naslednjih števil, ne da bi jih razstavil na faktorje:

15. 874 in 943;

16. 561 in 1530;

17. 4314 in 9347;

18. 20132 in 15099;

19. 816, 765, 697;

20. 259, 3219, 7548.

VII. Naloge v ponavljanje.

*1. a) $57 + 12$; b) $39 + 63$; c) $25 + 47$; d) $86 + 35$; e) $94 + 96$.

*2. a) $371 + 128$; b) $607 + 134$; c) $593 + 238$; d) $369 + 158$.

3. $132475 \cdot 37060 + 7908 \cdot 4296$.

4. $83716 \cdot 5009 - 63077 \cdot 7080$.

5. Seštej

$$a) \begin{array}{r} 6x + 5y \\ x + 7y \\ \hline 8x - y \end{array}$$

$$b) \begin{array}{r} 8a + 7b - 6c + 5d \\ 9a - 6b + 7c - 4d \\ \hline 7a - 5b - 8c + 6d \end{array}$$

6. $(4a^4 + 5a^2b^2 + 6b^4)(7a^2 - 8b^2)$.

7. $(2a^2 + 3b^2)(5a^2 - 4b^2) - (10a^4 - 12b^4)$.

*8. Koliko velja a) 24 l à 26 h; b) 17 m à 2 K 34 h?

*9. 9 kg velja 3 K 78 h, koliko velja 1 kg?

10. $(5a + 2b - 3c) - (2a - 3b + 5c) - (a - 2b - 4c)$.

11. $7a - (3c - 6b) - (6a - 3c) - 3b + (3a - 8c)$.

12. $(9a^2 - 16b^2) : (3a + 4b)$.

13. $(8x^4 - 26x^3 - 43x^2 - 78x - 21) : (2x^2 - 9x - 3)$.

*14. a) $85 - 24$; b) $74 - 53$; c) $56 - 29$; d) $81 - 47$; e) $98 - 29$.

*15. a) $466 - 149$; b) $393 - 208$; c) $706 - 658$; d) $832 - 399$.

16. Kolika je vsota treh števil, katerih je prvo 789021, drugo za 179248 manjše od prvega, in tretje za 98764 manjše od drugega?

17. Pestalozzi je bil porojen v Curihu dne 12. januarja l. 1746. ter je umrl v Bruggu na Aargavskem dne 17. februarja l. 1827. Koliko starost je učakal?

18. $(9 - 3) - (8 - 7) + (24 - 20) - (18 - 9)$.

19. $(a - b) - (b - a) + (c - a + b)$.

20. $7xy - [7yz - (3xz - 2xy) + 3xy] - (6yz - 3xz)$.

21. $(3a + 8b)^2 + (4a + 6b)^2 - (5a - 10b)^2$.

22. $(x^3 + x^2y + y^3) : (x^2 - x^2y^2 + y^3)$.
 23. a) 86727.25; b) 13076.125; c) 399448.11.
 24. a) 54352.41; b) 56703.108; c) 870294.49.
 25. a) 68304.63; b) 99755.48; c) 513942.270.
 26. a) 17768.399; b) 64159.994; c) 806635.999.
 27. a) 34625:25; b) 57625:125; c) 8872472:56.
 28. $(6x + 7y + 5z) + (4z + 4y) + (10x + z) + (9y + 14z)$.
 29. $(a^2x - b^2y)^2 + (a^2x + b^2y)^2 - (a^4x^2 + b^4y^2)$.
 30. $(16x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 2x - 1) : (2x^2 + 1)$.

*31. Izračuni:

a) 18 l à 36 h;

b) 3 m à 1 K 74 h;

c) 21 „ à 64 „;

d) 2 „ à 5 „ 28 „;

*32. — 1.2. — 3.4. — 5.

*33. 2. — 3. — 4. — 5. — 6.

34. Seštej te-le vertikalne in horizontalne številne vrste:

41782 + 29714 + 80508 + 26396 + 73614

71396 + 29592 + 75801 + 34567 + 90123

95703 + 88466 + 54953 + 63780 + 77367

18278 + 91705 + 27265 + 53927 + 84806

89420 + 93364 + 62879 + 27084 + 60973

35. $[x - (m + n)] + [x - (m + p)] + [x - (n + p)]$.

36. $(9a - 5b)(a + 2b - 3) - (3a - 5b)(3a - b - 3)$.

37. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5)$.

*38. a) 728 + 154; b) 398 + 542; c) 827 - 452; d) 643 - 397.

*39. 15 l velja 6 K 60 h; koliko velja 1 l?

40. Nekdo je bil porojen dne 5. januarija l. 1819. in je umrl 60 let 6 mesecev in 12 dnij star; katerega dne je umrl?

41. $(4a^3b^4 + 8a^5b^7 - 12a^7b^9) : -2a^2b^3$.

42. $(8m - 5x) - (2m - 3n - 4x) + [(3x - 2n) - (4m + 3n)]$.

43. $(1 - 2a + 3a^2 - 4a^3)(1 - 3a + 5a^2 - 7a^3)$.

44. — 2906.2076. — 249.157.

45. a) 123469037: - 24679, b) - 462191832: - 79251.

46. $(24x^3 - 26x^2y + 18xy^2 - 4y^3) : (4x^2 - 3xy + 2y^2)$.

*47. Kolik je

a) 8kratnik vsote 28 + 39?

b) tretji del 7kratnika od 87?

*48. Določi mestno vrednost najvišje številke v produktu, katerega dobiš, ako pomnožiš vsako naslednje število samo s seboj in z vsakim izmed drugih števil!

a) 36; b) 248; c) 418; d) 9413; e) 71250.

49. $5m - [(2m + 3a) - 3m]$.

50. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$.

51. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + 5)(2a^2b - 3ab^2 + 4b^3 - 5)$.

52. Poišči najv. sk. mero števil: a) 1081 in 1403, b) 4587 in 1441, c) 6417 in 28520, d) 41454 in 8118.

53. Poišči najm. sk. mnogokratnik števil:

a) 5, 6, 8, 12, 16, 18;

b) 12, 15, 20, 36, 40, 45, 60;

c) 32, 40, 48, 60, 72, 84;

d) 36, 42, 54, 84, 90, 112.

54. Razstavi na prafaktorje:

a) 60060; b) 23142; c) 61380; d) 3155625.

55. $(5x^3y^2 + 7x^2y^3 - 1)(5x^3y^2 - 7x^2y^3 + 1)$.

56. $(9x^2 - 16y^2 - 40yz - 25z^2) : (3x - 4y - 5z)$.

*57. 6 krat a) 122, b) 192, c) 236, d) 324, e) 420.

58. Razstavi multiplikator na faktorje ter pomnoži:

a) 2358.85;

b) 45892.36;

c) 59375.42;

d) 5702.28;

e) 97654.64;

f) 34498.72.

59. Iz Pariza se pošlje ob 10. uri 58 min. 15 sek. brzojavno poročilo na Dunaj, do kamor potrebuje 1 uro 8 min.; kdaj dospé na Dunaj, ako dunajska ura prehiteva pariško za 56 min. 10 sekund?



Drugi oddelek.

Četvero osnovnih računov z ulomljenimi števili.

§ 79. Delitev moremo v vrsti celih števil le tedaj izvršiti, kadar je dividend mnogokratnik divizorja. Na pr. kvocijent $8 : 3$ je večji nego 2 in manjši nego 3, ne moremo ga torej predočiti v doslej spoznani številni vrsti.

Da moremo kvocijent $a : b$ določiti tudi tedaj, kadar a ni mnogokratnik števila b , treba je vrsto celih števil razširiti z umeščenjem novih jednot. To se zgodi tako, da razdelimo prvotno jednoto na b enakih delov in jeden tak del zaznamujemo z $\frac{1}{b}$ (1 btina) ter jo vzamemo za novo jednoto. Ako štejemo s to novo jednoto prav tako kakor s prvotno, dobimo novo številno vrsto

$$\left(\frac{1}{b}\right), 2 \cdot \left(\frac{1}{b}\right), 3 \cdot \left(\frac{1}{b}\right), 4 \cdot \left(\frac{1}{b}\right) \dots a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) \dots,$$

v kateri najdemo natančno vrednost kvocijenta, naj smo razdelili katerokoli celo število z b . In sicer moremo:

$$a \left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{b}\right) + \dots a \text{ krat}$$

smatrati kot rezultat delitve $a : b$. Kajti, ako pomnožimo to enačbo z divizorjem (§ 52., 1), dobimo dividend a :

$$\begin{aligned} \left[a \left(\frac{1}{b}\right) \right] \times b &= \left[\left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{b}\right) + \dots a \text{ krat} \right] \cdot b \\ &= \left(\frac{1}{b}\right) \cdot b + \left(\frac{1}{b}\right) b + \left(\frac{1}{b}\right) b + \dots a \text{ krat} \\ \text{divizor} \times \text{kvocijent} &= 1 + 1 + 1 + \dots a \text{ krat} = a \text{ dividend.} \end{aligned}$$

Ker je $\left(\frac{1}{b}\right)$ bti del jednote, dá b takih delov zopet 1; $\left(\frac{1}{b}\right) b = 1$.

Torej je:

$$a : b = \frac{a}{b} = a \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots a \text{ krat.}$$

Ako vzamemo izraz $\frac{a}{b}$ kot člen gori omenjene nove številne vrste, dobimo novo vrsto števil, katera imenujemo ulomljena števila (*gebrochene Zahlen*), ulomke ali drobce (*Brüche*), v nasprotje celim številom, s katerimi smo se pečali doslej. a imenujemo ulomkov števec (*Zähler*), b pa imenovalec (*Nenner*).

Ulomek je torej število, katero izraža jeden ali več enakih delov prvotne jednote. Imenovalec pove, na koliko enakih delov smo razdelili prvotno jednoto; števec pa pove, kolikokrat smo vzeli jeden tak del. Ulomek $\frac{a}{b}$ pomeni b ti del jednote, a krat vzet.

§ 80. Iz prejšnjega paragrafa izvajamo:

Vsak kvocijent moremo gledé na njega vrednost smatrati kot ulomek, in obratno vsak ulomek kot kvocijent; dividend je števec, divizor pa imenovalec tega ulomka.

$$a : b = \frac{a}{b}, \qquad 15 : 8 = \frac{15}{8}.$$

I. Navadni ulomki.

1. Občna svojstva ulomkov.

§ 81. Ako jednoto razdelimo na b enakih delov, jednaka je vsota b takih delov zopet jednoti; torej $\frac{1}{b} \cdot b = 1$. Ako vzamemo manj nego b delov, dobimo manj, ako pa vzamemo več nego b delov, dobimo več kakor jednoto.

Ulomek $\frac{a}{b}$ je torej manjši kakor 1, če je $a < b$; jednak 1, če je $a = b$, in večji nego 1, če je $a > b$. Na pr.

$$\frac{5}{8} < 1, \qquad \frac{8}{8} = 1, \qquad \frac{15}{8} > 1.$$

Ulomek, katerega vrednost je manjša nego 1, imenujemo pravi ulomek (*echter Bruch*), vse druge ulomke pa neprave ulomke (*unechte Brüche*).

Število, sestavljeno iz celega števila in pravega ulomka, zovemo mešano število (*gemischte Zahl*); na pr.

$$5 + \frac{3}{4} = 5\frac{3}{4}, \quad a + \frac{m}{n}, \quad a - \frac{m}{n}.$$

§ 82. V § 79. smo dokazali, da je

$$\left[a \left(\frac{1}{b} \right) \right] \cdot b = \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Iz te jednačbe izvajamo:

Ako pomnožimo ulomek z njegovim imenovalcem, dobimo števec za produkt.

§ 83. Iz pojma o ulomku izvira:

1. Izmed dveh ulomkov, katera imata jednaka imenovalca, je oni večji, ki ima večji števec.

2. Izmed dveh ulomkov, katera imata jednaka števca, je oni večji, ki ima manjši imenovalec.

§ 84. Vsak nepravi ulomek se dá pretvoriti v celo ali mešano število; v ta namen treba števec razdeliti z imenovalcem.

$$\frac{20}{5} = 20 : 5 = 4.$$

$$\frac{23}{5} = \frac{20 + 3}{5} = 4 + \frac{3}{5} = 4\frac{3}{5}.$$

§ 85. 1. Vsako celo število moremo pretvoriti na ulomek, čegar imenovalec je dano število. V ta namen je treba le produkt iz celega števila in danega imenovalca vzeti za ulomkov števec.

$$a = an : n = \frac{an}{n}.$$

$$5 = 5 \cdot 4 : 4 = 20 : 4 = \frac{20}{4}.$$

2. Vsako mešano število se dá pretvoriti na ulomek. V ta namen pomnoži celo število z ulomkovim imenovalcem, ta produkt povečaj ali zmanjšaj za števec, kakor je ulomek pozitiven ali negativen; to število je števec, imenovalec pa ostane neizpremenjen.

$$5 \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \left\{ \left(5 + \frac{2}{3} \right) \cdot 3 \right\} : 3 = (15 + 2) : 3 = \frac{17}{3}.$$

$$a + \frac{m}{n} = \left\{ \left(a + \frac{m}{n} \right) \cdot n \right\} : n = (an + m) : n = \frac{an + m}{n}.$$

$$a - \frac{m}{n} = \left\{ \left(a - \frac{m}{n} \right) \cdot n \right\} : n = (an - m) : n = \frac{an - m}{n}.$$

§ 86. Ker moremo vsak ulomek smatrati za kvocijent in se le-ta ne izpremeni, ako dividend in divizor z istim številom ali pomnožimo ali razdelimo, zato velja izrek:

Ulomku se vrednost ne izpremeni, ako števec in imenovalec z istim številom pomnožimo ali razdelimo.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \quad \frac{8}{12} = \frac{8 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{32}{48},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}, \quad \frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}.$$

§ 87. 1. Uporabljaajoč prvi del izreka v § 86. moremo vsak ulomek, ne da bi se mu izpreminila vrednost, pretvoriti na drug ulomek, čegar imenovalec je mnogokratnik prejšnjega. V ta namen treba le novi imenovalec razdeliti s prejšnjim in s tem kvocijentom pomnožiti števec; dobljeni produkt je novi števec. Recimo, da hočemo na pr. ulomek $\frac{4}{5}$ pretvoriti na imenovalec 40. Tu dobimo

$$40 : 5 = 8; \quad 4 \cdot 8 = 32; \quad \text{torej } \frac{4}{5} = \frac{32}{40}.$$

Ako bi hoteli ulomek $\frac{a}{2b}$ pretvoriti na imenovalec $4bc$, dobili bi

$$4bc : 2b = 2c; \quad a \cdot 2c = 2ac; \quad \text{tedaj } \frac{a}{2b} = \frac{2ac}{4bc}.$$

Kadar pretvorimo ulomku obliko s tem, da pomnožimo imenovalec in števec z istim številom, pravimo, da smo ga razširili (*erweitern*).

2. Ulomke razširjajoč pretvorimo jih lahko tudi več na nov skupni imenovalec, ki pa mora biti mnogokratnik vseh danih imenovalcev. Navadno pretvarjamo ulomke na najmanjši skupni imenovalec. V ta namen poiščemo najprej najmanjši skupni mnogokratnik vseh danih imenovalcev; ta je tudi najm. sk. imenovalec. Da dobimo potem vsakemu ulomku novi števec, treba razdeliti novi skupni imenovalec s prejšnjim ter s kvocijentom pomnožiti prejšnji števec. — Primera.

1. Pretvori ulomke $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{10}$ na najm. sk. imenovalec.

Najm. sk. imenovalec je 40, in zaradi tega dobimo:

			40
40 : 2 = 20,	1 . 20 = 20	ali $\frac{1}{2}$	20 20
40 : 8 = 5,	3 . 5 = 15	$\frac{3}{8}$	5 15
40 : 10 = 4,	9 . 4 = 36	$\frac{9}{10}$	4 36

tedaj $\frac{1}{2} = \frac{20}{40}, \quad \frac{3}{8} = \frac{15}{40}, \quad \frac{9}{10} = \frac{36}{40}.$

2. Pretvori ulomke $\frac{a}{2b}, \frac{3m}{4bc}, \frac{4n}{c^2d}$ na najm. sk. imenovalec.

Najm. sk. imenovalec je $4bc^2d$. Zaradi tega dobimo:

$$\begin{aligned}
 4bc^2d : 2b &= 2c^2d, & 2c^2d \cdot a &= 2ac^2d; & \frac{a}{2b} &= \frac{2ac^2d}{4bc^2d} \\
 4bc^2d : 4bc &= cd, & cd \cdot 3m &= 3cdm; & \frac{3m}{4bc} &= \frac{3cdm}{4bc^2d} \\
 4bc^2d : c^2d &= 4b, & 4b \cdot 4n &= 16bn; & \frac{4n}{c^2d} &= \frac{16bn}{4bc^2d}
 \end{aligned}$$

§ 88. Uporabljač drugi del izreka v § 86. moremo ulomek, čegar števec in imenovalec sta z istim številom deljiva, okrajšati (*abkürzen*). V ta namen je treba le števec in imenovalec razdeliti z njiju skupno mero. Na pr.

$$\begin{aligned}
 \frac{35}{40} &= \frac{7}{8}, & \frac{200}{240} &= \frac{20}{24} = \frac{5}{6}, \\
 \frac{4am}{6an} &= \frac{2m}{3n}, & \frac{12a^2bx^2}{15acx^3} &= \frac{4ab}{5cx}.
 \end{aligned}$$

N a l o g e.

Pretvori na cela ali mešana števila:

*1. $\frac{24}{4}, \frac{27}{2}, \frac{32}{5}, \frac{37}{4}, \frac{30}{6}, \frac{57}{3}, \frac{96}{8}, \frac{104}{7}, \frac{223}{10}.$

2. a) $\frac{982}{15}, \frac{744}{24}, \frac{2383}{9}, \frac{3383}{30}, \frac{13785}{128}, \frac{405979}{96}.$

b) $\frac{ax}{a}, \frac{3bx^2}{x}, \frac{4a+3}{4}, \frac{am+b}{m}, \frac{3ax-b}{3x}, \frac{ab^2c-mx}{ab}.$

Pretvori na nepravne ulomke:

*3. $6\frac{1}{2}, 7\frac{3}{4}, 13\frac{2}{3}, 3\frac{5}{12}, 15., 21\frac{3}{10}, 27\frac{6}{7}, 30\frac{5}{9}.$

4. a) $77\frac{2}{5}$, $95\frac{11}{15}$, $561\frac{5}{6}$, $56\frac{17}{24}$, $83\frac{19}{30}$, $324\frac{37}{12}$.

b) $a + \frac{2}{m}$, $3a + \frac{b}{a}$, $5x + \frac{5y}{2x}$, $x + \frac{x^2 - 1}{x}$, $x - \frac{x^2 - 1}{x}$.

c) $m - \frac{m+n}{2}$, $1 + \frac{a-b}{a+b}$, $1 + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4xy}$.

d) $1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$, $1 - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$, $a + b - \frac{a^2 - 2b^2}{a - b}$.

*5. Pretvori ulomke $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ na skupni imenovalac 24!

6. Pretvori ulomke $\frac{1}{a}$, $\frac{2m}{3ab}$, $\frac{5n}{6ab}$, $\frac{3p}{10by}$ na imenovalac $30abxy$.

Pretvori te-le ulomke na najm. sk. imenovalac:

*7. a) $\frac{3}{4}$ in $\frac{5}{12}$; b) $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$; c) $\frac{1}{4}$ in $\frac{5}{6}$; d) $\frac{3}{4}$ in $\frac{7}{10}$.

*8. a) $\frac{3}{8}$ in $\frac{7}{20}$; b) $\frac{5}{12}$ in $\frac{11}{16}$; c) $\frac{13}{24}$ in $\frac{25}{32}$; d) $\frac{10}{27}$ in $\frac{5}{18}$.

9. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$.

10. $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{12}$.

11. $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{18}{35}$, $\frac{19}{40}$, $\frac{25}{56}$.

12. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{20}$.

13. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{31}{75}$, $\frac{127}{128}$.

14. $\frac{17}{30}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{38}{75}$, $\frac{29}{36}$.

15. $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{a^2}$, $\frac{3}{a^3}$.

16. $\frac{1}{m}$, $\frac{5a}{3m^2}$, $\frac{3bc}{4m^3}$, $\frac{5m^5}{4def}$.

17. $\frac{a-1}{a+1}$, $\frac{a-2}{a+2}$, $\frac{a-3}{a+3}$.

18. $\frac{y+1}{y-1}$, $\frac{y-1}{y+1}$, $\frac{y^2+1}{y^2-1}$.

19. $\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{x^2+2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x+1}$, $\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Okrajšaj te-le ulomke:

*20. $\frac{8}{10}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{24}{32}$, $\frac{15}{25}$, $\frac{18}{45}$, $\frac{28}{40}$, $\frac{35}{60}$, $\frac{60}{96}$, $\frac{24}{120}$.

21. a) $\frac{45}{54}$; b) $\frac{114}{250}$; c) $\frac{840}{1020}$; d) $\frac{1824}{7008}$; e) $\frac{4096}{7424}$.

22. a) $\frac{5 \cdot 12 \cdot 18}{4 \cdot 10 \cdot 27}$; b) $\frac{6 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 28}{4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 30}$; c) $\frac{6 \cdot 21 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 75}{8 \cdot 27 \cdot 50 \cdot 56 \cdot 60}$.

23. a) $\frac{391}{989}$; b) $\frac{637}{810}$; c) $\frac{765}{5304}$; d) $\frac{2079}{7029}$; e) $\frac{9082}{67735}$; f) $\frac{10078}{35273}$.

24. Izračuni vrednost izrazu $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

za $n = 6$, prav tako za $n = 8$, dobljena ulomka pa okrajšaj.

Okrajšaj te-le ulomke:

$$25. a) \frac{3abx}{12bmx}; \quad b) \frac{12a^2x}{28ax^2}; \quad c) \frac{15amx^3}{40bmx}; \quad d) \frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}.$$

$$26. a) \frac{a(a+1)}{(a+1)(a+2)}; \quad b) \frac{2m(m-1)}{m^2-1}; \quad c) \frac{15(a+b)(x-y)}{24(a-b)(x-y)}.$$

2. Seštevanje in odštevanje ulomkov.

§ 89. 1. Hočeš li sešteti ulomka $\frac{a}{m}$ in $\frac{b}{m}$, treba le, da vzameš m ti del jednote najprej a krat, potem še b krat, torej vkup $(a+b)$ krat. Torej je

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

Ulomke enakih imenovalcev seštejemo, ako seštejemo vse števce ter damo tej vsoti skupni imenovalec. Na pr.

$$\frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2};$$

$$\frac{a+b}{2m} + \frac{a-b}{2m} = \frac{(a+b) + (a-b)}{2m} = \frac{2a}{2m} = \frac{a}{m}.$$

2. Kadar je treba sešteti ulomke neenakih imenovalcev, pretvori jih najprej na skupni imenovalec, potem pa uporabi prejšnji izrek. Na pr.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12};$$

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an+bm}{mn}.$$

§ 90. Hočeš li ulomek $\frac{b}{m}$ odšteti od ulomka $\frac{a}{m}$, moraš vzeti a krat m ti del jednote, zmanjšan za b krat m ti del jednote, torej $(a-b)$ krat m ti del jednote

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Ulomka enakih imenovalcev odštejemo, ako subtrahendov števec odštejemo od minuendovega in tej diferenci damo skupni imenovalec. Na pr.

$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5};$$

$$\frac{x+y}{m} - \frac{x-y}{m} = \frac{(x+y) - (x-y)}{m} = \frac{2y}{m}.$$

2. Kadar je treba odšteti dva ulomka nejednakih imenovalcev, pretvori ju najprej na skupni imenovalec, potem pa uporabi prejšnji izrek. Na pr.

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8};$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} - \frac{bm}{mn} = \frac{an - bm}{mn}.$$

Naloge.

*1. a) $8\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{8} + 4\frac{7}{8}$; c) $2\frac{3}{7} + 4\frac{4}{7}$; d) $10\frac{7}{12} + 6\frac{11}{12}$.

*2. a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$; b) $8\frac{7}{15} + \frac{11}{15} + \frac{4}{15}$; c) $5\frac{3}{10} + 6\frac{7}{10} + 7\frac{9}{10}$.

3. $35\frac{3}{20} + 57\frac{7}{20} + 79\frac{13}{20}$.

4. $54\frac{23}{32} + 98\frac{29}{32} + 44 + 61\frac{19}{32}$.

*5. a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$; b) $\frac{7}{10} + \frac{11}{20}$; c) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$; d) $3\frac{7}{12} + \frac{11}{18}$.

*6. a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$; b) $2\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$; c) $3\frac{7}{8} + 9\frac{1}{6}$; d) $17\frac{8}{9} + 12\frac{7}{12}$.

*7. a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$; b) $\frac{2}{3} + \frac{7}{9} + \frac{4}{5}$; c) $1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5}$.

8. $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \frac{13}{15}$.

9. $\frac{2}{5} + \frac{5}{12} + \frac{11}{20} + \frac{12}{25}$.

10. $23\frac{2}{5} + 21\frac{4}{15} + 58\frac{9}{20} + 47\frac{39}{50}$.

11. $52\frac{5}{8} + 93\frac{7}{10} + 88 + 35\frac{11}{12} + 208\frac{7}{36}$.

12. $4068 + 1234\frac{17}{20} + 5678\frac{29}{35} + 987\frac{41}{48} + 6543\frac{37}{42}$.

13. V neki jami nahajajočo se vodo moremo izčrepati z jedno vodno sesalko v 15 dneh, z drugo v 12 dneh; koliki del vode izčrepa v jednom dnevu a) vsaka sesalka zase, b) obe skupaj?

*14. a) $\frac{7}{11} - \frac{3}{11}$; b) $5\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$; c) $8\frac{4}{5} - 2\frac{3}{5}$; d) $37\frac{23}{25} - 18\frac{9}{25}$.

*15. a) $23\frac{3}{5} - 16$; b) $1 - \frac{5}{12}$; c) $10 - \frac{19}{24}$; d) $78 - 39\frac{7}{15}$.

16. $503\frac{150}{193} - 319\frac{107}{193}$.

17. $723\frac{241}{425} - 476\frac{409}{425}$.

*18. a) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$;

b) $2\frac{4}{5} - \frac{7}{10}$;

c) $\frac{13}{16} - \frac{5}{12}$;

d) $8\frac{17}{20} - \frac{19}{20}$.

*19. a) $12\frac{13}{15} - 8\frac{7}{20}$;

b) $16\frac{2}{5} - 7\frac{5}{6}$;

c) $58\frac{19}{24} - 19\frac{5}{16}$.

20. $265\frac{37}{40} - 156\frac{18}{25}$.

21. $374\frac{29}{48} - 215\frac{11}{20}$.

22. $437\frac{7}{15} - 187\frac{11}{16}$.

23. $329\frac{13}{29} - 109\frac{37}{64}$.

24. Dani so ti-le ulomki: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$; za koliko je vsota prvih dveh ulomkov manjša nego 1? — za koliko vsota prvih treh, štirih, petih, šestih?

$$25. \frac{4x}{3} + \frac{2x}{3} = \frac{6x}{3}$$

$$26. \frac{3m}{4} - \frac{m}{4}$$

$$27. \frac{x}{8} - \frac{y-z}{8}$$

$$28. \frac{a+4x}{3} + \frac{2a+x}{3}$$

$$29. \frac{a+b}{3m} + \frac{2a-b+3c}{3m}$$

$$30. \frac{3a-2}{5} + \frac{2a+3}{3}$$

$$31. \frac{x+y}{8} - \frac{y-x}{12} = \frac{3x-3y-2y}{24}$$

$$32. \frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab}$$

$$33. \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$34. \frac{a+x}{a} + \frac{x}{a+x}$$

$$35. \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1}$$

$$36. \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$$

$$37. \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$$

$$38. \frac{9a+2}{3} - \frac{7a+5}{4} - \frac{8-7a}{6} + \frac{5-3a}{8} - \frac{3-7a}{12}$$

$$39. \frac{2}{2x-1} - \frac{5}{3x-1} + \frac{4}{2x-3}$$

$$40. \frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-2} - \frac{4x-3}{x-3}$$

$$41. \frac{a+b-c}{ab} + \frac{a-b+c}{ac} + \frac{b+c-a}{bc}$$

3. Množenje in deljenje ulomkov.

§ 91. Ulomek pomnožimo s celim številom, ako ž njim števec pomnožimo ali imenovalc razdelimo.

$$1) \frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}, \quad \frac{2}{15} \cdot 3 = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2+2+2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

$$2) \frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b:m}, \quad \frac{2}{15} \cdot 3 = \frac{2}{15:3} = \frac{2}{5}.$$

Dokaz. 1) Ako vzamemo a delov, katerih vsak je $\frac{1}{b}$, m krat za sumand, dobimo am takih delov; torej $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$.

$$2) \frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} \text{ (po 1) } = \frac{am : m}{b : m} \text{ (§ 86.) } = \frac{a}{b : m}.$$

§ 92. Ulomek razdelimo s celim številom, ako ž njim števec razdelimo ali imenovalec pomnožimo.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b}, \quad \frac{18}{15} : 3 = \frac{18 : 3}{25} = \frac{6}{25};$$

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}, \quad \frac{18}{25} : 3 = \frac{18}{25 \cdot 3} = \frac{18}{75} = \frac{6}{25}.$$

Dokaz. Res je

$$\frac{a : m}{b} \cdot m = \frac{(a : m) \cdot m}{b} \text{ (§ 91.) } = \frac{a}{b}, \text{ kakor tudi}$$

$$\frac{a}{bm} \cdot m = \frac{am}{bm} \text{ (§ 91.) } = \frac{a}{b}.$$

§ 93. Vzemimo, da je treba število 5 pomnožiti z ulomkom, na pr. s $\frac{3}{4}$. Gledé na to, kar smo povedali v § 35. o množenju, morali bi tu število 5 vzeti $\frac{3}{4}$ krat za sumand; to pa očitvidno nima nobenega zmisla. Nastane zatorej potreba, da pojem, katerega so ustanovili za množenje celih števil, tako raztegnemo, da se dá uporabiti tudi za ulomke.

Naloge praktičnega življenja same kažejo, kako je treba raztegniti pojem o množitvi. Ako velja na pr. 1 m 5 K, velja a metrov 5 K $\times a$, torej $\frac{3}{4}$ metra 5 K $\times \frac{3}{4}$. Pomen tega produkta razvidimo iz rešitve te naloge; dobimo namreč:

1 meter velja 5 K;

$\frac{1}{4}$ metra velja četrti del od 5 K, torej $\frac{5}{4}$ K;

$\frac{3}{4}$ metra veljajo 3krat toliko, kolikor $\frac{1}{4}$ metra, torej $\frac{5}{4}$ K $\times 3$;

$$\text{zato je } 5 \text{ K} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \text{ K} \times 3.$$

Število z ulomkom pomnožiti se torej pravi, število razdeliti na toliko enakih delov, kolikor jednot ima ulomkov imenovalec, ter jeden tak del vzeti tolikokrat za sumand, kolikor jednot ima števec.

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{4}.$$

Da je ta produkt pravi, prepričaš se tudi, ako oba faktorja zameniš.

Število pomnožimo z ulomkom, ako je z imenovalcem razdelimo ter kvocijent s števcem pomnožimo. (V zmislu izvoda v § 53. moremo račun izvršiti tudi v obratnem redu.)

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{n} \cdot m = \frac{am}{n}; \quad 10 \cdot \frac{3}{5} = \frac{10}{5} \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Ako je ulomek $\frac{a}{b}$ pomnožiti z ulomkom $\frac{m}{n}$, dobimo po prejšnjem izreku

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : n \right) \cdot m = \frac{a}{bn} \cdot m = \frac{am}{bn}, \text{ t. j. :}$$

Ulomek pomnožimo z ulomkom, ako damo produktu števecv produkt imenovalcev za imenovalce.

$$\text{Na pr. } \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 10} = \frac{21}{50}.$$

Dostavek. Ako dasta dve števili 1 za produkt, imenujemo vsako teh števil obrneno ali recipročno (*umgekehrt oder reciprok*) vrednost drugega.

Tako je $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, torej je $\frac{1}{a}$ recipročna vrednost števila a ,

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1, & " & " & \frac{n}{m} & " & " & " & \frac{m}{n}, \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1, & " & " & \frac{4}{3} & " & " & " & \frac{3}{4}. \end{array}$$

§ 94. Ker je v § 51. ustanovljeni pojem o delitvi v obče veljaven, izvira iz njega tudi izrek, kako je z ulomkom deliti, namreč:

Število razdelimo z ulomkom, ako je razdelimo s števcem, kvocijent pa pomnožimo z imenovalcem, ali ako je pomnožimo z ulomkovo recipročno vrednostjo (z obrnjenim ulomkom).

$$a : \frac{m}{n} = \frac{a}{m} \cdot n \quad 8 : \frac{3}{5} = \frac{8}{3} \cdot 5 = \frac{40}{3}.$$

$$a : \frac{m}{n} = a \cdot \frac{n}{m}, \quad 8 : \frac{3}{5} = 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3}.$$

Dokaz. Res je

$$\left(\frac{a}{m} \cdot n \right) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{m} \cdot m \text{ (§ 93.)} = a, \text{ kakor tudi}$$

$$\left(a \cdot \frac{n}{m} \right) \cdot \frac{m}{n} = a \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} \right) = a \cdot 1 = a.$$

Prav tako je

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}, \quad \frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}.$$

Faktorje v števcu moremo z enakimi faktorji v imenovalcu okrajšati uže med računanjem.

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Naloge.

*1. a) $\frac{3}{5} \cdot 6$; b) $\frac{5}{12} \cdot 7$; c) $\frac{13}{18} \cdot 5$; d) $\frac{17}{25} \cdot 16$.

*2. a) $\frac{11}{12} \cdot 6$; b) $\frac{37}{48} \cdot 12$; c) $\frac{19}{30} \cdot 30$; d) $\frac{31}{45} \cdot 20$.

*3. a) $7\frac{3}{4} \cdot 9$; b) $8\frac{13}{20} \cdot 5$; c) $5\frac{7}{15} \cdot 6$; d) $3\frac{5}{8} \cdot 24$.

~~4.~~ a) $81\frac{17}{30} \cdot 74$; b) $57\frac{34}{45} \cdot 79$; c) $258\frac{13}{50} \cdot 85$; d) $607\frac{52}{75} \cdot 120$.

*5. 1 m velja $\frac{4}{5}$ K; koliko velja 5, 12, 37, 72 m?

*6. 1 hl velja $23\frac{3}{4}$ K; koliko velja 6, 15, 20 hl?

7. $\frac{ab}{4m} \cdot 3c$.

8. $\frac{6x^2}{m^3y} \cdot my$.

9. $\frac{2a^2x^2}{15b^2y^2} \cdot 5y^2$.

10. $\frac{24x^2}{5y^2} \cdot y^2$.

11. $\frac{a-b}{2ab} \cdot 2b$.

12. $\frac{a+b}{m} (a-b)$.

13. $\left\{ a + \frac{b^2 - a^2}{a} \right\} \cdot 2a$.

14. $\left\{ 1 + \frac{1-a}{1+a} \right\} \cdot (1+a)$.

15. $\left\{ \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} \right\} \cdot m^4$.

16. $\left\{ \frac{3m^3}{4n^3} + \frac{2m^2}{3n^2} + \frac{m}{2n} \right\} \cdot 12n$.

17. $\left\{ \frac{a^3}{x^3} - \frac{2a^2}{x^2} + \frac{3a}{x} - 4 \right\} \cdot x^3$.

18. $\left\{ 1 + \frac{a^2b^2 - 2abc^2 + c^4}{4abc^2} \right\} \cdot (a^2b^2 - 2abc^2 + c^4)$.

*19. a) $\frac{8}{15} : 4$; b) $\frac{24}{25} : 6$; c) $\frac{35}{41} : 7$; d) $7\frac{1}{5} : 12$.

*20. a) $\frac{7}{8} : 5$; b) $\frac{13}{20} : 4$; c) $1\frac{7}{12} : 9$; d) $\frac{3}{10} : 15$.

~~21.~~ a) $912\frac{6}{7} : 3$; b) $184\frac{5}{6} : 16$; c) $791\frac{9}{50} : 27$; d) $179\frac{13}{25} : 34$.

*22. Lokomotiva predirja v 4 urah $113\frac{3}{5}$ km; koliko v 1 uri?

23. Ako velja 1 hl vina 36 K, koliko vina dobiš za $499\frac{1}{2}$ K?

24. $\frac{15ax}{5b} : 5x$.

25. $\frac{12amx}{5bc} : 4ax$.

26. $\frac{8x^2}{3my} : 3my$.

$$27. \frac{5x^3y^3}{4a^2b} : 2ab^2.$$

$$28. \frac{10m^3n^2}{xy^2} : 5m^2n^2.$$

$$29. \left\{ 1 + \frac{m-n}{m+n} \right\} : 2m.$$

$$30. \left\{ a + b - \frac{a^2 + b^2}{a + b} \right\} : (a + b).$$

$$31. \frac{6a^2 + 5ab - 6b^2}{2a + 3b} : (3a - 2b).$$

$$32. \frac{1 + 2m - 2m^3 - m^4}{1 - 2m + m^2} : (1 + 2m + m^2).$$

$$*33. a) 15 \cdot \frac{3}{5}; b) 64 \cdot \frac{7}{8}; c) 31 \frac{7}{10}; d) 8 \cdot 5 \frac{3}{5}.$$

$$34. a) \frac{6}{35} \cdot \frac{7}{9}; b) \frac{14}{15} \cdot \frac{8}{11}; c) 10 \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{12}; d) 27 \frac{10}{27} \cdot \frac{16}{25}.$$

$$35. a) \frac{31}{60} \cdot 15 \frac{5}{13}; b) 28 \frac{2}{3} \cdot 9 \frac{4}{5}; c) 53 \frac{13}{24} \cdot 8 \frac{17}{30}; d) 216 \frac{9}{25} \cdot 15 \frac{11}{16}.$$

$$36. 6 \frac{3}{4} \cdot 1 \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot 1 \frac{3}{5}.$$

$$37. \frac{4}{5} \cdot 1 \frac{5}{6} \cdot 6 \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{9}.$$

*38. Za koliko je produkt ulomkov $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{3}$ manjši nego vsak faktor?

39. Za koliko je produkt ulomkov $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ in $\frac{4}{5}$ manjši nego njih vsota?

40. 1 kg sladkorja velja 96 h; koliko velja $2 \frac{1}{2}$, $5 \frac{3}{4}$, $4 \frac{11}{20}$, $25 \frac{9}{10}$ kg?

41. B ima $2 \frac{1}{3}$ krat toliko denarja kakor A, C $1 \frac{1}{7}$ krat toliko kakor B, D pa le $\frac{3}{8}$ krat toliko kakor C; če ima A $45 \frac{3}{5}$ K, a) koliko denarja ima vsak izmed ostalih? b) koliko pa imajo vsi skupaj?

$$42. 8a \cdot \frac{b}{4}.$$

$$43. ax \cdot \frac{2b}{y}.$$

$$44. 4x^2y^2 \cdot \frac{3ab}{2xy}.$$

$$45. 2a^3 \cdot \frac{bx}{2a^2c^2y}.$$

$$46. (a - x) \cdot \frac{a + x}{ax}.$$

$$47. 3ax \cdot \left\{ a - \frac{b}{3ax} \right\}.$$

$$48. \frac{4x}{3y} \cdot \frac{7a}{9b}.$$

$$49. \frac{2ab}{cd} \cdot \frac{3ax}{cm}.$$

$$50. \frac{5mx}{9ny} \cdot \frac{3n}{10m}.$$

$$51. \frac{4a}{5b} \cdot \frac{7b}{8x} + \frac{2a}{5c} \cdot \frac{2c}{3x}.$$

$$52. \frac{6a}{y} \cdot \frac{2x}{3a} - \frac{5x}{b} \cdot \frac{3b}{5y}.$$

$$53. \frac{12a^2b}{39xy^5} \cdot \frac{13x^2y^6}{24a^4b}.$$

$$54. \frac{6a}{7b} \cdot \frac{2b}{3d} \cdot \frac{14c}{15e} \cdot \frac{5d}{6a}.$$

$$55. \frac{a+b}{m-n} \cdot \frac{a-b}{m+n}.$$

$$56. \left\{ 1 + \frac{b}{a} \right\} \cdot \frac{a-b}{2b}.$$

$$57. \left\{ \frac{a^3}{2b} - \frac{a^2}{3b^2} + \frac{a}{4b^3} \right\} \cdot \frac{3a^2}{4b^2}.$$

$$58. \frac{x^2 + 2x + 4}{x^4 - 2x^2 + 4} \cdot \frac{x^4 + 8}{x^2 - 9}.$$

$$59. \left\{ 1 + \frac{a}{b} \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{a}{b} \right\} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a-b}.$$

$$60. \left\{ \frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} - 2 \right\} \cdot \left\{ \frac{7x^2}{10} + \frac{5x}{4} + \frac{2}{3} \right\}.$$

$$61. \left\{ 1 + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} + \frac{m^3}{4} \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{m^3}{4} \right\}.$$

$$*62. a) 24 : \frac{6}{7}; b) 15 : \frac{5}{8}; c) 10 : \frac{3}{5}; d) 32 : 5\frac{1}{3}.$$

$$63. a) \frac{21}{32} : \frac{3}{32}; b) \frac{9}{10} : \frac{5}{12}; c) \frac{27}{40} : \frac{12}{35}; d) 8\frac{3}{25} : \frac{7}{25}.$$

$$64. a) 7\frac{7}{15} : \frac{27}{40}; b) 140\frac{4}{5} : 6\frac{5}{12}; c) 105\frac{7}{10} : 12\frac{2}{3}; d) 135\frac{7}{48} : 20\frac{19}{24}.$$

$$*65. 27\frac{1}{2} l \text{ vina je treba v steklenice stočiti; koliko steklenic se potrebuje, če drži vsaka natančno } \frac{5}{6} l?$$

$$66. \text{ Gotovo število srebernjakov tehta } 13\frac{1}{3} kg; \text{ koliko je srebernjakov, če tehta vsak } \frac{1}{81} kg?$$

$$67. \text{ Posoda za vodo se napolni po jedni pritočni cevi v 3 urah, po drugi v 4 urah; a) koliki del posode se napolni po vsaki cevi v 1 uri? b) v koliko urah se napolni posoda, če priteka voda istočasno po obeh cevéh?}$$

$$68. \text{ Vlák predirja po različno napeti cesti v prvih 3 urah } 94\frac{7}{8} km, \text{ v drugih } 2\frac{1}{2} \text{ ure } 70\frac{13}{20} km \text{ in v naslednjih } 3\frac{5}{6} \text{ ure } 122\frac{7}{10} km; \text{ kolika je njegova povprečna hitrost v 1 uri?}$$

$$69. 2am : \frac{2m}{b}.$$

$$70. 12a^3 : \frac{3a^2}{x}.$$

$$71. 6a^2y : \frac{3b^2}{2y}.$$

$$72. (x + y) : \frac{x + y}{x - y}.$$

$$73. (a^2 - b^2) : \frac{a + b}{a - b}.$$

$$74. \frac{3a}{4x} : \frac{5x}{2b}.$$

$$75. \frac{x^2 - y^2}{x^2 - b^2} : \frac{x - y}{a + b}.$$

$$76. \left\{ a + \frac{b}{c} \right\} : \left\{ a - \frac{b}{c} \right\}.$$

$$77. \left\{ \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} \right\} : \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

$$78. \frac{4(x + y)}{9(m - n)} : \frac{8(m - n)}{3(x - y)}.$$

$$79. \left\{ \frac{3x^3}{4y} - \frac{9x^2}{15} + \frac{xy}{10} \right\} : \frac{3x}{5y}.$$

$$80. \left\{ \frac{1}{2}a^2 + \frac{47}{210}ab - \frac{2}{3}b^2 \right\} : \left\{ \frac{3}{4}a - \frac{5}{7}b \right\}.$$

$$81. \left\{ \frac{5x^6}{12a^6} - \frac{43x^2}{24a^2} + \frac{9a^2}{5x^2} \right\} : \left\{ \frac{3x^2}{4} - \frac{6a^2}{5x^2} \right\}.$$

$$82. \frac{\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x-a}}{\frac{a}{x-a} - \frac{a}{x+a}}.$$

$$83. \frac{a + \frac{bx - ay}{x + y}}{a - \frac{bx + ay}{x + y}}.$$

II. Decimalni ulomki.

§ 95. Ulomek, čegar števec je celo število, imenovalac pa kaka potenca števila 10, tedaj 10, 100, 1000, . . . 10^m , imenujemo decimalni ulomek (*Decimalbruch*); na pr. $\frac{213}{100}$, $\frac{517}{10}$, $\frac{57}{1000}$. . . Občna oblika decimalnega ulomka je $\frac{A}{10^m}$, kjer pomenita A in m celi števili.

Vse druge ulomke imenujemo v nasprotje decimalnim ulomkom navadne ulomke (*gemeine Brüche*).

Decimalne ulomke pišemo brez imenovalca; zato pa odrežemo v števcu od desne proti levi s točko, imenovano decimalna ali desetinska točka (*Decimalpunkt*), toliko števil, kolikor ima potenčni eksponent števila 10 v imenovalcu jednot, ali kar je prav isto, kolikor ima imenovalac ničel. Ako v števcu ni toliko števil, kolikor jih je treba odrezati, dopolnijo se prazna mesta na levi z ničlami. Na pr.

$$\frac{78317}{10^3} = \frac{78317}{1000} = 78\cdot317, \quad \frac{5483}{10^4} = \frac{5483}{10000} = 0\cdot5483,$$

$$\frac{37}{10^5} = \frac{37}{100000} = 0\cdot00037.$$

Številke na desni strani decimalne točke imenujemo decimalke ali desetinke (*Decimalen*). $\frac{A}{10^m}$, znači torej decimalni ulomek z m decimalkami.

Da zvemo, kaj pomeni v decimalnem ulomku vsaka posamezna številka, vzemimo decimalni ulomek $\frac{A}{10^4}$, ki ima 4 decimalke, ter recimo, da je m število pred decimalno točko in da so decimalne številke proti desni po vrsti a , b , c , d ; tedaj je

$$\begin{aligned} A &= m \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d, \text{ torej} \\ \frac{A}{10^4} &= \frac{m \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d}{10^4} \\ &= m + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4} \end{aligned}$$

$$2 \frac{4}{8} = \frac{8}{8}$$

Število na levi pred decimalno točko je celo število; prva decimalka pomeni desetine, druga stotine, tretja tisočine, četrta desettisočine, i. t. d. Na pr.

$$34\cdot781 = \frac{34781}{1000} = \frac{34000 + 700 + 80 + 1}{1000} \\ = 34 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{1000}$$

V celem številu, napisanem po dekadnem sistemu (§ 8.), ima vsaka številka na nastopnem mestu proti desni le deseti del one vrednosti, katero je imela na prejšnjem mestu. Prav isti zakon velja tudi za decimalke, kajti desetina je deseti del jednice, stotina je deseti del desetine, i. t. d. Uvedši decimalne ulomke smo tedaj dekadni številni sistem raztegnili in sicer takó, da se vrsta številnih redov... tisočic, stotic, desetic in jednic ne končuje z jednicami, nego se po istem zakonu t. j. da se smatra vsaka nižja jednota za deseti del jednote prejšnjega višjega reda — nadaljuje tudi pod jednice v desetinah, stotinah, tisočinah, ...

Decimalna točka loči prvotne številne rede od te razširjave.

V dekadnem sistemu ima tedaj število v obče to -le obliko:

$$\dots c \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + j + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} \dots,$$

kjer pomenijo $j, a, b, c, \dots$ številke jednic, desetic, stotic, tisočic, ... in $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ številke desetih, stotin, tisočin, ...

Decimalni ulomek čitamo takó, da izgovorimo najprej celote pred decimalno točko, potem pa vsako posamezno decimalko z njenim imenovalcem. Imenovalec posameznih decimalk pri izgovarjanju dostikrat tudi opuščamo ter imenujemo po vrsti le vse decimalke, ne izimši ničle.

Izvod. Decimalnemu ulomku se vrednost ne izpremeni, ako mu pripišemo na desni kolikor si bodi ničel. Na pr.

$$0\cdot23 = 0\cdot230 = 0\cdot2300 = 0\cdot23000.$$

Pretvarjanje navadnih ulomkov na decimalne in obratno.

§ 96. Da pretvoriš navadni ulomek na decimalni ulomek, razdeli števec z imenovalcem, v kvocijentu pa postavi za celotami — (na njih mesto pride pri pravem ulomku ničla) — decimalno točko. Ostanku pripiši potem ničlo, deli zopet ter zapiši dobljeno

kvocijentovo številko na desno od decimalne točke. Prav tako pripiši potem vsakemu naslednjemu ostanku ničlo ter nadaljuj deljenje, dokler ne dobiš delitve brez ostanka, ali, če se to ne zgodi, dokler nimaš toliko decimalk, kolikor jih želiš.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 4 \overline{) 30} : 4 = 0.75 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 329 \\ 125 \overline{) 329} = 2.632 \\ \underline{790} \\ 400 \\ \underline{250} \\ 0 \end{array}$$

Dokaz. Ako pripišeš ostanku celot ničlo, pretvoriš ga na desetine; ako potem te razdeliš, dobiš v kvocijentu desetine. Če pripišeš ničlo prav tako ostanku desetin, pretvoriš ga na stotine in le-te razdelivši dobiš stotine; i. t. d.

Dostavka: 1. Da moremo navadni ulomek natančno pretvoriti v decimalnega, treba, da postane ta decimalni ulomek končen (*endlich*), t. j. popreje omenjena delitev se mora dati izvršiti brez ostanka. Ako vzamemo, da sta števec in imenovalc relativni praštevili, tedaj je delitev brez ostanka le takrat mogoča, kadar imenovalc nima nikakega faktorja, ki je različen od 2 in 5; kajti z vsakokratnim pripisanim ničle izvršimo množitve z 10 (5×2) ter s tem ostanku pridenemo le faktorja 2 in 5.

V vseh slučajih, v katerih imenovalc celó nima faktorjev 2 in 5, ali v katerih ima razven teh še različne druge faktorje, dá se navadni ulomek, v svoji najjednostavnejši obliki le približno pretvoriti na decimalni ulomek. Na pr.

$$\frac{23}{78} = 23.0 : 78 = 0.2948 \dots$$

2. Kadar se navadni ulomek ne da natančno pretvoriti na decimalni ulomek, tedaj moramo, pretvarjajoč ga na decimalni ulomek približno iste vrednosti, dobiti nekaj decimalk, katere se v istem redu ponavljajo. Kajti v vsaki delitvi je ostanek vselej manjši nego divizor; zato moremo dobiti le toliko različnih ostankov, kolikor je celih števil, ki so manjša nego divizor. Delitev nadaljujoč moramo dobiti naposled ostanek, katerega smo že poprej imeli, a potem se bodo tudi v kvocijentu v istem redu ponavljale številke, katere smo že poprej dobili, in prav tako se bodo ponavljali tudi prejšnji ostanki.

$$\begin{array}{rcl} \text{Na pr. } \frac{7}{15} = 70:15 = 0\cdot4666\dots & \frac{18}{37} = 180:37 = 0\cdot486486\dots \\ \quad 100 & 320 \\ \quad 100 & 240 \\ \quad 100 & 180 \\ \quad 10 & 320 \\ & 240 \\ & 18 \end{array}$$

Decimalne ulomke, v katerih se nekoliko števil ponavlja v istem redu, imenujemo povratne ali perijodične (*periodisch*), vrsto ponavljajočih se števil pa povračaj ali perijodo (*Periode*).

Perijodo zapišemo navadno le jedenkrat, toda nad prvo in zadnjo njeno številko postavimo točko; tedaj je:

$$\frac{7}{15} = 0\cdot4\dot{6}; \quad \frac{18}{37} = 0\cdot48\dot{6}.$$

§ 97. Decimalne ulomke pretvarjamo v navadne ulomke po teh-le izrekih:

1. Končen decimalni ulomek pretvoriš na navadni ulomek, ako ga napišeš v obliki navadnega ulomka in tega, ako mogoče, še okrajšaš. Na pr.

$$0\cdot75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}, \quad 31\cdot325 = 31 \frac{325}{1000} = 31 \frac{13}{40}.$$

2. Čisto perijodičen decimalni ulomek, t. j. ulomek, ki nima pred perijodo nikakeršnih decimal, pretvoriš na navadni ulomek, ako vzameš perijodo za števec, za imenoalec pa toliko 9, kolikor ima perijoda števil.

$$0\cdot\dot{4}\dot{6} = \frac{46}{99}.$$

Dokaz. Ako zaznamiš iskani navadni ulomek z x , tedaj je

$$x = \frac{46}{100} + \frac{46}{10000} + \frac{46}{1000000} + \frac{46}{100000000} + \dots$$

To jednačbo pomnoživši s 100 dobiš

$$100x = 46 + \frac{46}{100} + \frac{46}{10000} + \frac{46}{1000000} + \dots$$

Ako sedaj odšteješ prvo jednačbo od druge, dobiš

$$99x = 46, \text{ in odtod}$$

$$x = \frac{46}{99}.$$

3. Mešano perijodičen decimalni ulomek, t. j. ulomek, ki ima pred perijodo še druge decimalke, pretvoriš na navadni ulomek, ako odšteješ število, sestoječe iz decimalk pred perijodo, od števila, sestoječega iz decimalk pred perijodo in v perijodi, ter to diferenco vzameš za števec ulomku, čegar imenoalec ima toliko 9, kolikor ima perijoda števil, s toliko ničlami na desni, kolikor je pred perijodo decimalk. Na pr.

$$0.\dot{3}2\dot{5} = \frac{325 - 3}{990} = \frac{322}{990}, \quad 0.\dot{4}2\dot{7} = \frac{427 - 42}{900} = \frac{385}{900} = \frac{77}{180}.$$

Dokaz. Ako zaznamiš iskani navadni ulomek z x , je

$$x = \frac{3}{10} + \frac{25}{1000} + \frac{25}{100000} + \frac{25}{10000000} + \dots$$

Pomnoživši jednačbo najprej s 1000, potem z 10, dobiš

$$1000x = 300 + 25 + \frac{25}{100} + \frac{25}{10000} + \dots$$

$$10x = 3 + \frac{25}{100} + \frac{25}{10000} + \frac{25}{1000000} + \dots$$

Ako odšteješ zadnjo jednačbo od predzadnje, dobiš

$$990x = (300 + 25) - 3, \text{ in odtod}$$

$$x = \frac{325 - 3}{990} = \frac{322}{990}.$$

Četvero osnovnih računov z decimalnimi ulomki.

§ 98. Računanje z decimalnimi ulomki se opira na tiste zakone, kakor računanje s celimi števili, paziti pa je na mestno vrednost posameznih števil, t. j. na decimalno točko.

Hočemo li decimalne ulomke seštevati ali odštevati, napišemo jih tako, da pridejo istoimenska mesta, tedaj tudi decimalne točke, natančno druga pod drugo, potem jih seštevamo ali odštevamo od desne proti levi kakor cela števila. Na praznih mestih si lahko mislimo ničle.

35'312	215'3456
0'5678	91'45923
39'2	diferenca 123'88637
vsota 75'0798	

Dostavek. Pri mnogih računih navadno zadošča, ako od decimalnega ulomka, imajočega veliko decimalk, pridržimo le nekaj decimalnih mest. Pogrešek, ki tako nastane, skušamo kar največ zmanjšati in sicer s tem, da zadnjo pridržano decimalko popravimo (*corrigieren*). Ta poprava sestoji v tem, da zadnjo pridržano decimalko povečamo za 1, kadar je prva izpuščena številka 5 ali večja od 5, in da zadnje pridržane decimalke ne izpremenimo, kadar je prva izpuščena številka manjša nego 5.

Tak decimalni ulomek imenujemo okrajšan ali nepopoln. Da označimo decimalni ulomek za okrajšanega, pripišemo mu nekaj pik. 7'28374 dá okrajšan na 4, 3, 2, 1 mesto:

$$7'2837\dots, 7'284\dots, 7'28\dots, 7'3\dots$$

V pravilno okrajšanem decimalnem ulomku je pogrešek vselej manjši kakor polovica jednote poslednje pridržane decimalke.

Kadar so v jednom izmed več sumandov (ali tudi v minuendu ali subtrahendu) desetine, stotine.... nepopolne, nepopolne so desetine stotine.... tudi v vsoti (diferenci). V takem slučaju ne moremo vsote (diference) določiti natančneje kakor na desetine ali stotine; zato pa vzamemo od nižjih mest popravo. Na pr.

134'5...	ali	134'5...	13'43...	13'43...
28'359		28'4...	—5'82.43	—5'82.6
7'84		7'8...	7'61...	7'60...
170'7...		170'7..		

§ 99. 1. Decimalni ulomek pomnožimo s potenco števila 10, ako pomaknemo decimalno točko za toliko mest proti desni, kolikor ima multiplikator ničel.

$$\frac{a}{10^m} \cdot 10^n = \frac{a}{10^m : 10^n} = \frac{a}{10^{m-n}}.$$

$$3'14159 \cdot 100 = 314'159, \quad 0'097325 \cdot 1000 = 97'325.$$

2. Dva decimalna ulomka pomnožimo, ako ju pomnožimo, ne oziraje se na decimalni točki, kakor celi števili ter potem

v produktu od desne proti levi odrežemo toliko decimalk, kolikor jih imata oba faktorja skupaj.

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}.$$

Prav isto velja tudi takrat, kadar je jeden faktor celo število.

Kadar produkt nima toliko mest, kolikor jih je treba odrezati, postavijo se na prazna mesta na levi ničle.

$$\begin{array}{r} 6'543 \times 2'37 \\ 13\ 086 \\ 1\ 9629 \\ \hline 45801 \\ 15'50691 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4'23 \times 0'01307 \\ 1\ 269 \\ \hline 2961 \\ 0'0552861 \end{array}$$

Pomniti je treba tudi to, da se pri množitvi z jednicami mestna vrednost ne izpremeni, a da se pri množitvi z desetninami, stotinami ... zniža za 1, 2, ... mesti.

§ 100. Kadar v produktu dveh decimalnih ulomkov nočemo dobiti nižjih mest, nego jih zahteva natančnost računa, uporabljamo okrajšano množenje (*abgekürzte Multiplication*), pri čemer množimo z vsako multiplikatorjevo številko le one multiplikandove številke, katerih produkti vplivajo na zahtevana mesta. Na pr.

$$35'2156 \times 7'409$$

na tri decimalke

$$\begin{array}{r} 35'21\ 56 \\ 9\ 04'7 \\ \hline 246\ 50\ 9 \\ 14\ 08\ 6 \\ 31\ 7 \\ \hline 260'91\ 2... \end{array}$$

7 jed. $\times$ 6 desetisočin = 42 des.-tisočin. Desetice tega produkta (4 tisočine) vzamemo kot popravo.

7 jed. $\times$ 5 tisočin = 35 tisočin, torej zapišemo 7 jed. pod 5 tisočin (zahtevano decimalno mesto).

4 desetine $\times$ 6 des.-tisočin = 24 stotisočin ne vpliva na tretjo decimalko.

4 desetine $\times$ 5 tisočin = 20 des.-tisočin da 2 tisočini za popravo.

4 desetine $\times$ 1 stotina = 4 tisočine. Torej zapišemo 4 desetine pod 1 stotino.

9 tisočin $\times$ 2 desetini = 18 des.-tisočin, torej 2 za popravo.

9 tisočin $\times$ 5 jednic = 45 tisočin. Zato zapišemo 9 tisočin pod 5 jednic.

Ako zapišemo multiplikatorjeve številke pod multiplikandove tako, da dà produkt vsakih dveh druga nad drugo stoječih števil (najnižje) zahtevano decimalno mesto, pridejo vselej jednice jednega faktorja pod (oziroma nad) zahtevano

mesto drugega faktorja in stojé sploh vse številke multiplikatorjeve v obratnem redu. Na pr.

$$a) 3'047653 \times 0'00867$$

na 4 decimal.

$$3'047\ 653$$

$$\underline{76\ 800'0}$$

$$b) 16'42 \times 279'34$$

na 1 decimal.

$$16'42 \quad \text{ali} \quad 279'34$$

$$\underline{43'972} \quad \underline{24'61}$$

Okrajšano množiš torej tako-le:

1. Multiplikatorjeve jednice zapiši pod ono multiplikandovo mesto, ki se v produktu zahteva kot najnižje; vse druge številke pa napiši zraven teh jednic v obratnem redu tako, da se prikaže ves multiplikator obrnen.

2. S prvo na desni stoječo številko obrnenega multiplikatorja pomnoži najprej ono multiplikandovo številko, katera stoji za jedno mesto dalje proti desni, pa tega produkta ne zapiši, marveč si zapomni le njega najbližje desetice, katere dado popravo ali korekturo; potem pomnoži ravno nad njo stoječo multiplikandovo številko, produktu prištej popravo in tu začni produkt napisavati; nato pomnoži zaporedoma vse multiplikandove številke. Prav tako množi z drugo, tretjo . . . multiplikatorjevo številko, dobljene okrajšane produkte pa piši tako drugega pod drugega, da pridejo njih najnižja mesta natančno drugo pod drugo.

3. Te delske produkte seštej in odreži v vsoti toliko decimal, kolikor se jih zahteva.

Dostavek. Ako je jeden faktor okrajšan (ali ako sta okrajšana oba), produkta ne moremo tako natančno določiti, kakor bi hoteli. Na pr. produkta $8'43 \dots \times 26'859 \dots$ ne moremo natančno določiti na 3 decimalke,

$$8'43?? \quad \text{ali} \quad 26'859$$

$$\underline{\dots 958'62} \quad \underline{\dots 34'8}$$

ker ne poznamo dveh mest prvega faktorja, s katerima bi morali množiti 2 desetici in 6 jednic drugega faktorja, da bi dobili tiščine natančno. V tem slučaju moremo izračunati le toliko veljavnih števil v produktu (ali za jedno več), kolikor zanesljivih multiplikatorjevih številk ustreza multiplikandovim številkam. Pišemo pa:

$$8'43 \dots \quad \text{ali} \quad 26'859$$

$$\underline{\dots 958'62} \quad \underline{\dots 34'8}$$

Mestna vrednost tiste številke jednega faktorja, ki stoji nad (ali pod) enicami drugega faktorja, določuje mestno vrednost najnižjemu mestu produkta.

Pogostoma jemljemo to najnižje mesto v produktu le za popravo. Na pr.

$$\begin{array}{r}
 19'438 \dots \times 0'0604 \dots \text{ nasprotno: } 19'438 \dots \times 604 \\
 \hline
 \dots 40 \ 60'0 \qquad \qquad \qquad 40 \ 6 \\
 \quad 1 \ 16 \ 6 \qquad \qquad \qquad 11662 \ 8 \\
 \quad \quad 8 \qquad \qquad \qquad \quad 77 \ 7 \\
 \hline
 1'174 \text{ ali } 1'17 \dots \qquad \qquad 11740'5 \dots \text{ ali } 11741 \dots
 \end{array}$$

V popolnem številu 604 moremo mesta desetin, stotin, popolniti z ničlami, tedaj razvidimo, da moremo produkt zanesljivo izračunati le na jedno decimalko.

§ 101. 1. Decimalni ulomek razdelimo s potenco števila 10, ako pomaknemo decimalno točko za toliko mest proti levi, kolikor ima divizor ničel.

$$\frac{a}{10^m} : 10^n = \frac{a}{10^{m+n}}.$$

$$345'67 : 10 = 34'567, \quad 3'78 : 1000 = 0'00378.$$

2. Hočeš li decimalni ulomek razdeliti z decimalnim ulomkom, pripiši dividendu in divizorju toliko ničel, da imata jednako število decimalk, potem izpusti decimalno točko ter izvrši delitev kakor pri celih številih.

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a}{10^m} \cdot \frac{10^m}{b} = \frac{a}{b} = a : b.$$

$$3'1452 : 1'234 = 31452 : 12340 = 2'54878 \dots$$

Prav tako ravnaj, kadar je dividend ali divizor celo število.

Za praktično računanje pomni sebosno to-le:

$$\begin{array}{ll}
 17536 : 128 = 137, & 17536 : 12800 = 1'37, \\
 1753600 : 128 = 13700, & 17'536 : 128 = 0'137, \\
 17536 : 12'8 = 1370, & 1753'6 : 1'28 = 1370.
 \end{array}$$

(Dokaži pravost teh kvocijntov, uporabljajoč prejšnji izrek!)

Vrsta veljavnih števil v kvocijentu je zavisna, kakor kažejo navedeni primeri, jedino le od številčne vrste v dividendu in divizorju. Zaporedne kvocijntove številke dobimo, ako se v dividendu

in divizorju kar nič ne oziramo na decimalno točko, marveč izvršimo delitev kakor s celimi števili.

Mestno vrednost najvišje kvocijentove številke, katera določuje tudi mestno vrednost vseh drugih, določujemo tako-le:
 $17536 : 128 = 1 \dots$, govôri: 175 stotic : 128 jednic. = 1 stotica,
 $6'4379 : 2827 = 0'002$, govôri: 6437 tisočin : 2827 jednic. daje 2 tisočini.

Primerjajoč ta dva primera z nastopnima:

$$17536 : 129 = 1 \dots, \quad 6'4379 : 2828 = 0'002,$$

razvidimo, da za določitev mestne vrednosti nima nobenega pomena, če ima divizor razven celot tudi decimalke. Določujoč mestno vrednost najvišji kvocijentovi številki moraš torej paziti le na celote divizorjeve:

a) $17536 : 128'439 = 1 \dots$, govôri: 175 stotic : 128 jednic. daje stotice.

b) $6'4379 : 2827'3475 = 0'002$, govôri: 6437 tisočin : 2827 jednic. daje tisočine.

Kadar divizor nima nobenih celot, tedaj je prav umestno, da dividend in divizor pomnožimo s primerno potenco števila 10 ter decimalno točko premaknemo proti desni za toliko mest, da dobimo v divizorju jedno celo mesto. Potem pa določimo mestno vrednost najvišje kvocijentove številke prav tako, kakor pri prejšnjih primerih. Na pr.

c) $124'3 : 0'0045 = 124300 : 4'5 = 2 \dots$, govôri: 12 deset-tisočic : 4 jedn. daje 2 deset-tisočici.

d) $26'48 : 0'145 = 264'8 : 1'45 = 1 \dots$, govôri: 2 stotici : 1 jedn. daje 1 stotico.

Mestno vrednost najvišje kvocijentove številke lahko določiš, ne da bi premaknil decimalno točko, po tem-le pravilu:

Divizor misli si zapisan pod prvi delski dividend; prva številka v kvocijentu ima prav tisto vrednost, katero ima v dividendu številka, stoječa nad divizorjevimi jednicami. Na pr.

a) $\begin{array}{r} 175\ 36 : 128\ 439 = 1 \dots \\ 128\ 439 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} \hat{1} \dots 124\ 3 : 0'0045 = 2 \dots \\ 0'0045 \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 6\ 437\ 9 : 2827\ 3475 = 0'002 \\ 2\ 827\ 3475 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} \hat{1} \dots 26\ 48 : 0'145 = 1 \dots \\ 0'145 \end{array}$

Računajoč se prepričaj, da ima produkt vsake kvocijentove številke s katerokoli divizorjevo številko prav tisto mestno vrednost, kakor ona številka v dividendu, od katere je treba odšteti dotični delski produkt.

§ 102. Da določimo v kvocijentu dveh števil le toliko števil, kolikor jih je zanesljivih in da se ob jednom izognemo nepotrebnemu računanju, v to nam služi okrajšano deljenje (*abgekürzte Division*). Bistvo okrajšane delitve je to-le:

1. Najprej poišči prvo kvocijentovo številko in tej določi mestno vrednost (§ 101.). Iz mestne vrednosti prve kvocijentove številke in iz števila zahtevanih decimalk lahko določiš, koliko števil je treba izračunati v kvocijentu.

2. V divizorju odreži od leve proti desni toliko veljavnih števil, kolikor se jih zahteva v kvocijentu; te številke tvorijo okrajšani divizor. Ako divizor nima toliko števil, kolikor jih je treba odrezati, začni na okrajšani način še le tedaj deliti, ko si vzel vse številke okrajšanega dividenda v račun.

3. Tudi v dividendu pridrži le toliko najvišjih števil, kolikor se jih zahteva v kvocijentu, ali pa za jedno več, in to takrat, kadar prav toliko najvišjih števil nima v sebi okrajšanega divizorja. Številke, katere pridržiš, tvorijo okrajšani dividend.

4. Delitev okrajšanega dividenda z okrajšanim divizorjem prični na navadni način in jo nadaljuj, dokler nisi vzel v račun vseh števil okrajšanega dividenda; potem pa odreži pri vsaki poznejši delitvi najnižjo številko v divizorju, dokler jih je še kaj. Vsakikrat dobljeno kvocijentovo številko pomnoži najprej z najvišjo odrezano divizorjevo številko in prištej iz tega produkta dobljene najbližje desetice kot popravo produktu iz okrajšanega divizorja in dobljene kvocijentove številke.

5. Tako ravnaj, dokler ni v divizorju nobene številke več. Na pr.

$$\begin{array}{rcl}
 & 3 \text{ dec.} & 3 \text{ dec.} \\
 a) 876\,54,38 : 1,8\,9,5,7,9 = 46\,236... & b) 8\,91,25 : 9,4,75 = 0\,094... \\
 \begin{array}{r} 118\,22 \\ 4\,48 \\ 60 \\ 12 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{r} 39 \\ 1 \end{array} & \\
 & 4 \text{ dec.} & \\
 c) 48\,438,6 : 27,3 = 1\,7743 & & \\
 \begin{array}{r} 21\,13 \\ 2\,028 \\ 117 : 2,7,3 \\ 8 \end{array} & &
 \end{array}$$

V tretjem primeru se prične okrajšana delitev še le tedaj, ko smo vzeli že vse številke okrajšanega dividenda v račun.

Dostavek. Ako je dividend ali divizor nepopolno decimalno število, dobimo v kvocijentu le toliko zanesljivo veljavnih števil, kolikor si jih vzajemno ustreza v dividendu in divizorju. Na pr.

$$a) 13\ 84 \dots : 5\ 3842 = 25\ 7 \dots \quad b) 28\ 4 : 5\ 349 \dots = 5\ 309 \dots$$

$$\begin{array}{r} 5\ 384\ 2 \\ \hline 3\ 0\ 7 \\ 3\ 8 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5\ 349 \dots \\ \hline 6\ 5\ 5 \\ 5\ 0 \\ 2 \end{array}$$

Popolnemu decimalnemu ulomku pristavimo labko na desni katerokoli število ničel; a pri okrajšanem decimalnem ulomku kaj takega nikakor ne smemo storiti.

Naloge.

Pretvori te-le navadne ulomke na decimalne:

$$1. a) \frac{2}{5}; b) \frac{17}{25}; c) \frac{39}{80}; d) \frac{57}{125}; e) \frac{2346}{625}; f) \frac{107}{32}.$$

$$2. a) \frac{5}{6}; b) \frac{43}{9}; c) \frac{36}{11}; d) \frac{25}{37}; e) \frac{1043}{41}; f) \frac{312}{13}.$$

$$3. a) \frac{7}{12}; b) \frac{214}{55}; c) \frac{113}{74}; d) \frac{31}{36}; e) \frac{108}{275}; f) \frac{933}{1640}.$$

4. Pretvori te-le končne decimalne ulomke na navadne: a) 0.25, b) 0.75, c) 3.072, d) 5.725, e) 0.0024, f) 8.0875.

5. Pretvori te-le čisto perijodične decimalne ulomke na navadne: a) 0.6, b) 5.4, c) 0.21, d) 6.06, e) 4.243, f) 0.4378.

6. Pretvori te-le mešano perijodične decimalne ulomke na navadne: a) 0.26, b) 2.351, c) 4.413, d) 0.1245, e) 0.79324.

$$7. 32\ 38 + 43\ 49 + 21\ 27 + 78\ 04 + 49\ 83.$$

Seštej te-le decimalne ulomke najprej v vertikalni, potem v horizontalni meri:

$$\begin{array}{l} a) \quad b) \quad c) \quad d) \quad e) \quad f) \\ 8. 19\ 78 + 35\ 096 + 8\ 71295 + 0\ 2087 + 4\ 178063 + 15\ 892; \\ 9. 37\ 09 + 18\ 388 + 2\ 34966 + 0\ 2897 + 3\ 047585 + 74\ 418; \\ 10. 5\ 35 + 56\ 905 + 7\ 58506 + 0\ 5375 + 7\ 493203 + 9\ 005; \\ 11. 10\ 93 + 68\ 227 + 3\ 08751 + 0\ 1884 + 0\ 479728 + 56\ 793. \end{array}$$

12. Okrajšaj decimalne ulomke pod *e)* na 2, (3, 4) decimalke in poišči vsoto okrajšanih števil.

13. $5\cdot273 \dots$	14. $0\cdot7619$	15. $13\cdot58 \dots$	16. $23\cdot3182 \dots$
$0\cdot689 \dots$	$0\cdot7988$	$6\cdot376$	$9\cdot30 \dots$
$5\cdot035 \dots$	$0\cdot522 \dots$	$42\cdot0457$	$0\cdot2649$
$4\cdot621 \dots$	$0\cdot8098$	$86\cdot93 \dots$	$68\cdot16804$

17. $83\cdot8 - 25\cdot4.$

18. $57\cdot16 - 9\cdot58.$

19. $3\cdot407 - 0\cdot562.$

20. $62\cdot027 - 29\cdot28.$

21. $17\cdot6 - 9\cdot374.$

22. $1 - 0\cdot4736.$

23. $257\cdot328 - 138.$

24. $85 - 46\cdot55037.$

25. Od $721\cdot092 \dots$ odštej

a) $248 \dots$, *b)* $93\cdot7 \dots$, *c)* $304\cdot54 \dots$, *d)* $58\cdot709 \dots$, *e)* $2\cdot8765 \dots$

26. Izračuni $A = a + b + c$, $B = a + b - c$,

$C = a - b + c$, $D = b + c - a$.

za $a = 23\cdot4567$, $b = 39\cdot0703$, $c = 51\cdot809$.

27. Če vzamemo, da preleti prosto padajoče telo v prvi sekundi svojega padanja $4\cdot904\text{ m}$ in v vsaki naslednji sekundi za $9\cdot808\text{ m}$ več nego v prejšnji; koliko m preleti *a)* v drugi, tretji in četrti sekundi, *b)* v prvih štirih sekundah?

28. Dolžina nihala, katero nihne vsako sekundo po jedenkrat, znaša na tečajniku $996\cdot088\text{ mm}$, na ravniku $990\cdot891\text{ mm}$; kolika je razlika obeh dolžin?

29. $1\text{ km} = 0\cdot131823$ avstr. milje; koliko avstr. milj ima 10, 100, 1000 km ?

30. Pomnoži *a)* $24\cdot27$, *b)* $336\cdot18$, *c)* $0\cdot27309$ s 3, 4, 5, 8, 9.

31. $3\cdot147 \cdot 23.$

32. $55\cdot64 \cdot 9\cdot3.$

33. $7\cdot928 \cdot 0\cdot6.$

34. $9\cdot7084 \cdot 0\cdot925.$

35. $37\cdot1774 \cdot 54\cdot907.$

36. $0\cdot82745 \cdot 0\cdot0798.$

37. Razdalja med mesecem in zemljo je $58\cdot525$ krat toliko kakor polimer zemljinega ravnika; kolika je ta razdalja, če vzamemo, da ima ravnikov polimer $859\cdot44$ zemljepis. milj?

Izračuni množec na okrajšani način:

38. $3\cdot1415 \cdot 9\cdot2587.$ (3 dec.)

39. $0\cdot9156 \cdot 23\cdot851.$ (2 dec.)

40. $12\cdot0748 \cdot 1\cdot91345.$ (4 dec.)

41. $81\cdot2867 \cdot 0\cdot1234.$ (3 dec.)

24. Juli 1900

42. $5.376079.8058876$. (5 dec.) 43. $86.43 \dots \times 0.503 \dots$
 44. $9.4152 \dots \times 120 \dots$ 45. $143.57 \dots \times 140.2 \dots$
 46. $80.3 \times 1.045 \dots \times 19.062 \dots$

47. $8.14793.710936.251446$. (4 dec.)

48. $1.045.1.045.1.045.1.045$. (6 dec.)

49. Določi $p = (a + b - c) (a - b + c) (b + c - a)$
 za $a = 1.3078 \dots$, $b = 2.0912 \dots$, $c = 2.801 \dots$

50. Razdeli a) 327.4 , b) 58.06 , c) 0.23 , z 10, 100, 1000.

51. $38.4 : 4$. 52. $0.675 : 17$. 53. $7.74772 : 109$.

54. $268.8 : 32$. 55. $0.3197 : 27.8$. 56. $4735.02 : 0.53$.

57. $71.541 : 0.9$. 58. $0.5976 : 0.083$. 59. $65.0448 : 0.0024$.

60. Zemlja preteče, vrteč se okoli solnca, v 1 uri 14787.68 zemljepis. milj; koliko a) v 1 minuti, b) v 1 sekundi?

Izračuni deléč na okrajšani način:

61. $45.12345 : 3.8265$. (3 dec.) 62. $986.256 : 127.85$. (2 dec.)

63. $13.794 : 28.376$. (4 dec.) 64. $0.7123 : 43.566$. (4 dec.)

65. $754.06 : 0.649$. (2 dec.) 66. $3.1416 : 7.825$. (3 dec.)

67. $1 \text{ kg} = 1.785523 \dots$ dunajskega funta; koliko kg ima 1 dun. funt?

68. $18.439 \dots : 4.80 \dots$ 69. $156 : 14.732 \dots$

70. $9.7354 : 8.715 \dots$ 71. $156.2 \dots : 4.98765$.

III. Naloge v ponavljanje.

*1. Koliko velja 45 kg po 20 h? ($20 \text{ h} = \frac{1}{5} \text{ K}$).

*2. Koliko velja 64 l , ako velja 1 l a) 10 h, b) 20 h, c) 25 h, d) 50 h?

*3. Koliko velja 48 m po 30 h? ($30 \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ K} + \frac{1}{20} \text{ K}$).

*4. Koliko velja 127 kosov, če velja 1 kos a) 15 h, b) 24 h, c) 35 h, d) 60 h, e) 75 h?

*5. Pretvori te-le navadne ulomke na decimalne: a) $\frac{9}{16}$, b) $\frac{11}{125}$, c) $\frac{7}{21}$, d) $\frac{43}{75}$, e) $\frac{69}{22}$, f) $\frac{462}{591}$.

6. $(59.302 - 27.8775) . 3.32$.

7. $8.137526 . 3.044891 . 7.628573$. (5 dec.)

8. $68.0124152 : 7.961$.

9. $0.0552861 : 0.423$.

$$10. \frac{17x+12y}{x+y} - \frac{3x-7y}{x+y} + \frac{2x-3y}{x+y}.$$

$$11. \frac{8m^3x}{5n^2y} \cdot \frac{ny}{4mx}.$$

$$12. \frac{4x^2y^2}{3b^2} : \frac{5a^2y^2}{3x^2}.$$

13. Poišči najv. skupno mero od

a) 11467 in 16031;

b) 2370, 56485 in 47005.

*14. Pomnoži a) 45 b) 98, c) $16\frac{1}{2}$ s 50. ($50 = \frac{100}{2}$).

*15. Pomnoži a) 36, b) 48, c) 120 z $12\frac{1}{2}$ ($12\frac{1}{2} = \frac{100}{8}$).

*16. Pomnoži a) 24, b) 81, c) 135 s $33\frac{1}{3}$ ($33\frac{1}{3} = \frac{100}{3}$).

$$17. (a^4 - a^3y + ay^3 - y^4) (a^2 + ay + y^2).$$

$$18. (5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 2x + 7) (6x^2 + 4x - 7).$$

$$19. (16a^4 - 8a^2b^2 - b^4) : (4a^2 - 4ab + b^2).$$

$$20. (6x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 11x - 4) : (2x^2 - 3x + 4).$$

$$21. 29607 : 1202\frac{55}{128}.$$

$$22. 16\frac{13}{121} \times 9\frac{85}{117}.$$

$$23. \frac{22:594}{7:395} + \frac{18:597 - 12:6584}{0:325} - \frac{10:8724 \cdot 0:368}{2:45}.$$

*24. Trgovec je imel kos sukna; od tega je prodal $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, in $\frac{1}{10}$, ostalo pa mu je še 9 m. Koliko m sukna je bilo?

*25. Koliko velja

a) 28 l po 48 h?

b) 16 m po 3 K 35 h?

*26. $1\frac{3}{4}$ kg velja 2 K 24 h; po čem je 1 kg?

*27. $2\frac{1}{2}$ m velja $7\frac{1}{2}$ K; po čem je 1 m?

*28. Kolik je najmanjši skupni mnogokratnik od a) 6 in 15? b) 12 in 18? c) 16 in 24? d) 20 in 25?

29. Poišči najm. sk. mnogokratnik od:

a) 4, 5, 10, 12, 15, 36;

b) 2, 5, 8, 11, 15, 21, 72.

$$30. a + b - \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

$$31. x^2 - y^2 - \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2 + y^2}.$$

$$32. \left(\frac{2a^2}{9} - \frac{ax}{12} - \frac{3x^2}{16} \right) : \left(\frac{2a}{3} - \frac{3x}{4} \right).$$

33. Za koliko se poveča ali zmanjša ulomek $\frac{35}{36}$, a) ako števcu in imenovalcu prišteješ 1, b) ako od števca in imenovalca odšteješ 1?

$$34. \frac{17}{36} + \frac{38}{45} + \frac{47}{60} + \frac{73}{80}.$$

$$35. \frac{11}{40} + \frac{41}{45} + \frac{37}{72} + \frac{22}{75}.$$

*36. $\frac{3}{4} m$ veljajo 3 K 36 h; koliko velja 1 m?

37. Pretvori te-le perijodične decimalne ulomke na navadne:

a) 0·36, b) 0·03, c) 4·3527, d) 6·513, e) 0·67954.

Izračuni na okrajšani način na 3 decimalke:

$$38. 0\cdot79596\cdot73\cdot804.$$

$$39. 256\cdot8735\cdot0\cdot09276.$$

$$40. 5\cdot72876:0\cdot0275.$$

$$41. 242\cdot87:17\cdot384.$$

42. A porabi od svojih letnih dohodkov $\frac{2}{3}$ za hrano in obleko, $\frac{1}{8}$ za stanovanje, kurjavo in razsvetljavo, $\frac{1}{12}$ za druge potreščine in si poleg tega prihrani še 349 K 25 h. Koliko ima dohodkov?

$$43. \frac{a+1}{a-1} + \frac{a+2}{a-2} + \frac{a+3}{a-3}.$$

$$44. 9\cdot084 \dots \times 135\cdot8 \dots$$

$$45. 0\cdot83 \dots \times 0\cdot0705$$

$$46. 6\cdot43 \dots \times 7\cdot83 \dots \times 9\cdot714 \dots$$

$$47. 136\cdot4 \dots : 287\cdot35 \dots$$

$$48. 17\cdot314 \dots : 120$$

$$49. 240:5\cdot9437 \dots$$

50. 1 marka = 1·1756 ... K. a) Koliko kron je 250·6 mark? b) Koliko mark dobiš za 140·7 K?



Tretji oddelek.

Jednačbe prve stopinje z jedno neznanko.

§ 103. Izjednačitev dveh številnih izrazov, katera imata isto vrednost, imenujemo *jednačbo* (*Gleichung*). Na pr.

$$x = x, \quad (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4, \quad 7x - 6 = 5x.$$

Izraza na obeh straneh jednačaja imenujemo *jednačbina dela*; vsakteri ima lahko zopet po več členov. Na pr. V jednačbi $7x - 6 = 5x$ je $7x - 6$ prvi, $5x$ drugi del; prvi del ima člena $7x$ in -6 .

Jednačbe so dvoje: *identične* in *določilne* jednačbe.

Identična ali *istovna* (*identisch*) jednačba ostane veljavna za vsako vrednost, katero damo njenim še nedoločenim (občnim) količinam. To svojstvo imata jednačbi $x = x$ in $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$, kateri ostaneta pravi, naj si damo količini x katerokoli vrednost. Vsaka formula, izražajoča katerokoli aritmetično operacijo, je taka identična jednačba.

Določilne jednačbe (*Bestimmungsgleichungen*) so pa one, katere ne ostanejo veljavne za vse, marveč le za določene vrednosti svojih občnih števil, neznank. Jednačba $7x - 6 = 5x$ je določilna jednačba, kajti nji zadošča le vrednost $x = 3$. Vsaka določilna jednačba izraža pogoj, kateremu morajo zadoščati njena neznana števila.

Vrednosti neznanke, katere zadoščajo določilni jednačbi, imenujemo *korene* (*Wurzeln*) te jednačbe. Tako je 3 koren jednačbe $7x - 6 = 5x$, kajti ako postavimo v jednačbo za x to število, zadošča ji popolnem.

Jednačbi korene določiti, se pravi *jednačbo razrešiti*.

Po številu neznank, nahajajočih se v jednačbi, razločujemo jednačbe z *jedno*, z *dvema* in *več* neznankami. Na pr. $7x - 3 = 4x$ je jednačba z *jedno*, $5x - 3y = 8$ jednačba z *dvema*, $7x = 3y - 5z + 5$ jednačba s *tremi* neznankami.

Jednačbo, katera nima neznank v višjih potencah kakor v prvi in tudi ne produkta iz več neznank, imenujemo *jednačbo prve stopinje* (*ersten Grades*). Jednačba, katera ima poleg neznank sama posebna števila, je *številčna jednačba* (*numerische oder Ziffergleichung*); na pr. $7x - 6 = 5x$, dočim zovemo *jednačbo*, imajočo poleg neznank tudi še občna števila, *črkovno jednačbo* (*Buchstabengleichung*); na pr. $ax - b = cx + d$.

I. Razreševanje jednačeb prve stopinje z jedno neznanko.

§ 104. Jednačbe prve stopinje razrešujemo opirajoč se na osnovno resnico (§ 7., 5.):

Jednako na enak način izpremenjeno dá zopet jednako.

Iz te občne osnovne resnice izvajamo te-le posebne reke:

- a) Jednako jednakemu prišteto da jednake vsote.
- b) Jednako od jednakega odšteto da jednake difference.
- c) Jednako z enakim pomnoženo da jednake produkte.

d) Jednako z enakim razdeljeno dá jednake kvocijente.

Iz teh rekov izvira:

1. Vsak jednačbin člen moremo iz jednega dela z nasprotnim predznakom prenesti (*transponieren*) v drugi del. Na pr.

$$\text{Iz } 3x = 16 - 5x \text{ dobimo } 3x + 5x = 16;$$

$$\text{„ } x + 3 = 8 \text{ „ } x = 8 - 3.$$

V prvi jednačbi smo vsakemu delu prišteli $5x$, v drugi pa od obeh delov odšteli 3.

Jednake člene v obeh delih lahko kar izpustimo. Na pr.

$$\text{Iz } 5x - 3 = 6 + 3x - 3 \text{ dobimo } 5x = 6 + 3x.$$

2. Iz vsake jednačbe moremo ulomke odpraviti; v ta namen treba le oba jednačbina dela pomnožiti s skupnim mnogokratnikom vseh imenovalcev. Na pr.

$$\text{Iz } \frac{x}{4} - 1 = 2 \text{ dobimo } x - 4 = 8.$$

$$\text{Iz } \frac{2x}{3} = \frac{5x}{2} - 11 \text{ „ } 4x = 15x - 66.$$

3. Vsak faktor jednega dela lahko prenesemo kot divizor v drugi del. Na pr.

$$\text{Iz } 7x = 35 \text{ dobimo } x = \frac{35}{7} \text{ ali } x = 5.$$

§ 105. Iz rekov v § 104. izvajamo za razreševanje jednačeb prve stopinje z jedno neznanko to-le navodilo:

1. Ako ima jednačba ulomke, odpravi jih; v ta namen pomnoži oba dela jednačbe ali zaporedoma z vsakim imenovalcem posebej ali pa kar z najmanjšim skupnim mnogokratnikom vseh imenovalcev. (Odprava ulomkov.)

2. Ako so v jednačbi sestavljeni, z oklepaji združeni izrazi, izvrši vse one račune, katere oklepaji le nakazujejo. (Razrešitev oklepajev.)

3. Vse člene, ki imajo neznanke, prenesi v prvi del ter jih skrči; znane člene pa prenesi v drugi del ter jih tudi skrči. (Prenos in krčitev.)

4. Neznanko oprosti koeficijenta; v ta namen razdeli ž njim oba dela jednačbe. (Delitev z neznankinim koeficijentom.)

Hočeš li se prepričati, ali si jednačbo prav razrešil, zameni neznanko v dani jednačbi z najdeno nje vrednostjo ter skrči izraza na obeh straneh. Ako dobiš na obeh straneh isti rezultat, t. j. ako se izpremeni jednačba v identično, razrešil si jo prav, sicer pa ne.

Primeri.

1. $4x + 5 = 17.$

Razrešitev: $4x = 17 - 5$

$$4x = 12$$

$$x = 3.$$

Preskušnja: $4 \cdot 3 + 5 = 17$

$$12 + 5 = 17$$

$$17 = 17$$

2. $\frac{x}{5} = 2x - 36.$

Razreš.: $x = 10x - 180$

$$x - 10x = -180$$

$$-9x = -180$$

$$x = 20.$$

Preskušnja: $\frac{20}{5} = 2 \cdot 20 - 36$

$$4 = 40 - 36$$

$$4 = 4.$$

3. $6(2x - 5) = 5x + 12.$

Razreš.: $12x - 30 = 5x + 12$

$$12x - 5x = 12 + 30$$

$$7x = 42$$

$$x = 6.$$

Preskušnja: $6 \cdot (2 \cdot 6 - 5) = 5 \cdot 6 + 12$

$$6 \cdot (12 - 5) = 30 + 12$$

$$6 \cdot 7 = 42$$

$$42 = 42.$$

Naloge.

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 1. $5x + 4 = 19.$ | 2. $3x - 4 = 20.$ |
| 3. $70 - 3x = 40.$ | 4. $42x - 35 = 75.$ |
| 5. $92 - 27y = 11.$ | 6. $29 = 6z - 13.$ |
| 7. $7x + 8 = 5x + 18.$ | 8. $17 + 8x = 71 - x.$ |
| 9. $39x - 168 = 24x + 42.$ | 10. $5y - 60 = 324 - 19y.$ |
| 11. $5z - 40 = 8z - 73.$ | 12. $47x - 155 = 35x - 25.$ |
| 13. $2x + 2 = 2x - 3 + 5x.$ | 14. $14y - 23 + 17y = 24y + 109.$ |
| 15. $2x - 11 + 2x - 5x + 7 = 7x - 7.$ | |
| 16. $155 - 3x - 27 = 35 - 17x + 138 - 13x.$ | |
| 17. $a + x = b.$ | 18. $a - x = b.$ |
| 19. $ax + b = c.$ | 20. $ax - b = cx - d.$ |
| 21. $3a - 4x = 9a + 6b - 6x.$ | 22. $2a - 5y + b = 4y.$ |
| 23. $a^2x + ax - abx = a - b + 1.$ | |
| 24. $6ax - 7ac + 3ax - 5ab = 2ax + 2ab.$ | |
-

- | | |
|--|-------------------------------|
| 25. $7(x - 5) = 35 + 7.$ | 26. $5(3 + x) + 16 = 61.$ |
| 27. $20 - (y - 4) = 2y.$ | 28. $9(2x - 7) = 5(4x - 15).$ |
| 29. $2(x - 7) = 3(8 - x) + 22.$ | |
| 30. $3(7 - 8z) + 7(4z - 3) = 1.$ | |
| 31. $8x + 5(2x - 1) = 2(x + 4) - 5.$ | |
| 32. $2(2x - 19) + 3(x - 3) = 2(x - 1).$ | |
| 33. $22(x + 1) - 8(x + 7) = 5(x + 5) - 32.$ | |
| 34. $3(5 + x) - 2(x + 6) = 3(2x + 9) - 9(4 + x).$ | |
| 35. $12(3x - 7) - 3(2x + 28) = 15(16 - 2x) + 4(18 - 5x).$ | |
| 36. $(x - 1)(x + 1) = x^2 + x + 1.$ | |
| 37. $(5 + x)(4 - x) = (3 - x)(x + 2) + 22.$ | |
| 38. $2\{3(3y - 4) - 8\} + (11y - 15) = 2(5 - 2y).$ | |
| 39. $5\{3 + (2x - 7)\} - 7(x + 5) + 1 = 3\{4(3 - x) - x\} - 60.$ | |

$$40. a(x-b) = b(a-x) - c. \quad 41. p(y-q) + q(y+p) = m.$$

$$42. m(x-a) - n(x-b) = (a+b)x.$$

$$43. 2a(a-x) + (a-b)x = a^2 + b^2.$$

$$44. z(z-2a) - (b-z)^2 = 3b^2 - 4a^2.$$

$$45. \frac{2x}{3} = 25 - x.$$

$$46. \frac{3-4x}{7} + 3 = 4x.$$

$$47. \frac{x}{4} + 17 = \frac{x}{5} + 18.$$

$$48. \frac{y}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{6}.$$

$$49. 7 = \frac{5}{6}x - 3.$$

$$50. \frac{1}{4}x - 4 = \frac{2}{9}x - 3.$$

$$51. 2x - \frac{3x}{5} = 3(x-2).$$

$$52. \frac{2z}{3} + \frac{z}{5} = z - 2.$$

$$53. \frac{6+x}{6-x} = 2.$$

$$54. \frac{1}{1-x} = \frac{3}{x}.$$

$$55. \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13.$$

$$56. \frac{z}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{4} = z + 1.$$

$$57. \frac{30}{y} + \frac{81}{2y} = 4 + \frac{7}{10}.$$

$$58. \frac{25}{x} - \frac{2(5-x)}{x} = 3.$$

$$59. \frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{9} = 2.$$

$$60. \frac{y+7}{5} - 1 = \frac{9-y}{14}.$$

$$61. \frac{3z+5}{4} - 9 = \frac{2z-1}{3} - 7.$$

$$62. \frac{x-5}{3} + \frac{x+1}{4} = \frac{7x-2}{15}.$$

$$63. \frac{13-x}{16-x} = \frac{3}{4}.$$

$$64. \frac{x+9}{x-3} = \frac{x+5}{x-5}.$$

$$65. \frac{10x+1}{5x-8} = \frac{6x+3}{3x-4}.$$

$$66. \frac{4}{x+3} + \frac{2}{x-3} = \frac{5x-1}{x^2-9}.$$

$$67. \frac{10y+1}{3(y+1)} - 1 = \frac{3y-2}{y+1}.$$

$$68. \frac{4}{x-8} - \frac{3}{x-7} = \frac{1}{x-9}.$$

$$69. \frac{1}{5}(x+4) = 1.$$

$$70. \frac{2}{3}\left(\frac{x}{4} - 5\right) = \frac{x}{8} - 2\frac{1}{3}.$$

$$71. \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4}(x+3) + 2\right\} + 1\right] = 1.$$

$$72. \frac{x+2}{3} - \frac{4x+5}{6} = x+2 - \frac{7x-8}{9}.$$

$$73. \frac{y}{2} + \frac{y+1}{3} + \frac{y-2}{4} = \frac{2y}{11} - \frac{2-3y}{4} - 3.$$

$$74. \frac{2x-13}{2(x-8)} + \frac{2x-12}{x-8} = \frac{29}{24} - \frac{70-9x}{3(x-8)}.$$

$$75. \frac{x-a}{b} = \frac{x-b}{a}.$$

$$76. \frac{x}{a} - b = \frac{x}{b} - a.$$

$$77. \frac{a-bx}{c} = \frac{m-nx}{p}.$$

$$78. \frac{a}{y} + c = \frac{a(b+c)}{by}.$$

$$79. \frac{a-b}{x} + 1 = \frac{a+x}{x} - \frac{b(a-b)}{a+b}.$$

$$80. \frac{a+b}{a-b} \cdot x = \frac{b-a}{a+b} \cdot x + \frac{a^2+b^2}{2}.$$

$$81. \left\{ 1 + \frac{a-b}{a+b} \right\} x - 1 = \left\{ \frac{a+b}{a-b} - 1 \right\} x.$$

II. Uporaba jednačeb.

§ 106. V vsaki nalogi se stavijo neki pogoji, katerim morajo zadoščati števila, katera iščemo. Kadar moremo pogoje, veljavne za neznana števila, izraziti z algebrajskimi znaki, tedaj lahko določimo te neznanke, če razrešimo dotično jednačbo.

Uporabljajoč jednačbe v razreševanje takih nalog treba paziti na dve stvari:

1. Da jednačbe sestavimo, t. j. da izrazimo dane pogoje z algebrajskimi znaki;

2. Da tako dobljene jednačbe razrešimo.

Kako naj jednačbe sestavljamo, za to nimamo splošnih pravil; za to je treba bistrornosti in mnogotere vaje. Začetnikom utegne stvar vsaj nekoliko zlajšati to-le pravilo:

Dano nalogo si misli razrešeno in z neznanko ravnaj, kakor to zahtevajo pogoji naloge; tako dobiš za jedno in isto količino dva po obliki različna izraza. Ako ta izraza izjednačiš, dobiš zahtevano jednačbo.

Bolj jednostavne naloge moreš, ne da bi sestavljal posebne jednačbe, razrešiti tudi kar na pamet s samim umovanjem.

Da se prepričaš, je li naloga prav razrešena, preišči, ali najdena vrednost neznanke tudi res zadošča pogojem naloge.

Primeri.

1. Katerega števila 5ina je za 52 manjša nego število samo?

Na pamet. Razlika med katerimkoli številom in njega petino je $\frac{4}{5}$. Ako je torej ta razlika, t. j. $\frac{4}{5}$ iskanega števila, jednaka 52, potem je njega petina 13, in število samo 5krat 13, t. j. 65.

Pismeno. Ako zaznamimo neznano število z x , potem je njega petina $\frac{x}{5}$. Ker pa je $\frac{x}{5}$ za 52 manjši od x , treba, da postaneta jednaka, $\frac{x}{5}$ prišteti še 52; torej dobimo

$$\frac{x}{5} + 52 = x.$$

Razrešivši to jednačbo dobimo $x = 65$.

Preskušnja. $\frac{1}{5}$ od 65 je 13; $65 - 13 = 52$.

2. Gospodar obljubi svojemu služabniku kot letno plačilo 180 K in obleko; a po 3 mesecih ga odpusti ter mu da le obleko za plačilo. Za koliko je gospodar zaračunil obleko?

Na pamet. Ako dobi služabnik za 3 mesece, t. j. $\frac{1}{4}$ leta obleko za plačilo, dobiti bi moral za ostale $\frac{3}{4}$ leta še 180 K, torej za $\frac{1}{4}$ leta 60 K. Ker pa dobi za ta čas obleko, zaračunila se mu je za 60 K.

Pismeno. Vzemimo, da ima obleka vrednost x K. Plačilo na vse leto znaša potem $(x + 180)$ K, torej za 3 mesece $\frac{x + 180}{4}$ K; ker je pa dobil služabnik za ta čas le obleko, ki je vredna x K, mora biti

$$x = \frac{x + 180}{4},$$

torej $x = 60$ K.

3. Nekdo odgovori, ko so ga vprašali za njegovo starost: Čez 10 let bom imel 2krat toliko let, kolikor sem jih imel pred 4 leti. Koliko let ima?

Vzemimo, da ima x let, potem

jih bode imel čez 10 let $(x + 10)$,

a pred 4 leti jih je imel $(x - 4)$.

Ker je po pogojih naloge prvo število 2krat večje od drugega, treba, da dobimo enačbo, drugo število pomnožiti z 2; tedaj je

$$x + 10 = 2(x - 4),$$

in zato $x = 18$.

4. Oče je 48, sin pa 18 let star. Čez koliko let bode oče 4krat toliko star kakor sin?

Recimo čez x let. Čez toliko let bode oče $(48 + x)$, sin pa $(18 + x)$ let star, in ker je po pogojih naloge starost očetova 4krat toliko kakor sinova, dobimo

$$48 + x = 4(18 + x),$$

in iz te enačbe $x = -8$.

Za neznanko x dobimo tu negativno vrednost. Ker smo rekli, da pomeni x v tej nalogi prihodnja leta, pomeniti mora za x dobljena negativna vrednost leta v nasprotnem zmislu (§ 54.), torej 8 preteklih let. t. j. oče je bil pred 8 leti 4krat toliko star kakor sin.

5. Neki vodnjak napolni jedna cev v 3, druga v 4 urah. V koliko urah se napolni vodnjak, ako sta zajedno odprti obe cevi?

Recimo, da pomeni x iskano število in p vodnjakovo prostornino.

Prva cev napolni v 1 uri $\frac{p}{3}$, v x urah $\frac{px}{3}$;

druga „ „ „ 1 „ $\frac{p}{4}$, v x „ $\frac{px}{4}$; obe napolnita torej

v x urah $\frac{px}{3} + \frac{px}{4}$.

Ker pa je ta vsota jednaka vodnjakovi prostornini, dobimo

$$\frac{px}{3} + \frac{px}{4} = p \text{ ali } \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

in iz te enačbe $x = 1\frac{5}{7}$.

6. Za slom (kurirjem), kateri je odpotoval iz nekega kraja pred 2 dnevoma, in kateri prehodi na dan 49 km, odpošlje se iz istega kraja drug sel, ki prehodi na dan 77 km. V koliko dneh dobiti drugi sel prvega?

Na pamet. Prvi sel je dva dni prej odpotoval nego drugi ter v tem času naredil pot 2krat 49 = 98 km. Ker prehodi drugi sel vsak dan 77 km, torej za 28 km več kakor prvi, zmanjša se razdalja med njima vsak dan za 28 km, torej postane čez $\frac{98}{28} = 3\frac{1}{2}$ dneva jednaka ničli, t. j. drugi sel dobiti prvega čez $3\frac{1}{2}$ dneva.

Pismeno. Recimo, da dohiti drugi sel prvega v x dneh. Da se snideta, potuje prvi $(2 + x)$, drugi x dnij; prvi naredi v tem času pot $49(2 + x)$ km, drugi $77x$ km. Te poti pa sta jednaki; zato dobimo

$$49(2 + x) = 77x,$$

in $x = 3\frac{1}{2}$ dneva.

N a l o g e.

Z zvezdico (*) zaznamovane naloge razreši na pamet in tudi pismeno.

*1. 5kratnik nekega števila, povečan za 23, je enak 88. Katero število je to?

*2. Kateremu številu moraš prišteti 54, da dobiš njega 4kratnik?

*3. Katerega števila 3kratnik je za 42 manjši nego njegov 5kratnik?

*4. Ako pomnožim neko število s 3, dobim prav toliko, kakor če mu 3 prištejem; katero je to število?

5. Ako prišteješ m kratniku nekega števila število a , dobiš prav toliko, kakor če odšteješ od njegovega n kratnika število b . Katero število je to?

*6. Katerega števila četrtno moraš zmanjšati za 12, da dobiš njega 12ino?

*7. Ako vzamem 5ino nekega števila 8krat, dobim za 6 večje število, nego je število samo. Katero število je to?

*8. Polovica in petina nekega števila sta skupaj za 86 manjši nego njega 5kratnik. Koliko je to število?

*9. Ako zmanjšam osmino nekega števila za njega desetino, dobim ravno toliko, kakor če zmanjšam petnajstino istega števila za 5. Koliko je to število?

*10. Kateremu številu moraš prišteti njega polovico, tretjino in četrtno, da dobiš 100?

11. Ako prištejem nekemu številu število a ter vsoto razdelim z m , dobim prav toliko, kakor če od istega števila odštejem b ter diferenco razdelim z n . Katero število je to?

12. S katerim številom treba 230 razdeliti, da dobiš 13 za kvocijent in 9 za ostanek?

13. Mislim si neko število. Ako je pomnožim s 5, od produkta odštejem 6, diferenco razdelim s 3 in kvocijentu prištejem 10, dobim dvakrat toliko število. Katero število sem si mislil?

14. Ako tretjini nekega števila prištejem 1 in od dvakratne vsote odštejem 6, dobim ničlo. Katero je to število?

15. Katero število je treba odšteti od števil 19 in 11, da je prva diferenca dvakrat toliko kakor druga?

16. Katero število moraš prišteti števcu in imenovalcu ulomka $\frac{13}{18}$, da dobiš ulomek $\frac{4}{5}$?

17. Katero število moraš odšteti od števca in imenovalca ulomka $\frac{17}{32}$, da dobiš ulomek $\frac{4}{9}$?

18. Katero število moraš prišteti števcu ulomka $\frac{a}{b}$ in odšteti od njegovega imenovalca, da dobiš recipročno vrednost danega ulomka?

19. Ako odšteješ od števca in imenovalca ulomka $\frac{15}{16}$ neko število, tedaj je produkt iz danega in novega ulomka enak $\frac{5}{6}$. Katero je to število?

20. Ako prišteješ nekemu številu njega polovico in 6, tej vsoti zopet nje polovico in 6, dobiš 69. Poišči to število.

***21.** Ko sem zmanjšal neko število za njega polovico in še za 15, ostanek pa zopet za njega tretjino in še za 10, ostalo je 30. Koliko je bilo to število?

Na pamet. Ker sem odštel naposled tretjino ostanka in 10, ostali sta še dve tretjini menj 10; torej je $30 + 10$ ali 40 jednako $\frac{2}{3}$ prvega ostanka; ako pa sta $\frac{2}{3}$ ostanka = 40, potem je $\frac{1}{3}$ njegova = 20 in ves prvi ostanek 3krat 20 = 60. Ker je pa ta za 15 manjši nego polovica neznanega števila, mora $60 + 15$ ali 75 biti polovica tega števila in število samo 2krat 75 = 150.

***22.** A ima 315 K, B 205 K; koliko mora A dati B-ju, da bodeta imela oba jednako?

23. Ko bi imel 20 K več, nego imam, imel bi ravno 5 K manj nego dvakrat toliko, kolikor imam. Koliko imam denarja?

24. Od blaga, katero je tehtalo 320 kg, prodalo se je nekaj, ostalo pa je še 50 kg več, nego se ga je prodalo. Koliko kg se je prodalo?

***25.** Deček je imel 60 orehov. Nekaj jih je dal svojemu tovarišu, njemu pa je ostalo še 4krat toliko, kolikor jih je oddal. Koliko orehov je dal tovarišu?

***26.** Nekdo uporabi od svojih letnih dohodkov polovico za hrano in stanovanje, $\frac{1}{8}$ za obleko in perilo, $\frac{1}{5}$ za druge manjše potrebščine, 280 K pa si prihrani. Koliko ima dohodkov na leto?

27. Potnika so vprašali, koliko *km* je neki prehodil; a on odgovori: Ko bi bil prehodil še 48 *km*, prišel bi bil 3krat tako daleč, kakor sedaj? Koliko *km* je potnik prehodil?

***28.** Nekdo si je hotel za določeno vsoto denarja kupiti vina in sicer steklenico po 180 h; ker je pa steklenica veljala le 140 h, dobil je za svoj denar 8 steklenic več. Koliko steklenic je dobil?

***29.** Neki učitelj odgovori na vprašanje, koliko ima učencev: „Polovica mojih učencev je za 16 večja nego šestina in devetina.“ Koliko učencev ima učitelj?

30. Neki oče je 32 let, njegov sin pa 2 leti star; čez koliko let bode oče 3krat toliko star kakor sin?

31. Nekdo je 60 let, njegov sin pa 24 let star; pred koliko leti je bil oče 4krat toliko star kakor sin?

32. Nekdo odgovori na vprašanje, koliko je star: „Čez 12 let bodem 4krat toliko star, kakor sem bil pred 12 leti.“ Koliko je star?

***33.** Neki oče je sedaj 43 let star, a pred 8 leti je bil 5krat toliko star kakor njegova hči; koliko let ima hči?

***34.** Nekdo hoče denar, kar ga ima ravno pri sebi, razdeliti med 10 ubožcev. Ako da vsakemu 20 h, ima ravno toliko premalo, kolikor ima preveč, ako da vsakemu 18 h. Koliko h ima pri sebi?

35. Ko se je tiskala neka knjiga, postavili so na vsako stran po 36 vrst in v vsako vrsto po 40 črk. Ako bi postavili na vsako stran po 4 vrste več in na vrsto po 5 črk več, potrebovali bi 2 poli menj. Koliko pol ima knjiga?

36. Železniški vlak je potreboval $4\frac{1}{2}$ ure, da je pretekel neko razdaljo, a potreboval bi bil le $3\frac{1}{2}$ ure, ako bi bil pretekel vsako uro $9\frac{1}{5}$ *km* več. Koliko *km* je pretekel vlak v vsaki uri?

***37.** Ako odvzamem od neke vsote polovico, od ostanka zopet polovico in od novega ostanka tudi polovico, ostane mi še 37 K. Kolika je bila prvotna vsota?

38. Neki igralec izgubi pri prvi igri 6 K menj nego $\frac{1}{4}$ svojega denarja, pri drugi igri 2 K več nego $\frac{1}{6}$ ostanka, pri tretji igri 8 K več

nego $\frac{1}{7}$ tega, kar mu je ostalo po drugi igri, in ima še sedaj 28 K. Koliko denarja je imel s početka?

39. Za blago se je iztržilo 2744 K, a dobiček je znašal $\frac{3}{25}$ kupnine. Kolika je bila kupnina?

*40. Trгоvec je kupil kos sukna, meter po $3\frac{3}{4}$ K, a prodal ga je meter po $4\frac{1}{2}$ K. Ako je imel pri vsem 27 K dobička, koliko metrov sukna je bilo?

41. Trгоvec z žitom ima neko določeno množino pšenice. Ako proda hl po 20 K, ima 384 K dobička; ako pa proda hl po 18 K; ima 96 K izgube. Koliko hl ima?

42. V vodnjak priteka voda po treh ceveh; prva cev sama ga napolni v 4 urah, druga sama v 6 urah, tretja sama v 12 urah. V koliko urah se napolni vodnjak, ako priteka voda ob jednom po vseh treh ceveh?

43. Dva delavca imata nalog, da očistita blata 435 m dolg jarek; prvi očisti na dan 42 m, drugi 45 m; kdaj bodeta izvršila delo?

44. Za neko delo se ponujata dva delavca; A bi dovršil delo v 18, B v 15 dneh. V koliko dneh bi A in B skupaj dovršila to delo?

45. Od krajišč A in B 300 m dolge daljice se začneta dve telesi v istem času gibati drugo proti drugemu; prvo naredi v vsaki minuti pot 7 m, drugo pa pot 5 m. Koliko minut po početku gibanja se bodeta telesi srečali?

Vsota potij, kateri naredita telesi do sestanka, je jednaka razdalji točiek A in B.

46. Kateri rezultat dobiš v prejšnji nalogi, ako postaviš namesto števil 300, 7, 5 števila d , a , b ?

47. Iz A gre v 356 km oddaljeno mesto B sel, kateri prehodi 56 km na dan; istodobno odpotuje iz B v A drug sel, kateri prehodi 52 km na dan; kdaj in v kateri razdalji od A se bosta ta dva sla srečala?

48. Od A do B je izpeljana 225 km dolga železnica. Od A se odpelje proti B osebni vlak, ki preteče vsako uro 30 km; istodobno se odpelje od B proti A tovorni vlak, kateri bi imel osebni vlak srečati čez $4\frac{1}{2}$ pol ure. Koliko km mora tovorni vlak preteči vsako uro?

***49.** Za slom, kateri je pred 3 dnevi odpotoval iz mesta A ter prehodi vsak dan 40 km , odpošlje se iz istega mesta drug sel, kateri prehodi na dan 60 km . Kdaj bode drugi dohitel prvega?

50. Ob 7ih zjutraj se odpelje z Dunaja po zahodni železnici osonbi vlak, ob 9ih zjutraj pa brzovlak; kdaj bode dohitel brzovlak osonbi vlak, če preteče prvi vsako uro 42 , zadnji pa 26 km ?

***51.** Iz A v B gre sel, ki prehodi po 12 milj na dan; jeden dan pozneje se pošlje iz A za njim drug sel; po koliko milj mora ta na dan prehoditi, da dohiti prvega v 4 dneh?

52. Za slom, kateri je pred 6 dnevi odpotoval iz A , in kateri prehodi po 48 km na dan, pošlje se iz B , skozi katero mesto je šel, drug sel, ki prehodi 75 km na dan. V koliko dneh dohiti drugi sel prvega, ako znaša razdalja med A in B 99 km ?

53. Od B proti C se odpelje poštni vlak ter naredi vsako uro pot 24 km ; istodobno se odpelje brzovlak v isto mer iz mesta A , katero je 36 km zadaj za B , ter dohiti poštni vlak v 3 urah. Koliko km preteče brzovlak v 1 uri?

54. Dve telesi se gibljeta v isto mer, prvo od A , drugo od B , katero mesto je za $2(d)\text{ m}$ zadaj za A , in sicer se začne drugo telo $6(t)$ sekund pozneje gibati nego prvo. Čez koliko sekund od tedaj, ko se je začelo gibati drugo telo, bode le-to dohitelo prvo, ako naredi prvo v vsaki sekundi $\frac{1}{4}(a)\text{ m}$, drugo $\frac{2}{9}(b)\text{ m}$?

55. Dve telesi se začneta istočasno gibati na obodu kroga od iste točke in v isto mer; prvo preteče ves obod v 24 , drugo v 18 minutah. V koliko minutah pride ta telesi zopet skupaj?

56. Koliko časa mine od jednega sestanka kazalcev na uri do drugega?

57. Koliko minut čez 4 pride minutni kazalec ravno nad oni kazalec, ki kaže ure?

III. Naloge v ponavljanje.

***1.** a) $56.3 + 38.4$; b) $36.9 + 74.4$; c) $97.3 + 65.8$.

***2.** a) $96.4 - 54.5$; b) $98.3 - 24.9$; c) $81.9 - 69.6$.

***3.** a) $\frac{1}{3} \cdot 255 + \frac{2}{3} \cdot 111$; b) $\frac{2}{5} \cdot 175 + \frac{5}{6} \cdot 276$;

$$*4. a) \frac{3}{4} \cdot 340 - \frac{3}{8} \cdot 448;$$

$$b) \frac{4}{9} \cdot 486 - \frac{2}{7} \cdot 546;$$

$$5. (17.45 + 48.354 + 8.702 + 0.0089 - 56.2059) \cdot \frac{0.7}{1.847}.$$

$$6. \frac{4.601}{0.22} \cdot \frac{0.34}{0.682}.$$

$$7. \left(\frac{0.6}{0.9} \cdot \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{2.3}{2.8} \right) : (3.5 - 2.66).$$

*8. Od katerega števila moraš odšteti 20, da ti ostane še šestina vsega števila?

*9. Vsota treh števil znaša 350; drugo število je dvakrat toliko kakor prvo, tretje dvakrat toliko kakor drugo. Katera števila so to?

10. Ako prištejem števcu ulomka $\frac{5}{19}$ neko število, od imenovalca pa odštejem 3kratnik tega števila, dobim ulomek $\frac{4}{5}$. Katero je to število?

*11. Dva trgovca imata skupaj 505 K dobička; tega si hočeta tako razdeliti, da dobi prvi za 25 K več nego drugi. Koliko dobi vsak trgovec?

$$12. 3(4x - 5) + 11(2x + 9) = 33(x + 3).$$

$$13. \frac{7+x}{5} - \frac{10+x}{13} = \frac{4+x}{7}.$$

$$14. \frac{8x-3}{2x-1} = \frac{3x+4}{x+1} + 1.$$

$$15. (5x^2 + 4x - 3)(4x + 8) - (4x^2 - 3x - 6)(5x + 4).$$

$$16. (24x^4 - 146x^3 + 329x^2 - 326x + 120) : (2x^2 - 7x + 6).$$

*17. Železnica se napne pri vsakih 50 m dolžine za $\frac{1}{4}$ m; kolike dolžine treba, da se napne za $1\frac{1}{4}$ m?

*18. Ako prišteješ 6kratnik nekega števila številu 204, dobiš njega 18kratnik. Koliko je ono število?

19. Od katerega števila je $\frac{1}{64}$ tolika kakor vsota iz 209.15 in 158.23?

$$20. \frac{2a^5}{3b^6} \cdot \frac{5b^5}{4a^4} + \frac{9a^2}{6b^3} \cdot \frac{5b^4}{9a^3}.$$

$$21. \frac{a^2 + 5ab - b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2} - \frac{a - b}{a + 2b}.$$

$$22. 332166 : 138.$$

$$23. 3672444 : 732.$$

$$24. 5586875 : 875.$$

$$25. \frac{490 \cdot 65 \cdot 24}{50 \cdot 36}.$$

$$26. \frac{370 \cdot 81 \cdot 35}{280 \cdot 63}.$$

$$27. \frac{350 \cdot 120 \cdot 175}{360 \cdot 125}.$$

*28. Za koliko se poveča ali zmanjša ulomek $\frac{4087}{7218}$, če izpustimo v števcu in imenovalcu a) zadnjo, b) zadnji dve številki na desni?

*29. Za neko trgovino da A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$ in C ostanek potrebne glavnice. Ako imajo vsi skupaj 720 K dobička; koliko dobi vsak?

$$30. \frac{5a+7b}{2a+3b} - \frac{2a+3b}{5a-7b}.$$

$$31. \left\{ \frac{2a+3x}{2a-3x} \right\}^2.$$

$$32. \left(\frac{3a}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{c}{2} \right) \cdot \left(\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5} \right).$$

$$33. \left(\frac{3x^4}{a^4} - \frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{8x^2}{a^2} - \frac{4y^4}{b^4} + \frac{8y^2}{b^2} - 3 \right) : \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1 \right).$$

34. Nekdo voli $\frac{3}{4}$ svoje gotovine sorodnikom, $\frac{3}{4}$ ostanka siromašnici in ostalih 450 K svoji gospodnji; koliko je zapustil ta mož?

35. Vodnjak napolni jedna cev v $4\frac{1}{2}$ ure, druga sama v $5\frac{1}{2}$ ure, tretja sama v $13\frac{1}{2}$ ure; v koliko urah se napolni prazni vodnjak, ako so vse tri cevi ob jednem odprte?

36. Deček je dal svojemu najstarejšemu bratu polovico svojih orehov menj 8, drugemu bratu 8 menj kakor polovico ostanka, tretjemu zopet 8 menj kakor polovico drugega ostanka in prav tako tudi četrtemu bratu 8 menj kakor polovico zadnjega ostanka, a ostalo mu je še 20 orehov. Koliko orehov je sploh imel in koliko je dal vsakemu bratu?

37. 1 K = 0.8506 ... markam? a) Koliko kron dobiš za 453.5 mark? b) Koliko mark dobiš za 1120 K?

38. 1 frank = 0.9523 ... K. a) Koliko frankov dobiš za 400 K? b) Koliko K dobiš za 67.08 frankov?

39. Določi iz jednačbe $sp = e(100 + p)$ po vrsti a) s; b) e; c) p.



Četrty oddelek.

Razmerja in sorazmerja.

I. Razmerja.

§ 107. Ako upoštevamo delitev v zmislu deljenja v ožjem pomenu, dobimo pojem ulomka, ako jo upoštevamo v zmislu merjenja, dobimo pojem razmerja (*Verhältnis*). Razmerje dveh števil ali istovrstnih količin a in b imenujemo óni izraz, ki kaže, kolikokrat je a večji nego b , ali kolikokrat se a nahaja v b . Razmerje dveh količin a in b izražamo zato tako, da postavimo med nji delitveni znak, tedaj $a:b$, kar čitamo: „ a se ima proti b “ ali krajše „ a proti b “. Dividend in divizor imenujemo člena (*Glieder*), in sicer je dividend prednji člen (*Vorderglied*), divizor pa zadnji člen (*Hinterglied*). Ako je $a:b = k$, ondaj imenujemo neimenovano število k eksponent ali kvocijent razmerja $a:b$. Na pr. v razmerju $8:2$ je 8 prednji člen, 2 zadnji člen in 4 eksponent.

Kolikost razmerja je zavisna od njegovega eksponenta; čim večji je ta, tem večje je tudi razmerje. Dve razmerji sta jednaki, ako imata isti eksponent; na pr. $8:2$ in $12:3$, prav tako $am:a$ in $bm:b$. Ako sta obratno dve razmerji jednaki, imata tudi jednaka eksponenta.

Razmerje, čegar člena sta neimenovani števili, imenujemo številno razmerje (*Zahlenverhältnis*); na pr. $8:2$.

Vsako razmerje med dvema istoimenskima številoma moremo izraziti s čistim številnim razmerjem; na pr. razmerje $10 K : 5 K$ je jednako razmerju $10:5$, kajti obe imata isti kvocijent 2 .

§ 108. Ker vsako razmerje lahko smatramo za naznačeno delitev, zato veljajo vsi izreki, katere smo dokazali o dividendu, divizorju in kvocijentu, tudi o prednjem in zadnjem členu razmerja ter o njega eksponentu. Tedaj velja:

1. V vsakem razmerju je prednji člen jednak zadnjemu, pomnoženemu z eksponentom. (§ 51.)

2. V vsakem razmerju je zadnji člen jednak prednjemu, razdeljenemu z eksponentom. (§ 51.)

Ako je $a:b=k$, tedaj je

$$1) a = bk$$

$$2) b = a:k.$$

Na pr. $10:2=5$, torej $10=2 \cdot 5$ in $2=10:5$.

3. Razmerju se ne izpremeni vrednost, ako oba njegova člena pomnožimo ali razdelimo z istim številom. (§ 58.)

Na pr. $12:4$ je jednako razmerju $(12:2):(4:2)$ ali $24:8$;

$$12:4 \quad " \quad " \quad " \quad (12:2):(4:2) \quad " \quad 6:2.$$

Uporabljaajo prvi del tega izreka izraziti moremo s celimi števili tudi taka razmerja, kojih členi so ulomljena števila; v ta namen treba, da oba člena pomnožimo s skupnim mnogokratnikom obeh imenovalcev. Na pr.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot 12 : \frac{3}{4} \cdot 12 = 8:9,$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot bd : \frac{c}{d} \cdot bd = ad:bc.$$

Drugi del zadnjega izreka pa nam služi v to, da razmerje, čegar člena imata skupno mero, okrajšamo; to se zgodi, ako oba njegova člena razdelimo s skupno mero.

$$\text{Na pr. } 12:8 = \frac{12}{4} : \frac{8}{4} = 3:2; \quad abm:acm = b:c.$$

§ 109. Ako pomnožimo v dveh ali več razmerjih vse prednje in prav tako vse zadnje člene drugega z drugim, dobimo novo razmerje, katero imenujemo sestavljeno (*zusammengesetzt*) razmerje v nasprotje danim jednostavnim (*einfach*) razmerjem. Ako so na pr.

$$a:b \quad 4:3$$

$$c:d \quad 7:12$$

$$e:f \quad 9:14 \text{ jednostavna razmerja, tedaj je}$$

$$ace: bdf \quad 4 \cdot 7 \cdot 9 : 3 \cdot 12 \cdot 14 \text{ sestavljeno razmerje.}$$

Ako pomnožimo ali razdelimo jednostavnim razmerjem katerikoli prednji in katerikoli zadnji člen z istim številom, pomnožimo ali razdelimo s tem tudi prednji in zadnji člen sestavljenega razmerja, njega vrednost ostane torej neizpremenjena.

Naloge.

Izrazi ta-le razmerja s celimi števili :

- *1. a) $\frac{3}{4} : 5$; b) $\frac{19}{30} : \frac{13}{30}$; c) $\frac{2}{3} : \frac{7}{12}$.
 2. a) $15\frac{3}{10} : 1\frac{4}{5}$; b) $128\frac{3}{8} : 45\frac{5}{16}$; c) $0\cdot05 : 1$.
 3. a) $35\cdot4 : 12\cdot56$; b) $\frac{m}{ab} : \frac{n}{ac}$; c) $(a-b) : \frac{ab}{a+b}$.

Izrazi ta-le razmerja z najmanjšimi celimi števili :

4. a) $30 : 24$; b) $112 : 114$; c) $240 : 96$.
 5. a) $5 : \frac{5}{8}$; b) $3\frac{3}{4} : 4\frac{3}{8}$; c) $15\frac{5}{9} : 6\frac{2}{3}$.
 6. a) $7\cdot5 : 2\cdot5$; b) $0\cdot625 : 0\cdot5$; c) $3\cdot208 : 1\cdot28$.
 7. a) $ax(m^2 - n^2) : ab(m + n)$; b) $\frac{x+y}{ax} : \frac{x^2 - y^2}{bx^2}$.

*8. Izmed dveh teles naredi *A* vsako minuto 80 *m*, *B* 96 *m* dolgo pot; v kakem razmerju sta hitrosti teh teles?

*9. Telo *A* naredi v 8 minutah isto pot kakor *B* v 6 minutah; kako se imata njiju hitrosti?

*10. Iz $\frac{9}{10}$ *kg* zlata se nakuje 3100 frankov, iz $\frac{9}{10}$ *kg* srebra 200 frankov. V katerem razmerju sta vrednosti zlata in srebra?

*11. Temeljna razdalja na termometru je razdeljena po Reaumurjevi delitvi na 80^0 , po Celsijevi na 100^0 ; kakšno je torej razmerje med $1^0 R$ in $1^0 C$?

12. Kakšno je razmerje med vrednostjo 1 franka in 1 marke, ako je 100 frankov = $95\cdot23 K$ in 100 mark = $117\cdot56 K$?

13. V kakšnem razmerju sta ploščini dveh pravokotnikov, katerih jeden je 28 *m* dolg in 15 *m* širok, drugi pa 25 *m* dolg in 16 *m* širok?

14. Izmed dveh parnih strojev vzdigne prvi v *a* sekundah *b kg* *c m* visoko, drugi v *m* sekundah *n kg* *p m* visoko; v katerem razmerju sta njiju sposobnosti za delo?

II. Sorazmerja.

§ 110. Izjednačitev dveh enakih razmerij imenujemo sorazmerje (*Proportion*). Ako je $a : b = k$ in $c : d = k$, tedaj je tudi $a : b = c : d$; ta izraz je sorazmerje in čitamo ga: „*a* se ima proti *b*,

kakor c proti d “ ali krajše: „ a proti b kakor c proti d .“ Prvi člen a in četrti d imenujemo zunanja člena, drugi člen b in tretji člen c sta notranja člena; člena a in c zovemo tudi prednja, b in d pa zadnja člena sorazmerja.

Sorazmerje, čegar notranja člena sta jednaka, imenujemo stalno sorazmerje (*stetige Proportion*); na pr. $16:8 = 8:4$. Notranji člen 8 zovemo srednjo (geometrijsko) sorazmernico ali proporcijonalo (*mittlere [geometrische] Proportionale*) števil 16 in 4, in 4 tretjo stalno sorazmernico števil 16 in 8.

Sorazmerje, v katerem so vsi členi neimenovana števila, zovemo številno sorazmerje (*Zahlenproportion*); na pr. $12:4 = 15:5$.

Sorazmerje more imeti tudi imenovana števila; vendar morata oba člena vsakega razmerja imeti isto ime.

$$\begin{aligned}\text{Na pr.} \quad & 18\,m : 3\,m = 12\,m : 2\,m. \\ & 6\,kg : 2\,kg = 15\,K : 5\,K, \\ & 15\,K : 3\,K = 25 : 5.\end{aligned}$$

Ne le vsako razmerje, ampak tudi vsako sorazmerje, v katerem so imenovana števila, lahko izrazimo kot čisto številno sorazmerje (*reine Zahlenproportion*).

Izreki o številnih sorazmerjih.

§ 111. 1. V vsakem številnem sorazmerju je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov.

Dokaz. Vzemimo, da je $a:b = c:d$, in da je $a:b = k$, tedaj je tudi $c:d = k$. Iz tega izvira

$$a = bk, \quad c = dk.$$

Ako pomnožimo prvo enačbo z d , drugo pa z b , dobimo

$$ad = bdk, \quad bc = bdk$$

in odtod $ad = bc$.

O pravosti tega izreka se prepričaj tudi tako, da na mesto vsakega prednjega člena postaviš produkt zadnjega člena in kvocijenta:

$$bk : b = dk : d.$$

Takoj je jasno, da sestoji produkt zunanjih členov iz istih faktorjev kakor produkt notranjih členov.

Iz navedenega izreka izvira:

V vsakem stalnem sorazmerju je kvadrat srednje sorazmernice jednak produktu drugih dveh členov.

Ako je $a:b = b:c$, tedaj je $b^2 = ac$.

Na pr. Iz $16:8 = 8:4$ izvira $8^2 = 16 \cdot 4$.

2. Vsak zunanji člen številnega sorazmerja je enak produktu notranjih dveh členov, razdeljenemu z drugim zunanjim členom; in vsak notranji člen je enak produktu zunanjih dveh členov, razdeljenemu z drugim notranjim členom.

Ako je $a:b = c:d$, tedaj $ad = bc$, ondaj je

$$a = \frac{bc}{d}, d = \frac{bc}{a}, \text{ in } b = \frac{ad}{c}, c = \frac{ad}{b}.$$

3. Iz dveh enakih produktov vselej lahko sestavimo sorazmerje; v ta namen treba le, da razstavimo vsak produkt na dva faktorja ter da vzamemo faktorja jednega produkta za zunanja, faktorja drugega produkta za notranja člena sorazmerja. (Obrat od 1.)

Recimo, da je $ad = bc$. Razdelivši to jednačbo z bd (produktom obeh členov, ki naj bi bila zadnja člena) dobimo

$$ad:bd = bc:bd \text{ ali } a:b = c:d.$$

Da je številno sorazmerje pravo, spoznamo torej ne le iz tega, da sta eksponenta v obeh razmerjih jednaka, ampak tudi iz enakosti produktov zunanjih in notranjih členov.

§ 112. Sorazmerje razrešiti se pravi, iz treh danih členov sorazmerja poiskati njega četrta, še neznani člen.

a) Sorazmerje razrešiš, ako poiščeš eksponent znanega razmerja ter potem z njega pomočjo določiš neznani člen drugega razmerja.

b) Številno sorazmerje razrešiš najlaže po § 111., 2.

Na pr. Iz $x:2 = 15:3$ dobiš:

a) $15:3 = 5$, $x = 2 \cdot 5 = 10$; ali

b) $x = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10$; tedaj

$10:2 = 15:3$ popolno sorazmerje.

Preobrazba sorazmerij.

§ 113. Vsako številno sorazmerje ostane pravo, ako zamenimo a) zunanja člena med seboj, ali b) notranja člena med seboj, ali c) notranja člena z zunanjima.

Dokaz. Recimo, da je $a:b = c:d$, torej $ad = bc$.

a) Ako zamenimo v tem sorazmerju notranja člena, dobimo

$$a:c = b:d.$$

b) Zamenivši v teh dveh sorazmerjih zunanja člena, dobimo

$$d:b = c:a,$$

$$d:c = b:a.$$

c) Ako zamenimo slednjič v vseh štirih sorazmerjih notranja člena z zunanjima, dobimo

$$b:a = d:c,$$

$$c:a = d:b,$$

$$b:d = a:c,$$

$$c:d = a:b.$$

Da je vsak izmed teh sedem postavkov pravo sorazmerje, razvidimo iz tega, da je v vsakem produktu zunanjih (ozir. notranjih) členov ad jednak produktu notranjih (ozir. zunanjih) členov bc ; produkta ad in bc pa sta po pogoju jednaka.

Vsako sorazmerje lahko torej preobrazimo na osmero načinov, v ta namen mu je treba le člene drugače razvrstiti.

§ 114. Sorazmerje ostane pravo, ako jeden notranji in jeden zunanji člen z istim številom pomnožimo ali razdelimo.

Dokaz: Ako je $a:b = c:d$, torej $ad = bc$, potem je tudi

$$1) am:bm = c:d, \quad a:b = cm:dm,$$

$$am:b = cm:d, \quad a:bm = c:dm;$$

$$2) \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c:d, \quad a:b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m},$$

$$\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d, \quad a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}.$$

Iz $ad = bc$ izvira namreč ne le $adm = bcm$, ampak tudi $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$.

V vseh sorazmerjih pod 1) je produkt zunanjih členov adm , produkt notranjih členov bcm , v sorazmerjih pod 2) je produkt zunanjih

členov $\frac{ad}{m}$, produkt notranjih členov $\frac{bc}{m}$; vsa ta sorazmerja so torej prava.

Uporabljajoč ta izrek moremo a) vsako sorazmerje, v katerem so ulomki, izraziti s celimi števili, b) vsako sorazmerje, v katerem imata po jeden notranji in zunanji člen kako skupno mero, okrajšati z isto skupno mero.

§ 115. 1. V vsakem sorazmerju se ima vsota ali diferenca prvih dveh členov proti prvemu ali drugemu členu, kakor se ima vsota ali diferenca drugih dveh členov proti tretjemu ali četrtemu členu.

Dokaz. Ako je $a:b=c:d$, torej $ad=bc$, potem je tudi

$$(a \pm b):a = (c \pm d):c \quad \text{in} \quad (a \pm b):b = (c \pm d):d \dots \alpha$$

Te dve sorazmerji sta pravi, ako je v vsakem produkt zunanjih členov jednak produktu notranjih členov, t. j. ako je

$$(a \pm b) \cdot d = a \cdot (c \pm d) \quad \text{in} \quad (a \pm b) \cdot d = b \cdot (c \pm d), \quad \text{torej ako je}$$

$$ac \pm bc = ac \pm ad \quad \text{in} \quad ad \pm bd = bc \pm bd.$$

Ta produkta sta resnično jednaka, kajti po pogoju je $ad=bc$.

2. V vsakem sorazmerju se ima vsota prvih dveh členov proti diferenci teh členov, kakor se ima vsota drugih dveh členov proti diferenci teh členov.

Dokaz. Ako je $a:b=c:d$, velja po 1.

$$(a+b):a = (c+d):c \quad \text{in} \quad (a-b):a = (c-d):c,$$

ali, ako zamenimo notranja dva člena,

$$(a+b):(c+d) = a:c \quad \text{in} \quad (a-b):(c-d) = a:c,$$

$$\text{tedaj tudi} \quad (a+b):(c+d) = (a-b):(c-d),$$

in če zamenimo notranja dva člena

$$(a+b):(a-b) = (c+d):(c-d) \dots \dots \dots \beta$$

3. V vsakem sorazmerju se ima vsota ali diferenca prednjih členov proti vsoti ali diferenci zadnjih členov, kakor se ima vsak prednji člen proti svojemu zadnjemu členu.

Dokaz. Vzemimo, da velja $a:b=c:d$.

Zamenivši notranja člena dobimo $a:c=b:d$.

Potem velja po 1.

$(a \pm c) : a = (b \pm d) : b$ in $(a \pm c) : c = (b \pm d) : d$
in če zamenimo še notranja člena

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b \text{ in } (a \pm c) : (b \pm d) = c : d \dots \gamma$$

Dostavek. Ako je več številnih razmerij med seboj enakih, ima se vsota vseh prednjih členov proti vsoti vseh zadnjih členov kakor vsak prednji člen proti svojemu zadnjemu členu. $\times$

Ako je $a : b = c : d = f : g$, tedaj velja tudi

$$(a + c + f) : (b + d + g) = a : b \dots \delta$$

§ 116. Ako pomnožimo v dveh ali več sorazmerjih vse istomestne člene drugega z drugim, tvorijo produkti zopet pravo sorazmerje. $\times$

Vzemimo, da velja $a : b = c : d$, torej $ad = bc$,

dalje $e : f = g : h$, „ $eh = fg$,

in $k : l = m : n$. „ $kn = lm$.

Ako pomnožimo zadnje tri jednačbe, dobimo $adehkn = bcfglm$.

Če damo temu izrazu obliko $ae k . d h n = b f l . c g m$, dobimo iz njega sorazmerje

$$ae k : b f l = c g m : d h n \dots \epsilon$$

Tako sorazmerje imenujemo sestavljeno, nasproti danim sorazmerjem, katera zovemo jednostavna.

N a l o g e.

Razreši ta-le sorazmerja:

- | | |
|---|--|
| 1. $3 : 8 = 12 : x$. | 2. $12 : 27 = x : 15$. |
| 3. $36 : x = 6 : 3$. | 4. $x : 10 = 8 : 5$. |
| 5. $x : 15 = 165 : 66$. | 6. $88 : x = 72 : 63$. |
| 7. $x : 5 = \frac{2}{3} : \frac{3}{8}$. | 8. $3\frac{1}{2} : 4 = 5\frac{3}{4} : x$. |
| 9. $x : \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} : 3$. | 10. $7\frac{4}{5} : 2\frac{1}{8} = x : 5\frac{5}{3}$. |
| 11. $5\frac{1}{3} : 7\frac{3}{4} = x : 2\frac{1}{2}$. | 12. $x : \frac{7}{9} = 3\frac{3}{5} : 5$. |
| 13. $14 : 4\frac{3}{4} = x : 5\frac{1}{4}$. | 14. $x : 10\frac{1}{2} = 4\frac{2}{7} : 9\frac{1}{3}$. |
| 15. $1\frac{5}{9} : x = 3\frac{23}{25} : 4\frac{4}{5}$. | 16. $17\frac{1}{7} : 12\frac{2}{11} = 14\frac{2}{9} : x$. |
| 17. $10\frac{11}{12} : x = 13\frac{14}{15} : 18\frac{19}{20}$. | 18. $9\frac{17}{18} : 10\frac{1}{9} = 27\frac{3}{8} : x$. |
| 19. $x : 0'35 = 2'38 : 1'25$ | 20. $14'35 : 218'275 = 9'18 : x$. |

$$21. \frac{a}{m} : \frac{b}{p} = x : \frac{c}{q}$$

$$22. x : 3\frac{3}{4} = m^3 : \frac{3m^2}{2}.$$

$$23. x : (m - 2n) = (6m + 8n) : (2m - 4n).$$

$$24. (6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2).$$

$$25. \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \frac{m + n}{m - n} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m + n} : x.$$

$$26. \left(b + \frac{b^3}{a^2 - b^2}\right) : x = \left(b + \frac{b^2}{a - b}\right) : \frac{a + b}{b}.$$

$$27. (x + a) : x = b : c.$$

$$28. x : (a - x) = \frac{a}{a + b} : \frac{a}{a - b} \left. \vphantom{\frac{a}{a - b}} \right\} \text{ oziraje se na § 115., 1.}$$

29. Izpremeni obliko tema-le sorazmerjema, uporabljajoč § 113. in § 115.:

$$a) 9 : 6 = 15 : 10,$$

$$b) 36 : 12 = 24 : 8.$$

30. Ako velja $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 9$, $c : d = 3 : 5$ in $d : e = 3 : 8$, kako se ima $a : c$, $a : d$, $a : e$? (§ 120.)

31. Postavi za prednji člen produkt iz zadnjega člena in kvocijenta ($a = bk$, $c = dk$) in dokaži, da so si v sorazmerjih α , β , γ , δ , ϵ (§ 115.—116.) kvocijenti jednaki.

III. Uporaba sorazmerij.

§ 117. Ako sta dve vrsti števil tako zavisni druga od druge, da pripada 2-, 3-, 4-, ... m krat tolikemu številu jedne vrste 2-, 3-, 4-, ... m krat večje število druge vrste, pravimo, da sta te dve vrsti števil premo sorazmerni (*gerade proportioniert*), ali da sta v premem razmerju (*stehen in einem geraden Verhältnisse*). Tako sta sorazmerni blago in cena, kajti ako velja 1 meter katerega-koli blaga a kron, velja 2-, 3-, 4-, ... m metrov istega blaga $2a$, $3a$, $4a$, ... ma kron.

Ako pa sta dve vrsti števil tako zavisni druga od druge, da pripada 2-, 3-, 4-, ... m krat tolikemu številu jedne vrste le 2gi, 3tji, 4ti ... m ti del števila druge vrste, pravimo, da sta te vrsti števil obratno sorazmerni (*verkehrt proportioniert*), ali da sta v obratnem razmerju (*im verkehrten Verhältnisse*). Tako

je na pr. število delavcev v obratnem razmerju s časom, ki se za delo potrebuje; kajti če potrebuje eden delavec za neko delo a dnij, potrebujeta za isto delo dva delavca le polovico časa, $\frac{a}{2}$ dnij, trije delavci potrebujejo $\frac{a}{3}$ dnij, . . . m delavcev potrebuje le $\frac{a}{m}$ dnij.

Razreševanje nalog z jednostavnimi razmerji. Jednostavna regeldetrija.

§ 118. Vzemimo, da sta A in a dve števili jedne vrste, B in b tema pripadajoči števili druge vrste ter da sta te vrsti števil premo sorazmerni. Ako je $A = ma$, mora biti po pojmu o premem sorazmerju tudi $B = mb$. Potem pa imamo $A : a = m$ in $B : b = m$ in zato tudi $A : a = B : b$.

1. Ako sta dve vrsti števil premo sorazmerni, tedaj je razmerje med vsakima dvema številoma jedne vrste jednako razmerju med pripadajočima številoma druge vrste, vzetima v istem redu.

Recimo, da sta A in a dve števili jedne vrste, C in c pripadajoči števili druge vrste ter da sta te vrsti števil obratno sorazmerni. Ako je $A = ma$, mora biti $C = \frac{c}{m}$ ali $c = mC$. Zato dobimo $A : a = m$ in $c : C = m$ in tedaj tudi $A : a = c : C$.

2. Ako sta dve vrsti števil obratno sorazmerni, tedaj je razmerje med vsakima dvema številoma jedne vrste jednako razmerju med pripadajočima številoma druge vrste, vzetima v obratnem redu.

Primera. 1. 7 m sukna velja 30 K, koliko velja 42 m istega sukna? — Ker sta te dve vrsti števil premo sorazmerni, dobimo

$$\begin{array}{ll} 7 \text{ metrov} & 30 \text{ K} \\ 42 \text{ " } & x \text{ K} \end{array} \quad \begin{array}{l} x : 30 = 42 : 7 \text{ in} \\ x = 180 \text{ K.} \end{array}$$

2. 16 delavcev izvrši neko delo v 6 dneh; koliko delavcev je treba najeti, da izvrše isto delo v 4 dneh? — Dani dve vrsti števil sta obratno sorazmerni, tedaj velja

$$\begin{array}{ll} 16 \text{ delav.} & 6 \text{ dnij} \\ x \text{ " } & 4 \text{ " } \end{array} \quad \begin{array}{l} x : 16 = 6 : 4 \\ x = 24 \text{ delavcev.} \end{array}$$

Vsaka regeldetrijska naloga ima dva stavka: prvi izreka pogoj, drugi izraža vprašanje.

Da imajo regeldetrijske naloge sploh pomen in veljavo za praktično življenje, treba, da si mislimo pri vsaki taki nalogi za obe dve vrsti števil, kateri med seboj primerjamo, vse v pogojnem in vprašalnem stavku neimenovane okolščine kot jednake; ali, kar je jedno in isto, treba vsakako bodisi molčé, bodisi izrekoma, staviti pogoj, da pripada vsaki jednoti jedne vrste v pogojnem in vprašalnem stavku ista množina jednot druge vrste. Na ta pogoj treba je paziti pri vseh sledečih nalogah, dasi tudi se zaradi kratkosti ne naglaša povsod izrekoma.

§ 119. Jednostavnejše regeldetrijske naloge dostikrat prav lahko razrešimo na pamet. V obče sklepamo tu iz dane vrednosti za kako množino na vrednost jednote in potem iz najdene vrednosti za jednoto zopet na vrednost druge množine. Na pr.:

8 *m* sukna velja 64 K, koliko stane 5 *m*? — Ako velja 8 *m* 64 K, velja 1 *m* 8mi del od 64 K, torej 8 K; 5 *m* velja zatorej 5krat 8 K, t. j. 40 K.

6 delavcev izvrši neko delo v 20 dnéh, koliko dnij bode potrebovalo za isto delo 5 delavcev? — Ako izvrši delo 6 delavcev v 20 dnéh, potrebuje 1 delavec 6krat 20 dnij, tedaj 120 dnij; 5 delavcev pa potrebuje za isto delo le 5ti del onega časa, katerega potrebuje 1 delavec, zatorej 5ti del od 120 dnij, t. j. 24 dnij.

Krajša je razrešitev na pamet, kadar je množina v vprašalnem stavku mnogokratnik ali del ali mnogokratnik kakega dela istoimenske množine v pogojnem stavku. Na pr.:

5 *hl* ječmena velja 42 K 30 h; koliko stane 30 *hl*? — 30 *hl* je 6krat 5 *hl*, tedaj velja 6krat 42 K 30 h, t. j. 253 K 80 h.

100 K kapitala daje na leto 5 K obrestij; koliko obrestij daje na leto 25 K kapitala? — Ker je 25 K 4ti del od 100 K, dá tudi le 4ti del od 5 K, tedaj 1 K 25 h obrestij.

48 *m* velja 60 K 72 h; koliko velja 36 *m*? — 36 *m* je 3krat 12 *m*; 12 *m* je 4ti del od 48 *m*, 12 *m* velja tedaj 4ti del od 60 K 72 h, t. j. 15 K 18 h; 36 *m* pa velja 3krat 15 K 18 h, zatorej 45 K 54 h.

V posameznih slučajih lahko razrešiš regeldetrijske naloge tudi takó, da množino vprašalnega stavka primerno razstaviš. Na pr.

Koliko velja 30 *kg*, ako velja 14 *kg* 43 K 82 h?

30 *kg* je 2krat 14 *kg* in še 2 *kg*;

2krat 14 *kg* velja 2krat 43 K 82 h, t. j. . . . 87 K 64 h;

2 *kg* veljata 7mi del od 43 K 82 h, t. j. . . . 6 „ 26 „;

30 *kg* velja (vsota): 93 K 90 h.

Ako velja 5 hl vina 184 K, koliko velja 19 hl? — 20 hl bi veljalo 4krat 184 K, t. j. 736 K. Da dobimo ceno za 19 hl, treba, da še od 736 K odštejemo ceno 1 hl. Jeden hl velja 5ti del od 184 K, t. j. 36 K 80 h. Ako od 736 K odštejemo 36 K 80 h, dobimo 699 K 20 h.

Razreševanje nalog s sestavljenimi razmerji. Sestavljena regeldetrija.

§ 120. Primer.

3 zidarji sezidajo v 14 dneh $50 m^3$ zidú; v koliko dneh sezida 7 zidarjev $125 m^3$ zidú?

To nalogo lahko razstavimo na te-le dve nalogi z jednostavnimi razmerji:

I. 3 zidarji sezidajo zid v 14 dneh; v koliko (y) dneh sezida 7 zidarjev isti zid, ako ostanejo vse druge okolščine iste?

Ker je število zidarjev v obratnem razmerju s številom delavnikov, katerih treba za določeno delo, odgovarja onemu vprašanju sorazmerje

$$y : 14 = 3 : 7,$$

iz katerega dobimo $y = 6$.

II. Ako sezida 7 zidarjev v y ($= 6$) dneh $50 m^3$ zidú, v koliko (x) dneh sezida prav toliko zidarjev $125 m^3$ zidú? — Ker je kolikost dela (zidú) v premem razmerju s številom dni, ki se potrebujejo za delo, dobimo odgovor na stavljeno vprašanje, če razrešimo sorazmerje

$$x : y = 125 : 50,$$

s čimer dobimo neznanko prvotne naloge $x = 15$.

Neznanke y pa ni treba s pomočjo posebnega sorazmerja res izračuniti; kajti neznanko x lahko izračunimo kar neposredno. V ta namen je treba le sestaviti prejšnji dve sorazmerji.

Kajti ako pomnožimo istomestne člene sorazmerij

$$y : 14 = 3 : 7 \quad \text{in}$$

$$x : y = 125 : 50, \quad \text{dobimo}$$

$$y \cdot x : 14 \cdot y = 3 \cdot 125 : 7 \cdot 50,$$

in če okrajšamo z y

$$x : 14 = 3 \cdot 125 : 7 \cdot 50,$$

kar pišemo radi večjega pregleda tako-le:

$$x : 14 = 3 : 7$$

$$125 : 50.$$

Tukaj pa je pomniti, da je treba v tretjem in četrtem členu druga pod drugim stoječa števila pomnožiti.

Razmerje $x:14$ je torej jednako sestavljenemu razmerju in sicer sestoječemu iz razmerij $3:7$ in $125:50$. — Izrek:

Ako je katerakoli vrsta števil tako zavisna od več drugih vrst, da je z vsako posamič ali premo ali obratno sorazmerna, tedaj je razmerje med vsakima dvema številoma one prve vrste jednako sestavljenemu razmerju, in sicer sestavljenemu iz jednostavnih razmerij med vsakima dvema pripadajočima številoma drugih vrst, vzetima v istem ali v obratnem redu, kakor so števila dotične vrste premo ali obratno sorazmerna s števili prve vrste.

Na pr. Ako izvrši 20 delavcev, ki delajo na dan 12 ur, v 5 tednih 375 *m* dolg nasip; v koliko tednih izvrši 12 delavcev, ki delajo po 10 ur na dan, prav tak 600 *m* dolg nasip?

20 delav. 12 ur na dan 5 tedn. 375 *m* dolžine,

12 " 10 " " " x " 600 *m* "

$$x:5 = 20:12$$

$$12:10$$

$$600:375$$

$$x:1 = 16:1$$

$$x = 16 \text{ tednov.}$$

§ 121. 1. Bolj lahke naloge razrešujemo tudi s pomočjo sklepov kar na pamet. Na pr.

4 delavci, kateri delajo po 12 ur na dan, izvrše neko delo v $7\frac{1}{2}$ dneva; koliko dnij potrebuje za isto delo 6 delavcev, ako delajo le po 10 ur na dan?

Ako potrebujejo 4 delavci $7\frac{1}{2}$ dneva, potrebuje 1 delavec 4krat toliko časa, torej 4krat $7\frac{1}{2}$ dneva, t. j. 30 dnij; 6 delavcev potrebuje le 6ti del od 30 dnij, t. j. 5 dnij, ako delajo po 12 ur na dan. Ako bi ti delavci delali le 1 uro na dan, potrebovali bi 12krat 5 = 60 dnij; ker pa delajo 10 ur na dan, potrebujejo le 10ti del od 60 dnij, t. j. 6 dnij.

2. Prav tako lahko sklepamo tudi, kadar računimo pismeno.

Pri nalogi, katero smo razrešili v § 120., dobili bi ta-le pisмени sklepovni račun:

3 zid.	potrebujejo	za	50 m ³	14 dnij
1 "	potrebuje	"	50 "	14.3 "
7 "	"	"	50 "	$\frac{14.3}{7}$ "
7 "	"	"	1 "	$\frac{14.3}{7.50}$ "
7 "	"	"	125 "	$\frac{14.3.125}{7.50} = 15$ dnij.

Naloge.

*1. 6 m sukna velja 36 K; koliko velja 12 m?

Na pamet: Ako velja 6 m sukna 36 K, velja 1 m le 6ti del od 36 K, t. j. 6 K; 12 m velja 12krat 6 K = 72 K. — Ali krajše: 12 m je 2krat 6 m; 12 m velja torej 2krat toliko, kakor 6 m, torej 2krat 36 = 72 K.

*2. 1 hl velja 28 K; koliko velja 40 l?

*3. 200 kg kave velja 640 K; koliko kave dobiš za 128 K?

*4. Pri 100 K je 16 K dobička; koliko dobička je pri 425 K?

*5. Neka hiša daje na leto 540 K obrestij; koliko v 8 mesecih?

*6. 16 zidarjev sezida zid v 20 dneh; v koliko dneh bi sezidalo isti zid 10 zidarjev?

Na pamet: Ako potrebuje 16 zidarjev za delo 20 dnij, potrebuje za isto delo 1 zidar 16krat toliko časa, torej 320 dnij; 10 zidarjev pa le 10ti del onega časa, ki ga potrebuje 1 zidar, torej le 10ti del od 320, t. j. 32 dnij.

7. Ako znaša zračni tlak na $1\frac{1}{2} dm^2$ 154 kg; kolik je zračni tlak na $1 m^2$?

8. Jeden delavec zasluži v 4 dneh ravno toliko kakor drugi delavec v 5 dneh; ako si tedaj prvi v 15 dneh zasluži $37\frac{1}{2}$ K, koliko zasluži drugi v istem času?

9. Rokopis da 126 stranij po 45 vrst; koliko stranij bi dal, ako bi se stavilo na stran le 35 vrst?

10. Ako se zavrti kolo v 48 minutah 264krat, a) kolikokrat se zavrti v 26 minutah, b) v koliko minutah se zavrti 840krat?

11. Sprednje kolo na vozu ima a metrov, zadnje b metrov v obsegu; kolikokrat se zavrti prvo, če se zadnje zavrti p krat?

$$a = 2'8; b = 4'2; p = 170.$$

*12. 3000 delavcev dodela železnico v 9 mesecih; koliko delavcev treba še najeti, da se železnica dodela v 6 mesecih?

13. Na njivi, ki meri $6\frac{2}{3}$ ha, pridela se $68\frac{1}{2}$ hl pšenice; a) koliko pšenice se pridela na njivi, ki meri $3\frac{1}{3}$ ha? b) na koliko ha se pridela $37\frac{3}{4}$ hl pšenice?

14. Stroj vzdigne v a sekundah b kg na določeno višino; v katerem času vzdigne b' kg do iste višine?

$$a = 93, b = 4185, b' = 3912.$$

15. 47 l olivnega olja tehta ravno toliko kakor 43 l vode; koliko tehta 1 l olivnega olja, ker tehta 1 l vode 1 kg?

16. Ako je razmerje med prostornino trde in zrahljane zemlje jednako 10:17, a) koliko zrahljane zemlje dá 248 m³ trde zemlje? b) koliko trde zemlje dá 300 m³ zrahljane zemlje?

17. Ako vloži zidar na dan v podzidje po 500, v oboke pa le po 325 opek in se mu plača za 1 m³ podzidja 1 K 25 h, koliko stane potem delo za 1 m³ oboka? _____

18. 15 delavcev izvrši neko delo v 10 dneh, ako delajo na dan po 12 ur; koliko delavcev je treba najeti, da zgotovijo isto delo v 6 dneh, ako delajo le po 10 ur na dan?

19. Dvoje zobatih koles sega drugo v drugo; A ima 60, B pa 120 zobcev; kolikokrat se zavrti B v 36 sekundah, ako se zavrti A v 12 sekundah 10krat?

Na pamet: Ker ima B 120 in ne 60 zobcev, zavrti se le polovico od 10krat, t. j. 5krat; ker pa se ne vrti 12 ampak 36 sekund, zavrti se 3krat $5 = 15$ krat.

20. Parni stroj, ki čini 4 konjske sile, vzdigne v 5 sekundah breme 1500 kg 1 m visoko; koliko kg more vzdigniti parni stroj, kateri čini 6 konjskih sil, v 12 sekundah prav takó visoko?

21. Travnik, kateri je 512 m dolg in 72 m širok, dá 10 vóz sena po 900 kg; koliko vóz sena po 1000 kg dá 384 m dolg in 192 m širok travnik?

*22. 80 m dolg, 5 m širok in 2 m globok prekop izkoplje 20 delavcev v 18 dneh; koliko delavcev zgotovi 120 m dolg, 6 m širok in 3 m globok prekop v 36 dneh?

Na pamet: Če bi bil prekop mesto 80 m le 40 m dolg, treba bi bilo le $\frac{1}{2}$ od 20, t. j. 10 delavcev; ker je pa prekop 120 m, tedaj 3krat takó dolg, treba je 3krat 10, t. j. 30 delavcev; i. t. d.

23. 4500 mož ima kruha za 8 mesecev, ako ga dobiva vsak po $1\frac{1}{4}$ kg na dan. A pride jih še 500 mož; koliko kg kruha sme prejeti vsak na dan, da izhajajo ž njim $7\frac{1}{2}$ meseca?

24. V rudniku sta dva parna stroja; prvi vzdigne vsake 2 minuti 7 hl vode iz globočine 84 m, drugi pa vsake 3 minute 10 hl iz globočine 108 m. V koliko minutah bi spravila oba parna stroja 2550 hl iz globočine 120 m?

25. Nekdo ima toliko volne, da se dá iz nje natkati 16 kosov sukna, ki so po 54 m dolgi in $\frac{5}{3}$ m široki. Iz nekaj te volne so natkali že dva kosa $1\frac{1}{4}$ m širokega sukna, vsak kos po 48 m; koliko kosov $1\frac{1}{4}$ m širokega sukna se da natkati iz ostale volne, ako je vsak kos 40 m dolg?

26. 6 delavcev je izkopal v 4 dneh 300 m dolg, $11\frac{1}{5}$ dm širok in $3\frac{1}{2}$ dm globok prekop. Da se pri drugem prekopu izkoplje 5 m^3 , potrebuje se prav toliko časa, kakor pri prvem za 6 m^3 . a) Koliko delavcev izkoplje drugi prekop v 9 dneh, če je ta 245 m dolg, 10 dm širok in 6 dm globok? b) V koliko dneh izkoplje drugi prekop 10 delavcev, ako je le-ta 280 m dolg, $8\frac{3}{4}$ dm širok in 5 dm globok?

IV. Naloge v ponavljanje.

*1. Koliko je 6kratna diferenca med $10\frac{3}{5}$ in $6\frac{5}{4}$?

*2. Zmanjšaj 7kratnik od $5\frac{5}{9}$ za $29\frac{1}{9}$, od ostanka pa vzemi četrtno.

3. Bakrena žica, katera ima pri temperaturi 0°C dolžino 1 m, meri pri temperaturi 30°C . $1.000515\dots\text{m}$. a) Koliko dolžino ima pri temperaturi 30°C . bakrena žica, ki meri pri temperaturi 0°C . $8.435\dots\text{m}$ ($12.57\dots\text{m}$)? b) Na katero dolžino se skrči bakrena žica, ki je merila pri 30°C . $6.083\dots\text{m}$ ($0.675\dots\text{m}$), ako jo ohladimo do 0°C ?

$$4. \frac{3a+4}{3} - \frac{7a+5}{4} - \frac{8-7a}{6} + \frac{5-3a}{8} - \frac{3-7a}{12}$$

$$5. \frac{65\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{5}}{3\frac{5}{6}} \cdot \frac{8\frac{1}{2}}{3\frac{3}{5}}$$

$$6. \frac{26x^3y^4z^5}{45a^2b^3c^4} : \frac{39x^2y^3z^4}{40ab^2c^3}$$

$$7. \left(\frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) : \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{b} \right)$$

$$8. \frac{a^2+1}{a^2-1} + \frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}$$

9. Izračuni te-le produkte na 4 decimalke:

a) $24.83275 \cdot 2.0437$.

b) $27.0889 \cdot 0.3067$.

c) $6.354 \cdot 0.00875$.

10. Določi te-le kvocijente na 3 decimalke:

a) $815'9025 : 87'53$.

b) $12'345 : 678'908$.

c) $2'8752 : 0'0207$.

*11. 10 m velja 138 K; koliko velja 65 m?

*12. 45 l velja 54 K; koliko velja 10 l?

*13. Hitrosti poštnega voza in lokomotive se imata kakor 2 : 9; lokomotiva preteče v 2 urah 54 km; koliko pot naredi poštni voz v 12 urah?

14. Izmed treh zidarjev sezida prvi v 3 urah 151 dm^3 , drugi v 4 urah 265 dm^3 , tretji v 6 urah 381 dm^3 ; a) Koliko dm^3 sezidajo vsi v 1 uri? b) V koliko dneh sezidajo vsi trije 16420 dm^3 zida, ako delajo po 10 ur na dan?

15. $(x + a) : (x - a) = b : c$.

16. $4 : \frac{2x}{3} = 1 : \left(15 - \frac{x}{3}\right)$.

17. $(x + 1) : (x - 5) = (x + 3) : (x - 7)$.

18. $(8x - 1) : (4x + 2) = (6x - 9) : (3x - 4)$.

*19. Katerega števila tretjina je za 4 večja nego četrtina?

*20. Lokomotiva naredi v 1 uri pot 30 km in pride od A do B v 6 urah; koliko km dolgo pot bi morala narediti v 1 uri, da bi prišla od A do B v 5 urah?

21. Parni stroj, ki čini 4 konjske sile, vzdigne v 5 sekundah 1500 kg težko breme 1 m visoko; koliko kg vzdigne parni stroj, ki čini 6 konjskih sil, v 12 sekundah prav tako visoko?

22. $(16x^4 - 48x^3y + 108x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4) (4x^2 + 12xy - 9y^2)$.

23. $(64a^6 - 432a^3b^3 + 729b^6) : (4a^2 - 12ab + 9b^2)$.

24. $3a + 5b = a(4 + b)$. Misli si v tej enačbi a (b) kot neznanko ter jo poišči! (Preskušnja!)

25. 20 delavcev lahko izvrši neko delo v 18 dneh. V koliko dneh bode to delo zgotovljeno, ako čez 4 dni 12 delavcev odide, a se čez 11 dnij 8 delavcev zopet vrne?

26. Da se je izvršilo neko delo, delalo je sprva 20 mož 3 tedne po 8 ur na dan, potem 30 mož 4 tedne po 10 ur na dan in zadnjič 50 mož po 9 ur na dan. V koliko tednih bi izvršilo to delo 43 mož, ako bi delali po 12 ur na dan?

27. Ob 6ih zjutraj se odpelje poštni voz od A proti B ter preteče vsako uro po $7\frac{1}{2} \text{ km}$; 20 minut čez 2 popoldne odpelje se iz A železniški vlak, kateri naredi vsako uro 36 km dolgo pot ter dospe istočasno s poštnim vozom v B. Koliko km je od A do B?



Peti oddelek.

O potencah in korenih.

I. 0 potencah.

§ 122. Število a povišati na m to potenco ali a vzmnožiti (potencirati) z m se pravi, število a postaviti m krat kot faktor. (§ 39.) Število a imenujemo osnovno število ali podlogo, m potenčni eksponent, dobljeni produkt p pa m to potenco števila a , ter pišemo $a^m = p$. Potenca je tedaj produkt enakih faktorjev.

Vzmnoževanje ali potenciranje ima za sedaj kaj pomena le, ako je eksponent celo pozitivno število ter večji nego 1; razven tega morata biti podloga in eksponent neimenovani števili.

Prvotni pojem potence smo že raztegnili v § 39., vzemši, da je $a^1 = a$, in v § 56., dokazavši, da je $a^0 = 1$.

Izreki o potencah.

§ 123. 1. $a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ krat}) \cdot a \cdot a \cdot a \dots (n \text{ krat})$,
 $= a \cdot a \cdot a \dots (m + n) \text{ krat}$
 $= a^{m+n}$.

Potence istih podlog pomnožimo, ako vzmnožimo skupno podlogo z vsoto eksponentov.

2. Ako ta izrek obrnemo, dobimo

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,$$

t. j.: Število vzmnožimo z vsoto, ako je vzmnožimo z vsakim sumandom ter dobljene potence pomnožimo drugo z drugo.

§ 124. 1. Dve potenci istih podlog razdelimo, ako skupno podlogo vzmnožimo z diferenco dividendovega in divizorjevega eksponenta.

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

$$a^8 : a^3 = a^5.$$

$$\text{Dokaz. } a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m, \quad a^5 \cdot a^3 = a^{5+3} = a^8.$$

2. Kot obrat dobimo

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

t. j.: Število vzmnóžimo z diferenco, ako je vzmnóžimo z minuendom in subtrahendom ter prvo potenco z drugo razdelimo.

$$\begin{aligned} \S 125. \quad 1. \quad a^m \cdot b^m &= a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ krat}) \cdot b \cdot b \cdot b \dots (m \text{ krat}) \\ &= ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \dots (m \text{ krat}) \quad (\S 37.) \\ &= (ab)^m \qquad \qquad \qquad 2^3 \cdot 5^3 = 10^3. \end{aligned}$$

Potence istih eksponentov pomnožimo, ako produkt njih podlog vzmnóžimo s skupnim eksponentom.

2. Obratno dobimo:

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m, \qquad \qquad 10^3 = 2^3 \cdot 5^3,$$

t. j.: Produkt vzmnóžimo s številom, ako vzmnóžimo ž njim vsak faktor.

$$\begin{aligned} \S 126. \quad 1. \quad \frac{a^m}{b^m} &= \frac{a \cdot a \cdot a \dots (m \text{ krat})}{b \cdot b \cdot b \dots (m \text{ krat})} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots (m \text{ krat}) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^m \qquad \qquad \qquad \frac{21^4}{7^4} = 3^4. \end{aligned}$$

Dve potenci istih podlog razdelimo, ako vzmnóžimo kvocijent njunih podlog s skupnim eksponentom.

2. Če obrnemo ta izrek, dobimo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

t. j.: Kvocijent (ulomek) vzmnóžimo s številom, ako ž njim vzmnóžimo dividend in divizor (števec in imenovalec).

$$\begin{aligned} \S 127. \quad 1. \quad (a^m)^n &= a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots (n \text{ krat}) \\ &= a^{m+m+m+\dots} (n \text{ krat}) \\ &= a^{mn}, \qquad \qquad \qquad (a^4)^3 = a^{12}. \end{aligned}$$

Potenco vzmnóžimo s številom, ako podlogo vzmnóžimo s produktom obeh eksponentov.

2. obratno:

$$a^{mn} = (a^m)^n, \qquad \qquad a^{12} = (a^4)^3,$$

t. j.: Število vzmnóžimo s produktom, ako je vzmnóžimo z jednim faktorjem in dobljeno potenco še z drugim faktorjem.

3. Ako treba potenco zopet vzumnožiti, smemo eksponente zamenjati.

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

Dokaz. Po 1. je

$$(a^m)^n = a^{mn} \text{ in } (a^n)^m = a^{nm};$$

ker pa je $mn = nm$, je tudi $a^{mn} = a^{nm}$, tedaj $(a^m)^n = (a^n)^m$.

Kakšne predznake imajo potence.

§ 128. 1. $(+a)^m = a + a + a + a + \dots = +a^m$ (§ 48., 2, a).

Pozitivna podloga, vzumnožena s katerimkoli celim številom, dá vselej pozitivno potenco.

$$2. (-a)^2 = -a \cdot -a = +aa = +a^2,$$

$$(-a)^3 = -a \cdot -a \cdot -a = -aaa = -a^3,$$

$$(-a)^4 = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a = +aaaa = +a^4,$$

$$(-a)^5 = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a = -aaaaa = -a^5,$$

i. t. d. (§ 48., 2, b); v obče:

$$(-a)^{2m} = +a^{2m},$$

$$(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}.$$

Negativna podloga, vzumnožena s sodim številom, dá pozitivno, vzumnožena z lihim številom pa negativno potenco.

Potence z negativnimi eksponenti.

§ 129. Izrek o delitvi dveh potenc iste podloge, katerega izraža jednačba $a^m : a^n = a^{m-n}$ (§ 124., 1), ima doslej veljavo s pogojem, da je $m \geq n$. Ako pa je $m < n$ in sicer $m + p = n$, dobimo, izvršivši delitev po navedenem izreku, potenco z negativnim eksponentom; kajti

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+p} = a^{-p}.$$

Da dobi zakon, katerega izraža gori navedena jednačba, občno veljavo, moramo potencam z negativnimi eksponenti dati tak pomen, da velja prvotni pojem o potencah tudi zanje. Ta pomen pa dobimo, ako damo kvocijentu, katerega izraža a^{-p} , drugačno obliko. Dobimo namreč

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

Zato je

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p};$$

t. j.: Potenca z negativnim eksponentom je jednaka

ulomku, čegar števec je 1, imenovalec pa ista potenca s pozitivnim eksponentom.

* Da dokažemo ta izrek za eksponente, ki so posebna števila, določimo na pr. $a^2 : a^5$. Tu imamo

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3} \text{ in } \left. \begin{aligned} a^2 : a^5 &= \frac{a^2}{a^5} = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3} \end{aligned} \right\} \text{ tedaj } a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

Dostavek. Iz $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ izvira, da je $a^p \cdot a^{-p} = 1$ in $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$.

$$\text{Primer. } \frac{ab^{-2}}{3} = \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{a}{3b^2}; \quad \frac{a}{5c^{-3}} = \frac{a}{5} \cdot \frac{1}{c^{-3}} = \frac{a}{5} c^3 = \frac{ac^3}{5}.$$

Vsako potenco, ki se v števcu nahaja kot faktor, lahko prenesemo kot faktor v imenovalec, in obratno; v ta namen treba le eksponentu izpremeniti predznak v nasprotnega.

§ 130. Vsi izreki, katere smo dokazali o potencah s pozitivnimi eksponenti, veljajo prav tako tudi o potencah z negativnimi eksponenti. Kajti

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)};$$

$$(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m};$$

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}; \text{ i. t. d.}$$

Vzmnoževanje števil na drugo potenco ali kvadrat.

§ 131. Za kvadrat binoma smo dobili v § 50.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

t. j.: Kvadrat binoma je enak vsoti iz kvadrata prvega člena, dvojnega produkta obeh členov in kvadrata drugega člena.

Ako hočemo trinom $(a + b + c)$ povišati na drugo potenco, treba ga le smatrati za binom ter vzeti $(a + b)$ za prvi, c za drugi člen tega binoma. Potem pa dobimo

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2. \end{aligned}$$

Prav tako dobimo:

$$\begin{aligned}
 & (a + b + c + d)^2 = \\
 & = [(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2 \\
 & = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2, \\
 & \quad (a + b + c + d + e)^2 = \\
 & = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2 + \\
 & \quad + 2(a + b + c + d)e + e^2,
 \end{aligned}$$

i. t. d.

Iz tega izvajamo za vznoževanje polinomov na kvadrat ta-le tvorbeni zakon:

1. Prvi člen danega izraza dá sam svoj kvadrat.

2. Vsak nastopni člen dá po dve sestavini, namreč dvojni produkt iz vsote vseh predstojećih členov s tem členom in sam svoj kvadrat.

3. Vsota vseh teh sestavin je iskani kvadrat.

Primer.

$$\begin{aligned}
 (2a - 3b + 4c)^2 &= 4a^2 - 12ab + 9b^2 + 2(2a - 3b) \cdot 4c + 16c^2 \\
 &= 4a^2 - 12ab + 9b^2 + 16ac - 24bc + 16c^2.
 \end{aligned}$$

Dostavek. Obe sestavini, ki jih da vsak člen danega polinoma v kvadratu, lahko združimo tudi v jeden člen in sicer s tem, da prištejemo ta člen dvojni vsoti vseh predstojećih členov in to vsoto še s tem členom pomnožimo:

$$\begin{aligned}
 2a \cdot b + b^2 &= (2a + b) \cdot b; \\
 2(a + b) \cdot c + c^2 &= [2(a + b) + c] \cdot c; \text{ i. t. d.}
 \end{aligned}$$

§ 132. Ker moremo vsako dekadno število smatrati za polinom, urejen po padajočih potencah števila 10, zato velja pravilo, katero smo določili za vznoževanje sestavljenih algebraskih izrazov na kvadrat, tudi za dekadna števila. Na pr.

$$\begin{aligned}
 3417^2 &= (3000 + 400 + 10 + 7)^2 \\
 &= 3000^2 + 2 \cdot 3000 \cdot 400 + 400^2 + 2 \cdot 3400 \cdot 10 + 10^2 + \\
 &\quad + 2 \cdot 3410 \cdot 7 + 7^2.
 \end{aligned}$$

Ako pišemo te sestavine drugo pod drugo, dobimo:

3000 ² .. 9000000	ali krajše:	3 ² ... 9.
2. 3000 . 400 .. 2400000		2. 3. 4 ... 24.
400 ² .. 160000		4 ² ... 16.
2. 3400 . 10 .. 68000		2. 34. 1 ... 68.
10 ² .. 100		1 ² ... 1.
2. 3410 . 7 .. 47740		2. 341. 7 ... 4774.
7 ² .. 49		7 ² ... 49
11675889,		11675889.

Pri krajšem zapisovanju ničle niso napisane.

Za vzmnoževanje dekadnega števila na kvadrat (kvadrovanje dekadnega števila) velja torej to-le pravilo:

1. Prva ali najvišja številka danega števila dá sama svoj kvadrat

2. Vsaka nastopna številka dá v kvadratu dve sestavini: dvojno pred njo stoječe število, pomnoženo s to številko, in sama svoj kvadrat.

3. Te sestavine zapišemo drugo pod drugo takó, da pride vsaka nastopna za jedno mesto dalje proti desni, ter jih naposled seštejemo, kakor stojé; vsota je iskani kvadrat. Na pr.

3140 ²	31417 ²
3 ² ... 9	3 ² ... 9 .
2. 3. 1 ... 6	2. 3. 1 ... 6 .
1 ² ... 1	1 ² ... 1 .
2. 31. 4 ... 248	2. 31. 4 ... 248 .
4 ² ... 16	4 ² ... 16 .
9859600.	2. 314. 1 ... 628 .
	1 ² ... 1 .
	2. 3141. 7 ... 43974
	7 ² ... 49
	987027889

Kvadrat dekadnega števila ima ali dvakrat toliko številok kakor dano število ali pa jedno menj; kajti prva številka da v kvadratu jedno ali dve mesti, vsaka nastopna pa po dve mesti. Ako razstavimo tedaj kvadrat od desne proti levi na razdelke po dve številki — prvi razdelek na levi more imeti tudi le jedno številko — dobimo prav toliko razdelkov, kolikor številok ima dano število.

Dostavka. 1. Iz $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}$ razvidimo, da je računati kvadrat decimalnega ulomka prav tako, kakor kvadrat celega dekadnega števila; treba le v kvadratu števecem odrezati dvakrat toliko decimalk, kolikor jih ima decimalni ulomek. Kvadrat decimalnega ulomka ima torej vselej sodo število decimalk.

2. Sestavini, kateri dá druga in vsaka nastopna številka danega števila v kvadratu, lahko združimo v jedno samo sestavino, ako dvojnemu številu stoječemu pred to številko, pripišemo to novo številko, tako dobljeno število pa pomnožimo z ravno tisto številko. A vsak nastopni produkt moramo potem pomakniti za dve mesti dalje proti desni. V obče je namreč

$$(2A \cdot 10) \cdot p + p^2 = (2A \cdot 10 + p) p.$$

Ako izračunimo zadnji primer na ta način, dobimo

$$\begin{array}{r} 3^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9 \dots \\ 61.1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61 \dots \\ 624.4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2496 \dots \\ 6281.1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6281 \dots \\ 62827.7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 439789 \\ \hline 31417^2 \quad = \quad 987027889. \end{array}$$

Dostavek. Kvadrature okrajšanih števil računimo sploh po načinu okrajšane množitve. (§ 100., dostavek.)

Kubovanje števil.

$$\begin{aligned} \S 133. (a + b)^3 &= (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) (a + b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \end{aligned}$$

t. j.: Tretja potenca (kub) binoma je jednaka vsoti iz tretje potence prvega člena, trojnega kvadrata prvega člena, pomnoženega z drugim členom, trojnega prvega člena, pomnoženega s kvadratom drugega člena, in tretje potence drugega člena.

Da dobimo po tem izreku tretjo potenco (kub) trinoma $(a + b + c)$, treba le, da smatramo $(a + b)$ za jeden sam člen. Tako dobimo

$$\begin{aligned} &(a + b + c)^2 = \\ &= [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \end{aligned}$$

Prav tako dobimo :

$$\begin{aligned}(a + b + c + d)^3 &= [(a + b + c) + d]^3 = \\&= (a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c) d^2 + d^3 \\&= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 + c^3 \\&\quad + 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c) d^2 + d^3, \text{ i. t. d.}\end{aligned}$$

Iz tega izvira za kubovanje veččlenskega izraza ta-le tvorbeni zakon.

1. Prvi polinomov člen dá sam svoj kub.

2. Vsak nastopni člen da tri sestavine, namreč trojni kvadrat iz vsote vseh pred njim stoječih členov, pomnožen s tem členom, trojno vsoto pred njim stoječih členov, pomnoženo s kvadratom tega člena, in sam svoj kub.

3. Vsota vseh teh sestavin je zahtevani kub. Na pr.

$$\begin{aligned}(y^2 + 2y - 3)^3 &= \\&= y^6 + 6y^5 + 12y^4 + 8y^3 - 9(y^2 + 2y)^2 + 27(y^2 + 2y) - 27 \\&= y^6 + 6y^5 + 12y^4 + 8y^3 - 9y^4 - 36y^3 - 36y^2 + 27y^2 + 54y - 27 \\&= y^6 + 6y^5 + 3y^4 - 28y^3 - 9y^2 + 54y - 27.\end{aligned}$$

§ 134. Računajoč po tem tvorbenem zakonu kub dekadnega števila, na pr. 4213, dobimo :

$$4213^3 = (4000 + 200 + 10 + 3)^3 =$$

4000 ³ ... 64000000000	krajše:	4 ³ ... 64			
3.4000 ² .200 ... 9600000000	3. 4 ² .2 ...	96.			
3.4000 .200 ² ... 4800000000	3. 4 .2 ² ...	48.			
200 ³ ... 8000000	2 ³ ...	8			
3.4200 ² . 10 ... 529200000	3. 42 ² .1 ...	5292.			
3.4200 . 10 ² ... 1260000	3. 42 .1 ² ...	126.			
10 ³ ... 1000	1 ³ ...	1.			
3.4210 ² . 3 ... 159516900	3.421 ² .3 ...	1595169.			
3.4210 . 3 ² ... 113670	3.421 .3 ² ...	11367.			
3 ³ ... 27	3 ³ ...	27			
<u> </u>					
= 74778091597,					

Iz tega izvira, da je tretjo potenco (kub) dekadnega števila računiti tako-le:

1. Najprej vzumnoži prvo ali najvišjo številko danega števila na tretjo potenco.

2. Za vsako nastopno številko tvori po tri sestavine: trojni kvadrat pred njo stoječega števila, pomnožen s to številko, trojno pred njo stoječe število, pomnoženo s kvadratom te številke, in tretjo potenco te številke.

3. Te sestavine zapiši drugo pod drugo tako, da pride vsaka nastopna za jedno mesto dalje proti desni, potem jih seštej, kakor stojé. Na pr.

123 ³	3054 ³
1 ³ 1.	3 ³ 27
3 . 1 ² . 2 6.	3 . 30 ² . 5 1 350 0.
3 . 1 . 2 ² 12.	3 . 30 . 5 ² 22 50.
2 ³ 8.	5 ³ 125.
3 . 12 ² . 3 1296.	3 . 305 ² . 4 111 630 0.
3 . 12 . 3 ² 324.	3 . 305 . 4 ² 146 40.
3 ² 27	4 ³ 64
1860867	28484401464.

Tretja potenca dekadnega števila ima ali trikrat toliko številok kakor dano število, ali pa za dve, ali tudi za jedno menj; kajti prva številka danega števila ima v tretji potenci jedno, dve ali pa tri mesta, vsaka nastopna pa dá vselej tri mesta. Ako razstavimo torej tretjo potenco od desne proti levi na razdelke po tri mesta — prvi razdelek na levi ima lahko dve ali tudi le jedno številko — dobimo prav toliko razdelkov, kolikor številok ima dano število.

Dostavek. 1. Iz $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$ izvira, da moramo pri decimalnih ulomkih v števehem kubu odrezati 3krat toliko decimalk, kolikor jih ima dani decimalni ulomek.

Dostavek. 2. Tretjo potenco okrajšanih števil računimo sploh po načinu okrajšane množitve. (§ 100., dostavek.)

Naloge.

1. $a^5 \cdot a^4$.
2. $x^{2m} \cdot x^{2n}$.
3. $(2x)^3 \cdot (2x)^5$.
4. $c^{n+1} \cdot a^{n-1}$.
5. $3a^2x^2 \cdot 7a^3x^4$.
6. $2a^2m^3x^4 \cdot 3am^5x^2$.
7. $3a^2x \cdot 15ax^2 \cdot 4a^2x^3$.
8. $7am^2 \cdot 3b^2n^2 \cdot 8a^2bm^3n$.
9. $(8a^3x^2 - 5b^3y^2) \cdot 3x^2y^2$.
10. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3) \cdot 8a^3b$.
11. $(3m^2 - 8m - 5)(7m^2 + 5m - 6)$.

12. Izračuni:

a) 4^8 iz $4^5 = 1024$ in $4^3 = 64$;

b) 15^5 iz $15^3 = 3375$ in $15^2 = 225$;

c) $1'04^{10}$ iz $1'04^8 = 1'368569 \dots$ in $1'04^2 = 1'0816$;

d) $1'025^6$ iz $1'025^4 = 1'103813 \dots$ in $1'025^2 = 1'050625$.

13. $x^9 : x^3$.

14. $27a^6 : 3a^2$.

15. $a^{2n+1} : a^{n-1}$.

16. $30x^4y^3 : 5x^3y$.

17. $8x^{a+2b} : 12x^{2b-a}$.

18. $3a^9b^3c^4d^5 : a^4b^2cd^3$.

19. $104ab^3x^9 : (91a^5b^6x^7 : 7a^4b^4x)$.

20. $\frac{15ax^4}{8by^2} : \frac{3x^3}{4y}$.

21. $\frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5} : \frac{4a^6xy}{5bc^2z^4}$.

22. $(3x^3 - 6x^5 + 9x^7 - 12x^9) : 3x^2$.

23. $(24x^4 - 38a^2x^2 + 15a^4) : (4x^2 - 3a^2)$.

24. $2^3 \cdot 5^3$.

25. $25^2 \cdot 4^2$.

26. $4^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4$.

27. $(3a)^5 \cdot (4a)^5$.

28. $(x + y)^2 (x - y)^2$.

29. $(2x)^3$.

30. $(abc)^6$.

31. $(5ax)^4$.

32. $45^3 : 9^3$.

33. $x^n : (\frac{1}{3})^n$.

34. $(8a^2)^5 : (2a)^5$.

35. $(5a^2bc^2)^3 : (5ac)^4$.

36. $(a^2b^4x^3)^2 : (6ab^3x)^2$.

37. $(\frac{x}{2})^3$.

38. $(\frac{3a}{4b})^4$.

39. $(\frac{5am}{7bn})^3$.

40. $18x^4 \cdot (\frac{2y}{3x})^2$.

41. $(\frac{3}{8})^3 \cdot (\frac{4}{9})^2$.

42. $(\frac{3}{4})^3 \cdot (\frac{8}{9})^3 \cdot (\frac{6}{5})^3 \cdot (\frac{15}{4})^3$.

43. $(3\frac{5}{9})^6 \cdot (\frac{5}{9})^6$.

44. $(\frac{3x}{4a})^3 \cdot (\frac{2ax}{3by})^3 \cdot (\frac{20b^2}{x^2})^3$.

45. $(\frac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2})^4 \cdot (\frac{a + b}{x - y})^4$.

46. $(a^5)^3$.

47. $(x^3)^5$.

48. $(10a^2)^4$.

49. $(3m^2n^3)^2$.

50. $(2x^2y^4)^6$.

51. $(am^2x^3)^5$.

52. $(\frac{2}{3}a^4x^3)^3$.

53. $(\frac{5}{2}a^3b^2)^4$.

54. $(\frac{3a^2x}{4by^2})^3$.

55. $(\frac{7a^4m^2y^3}{8b^2n^3x^4})^3$.

56. $(\frac{a^4b^5c^2}{x^5y^7})^3 \cdot (\frac{x^4y^6}{a^3b^4c})^4$.

57. $(\frac{2a^2x^2}{3by^3})^3 \cdot (\frac{6ax^2}{5b^2y})^2 \cdot (\frac{3b^2}{5a^2})^4$.

58. $\left\{ \frac{(2x^3y^2)^3 \cdot (3x^4y^2)^2}{6x^2y^2} \right\}^3$.

59. $(-5)^3$.

60. $(-a^2)^3$.

61. $(-a^3)^2$.

62. $(-4x^3)^4$.

63. $(-a^2b^3)^5$.

64. $(-3x^3yz^2)^4$.

65. $(-\frac{3}{4})^3$.

66. $(-\frac{2}{7}a^2)^2$.

67. 3^{-2} .

68. 5^{-3} .

69. 15^{-1} .

70. 0.25^{-2} .

$$71. \left(-\frac{3a^2x}{5b^2y}\right)^5. \quad 72. \frac{1}{4-3}. \quad 73. \frac{3}{6-1}. \quad 74. a^5 \cdot a^{-3}.$$

$$75. -a^{2m} \cdot a^{-m}. \quad 76. 2^{-3} \cdot 4^{-3}. \quad 77. (x^{-2})^4. \quad 78. (x-1)^{-1}.$$

$$79. bx^2 \cdot b^{-1}x^{-3}. \quad 80. \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}. \quad 81. 5^{-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}.$$

$$82. -4a : (-a)^{-4}. \quad 83. a^{-4} : -a^4. \quad 84. (-6a-5) : (3a-1).$$

$$85. (2a+3b)^2. \quad 86. (8x-7y)^2. \quad 87. (5a^2-6y^3)^2.$$

$$88. \left(\frac{4a-2x}{3a+2x}\right)^2. \quad 89. \left(\frac{4x^2}{3} - \frac{5z^2}{2}\right)^2. \quad 90. \left(\frac{a^3m^2}{3x} + \frac{6x^2}{a^2m}\right)^2.$$

$$91. (a+2b-3c)^2. \quad 92. (4+2y-y^2)^2. \quad 93. (3x-25y+8z)^2.$$

$$94. (6x^3-5x^2+4x-3)^2. \quad 95. (7x^6-4x^4+x^2-8)^2.$$

$$96. \left(2 - \frac{a}{2} + \frac{2a^2}{3}\right)^2. \quad 97. \left(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4c} - \frac{4c}{5d}\right)^2.$$

$$98. (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2.$$

*99. Določi kvadrat od 2 desetice, 3 stotic, 4 tisočic, 1 desetine, 3 tisočin, 4 des.-tisočin.

$$100. 376^2. \quad 101. 2543^2. \quad 102. 5079^2. \quad 103. 73416^2.$$

$$104. 8'47^2. \quad 105. 74'06^2. \quad 106. 0'8315^2. \quad 107. 2'3456^2.$$

$$108. 2704^2. \quad 109. (37'082\dots)^2. \quad 110. (13'079\dots)^2. \quad 111. (4'6029\dots)^2.$$

$$112. (94^2)^2. \quad 113. 803^4. \quad 114. 5'27^4. \quad 115. 76^8.$$

$$116. (3x+2y)^3. \quad 117. (4a-3)^3. \quad 118. (2ax^2+3by^2)^3.$$

$$119. \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^3. \quad 120. \left(\frac{3x-2y}{5x+4y}\right)^3. \quad 121. \left(\frac{7m^2}{3n^2} + \frac{5p^2}{6q^2}\right)^3.$$

$$122. (y^2+2y-3)^3. \quad 123. (1-2a^2+a^4-a^8)^3.$$

$$124. \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 1\right)^3. \quad 125. \left(4a - \frac{2x^2}{3a} - \frac{9x^4}{8a^3}\right)^3.$$

$$126. 734^3. \quad 127. 862^3. \quad 128. 6035^3. \quad 129. 21009^3.$$

$$130. 78256^3. \quad 131. 9'17^3. \quad 132. 5'946^3. \quad 133. (69'023\dots)^3.$$

$$134. (0'8304\dots)^3. \quad 135. 6'043^3. \quad 136. (18'02\dots)^3. \quad 137. (6'084\dots)^3.$$

$$138. (57^3)^3. \quad 139. 0'62^9. \quad 140. 1'37^6. \quad 141. 1'05^{12}.$$

II. 0 korenih.

§ 135. Razkorenitev (*Wurzelausziehen, Radicieren*) služi nam takrat, kadar hočemo iz vrednosti dane potence ($a = p^m$) in nje eksponenta (m) poiskati pripadajočo podlogo (p).

Število a razkoreniti s številom m ali številu a poiskati m ti koren, se pravi iz potence a in eksponenta m izračunati podlogo. Dano potenco a imenujemo radikand ali kar število, dani eksponent m korenski eksponent (*Wurzelexponent*), iskano podlogo p pa m ti koren (*Wurzel*) števila a , ter pišemo

$$\sqrt[m]{a} = p.$$

Na pr. $4^3 = 64$, tedaj obratno $\sqrt[3]{64} = 4$.

Drugi in tretji koren imenujemo tudi kvadratni oziroma kubični koren.

Za sedaj ima $\sqrt[m]{a}$ le takrat kaj pomena, če je a zares m ta potenca kateregakoli celega ali ulomljenega števila in kadar sta radikand in eksponent neimenovani števili.

§ 136. Iz navedenega pojasnila izvira:

1. Koren, vzmnožen s korenskim eksponentom, dá radikand.

$$(\sqrt[m]{a})^m = a, \qquad (\sqrt[3]{27})^3 = 27.$$

2. Številu se ne izpremeni vrednost, ako je skaterimkoli številom vzmnožimo in z istim številom razkorenimo.

$$a = \sqrt[m]{(a)^m}; \qquad a = (\sqrt[m]{a})^m.$$

Zato moremo vsako število pretvoriti na koren. Na pr.

$$b = \sqrt[5]{b^5}; \qquad 3 = \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{81}; \qquad 5 = \sqrt[4]{5^4}.$$

Vzmnoževanje in razkorenjevanje sta tedaj nasprotna računa; razkorenjevanje je obrat vzmnoževanja.

3. Prvi koren vsakega števila je število samo.

Ker je $a^1 = a$, tedaj je tudi $\sqrt[1]{a} = a$

Za prvi koren ne pišemo niti eksponenta 1, niti korenskega znaka. Za drugi koren pišemo pač korenski znak, ne pa eksponenta 2.

$\sqrt[m]{a}$ pomeni torej $\sqrt[m]{a}$.

$$4. \sqrt[m]{1} = 1.$$

$$5. \sqrt[m]{0} = 0.$$

Izreki o korenih.

§ 137. 1. Produkt razkorenimo, ako razkorenimo vsak njegov faktor.

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}, \quad \sqrt[3]{8 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 4 = 8.$$

Dokaz. Ako je $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ zares pravi koren, mora dati, vzmnožen s korenskim eksponentom m , radikand ab . In res je

$$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m \quad (\S 125., 2) = ab \quad (\S 136., 1).$$

Uporabljajoč ta izrek, radikand lahko deloma razkorenimo, ako ima namreč kak faktor, ki se da razkoreniti z dotičnim številom. Na pr.

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt{4a} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} = 2\sqrt{a}; \quad \sqrt{245} = \sqrt{5 \cdot 49} = 7\sqrt{5}.$$

Tako moremo dostikrat korene, imajoče isti eksponent pa različne radikande, pretvoriti na take, ki imajo isti radikand, in jih potem še skrócić. Na pr.

$$\begin{aligned} \sqrt{8} + \sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{128} &= \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2} - \sqrt{64 \cdot 2} = \\ &= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Obrnivši prejšnji izrek dobimo

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab},$$

t.j. Korene istih korenskih eksponentov pomnožimo, ako produkt radikandov razkorenimo s skupnim korenskim eksponentom.

Uporabljajoč ta izrek in pa onega v § 136., 2. moremo obratno vsak korenov faktor spraviti pod korenski znak, in sicer tako, da dotični faktor vzmnožimo s korenskim eksponentom in to potenco pomnožimo z radikandom. Na pr.

$$a\sqrt{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \quad 2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}.$$

§ 138. 1. Kvocijent (ulomek) razkorenimo, ako razkorenimo dividend in divizor (števec in imenovalec).

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \quad \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}.$$

Dokaz. $\left\{ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \right\}^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} \text{ (§ 126., 2)} = \frac{a}{b} \text{ (§ 136., 1)}.$

2. Obratno dobimo $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}},$

t. j.: Dva korena istih korenskih eksponentov razdelimo, ako kvocijent iz obeh radikandov razkorenimo s skupnim korenskim eksponentom.

§ 139. 1. Potenco razkorenimo, ako razkorenimo podlogo, ali pa če potenčni eksponent razdelimo s korenskim eksponentom.

1) $\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad \sqrt[3]{(8^5)} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5.$

2) $\sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2.$

Dokaz.

1) $\left\{ (\sqrt[n]{a})^m \right\}^n = \left\{ (\sqrt[n]{a})^n \right\}^m \text{ (§ 127., 3)} = a^m \text{ (§ 136., 1)}.$

2) $\left(a^{\frac{m}{n}} \right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} \text{ (§ 127., 1)} = a^m.$

2. Obrnivši jednačbo 1.) dobimo

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)},$$

t. j.: Koren vzmnožimo s številom, ako ž njim vzmnožimo radikand.

Izvod. Kadar je treba število vzmnožiti in razkoreniti, izvrši se to lahko v kateremkoli redu.

3. Ako obrnemo jednačbo 2.), dobimo

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)},$$

t. j.: Število vzmnožimo z ulomkom, ako je vzmnožimo s števcem in razkorenimo z imenovalcem.

Potenca z ulomljenim eksponentom pomeni torej toliki koren, kakor kaže imenovalc, iz tolike podlogine potence, kakor kaže števec.

§ 140. Koren razkorenimo s številom, ako ž njim razkorenimo radikand, ali pa če ž njim pomnožimo korenski eksponent.

$$1) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{3};$$

$$2) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Dokaz.

$$1) \left\{ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right\}^m = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})^m} \text{ (§ 139., 2)} = \sqrt[n]{a} \text{ (§ 136., 1)}.$$

$$2) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^m} \text{ (§ 136., 2)} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^{mn}} \text{ (§ 136., 1)} = \sqrt[n]{a}.$$

Izvod. Ako je treba število razkoreniti z dvema številoma, razkorenimo je lahko ali z vsakim številom posamič v kateremkoli redu, ali pa kar s produktom obeh ob jednom.

§ 141. Korenu iz katerekoli potence se vrednost ne izpremeni, ako korenski in potenčni eksponent z istim številom pomnožimo ali razdelimo.

$$\text{Kajti } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}; \text{ in}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}.$$

Uporabljač prvi del tega izreka lahko pretvorimo vsakeršne korene na skupni korenski eksponent.

Recimo, da je treba korene $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[3]{c^3}$, $\sqrt[10]{d^7}$ pretvoriti na skupni korenski eksponent. Najmanjši skupni mnogokratnik danih korenskih eksponentov je 30; tedaj dobimo

$$30 : 2 = 15, \quad \text{torej} \quad \sqrt{a} = \sqrt[30]{a^{15}},$$

$$30 : 3 = 10, \quad \text{,,} \quad \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}},$$

$$30 : 5 = 6, \quad \text{,,} \quad \sqrt[5]{c^3} = \sqrt[30]{c^{18}},$$

$$30 : 10 = 3, \quad \text{,,} \quad \sqrt[10]{d^7} = \sqrt[30]{d^{21}}.$$

Zato moremo tudi korene, imajoče različne eksponente, množiti in deliti (§ 137., 2. in § 138., 2.), ako jih poprej pretvorimo na take, ki imajo isti korenski eksponent.

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[6]{a^5};$$

$$\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^9} : \sqrt[12]{a^4} = \sqrt[12]{a^9 : a^4} = \sqrt[12]{a^5}.$$

Uporabljač drugi del onega izreka okrajšujemo korene, kadar imata korenski in potenčni eksponent kako skupno mero.

$$\text{Na pr.} \quad \sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3}, \quad \sqrt[mp]{a^p} = \sqrt[m]{a}.$$

Kakšne predznake imajo koreni.

§ 142. 1. Pozitivno število, razkorenjeno s katerimkoli lihim številom, dá pozitiven koren.

$$\sqrt[3]{+27} = +3; \quad \text{kajti } (+3)^3 = +27.$$

$$\text{V obče:} \quad \sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}.$$

2. Negativno število, razkorenjeno s katerimkoli lihim številom, dá negativen koren.

$$\sqrt[3]{-27} = -3; \quad \text{kajti } (-3)^3 = -27.$$

$$\text{V obče:} \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}.$$

3. Pozitivno število, razkorenjeno s katerimkoli sodim številom, dá dve jednaki a različno zaznamovani števili.

$$\sqrt[4]{+16} = \pm 2;$$

$$\text{kajti } (+2)^4 = +16 \quad \text{in} \quad (-2)^4 = +16.$$

$$\text{V obče:} \quad \sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a}.$$

4. Sedaj si treba ogledati še $\sqrt[2n]{-a}$. Ako vzmnožimo bodisi pozitivno bodisi negativno število s sodim številom, nikdar ne dobimo negativnega števila; zatoorej pomeni $\sqrt[2n]{-a}$ neko število, katerega ni

med onimi, s katerimi smo se pečali doslej. To novo število imenujemo imaginarno (umišljeno) število (*imaginäre Zahl*), v nasprotje vsem drugim številom, katera imenujemo realna (istinita) števila (*reelle Zahlen*).

Na pr. $\sqrt{-4}$ ne more biti niti $+2$ niti -2 , kajti $(+2)^2 = +4$ in $(-2)^2 = +4$.

Sod koren iz negativnega radikanda je imaginarno število.

Dasi imaginarno število $\sqrt[2n]{-a}$ v aritmetiki ne pomeni nič drugega nego število, katero dá, $2n$ krat kot faktor vzeto, število $-a$, vender ga ne kaže v matematiki prezirati, kajti že v aritmetiki je pri višjih algebrajskih računih dostikrat prav koristno, y geometriji pa ima prav določen pomen. Ako dobimo v čisto aritmetični nalogi, v kateri se more vprašati le po realnem številu, imaginarno število za rezultat, kaže to, da se naloga z danimi pogoji ne da razrešiti.

Iracijonalna števila.

§ 143. Ko smo v § 135. pojasnili pojem izraza $\sqrt[m]{a}$, smo vzeli, da je radikand a m ta potenca kateregakoli celega ali ulomljenega števila.

Ako pa celo število a ni m ta potenca kakega celega števila, potem $\sqrt[m]{a}$ ne more biti niti celo število niti ulomek; vender se da približno izraziti z ulomkom in sicer tako natančno, kakor le hočemo.

Recimo na pr., da nam je določiti $\sqrt{2}$. Ker je 2 med $1^2 = 1$ in $2^2 = 4$, zato je $\sqrt{2}$ med 1 in 2. Dalje je 2

$$\text{med } 1'4^2 = 1'96 \quad \text{in } 1'5^2 = 2'25,$$

$$,, \quad 1'41^2 = 1'9881 \quad ,, \quad 1'42^2 = 2'0164,$$

$$,, \quad 1'414^2 = 1'999396 \quad ,, \quad 1'415^2 = 2'00225, \text{ i. t. d.}$$

Tedaj je $\sqrt{2}$ med $1'4$ in $1'5$

$$,, \quad 1'41 \quad ,, \quad 1'42$$

$$,, \quad 1'414 \quad ,, \quad 1'415 \text{ i. t. d.}$$

Iz tega razvidimo, da je $\sqrt{2}$ med dvema številoma, kateri lahko toliko zbližamo, kolikor le hočemo; da ima torej $\sqrt{2}$ določeno vrednost, katere sicer ne moremo izračunati s popolno natančnostjo, a vender tako natančno, kakor hočemo.

§ 144. Števila, katerih ne moremo po vsem natančno izraziti niti s celimi števili niti z ulomki, a z ulomki približno tako natančno, kakor le hočemo, imenujemo iracijonalna števila (*irrationale Zahlen*), v nasprotje celim in ulomljenim številom, katera zovemo racijonalna števila (*rationale Zahlen*).

Z iracijonalnimi števili računati se pravi, računati z njih približnimi vrednostmi. Ker so pa te približne vrednosti racijonalna števila, veljajo tudi o iracijonalnih številih vsi občni izreki, katere smo dokazali o racijonalnih številih.

§ 145. Ulomek, čegar imenoalec je iracijonalen monom ali binom, pretvorimo lahko, ne da bi mu izpremenili vrednost, na tak ulomek, ki ima racijonalen imenoalec; v ta namen treba le števec in imenoalec pomnožiti s primernim faktorjem.

Ulomek oprostiti iracijonalnega imenovalca se pravi, imenoalec poracijonaliti (*den Nenner rational machen*).

Tu se pečajmo z nekaterimi lažjimi slučaji.

1. Ako hočemo ulomku, imajočemu obliko $\frac{\check{s}}{\sqrt[m]{a^n}}$, kjer je $m > n$,

dati racijonalen imenoalec, treba le števec in imenoalec pomnožiti z $\sqrt[m]{a^{m-n}}$. Kajti

$$\frac{\check{s}}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{\check{s} \sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n} \sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{\check{s} \sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{\check{s} \sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

$$\text{Na pr. } \frac{\check{s}}{\sqrt{a}} = \frac{\check{s} \sqrt{a}}{a}; \quad \frac{3\check{s}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{3\check{s}\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}}{a} = \frac{3\check{s}\sqrt[10]{a^9}}{a}.$$

2. Ako hočemo ulomek, ki ima obliko $\frac{\check{s}}{a \pm \sqrt{b}}$ ali $\frac{\check{s}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ pre-

tvoriti na ulomek z racijonalnim imenovalcem, treba le števec in imenoalec pomnožiti z $a \mp \sqrt{b}$ oziroma s $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. Kajti

$$\frac{\check{s}}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{\check{s}(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})(a \mp \sqrt{b})} = \frac{\check{s}(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b};$$

$$\frac{\check{s}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\check{s}(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{\check{s}(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

Na pr.
$$\frac{3}{5 - \sqrt{2}} = \frac{3(5 + \sqrt{2})}{5^2 - 2} = \frac{15 + 3\sqrt{2}}{23}.$$

$$\frac{15}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{15(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = 5(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

§ 146. Ako je v jednačbi neznanka pod korenskim znakom, prav lahko odpravimo koren. V ta namen uredimo jednačbo tako, da stoji koren, katerega hočemo odpraviti, sam na jedni strani, potem pa vzmnožimo oba dela jednačbe s korenskim eksponentom. Ako v jednačbi neznanko oprostimo korenskega znaka, pravimo, da jednačbo poracijonalimo (*Die Gleichung rational machen*).

Recimo, da treba poracijonaliti na pr. jednačbo $\sqrt{2x + 3} = 5$. Jednako vzmnoženo z enakim da jednako. Če vzmnožimo oba dela jednačbe na kvadrat, dobimo racijonalno jednačbo $2x + 3 = 25$, ki se da prav lahko razrešiti.

Računanje kvadratnega korena.

§ 147. Iz zakona (§ 131.), po katerem so sestavljene sestavine polinoma v njega kvadratu, razvidimo, da nam je računati kvadratni koren urejenega polinoma po tem-le navodilu:

1. Prvi člen urejenega polinoma je kvadrat prvega korenovega člena. Prvi korenov člen dobiš torej, ako izračuniš kvadratni koren prvega radikandovega člena. Kvadrat dobljenega prvega korenovega člena odštej od radikanda.

2. Prva dva člena v ostanku imata oni dve sestavini, kateri da nastopni korenov člen v kvadratu, in sicer je prvi člen v ostanku produkt iz dvojnega že najdenega korena in nastopnega korenovega člena. Ako torej razdeliš prvi člen ostanka z dvojnem že znanim korenom, dobiš nastopni korenov člen. Potem tvori sestavini, kateri da ta novi korenov člen v kvadratu; v ta namen prištej ta novi člen dvojnemu že znanemu korenu ter vsoto pomnoži z ravno tem členom (§ 131., dostav.), dobljeni produkt pa odštej od polinomovega ostanka.

3. To postopanje nadaljuj, dokler nisi vzel vseh radikandovih členov v pošte.

Ako ne dobiš nobenega ostanka, tedaj je dani polinom popoln kvadrat in dobljeni kvadratni koren racionalen; če pa dobiš ostanek, je kvadratni koren iracionalno število.

Primer.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25} = x^2 + 3x - 5 \\
 \underline{x^4} \\
 + 6x^3 - x^2 \qquad \qquad \qquad : (2x^2 + 3x) \cdot 3x \\
 + 6x^3 + 9x^2 \\
 \hline
 - 10x^2 - 30x + 25 : (2x^2 + 6x - 5) \cdot - 5 \\
 - 10x^2 - 30x + 25 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

§ 148. Prav tako izvira iz zakona (§ 132.), po katerem so sestavljene sestavine posamičnih korenovih števil v kvadratu, da je računati kvadratni koren celega dekadnega števila po tem-le navodilu:

1. Število razdeli, pri jednicah začnši, na razdelke po dve številki — prvi razdelek na levi more imeti tudi le jedno številko — potem poišči največje število, katerega kvadrat se nahaja v prvem razdelku na levi ter to zapiši kot prvo številko v koren. Kvadrat te prve korenove številke odštej od prvega razdelka.

2. Ostanku pripiši nastopni radikandov razdelek. Tako dobljeno število brez njega zadnje številke razdeli z dvojnimi že znanim korenem ter kvocijent zapiši kot novo številko v koren, ob enem pa tudi k divizorju. Tako popolnjeni divizor pomnoži z novo korenovo številko, produkt pa odštej od dividenda, kateremu pa moraš privzeti prej izpuščeno številko.

3. To postopanje nadaljuj, dokler nisi vzel v račun vseh radikandovih razdelkov.

Ako dobiš naposled kak ostanek, tedaj je kvadratni koren danega števila iracionalno število. Da to natančneje določiš, pripiši zadnjemu in vsakemu nastopnemu ostanku po dve ničli, sicer pa računi kakor poprej. V kvadratnem korenu postavi decimalno točko, predno vzameš prvi dve ničli v račun.

Na pr.	$\sqrt{3 76 36} = 194$	$\sqrt{23 61} = 48'59 \dots$
	<u>1</u>	<u>16</u>
	276 : 2...2.1	761 : 8s
	<u>29.9...261</u>	<u>704</u>
	1536 : 38...2.19	5700 : 96s
	384.4... <u>1536</u>	<u>4825</u>
	0	<u>87500 : 9709</u>
		<u>87381</u>
		119

Produkt iz vsakokratnega popolnjenega divizorja in nove številke lahko kar takoj, ko množiš, ob jednom od dividenda odštevaš. Prejšnja primera dobita potem to-le obliko:

$\sqrt{3 76 36} = 194$	$\sqrt{23 61} = 48'59 \dots$
276 : 29	761 : 8s
1536 : 384	5700 : 96s
0	87500 : 9709
	119

§ 149. 1. Kvadratni koren decimalnega ulomka računimo prav tako kakor kvadratni koren celega števila; vendar moramo decimalni ulomek razdeliti od decimalne točke proti levi in proti desni na razdelke po dve mesti ter v korenu postaviti decimalno točko, predno vzamemo prvi razdelek decimalk v račun. Kadar ima zadnji razdelek decimalk na desni le jedno številko, pripišemo mu ničlo, da dobimo sodo število decimalk.

Na pr.	$\sqrt{1 52'27 56} = 12'34$	$\sqrt{68'30} = 8'2643 \dots$
	52 : 22	430 : 162
	827 : 243	10600 : 1646
	9856 : 2464	72400 : 16524
	0	630400 : 165283
		134551

2. Kvadratni koren navadnega ulomka računimo tako, da izračunimo kvadratni koren njegovega števca in imenovalca, ali pa tako, da pretvorimo navadni ulomek na decimalnega ter potem izračunimo kvadratni koren tega ulomka. Na. pr.

$$\sqrt{\frac{144}{529}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{529}} = \frac{12}{23}; \quad \sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{0'625} = 0'7905 \dots$$

§ 150. Ako smo v korenu določili n veljavnih števil, dobimo še $n-1$ številko na okrajšani način in sicer tako, da razdelimo ostanek z dvojnimi že najdenimi koreni, uporabljajoč okrajšano delitev, kakor se to razvidi v teh-le primerih, če primerjamo najvišja mesta:

$\begin{array}{r} \sqrt{138} = 11'74734\dots \\ 38 \quad \quad \quad : 2_1 \\ 1700 \quad \quad : 22_7 \\ \hline 11100 \quad : 234_4 \\ \hline 172400 \quad : 2348_7 \\ 799100 \quad : 23494_3 \\ 9427100 : 234946_4 \\ 0029244 \end{array}$	$\begin{array}{r} \sqrt{138} = 11'74734\dots \\ 38 \quad \quad \quad : 2_1 \\ 1700 \quad \quad : 22_7 \\ \hline 11100 \quad : 234_4 \\ \hline \text{ostanek } 1724 : 234.8 \\ 80 \\ 10 \\ 1 \end{array}$
---	--

Ostanek 0'1724 ne izvira iz obeh sestavin, kateri daje vsaka zadnjih treh korenovih števil v kvadratu (radikandu), ampak le iz produkta, sestojčega iz dvojnega že dobljenega korena in teh števil. [Kvadrat (7) tisočin da le (49) milijonin]. Zadnje tri številke dobimo torej, ako izvršimo delitev.

$$0'1724\dots : 234.8.$$

Zadnjo divizorjevo številko je treba vsakokrat odrezati ter jo uporabiti za popravo.

Ako hočeš v kvadratnem korenu na okrajšani način izračunati le določeno število decimal, izračuni najprej na navadni način polovico zahtevanih decimal in še jedno, potem še le postopaj na okrajšani način.

Ako bi hotel na pr. $\sqrt{48532}$ določiti na 2, 3, 4, 5, 6 mest, dobiš v korenu 5, 6, 7, 8, 9 veljavnih števil; od teh pa smeš po okrajšani delitvi določiti le 2, 2, 3, 3, 4 številke.

$\sqrt{14'0382\dots}$ moreš izračunati na 4, $\sqrt{669'62\dots}$ in $\sqrt{669'6\dots}$ na tri decimalke.

Računanje tretjega korena.

§ 151. Iz tvorbenega zakona za tretjo potenco veččlenskega izraza (§ 133.) izvira obratno, da nam je računati tretji koren urejenega polinoma po tem-le navodilu:

1. Za prvi člen iskanega korena vzemi tretji koren prvega radikandovega člena ter njega tretjo potenco odštej od radikanda.

2. Prvi člen ostalega polinoma razdeli s trojnim kvadratom že znanega korena; kvocijent je nastopni korenov člen. Potem tvori one sestavine, katere dá ta novi korenov člen v kubu, namreč: trojni kvadrat že prej znanega korena, pomnožen s tem členom, trojni prejšnji del korena, pomnožen s kvadratom tega člena, in kub tega člena, ter odštej vsoto teh treh sestavin od prejšnjega radikandovega ostanka.

3. To nadaljuj. Ako naposled ne dobiš nobenega ostanka, je tretji koren racionalen, sicer pa je iracionalen. Na pr.

$$\sqrt[3]{y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27} = y^2 - 2y + 3$$

$$\begin{array}{r}
 y^6 \\
 \hline
 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 \quad : \quad 3y^4 \\
 - 6y^5 + 12y^4 - 8y^3 \\
 \hline
 \quad + 9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 : (3y^4 - 12y^3 + 12y^2) \\
 \quad + 9y^4 - 36y^3 + 36y^2 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad + 27y^2 - 54y + 27 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

§ 152. Iz tvorbenega zakona za kub celega dekadnega števila (§ 134.) razvidimo, da je računati tretji koren dekadnega celega števila po tem-le navodilu:

1. Število razdeli, pri jednicah začenshi, proti levi na razdelke po tri številke — prvi razdelek na levi more imeti tudi le dve ali pa jedno številko —; potem poišči največje število, katerega kub se nahaja v prvem razdelku, ter to zapiši kot prvo številko v koren. Kub te korenove številke odštej od prvega radikandovega razdelka.

2. Ostanku pripiši nastopni razdelek; tako dobljeno število brez zadnjih dveh številk razdeli s trojnim kvadratom že znanega korena, kvocijent pa zapiši kot novo številko v koren. Potem tvori one sestavine, katere dá ta nova korenova številka v kubu, namreč: trojni kvadrat že znanega korena, pomnožen s to številko, trojni že znani koren, pomnožen s kvadratom te številke in kub te številke; prvo sestavino zapiši pod dividend, vsako nastopno pa za jedno mesto dalje proti desni; potem pa odštej vsoto vseh treh sestavin od dividenda, privzemši njega prej izpuščeni dve številki.

3. To nadaljaj, dokler nisi vzel vseh radikandovih razdelkov v račun.

Ako dobiš naposled ostanek, je tretji koren iracijonalen, izračuniš pa ga lahko tako natančno, kakor le hočeš. V ta namen postavi v korenu decimalno točko, potem pa pristavi zadnjemu in vsakemu nastopnemu ostanku po tri ničle, sicer pa računi kakor poprej.

Na pr.	$\sqrt[3]{76 765 625} = 425$	$\sqrt{10} = 2'15 \dots$
$4^3 \dots$	$\begin{array}{r} 64 \\ 12765 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ 2000 : 12 \end{array}$
$3.4^2 \cdot 2 \dots$	96	12
$3.4 \cdot 2^2 \dots$	48	6
$2^3 \dots$	8	1
	$2677625 : 5292 \dots 3.4^2$	$739000 : 1323$
$3.4^2 \cdot 5 \dots$	26460	6615
$3.42 \cdot 5^3 \dots$	3150	1575
$5^3 \dots$	125	125
	0	61625

§ 153. 1. Prav tako postopamo, kadar računimo tretji koren decimalnega ulomka; vendar moramo decimalni ulomek razdeliti od decimalne točke proti levi in proti desni v razdelke po tri številkke ter v korenu postaviti decimalno točko, predno vzamemo prvi razdelek decimalk v račun.

Na pr. $\sqrt[3]{13'144|256} = 2'36$ $\sqrt[3]{0'002|360} = 0'133 \dots$

Račun izvrši tako, kakor v primerih § 152.

2. Tretji koren navadnega ulomka izračuniš, ako izračuniš tretji koren njegovega števca in imenovalca, ali pa, ako pretvoriš navadni ulomek na decimalni ulomek ter izračuniš njega tretji koren.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{4}{7} \quad \sqrt[3]{5\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5\frac{2}{3}} = 1'7828 \dots$$

V zadnjem slučaju ne smeš razdelkov popolnjevati z ničlami, marveč s številko 6.

§ 154. Ako smo z navadnim razkorenjevanjem izračunili n veljavnih števil, dobimo iz mordašnjega ostanka še $n-1$ številko

v korenu takó, da ostanek razdelimo s trikratnim kvadratom že dobljenega korena, izpustivši v le — tem zadnjo številko. Da je tako okrajšano računanje pravo, vidimo iz nastopnih vzgledov, če primerjamo najvišje veljavne številke.

$$\sqrt[3]{3} = 1.4422 \dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 2000 \quad : 3 \\ 12 \\ 48 \\ 64 \\ \hline 2560 \ 00 : 588 \\ 2352 \\ 672 \\ 64 \\ \hline 140 \ 16000 : 62208 \\ 124 \ 416 \\ 17288 \\ \hline 15 \ 57112000 : 6238092 \\ 12 \ 476184 \\ 173048 \\ \hline 3 \ 09320552 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{3} = 1.4422 \dots$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 2000 : 3 \\ 12 \\ 48 \\ 64 \\ \hline 256 \ 000 : 588 \\ 235 \ 2 \\ 672 \\ 64 \\ \hline 140 \ 16 : 62 \ 20,8 \\ 16 \\ 4 \end{array}$$

Ko smo odrezali zadnjo divizorjevo mesto, okrajšamo še ostanek in divizor za jednoliko mest tako, da ima divizor le še $n-1$ številko.

Ako hočemo v tretjem korenu izračunati le določeno število decimalk, moramo vsakako (kakor v § 150.) več kakor polovico zahtevanih veljavnih številk izračunati z resničnim razkorenjevanjem, potem še le smemo dalje računati na okrajšani način.

Ako je treba na pr. $\sqrt[3]{48532}$ določiti na 2, 3, 4, 5 mest, dobi koren 4, 5, 6, 7 veljavnih številk, od katerih moramo 3, 3, 4, 4 mesta določiti z resničnim razkorenjevanjem.

$\sqrt[3]{8'43562} \dots$ in $\sqrt[3]{19'436987} \dots$ lahko določiš na 4, $\sqrt[3]{1890'342} \dots$ pa na 3 decimalke.

Naloge.

1. $\sqrt{4 \cdot 49}$.
2. $\sqrt{9 \cdot 16}$.
3. $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$.
4. $\sqrt[3]{8a^3x^3}$.
5. $\sqrt[4]{16a^4b^4}$.
6. $\sqrt[5]{32(a+b)^5}$.
7. $\sqrt{4a}$.
8. $\sqrt[3]{16}$.
9. $\sqrt[4]{x^5}$.
10. $x\sqrt{y^3z^3}$.
11. $\sqrt{9a^3b}$.
12. $\sqrt[3]{x^3y^5z^4}$.
13. $\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}$.
14. $\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48}$.
15. $\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{128}$.
16. $9\sqrt{48} - 3\sqrt{75} - 2\sqrt{12}$.
17. $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$.
18. $4\sqrt{28} + 5\sqrt{63} - 3\sqrt{175}$.
19. $\sqrt{a^3} - \sqrt{a}$.
20. $\sqrt{a^2x} + 2\sqrt{b^2x} + 3\sqrt{c^2x}$.
21. $5\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16}$.
22. $4\sqrt[3]{3x} - 2\sqrt[3]{24x} + \sqrt[3]{192x}$.
23. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$.
24. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$.
25. $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$.
26. $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}$.
27. $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}$.
28. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{xy}$.
29. $3\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} - 2\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{32}$.
30. $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{xy}$.
31. $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{6b} \cdot \sqrt{3ab}$.
32. $\sqrt{ab} \sqrt{\frac{x}{a}} \cdot \sqrt{\frac{y}{b}}$.
33. $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$.
34. $(8 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7})$.
35. $(\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{15} + \sqrt{20})$.
36. $(\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{48})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})$.
37. $(2 + \sqrt{3})^2$.
38. $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$.
39. $(2\sqrt{8} - 6\sqrt{18} + 3\sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$.
40. $(3\sqrt{8} - 5\sqrt{32}) : \sqrt{2}$.

Spravi pri teh-le korenih faktor pod korenski znak:

41. $3\sqrt{5}$.
42. $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.
43. $3\sqrt[7]{19}$.
44. $4x\sqrt[3]{x}$.
45. $\frac{x}{y} \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$.
46. $\frac{x^2y}{a^2b} \sqrt{\frac{a^3b}{x^3y}}$.
47. $(x - y) \sqrt{\frac{x + y}{x - y}}$.
48. $\sqrt[4]{\frac{9}{64}}$.
49. $\sqrt[2]{\frac{7}{9}}$.
50. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$.
51. $\sqrt[2]{\frac{1}{4}}a$.
52. $\frac{1}{x - y} \sqrt{(x^2 - y)^2}$.
53. $\sqrt[3]{\frac{8a^4b}{27c^4}}$.
54. $\sqrt[4]{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt[4]{\frac{8}{9}}$.

$$55. \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}}. \quad 56. \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}}. \quad \times 57. \sqrt{\frac{a^6 b^3}{x^3 y^7}} \cdot \sqrt{\frac{xy^5}{a^4 b^3}}.$$

$$58. \sqrt[5]{\frac{a^2 b^2}{c^4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{a^4 c}{b}} \cdot \sqrt[5]{\frac{b^4}{ac^2}}. \quad 59. \left(\sqrt{\frac{b^4}{a^3}} - \sqrt{\frac{a^2}{b}} \right) \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$60. \sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{8}. \quad 61. \sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3}. \quad 62. \sqrt[3]{48x} : \sqrt[3]{6x}.$$

$$63. \sqrt{87\frac{1}{2}} : \sqrt{3\frac{1}{2}}. \quad 64. \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}. \quad 65. \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a - b}}.$$

$$66. \frac{\sqrt[3]{a^5 b^9 x}}{\sqrt[3]{a^2 b^7 x^4}}. \quad 67. \sqrt[5]{\frac{a^3 b^4 c^7}{x^4 y^8}} : \sqrt[5]{\frac{c^2 x}{a^2 b y^3}}. \quad \times 68. \sqrt[3]{8^2}.$$

$$69. \sqrt{25^3}. \quad 70. \sqrt[6]{64^5} - \sqrt[4]{16^3}. \quad 71. \sqrt{(a^2)^3} + a\sqrt{(a^3)^2}.$$

$$72. \sqrt{(x^2 - 2xy + y^2)^3}. \quad 73. \sqrt{5^4}. \quad 74. \sqrt[3]{a^6}. \quad 75. \sqrt{2^6} + \sqrt[4]{2^8}.$$

76. Pretvori na korene in izračuni:

$$a) 25^{\frac{1}{2}}, \quad b) 16^{\frac{1}{4}}, \quad c) 8^{\frac{2}{3}}, \quad d) 32^{\frac{2}{5}}, \quad e) 48^{0.5}, \quad f) 81^{0.25}.$$

$$g) 64^{1.5}, \quad h) 16^{1.75}, \quad i) 9^{-\frac{1}{2}}, \quad k) 125^{-\frac{1}{2}}, \quad l) \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}, \quad m) \left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$77. x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}}. \quad 78. a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{2}{3}}. \quad 79. 3^{\frac{3}{4}} : 27^{\frac{3}{4}}. \quad 80. 243^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{2}{3}}.$$

$$81. x^{\frac{5}{4}} : x^{\frac{4}{5}}. \quad 82. x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{m-1}{n}}. \quad 83. (\sqrt{2})^3. \quad 84. (\sqrt{a^3})^2.$$

$$85. (\sqrt[4]{ab^2c^3})^3. \quad 86. \left(\sqrt[3]{\sqrt{a}}\right)^3. \quad 87. (\sqrt{a})^3 \cdot \sqrt{a}. \quad 88. (\sqrt[7]{a})^5 \cdot (\sqrt[7]{a})^2.$$

$$89. (2 + \sqrt{3})^2. \quad 90. (a - \sqrt{b})^2. \quad \times 91. (2\sqrt{8} - 3\sqrt{2})^2.$$

$$\times 92. (\sqrt{2} + \sqrt{8})^3. \quad 93. (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt{a})^3. \quad \times 94. (4a\sqrt[3]{b} - 3b\sqrt[3]{a})^3.$$

$$95. \sqrt[3]{\sqrt{64}}. \quad 96. \sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{10}}}. \quad 97. \sqrt[3]{\sqrt{2}}. \quad 98. \sqrt[3]{\sqrt{a}}.$$

$$99. \sqrt{\sqrt{256}}. \quad 100. \left(\sqrt[4]{\sqrt[2]{a^8}}\right)^6. \quad 101. \sqrt{x}\sqrt{x}. \quad 102. \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

103. Okrajšaj te-le korene:

$$a) \sqrt[4]{x^2}, \quad b) \sqrt[9]{a^{12}}, \quad c) \sqrt[18]{x^{15}}, \quad d) \sqrt[2n]{a^{3n}}.$$

104. Pretvori te-le korene na skupni korenski eksponent:

$$a) \sqrt{x} \text{ in } \sqrt[3]{x^2}; \quad b) \sqrt[3]{a^2}, \quad \sqrt[4]{b^3} \text{ in } \sqrt[6]{c^5}.$$

$$105. \sqrt[8]{16} \cdot \sqrt{2} \quad 106. \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a}. \quad 107. 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}.$$

$$108. \sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b}. \quad 109. \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}. \quad 110. \sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[4]{a}.$$

$$111. \sqrt[3]{9} : \sqrt{3}. \quad 112. \sqrt[5]{a^4} : \sqrt[3]{a^2}. \quad 113. (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}) : \sqrt[6]{2}.$$

Pretvori te-le ulomke na take, ki imajo racionalen imenovallec:

$$114. \frac{2}{\sqrt{2}}. \quad 115. \frac{8}{\sqrt{24}}. \quad 116. \frac{9}{\sqrt[3]{5}}. \quad 117. \frac{a}{\sqrt{a}}.$$

$$118. \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[5]{a^2}}. \quad 119. \frac{2 + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}. \quad 120. \frac{2}{5 + \sqrt{2}}. \quad 121. \frac{6\sqrt{3}}{3 - \sqrt{5}}.$$

$$122. \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}. \quad 123. \frac{3 - \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}. \quad 124. \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}.$$

$$125. \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}.$$

Poracijonali te-le jednačbe ter jih potem razreši:

$$126. 3\sqrt{x-1} = 4. \quad 127. \sqrt{x} - 3 = 5.$$

$$128. 17 - 2\sqrt{x} = 15. \quad 129. 5\sqrt{x-14} = 4 + 3\sqrt{x}.$$

$$130. 3\sqrt{6x+7} = 5\sqrt{5x-6}. \quad 131. \sqrt{x+1} = 5 - \sqrt{x-1}.$$

$$132. 4 - \sqrt{x} = \sqrt{4+x}. \quad 133. \frac{4}{\sqrt{x-4}} = \frac{3}{\sqrt{x-7}}.$$

$$134. \sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2}. \quad 135. \sqrt{9m^4 - 12m^2n^2 + 4n^4}.$$

$$136. \sqrt{x^4 - 6ax^3 + 11a^2x^2 - 6a^3x + a^4}.$$

$$137. \sqrt{16m^6 + 16m^5 + 4m^4 - 16m^3 - 8m^2 + 4}.$$

$$138. \sqrt{16a^6 - 24a^5 + 25a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1}.$$

$$139. \sqrt{9y^6 - 12y^5 + 10y^4 - 28y^3 + 17y^2 - 8y + 16}.$$

$$140. \sqrt{25 - 70a + 139a^2 - 236a^3 + 235a^4 - 198a^5 + 121a^6}.$$

$$141. \sqrt{\left(\frac{x^4}{9} - \frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{12} - x + 1\right)}.$$

$$142. \sqrt{1296}.$$

$$143. \sqrt{7056}.$$

$$144. \sqrt{11664}.$$

$$145. \sqrt{135424}.$$

$$146. \sqrt{556516}.$$

$$147. \sqrt{226576}.$$

$$148. \sqrt{1920996}.$$

$$149. \sqrt{422220304}.$$

$$150. \sqrt{54782211136}.$$

$$151. \sqrt{1406'25}.$$

$$152. \sqrt{27'973521}.$$

$$153. \sqrt{0'00178929}.$$

$$154. \sqrt{785'6809}.$$

$$155. \sqrt{0'97535376}.$$

$$156. \sqrt{44105'040144}.$$

$$157. \sqrt{\frac{676}{1681}}.$$

$$158. \sqrt{\frac{178929}{797449}}.$$

$$159. \sqrt{801\frac{55}{169}}.$$

$$160. \sqrt{29986576}.$$

$$161. \sqrt{362673936}.$$

$$162. \sqrt[8]{1475789056}.$$

$$163. \sqrt{28 \text{ (4 dec.)}}$$

$$164. \sqrt{320 \text{ (5 dec.)}}$$

$$165. \sqrt{6584 \text{ (3 dec.)}}$$

$$166. \sqrt{552747 \text{ (2 dec.)}}$$

$$167. \sqrt{3'92 \text{ (5 dec.)}}$$

$$168. \sqrt{0'101 \text{ (4 dec.)}}$$

$$169. \sqrt{8'376 \text{ (4 dec.)}}$$

$$170. \sqrt{0'07854 \text{ (5 dec.)}}$$

$$171. \sqrt{0'123457 \dots}$$

$$172. \sqrt{55'2573 \dots}$$

$$173. \sqrt{19'383838 \dots}$$

$$174. \sqrt{3681'45 \dots}$$

$$175. \sqrt{\frac{57}{3}} = \sqrt{\frac{171}{9}} = ?$$

$$176. \sqrt{\frac{591}{67}}.$$

$$177. \sqrt{251\frac{7}{12}}.$$

$$178. \sqrt[3]{(a^3x^6 - 3a^2bx^4y^2 + 3ab^2x^2y^4 - b^3y^6)}.$$

$$179. \sqrt[3]{(8x^6 - 36x^5 + 78x^4 - 99x^3 + 78x^2 - 36x + 8)}.$$

$$180. \sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{8b^3} - \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{8ac^2}{3bd^2} - \frac{64c^3}{27d^3}\right)}.$$

$$181. \sqrt[3]{5832}.$$

$$182. \sqrt[3]{12167}.$$

$$183. \sqrt[3]{59319}.$$

$$184. \sqrt[3]{262144}.$$

$$185. \sqrt[3]{1259712}.$$

$$186. \sqrt[3]{8615125}.$$

$$187. \sqrt[3]{746142643}.$$

$$188. \sqrt[3]{1767172329}.$$

$$189. \sqrt[6]{68719476736}.$$

$$190. \sqrt[3]{0'778688}.$$

$$191. \sqrt[3]{474'552}.$$

$$192. \sqrt[3]{78'402752}.$$

$$193. \sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}.$$

$$194. \sqrt[3]{32'85684 \dots}$$

$$195. \sqrt[3]{0'84000027 \dots}$$

$$196. \sqrt[3]{100 \text{ (4 dec.)}}$$

$$197. \sqrt[3]{5213 \text{ (5 dec.)}}$$

$$198. \sqrt[3]{8135 \text{ (3 dec.)}}$$

$$199. \sqrt[3]{47838 \text{ (3 dec.)}}$$

$$200. \sqrt[3]{0'3 \text{ (5 dec.)}}$$

$$201. \sqrt[3]{25'623 \text{ (4 dec.)}}$$

$$202. \sqrt[3]{0'095783 \dots}$$

$$203. \sqrt[3]{9'123457 \dots}$$

$$204. \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{\frac{180}{216}} = ?$$

$$205. \sqrt[3]{\frac{37}{70}}.$$

$$206. \sqrt[3]{8\frac{7}{12}}.$$

$$207. \sqrt[3]{1897'435 \dots}$$

III. Naloge v ponavljanje.

*1. Katero število je največja skupna mera od

- a) 8 in 12, b) 15 in 40, c) 20 in 44, d) 32 in 48?

2. Poišči najv. skup. mero števil

- a) 465 in 589, b) 612 in 1080, c) 168, 312 in 504.

*3. Kolika je vsota iz 4kratnika od $2\frac{4}{9}$ in iz 5kratnika od $3\frac{4}{5}$?

*4. Za koliko je 3kratnik od $5\frac{3}{4}$ manjši nego 5kratnik od $7\frac{1}{4}$?

$$5. 8642\frac{327}{385} \times \frac{713}{900} + 19371\frac{38}{77} \times 255\frac{113}{225}.$$

$$6. 4751\frac{181}{270} \times 571\frac{171}{810} - 3640\frac{319}{540} \times 460\frac{80}{405}.$$

$$7. 1 - 10 + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

*8. 15 m velja 69 K; koliko velja 65 m?

9. Iz cevi priteče v $4\frac{1}{2}$ minute $98\frac{1}{4}$ l vode; koliko l vode priteče iz iste cevi v 45·2 minute?

10. Dunaj ima $14^{\circ} 2' 36''$, Berolin $11^{\circ} 2' 30''$ vzhodne dolžine od Pariza; koliko je ura na Dunaju, kadar je v Berlinu poldne? (Kraji, ki so za 1° dalje proti vzhodu, imajo poldne za 4 časovne minute popreje.)

11. Za $5\frac{2}{3}$ kosov nekega blaga se plača 742 K 30 h, ako je vsak kos 18 m dolg in $1\frac{1}{4}$ m širok; koliko bi veljalo $12\frac{3}{4}$ kosov istega blaga, ako so posamezni kosi 25 m dolgi in $1\frac{1}{5}$ m široki?

Naloge štev. 12—19. izračuni okrajšano na 3 dec.

$$12. 5 \cdot 4832 \cdot 7 \cdot 519.$$

$$13. 6 \cdot 9754 \cdot 0 \cdot 2844.$$

$$14. 304 \cdot 279 \cdot 0 \cdot 0532.$$

$$15. 1 \cdot 065 \cdot 1 \cdot 052 \cdot 1 \cdot 0475.$$

$$16. \frac{83 \cdot 423}{31 \cdot 586}$$

$$17. \frac{3 \cdot 7936}{13 \cdot 859}$$

$$18. \frac{0 \cdot 8464}{0 \cdot 00163}$$

$$19. \frac{3478 \cdot 0 \cdot 07643}{4091 \cdot 0 \cdot 88251}$$

$$20. \frac{403 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 12 \cdot 0795 \dots}{378 \cdot 8 \cdot 23 \cdot 15 \cdot 6324 \dots}$$

$$21. \sqrt{119025}.$$

$$22. \sqrt{46335249}.$$

$$23. \sqrt{9829 \cdot 6118 \dots}$$

$$24. \sqrt[3]{857375}.$$

$$25. \sqrt[3]{156590819}.$$

$$26. \sqrt[3]{829789013773}.$$

*27. Ako izdam od svojega denarja polovico in jedno četrtno, ostane mi 15 K; koliko imam denarja?

$$28. 8\frac{1}{2} + \frac{19 - x}{3} = 2\frac{2}{3}x - \frac{2x - 3}{10} + \frac{2}{5}.$$

$$29. \left\{ \frac{x+1}{6} + 3 \right\} - \left\{ \frac{3x-1}{2} - 3 \right\} = \frac{3x+3}{2} - \frac{5x+2}{3}.$$

$$30. \frac{8x+2}{x-2} - 10 = \frac{2x-1}{3x-6} - \frac{3x+2}{5x-10}.$$

$$31. \frac{5x+5}{x+2} + 1 = \frac{6x+12}{x+3}.$$

$$32. \frac{5}{7} \cdot \frac{2x-5}{3x-7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5x-2}{7x-3}.$$

$$33. \sqrt{2x} + \sqrt{8x} = 6.$$

$$34. \sqrt{4x+13} - 2 = x.$$

35. Neko cesto naredi 30 delavcev v 12 tednih. Iz početka je delalo 45 delavcev 6 tednov; koliko delavcev je še treba najeti, da naredé nedodelan del ceste v $2\frac{1}{2}$ tedna?

*36. Vzmnoži na drugo potenco vsako število od 11–20.

37. Pretvori te-le perijodične decimalne ulomke na navadne:

$$a) 0.\dot{2}, \quad b) 0.\dot{1}\dot{5}, \quad c) 6.\dot{0}\dot{2}\dot{3}, \quad d) 0.\dot{3}\dot{2}\dot{4}, \quad e) 4.\dot{5}14\dot{8}.$$

$$f) 0.\dot{1}\dot{6}, \quad g) 2.\dot{0}\dot{8}, \quad h) 15.\dot{3}\dot{2}\dot{7}, \quad i) 0.\dot{1}47\dot{2}, \quad k) 0.\dot{6}524\dot{3}.$$

$$38. \frac{x}{2y} + \frac{4}{xy^2} - 1.$$

$$39. \frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$40. (5x+a)(2x-a) - (4x-3a)(7x+a) + (3x-a)(6x+2a).$$

$$41. (48y^8 - 14a^4y^4 + 17a^6y^2 - 6a^8) : (6y^4 - 3a^2y^2 + 2a^4).$$

$$42. \left\{ \frac{3x^2}{4a^8} - \frac{19y^2}{3a^2} + \frac{12a^4y^4}{x^2} \right\} : \left\{ \frac{x}{2a^4} + \frac{y}{3a} - \frac{2a^2y^2}{x} \right\}.$$

$$43. \left(\frac{2ax^2}{3by^3} \right)^2 \cdot \left(\frac{6ax^2}{5b^2y} \right)^2 \cdot \left(\frac{5b^2}{3a^2} \right)^4. \quad 44. \left\{ \frac{(2xy^2)^5 \cdot (3x^2z^2)^4 \cdot (5y^3z)^3}{(10x^3y^2)^2 \cdot (5y^2z^4)^3} \right\}^2.$$

*45. Katero število moraš pomnožiti s $\frac{5}{4}$, da postane za $\frac{5}{4}$ večje?

*46. Ako odvzameš od nekega števila najprej polovico in od ostanka zopet polovico, odvel si 150. Katero je to število?

$$47. \sqrt[3]{37636}. \quad 48. \sqrt[3]{91125}. \quad 49. \sqrt[3]{751'089429}. \quad 50. \sqrt[3]{0'00367236}.$$

$$51. \sqrt{(a^6 - 6a^5 + 11a^4 - 16a^3 + 31a^2 - 10a + 25)}.$$

$$52. \sqrt[3]{(8x^6 - 36x^5 + 66x^4 - 63x^3 + 33x^2 - 9x + 1)}.$$

53. Iz *A* odpotuje sel proti *B* ter potrebuje za vso pot 10 dni. Drug sel pa gre iz mesta *B* proti *A* ter potrebuje za vso pot 15 dni. V koliko dneh se srečata, ako sta oba odpotovala v istem času?

*54. Neka zaloga zadostuje 7200 možem 15 mesecev; koliko časa zadostuje, če odide $\frac{1}{3}$ mož?

*55. Ako od 80 odšteješ neko število, dobiš ostanek, ki je za 20 večji nego odšteto število. Katero je to število?

$$56. x : y = 3 : 4.$$

$$\text{Kako sta si } a) x^2 : y^2, \quad b) x : (x + y), \quad c) (x + y) : (y - x)?$$

$$57. \frac{a - bx}{b} = \frac{ax - b}{a}.$$

$$58. \frac{ax - 2a}{ax - 2b} = \frac{ax - 2b}{ax + 2a}.$$

$$59. 5\sqrt{x} + \sqrt{2ax + 3} = 7\sqrt{x}.$$

$$60. 2\sqrt{x + 3} = 7(2\sqrt{x} - 3).$$

*61. Dva delavca imata nalog, da iztrebita 665 *m* dolg jarek; prvi iztrebi na dan 45 *m*, drugi 50 *m*; kdaj bodeta delo izvršila?

*62. 5kratnik nekega števila je za 86 večji kakor vsota iz polovice in jedne petine tega števila. Koliko je to število?

63. Nekdo bode imel čez 10 let 2krat toliko let, kolikor jih je imel pred 4 leti; koliko let je sedaj star?

$$64. \sqrt{2}. (4 \text{ dec.})$$

$$65. \sqrt{2.5} (5 \text{ dec.})$$

$$66. \sqrt{38\frac{1}{2}} (4 \text{ dec.})$$

$$67. \sqrt[3]{51'63842 \dots}$$

$$68. \sqrt[3]{72.9}. (4 \text{ dec.})$$

$$69. \sqrt[3]{\frac{15}{7}}. (4 \text{ dec.})$$

$$70. 2 \left\{ \frac{3a + 1}{a^2 - 1} - \frac{5a - 3}{3a - 2} \right\} (a - 1) - \frac{4a^2 - 7}{6a^2 + 6a}.$$

71. Iz nekaj volne se dobi 16 po 108 *cm* širokih in 35 *m* dolgih kosov sukna. Iz jednega dela te volne se naredi 5 po 98 *cm* širokih in 32 *m* dolgih kosov sukna; koliko kosov se dobi iz ostale volne, ako je vsak po 1 *m* širok in $37\frac{1}{4}$ *m* dolg?



Šesti oddelek.

O najvažnejših gospodarskih in trgovskih računih.

I. O procentnem računu.

§ 155. Stotino kateregakoli števila imenujemo procent ali odstotek (1%). 2, 3... p procentov kakega števila je $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, ... $\frac{p}{100}$ dotičnega števila.

Z ozirom na to znašajo 1, 2, 3... p procenti od 100 jednot oziroma 1, 2, 3... p jednot. Procenti torej kažejo, koliko jednot katerekoli vrste je treba vzeti od 100 jednot iste vrste.

Pri nekaterih količinah računimo znesek od 1000 jednot in sicer todaj, kadar bi bili procenti zelo majhni ulomki. Ta znesek imenujemo promil ali odtisoček (*Promille* ‰); na pr. $\frac{1}{2}$ ‰ pomeni, da je od 1000 jednot treba vzeti $\frac{1}{2}$ jednote.

Pri procentnih računih imamo vpoštevati štiri količine: 1. število 100 kot osnovno število, 2. procente, t. j.: znesek, ki se jemlje od sto, 3. vsoto, od katere je treba računiti procente, 4. procentni znesek, t. j. množino, katero dobimo po procentih od dane vsote.

§ 156. Procentni račun je trojen: od sto (*von Hundert*), nad sto (*auf Hundert*) in pod sto (*in Hundert*).

1. Od sto se računi, kadar je vsota, od katere je treba izračuniti procentni znesek, istovrstna z osnovnim številom 100. Na pr. Pri nakupu blaga, katero je veljalo 400 K, je bilo 2% stroškov; koliki so vsi stroški? — V tej nalogi poznamo čisti znesek za blago; razrešimo pa nalogo s pomočjo tega-le sorazmerja:

$$x : 2 = 400 : 100.$$

2. Nad sto računimo, kadar vsota, od katere je treba izračuniti procentni znesek, ni istovrstna s številom 100, marveč s številom 100, povečanim za procente. Na pr. Neko blago velja z vštetimi 2%

stroški vred 400 K; koliki so stroški? — Tu nam je dan znesek za blago, povečan s stroški, ter velja sorazmerje:

$$x : 2 = 400 : 102.$$

3. Pod sto računimo, ako je dana vsota, od katere računimo procentni znesek, istovrstna z osnovnim številom 100, zmanjšanim za procenete. Na pr. Za prodano blago se iztrži po odbitku 2% stroškov 400 K; koliki so stroški? — Tu je dan znesek za blago, zmanjšani za stroške, ter imamo sorazmerje:

$$x : 2 = 400 : 98.$$

Iz tega razvidimo, da moramo v obče vzeti za $p\%$

pri računu od sto število 100,

„ „ nad „ „ 100 + p

„ „ pod „ „ 100 — p

kot istovrstno z dano vsoto.

Račun od sto.

§ 157. Ako zaznamimo procenete s p , znesek od vsote v pa z z , dobimo sorazmerje

$$z : p = v : 100 \quad \text{in odtod}$$

$$z = \frac{pv}{100}$$

t. j.: Pri procentnem računu od sto je znesek jednak stotemu delu produkta iz dane vsote in procentov.

Pri promilu treba dano vsoto pomnožiti s promilom ter produkt razdeliti s 1000.

Za v in p dobimo iz prejšnjega sorazmerja

$$v = \frac{100z}{p} \text{ in } p = \frac{100z}{v}.$$

Izrazi tudi te dve formuli z besedami!

Procentne račune razrešujemo tudi po sklepovnem računu (*Schlussrechnung*); bolj jednostavne tudi kar na pamet.

Primeri:

1. Koliko je a) 5% od 2450; b) $4\frac{1}{2}\%$ od 6800?

a) 2450 po 5%

12250

b) 6800 po $4\frac{1}{2}\%$

272

34

306

Po sklepnem računu:

b) 1% ali $\frac{1}{100}$ od 6800 je 68, 4% torej 4krat 68 = 272, $\frac{1}{2}\%$ je polovica od 68, t. j. 34; 272 in 34 je 306.

2. Katera vsota da po 5% znesek 87?

$$v = \frac{8700}{5} = 1740;$$

Po sklepnem računu:

5%

iskane vsote je 87

1% , t. j. $\frac{1}{100}$

" " " 174;

torej vsota sama = $174 \cdot 100 = 17400$.

3. Koliko % je 18 K od 450 K?

$$p = \frac{1800}{450} = 4\%.$$

Po sklepnem računu:

1% od 450 K je $4\frac{1}{2}$ K; 18 K je torej toliko % od 450 K, kolikokrat se nahaja $4\frac{1}{2}$ K v 18 K, tedaj 4% .

Računi nad sto.

§ 158. Za procentni račun nad sto velja sorazmerje

$$z : p = v : (100 + p),$$

v katerem imajo z , p in v isti pomen kakor v § 157.

Iz tega sorazmerja dobimo

$$z = \frac{vp}{100 + p}, \quad v = \frac{z(100 + p)}{p}, \quad p = \frac{100z}{v - z}.$$

Primeri.

1. Koliko znašajo 4% nad sto od 2912 K?

$$z : 4 = 2912 : 104; \quad z = 112 \text{ K.}$$

2. Katera vsota da po 6% nad sto 75 K za znesek?

$$v : 106 = 75 : 6; \quad v = 1325 \text{ K.}$$

3. Koliko % nad sto je 120 K od 3120 K?

Tu dobimo

$$p : 120 = (100 + p) : 3120,$$

torej $3120p = 12000 + 120p$ in $p = 4\%$.

Računi pod sto.

§ 159. Ako pomenijo p , v , z prav isto, kakor poprej, dobimo za procentni račun pod sto

$$z : p = v : (100 - p);$$

torej:

$$z = \frac{pv}{100 - p}, \quad v = \frac{z(100 - p)}{p}, \quad p = \frac{100z}{v + z}.$$

Primeri:

1. Koliko je 5% pod sto od 2109 K?

$$z : 5 = 2109 : 95; \quad z = 111 \text{ K.}$$

2. Od katere vsote znašajo 4% pod sto 64 K?

$$v : 96 = 64 : 4; \quad v = 1536 \text{ K.}$$

3. Koliko % pod sto dá 5031 K 129 K za znesek?

$$p : 129 = (100 - p) : 5031,$$

torej

$$5031p = 12900 - 129p, \text{ in } p = 2\frac{1}{2}\%.$$

Naloge.

- *1. a) 2% od 50, 25, 20, 10, 75, 300, 650, 975;
 b) 4% od 400, 1600, 350, 775, 860, 1230, 2575;
 c) 5% od 600, 1400, 50, 350, 920, 489, 2860.

2. Koliko je

a) 4% od 635?

b) $5\frac{1}{2}\%$ od 846?

c) $6\frac{1}{4}\%$ od 1830?

d) $7\frac{3}{4}\%$ od 6052?

3. Koliko je

a) $10/100$ od 7360?

b) $1\frac{1}{4}/100$ od 8640?

c) $1\frac{1}{2}/100$ od 8380?

d) $1\frac{3}{4}/100$ od 14320?

4. Kolik znesek da vsota 5280 K po a)
- $\frac{1}{3}\%$
- , b)
- $3\frac{1}{4}\%$
- , c)
- $4\frac{3}{4}\%$
- ,

d) $5\frac{1}{2}\%$, e) $6\frac{3}{8}\%$?

5. Izmed 400 ljudij, ki so stari 35 let, jih umrje do 60. leta 40%; koliko jih učka torej 60. leto?

6. Neka 6350 m dolga cesta se vzdiguje za 1'8%; koliko m znaša vzdig?

7. Neko mesto je imelo 1840. leta 15860 prebivalcev; do leta 1880. se je prebivalstvo pomnožilo za 25%. Koliko prebivalcev je imelo mesto l. 1880.?

8. Za neko stavbo se potrebuje 64800 opek; koliko opek je treba kupiti, ako se jih $8\frac{1}{2}\%$ polomi ali poizgubi?

9. Dolenja Avstrijska ima 1885840 *ha* rodovitne zemlje, in sicer $42\frac{1}{2}\%$ njiv; koliko *ha* merijo njive?

*10. Katera vsota da

a) po 2% 48? b) po 3% 84? c) po 4% 38?

11. Koliko prebivalcev ima mesto, ako jih znaša 22% 572?

12. Ako dobiš iz pese 5% neprečiščenega sladkorja, koliko *kg* pese je treba za 47200 *kg* neprečiščenega sladkorja?

13. Goveje meso izgubi, ako se skuha, 15% svoje teže; a) koliko tehta $3\frac{1}{4}$ *kg* surovega mesa (brez kostij), kadar je skuhano? b) koliko surovega mesa je treba vsak dan kupiti za 12 oseb, da dobi vsaka $\frac{1}{8}$ *kg* kuhanega mesa?

*14. Koliko $\%$ je

a) 12 od 200? b) 16 od 400? c) 38 od 2000?
d) 36 od 806? e) 80 od 1200? f) 63 od 1400?

15. Koliko $\%$ je

a) 40 h od 8 K? b) 35 K od 1050 K?
c) 308 K od 5600 K? d) 116'64 K od 1728 K?

16. V srebrni zlitini, katera tehta $12\frac{1}{2}$ *kg*, je 5 *kg* bakra; koliko $\%$ bakra je v tej zlitini?

17. Iz 25 *kg* surove kave dobimo le $21\frac{3}{4}$ *kg* žgane kave; koliko $\%$ svoje teže izgubi torej kava, ako jo prežgemo?

18. Češka je imela 1880. leta 5,560819, leta 1890. pa 5,843250 prebivalcev; za koliko $\%$ se je prebivalstvo pomnožilo v tej dobi?

19. Kolik je znesek nad sto od vsote?

a) 923 K po 3% ? b) 1555 K po $5\frac{1}{2}\%$?
c) 680'85 K po 2% ? d) 3047 K po $\frac{1}{3}\%$?

20. Da preračuniš vrednost krone v franke, treba, da dodaš 100 K še 5% . Koliko K je tedaj

a) 92'4 franka? b) 66 frankov? 77'7 franka?

21. Koliko $\%$ nad sto je 105 K od 3105 K?

22. Kolik je znesek pod sto

a) od 2508 K po 10 %?

b) od 836 K po $8\frac{1}{2}\%$?

23. Izračuni vsote tem-le zneskom in procentom pod sto?

a) 300 K po 10 %?

b) $128\frac{1}{4}$ K po $11\frac{1}{2}\%$?

24. Koliko % pod sto je 66 K od 3234 K?

25. Neki davek s 32 % doklado vred znaša 125 K 40 h; kolik je davek brez doklade?

26. Ako odštejemo od števila vinarjev 15 %, dobimo istovredni znesek fenigov. Koliko vinarjev je tedaj

a) 51 fenigov? b) 68 fenigov? c) 1 marka 19 fenigov? d) 94 fenigov?

27. Trgovec je iztržil za blago po odbitku $2\frac{1}{2}\%$ stroškov $6676\frac{4}{5}$ K; koliko je bilo stroškov?

28. Pri nakupu blaga je znašal $3\frac{1}{4}\%$ odbitek $175\frac{1}{2}$ K; koliko K je plačal kupec?

O tari.

§ 160. Ako stehtamo blago s posodo vred, v kateri se nahaja, imenujemo to težo surovo ali nečisto težo (*Brutto-, Sporco-gewicht*). Kar pa zaradi posodne teže odštejemo od nečiste teže, zovemo taro (*Tara*) in težo blaga samega čisto težo (*Nettogewicht*). Taro izražamo dostikrat v procentih; v tem slučaju jo računimo od nečiste teže po procentnem računu od sto. Decimalke pri kilogramih se jemljejo v pošteve le pri zelo dragem blagu, sicer pa se ali prezirajo ali pa se število kilogramov poveča za 1, ako znašajo 5 ali več desetnin. Na pr.

Koliko velja 5 vreč kave, ako znaša nečista teža 773 kg, tara 5 % ter se računi 100 kg čiste teže po 330 K?

773 po 5 %
38'65 kg

Nečista teža	773 kg
5 % tare	39 „
čista teža	734 kg po 330 K
	2202
	220 20
	2422'20 K.

O skontu ali rabatu.

§ 161. Kupcu, ki kupuje blago na debelo, ni treba blaga precej plačati, ampak še-le v določenem roku; zato pa se mu blago računi nekoliko draže. Ako pa kupec blago vender le precej plača, dovoli se mu zaradi takojšnjega plačila odbitek od kupnine, katerega imenujemo diskont, skonto ali rabat (*Warendiscont, Sconto, Rabatt*), ter ga računimo po procentih od sto. Ako od kupnine odštejemo skonto, dobimo gotovo plačilo (*contante Zahlung*).

Pri marsikaterem blagu določuje izdelovalec sam ceno, po kateri se morajo njegovi izdelki prodajati na drobno, prodajalcu na drobno pa dovoljuje neki odbitek od določene cene kot odškodnino za stroške in trud; tudi tak odbitek se imenuje r a b a t. Tak je na pr. knjigarski rabat (*Buchhändler-rabatt*). Navadno znaša ta take procente, s katerimi moremo prav ugodno računiti; na pr. $33\frac{1}{3}\%$ ali $\frac{1}{3}$ one cene, po kateri se knjiga prodaja, ali 25%, ali 20%. Knjigarski rabat računimo po procentih od sto, dostikrat pa kar po navadni delitvi.

Primeri.

1. Ako znaša kupnina za neko blago 5192 K; a) koliko znaša skonto po 2%? b) koliko je gotovo plačilo?

Kupnina K 5192

Skonto po 2% „ 103'84

Gotovo plačilo K 5088'16.

2. Knjigar-založnik je razposlal knjig, vrednih 2518 K; koliko ima zanje terjati, ako daje 20% rabata?

2518 po 20%

503'60 K rabata

ali: $\frac{1}{5}$ od 2518 K

503'6 K

2518 K

503'6 „

2014'4 K.

O senzariji.

§ 162. Pri nakupu in prodaji blaga med trgovci istega mesta posredujejo zapriseženi ljudje, katere imenujemo mešetarje ali senzale (*Mäkler, Sensale*). Nagrada, katero dobivajo za svoj trud, zove se mešetarina ali senzarija (*Sensarie, Courtage*).

V trgovini z blagom znaša senzarija navadno po 1%, in sicer plačuje kupec $\frac{1}{2}\%$, prodajalec $\frac{1}{2}\%$, pri menicah pa 1'00.

O zavarovalnini.

§ 164. Društva, katera prevzemajo proti določeni pristojbini odškodovanje za nezgode in izgube, nastale bodisi po prirodnih, bodisi po izrednih prirodnih dogodkih, imenujemo zavarovalna društva (*Versicherungs- oder Assecuranzgesellschaften*). Pristojbino, katero njim treba plačevati za to, da prevzamejo odškodovanje, imenujemo zavarovalnino (*Versicherungsprämie*), pismo pa, s katerim društva potrjujejo, da se je kdo res in za koliko se je zavaroval, zavarovalno pismo ali polico (Polizze). Zavarovalnino računimo od zavarovane vsote po procentih od sto. Na pr.

Kolika je zavarovalnina od zavarovanih 15280 K po $1\frac{5}{8}\%$?

$$\begin{array}{r}
 152.80 \text{ po } 1\% \\
 76.40 \quad \text{„} \quad \frac{1}{2}\% \\
 19.10 \quad \text{„} \quad \frac{1}{8}\% \\
 \hline
 248.30 \text{ K.}
 \end{array}$$

O dobičku in izgubi.

§ 165. Pri računih o dobičku in izgubi moramo v poštrev jemati troje: stroške pri nakupu, dohodke pri prodaji in dobiček ali izgubo. Trgovci računijo dobiček ali izgubo navadno po procentih; na pr. imeti 6% dobička se pravi, za vsakih 100 K, ki so se izdale pri nakupu, prejeti 106 K pri prodaji; 6% izgube imeti pa se pravi, za 100 K, izdanih pri nakupu, prejeti pri prodaji le 94 K.

Primera.

1. Trгоvec je kupil m sukna po 9 K 60 h; po čem mora prodati m , da ima 15% dobička?

$$\begin{array}{rcl}
 9.6 \text{ po } 15\% & \text{kupna cena} & \dots \quad 9 \text{ K } 60 \text{ h} \\
 4.80 & 15\% \text{ kobička} & \dots \quad 1 \text{ „ } 44 \text{ „} \\
 \hline
 1.440 \text{ K dobička.} & \text{prodajna cena} & \dots \quad 11 \text{ K } 04 \text{ h.}
 \end{array}$$

2. Blago, ki se je kupilo za 725 K, prodalo se je za 674 K 25 h; koliko % je bilo izgube?

$$\begin{array}{rcl}
 \text{kupna cena} & \dots & 725 \text{ K} \\
 \text{skupilo} & \dots & 674 \text{ „ } 25 \text{ h} \\
 \text{izguba} & \dots & 50 \text{ K } 75 \text{ h}
 \end{array}
 \qquad
 x = \frac{50.75 \cdot 100}{725} = 7\%.$$

Naloge.

1. Blago ima 2792 kg nečiste teže; kolika je njega čista teža, ako se računi tare a) 3%, b) $5\frac{1}{2}\%$, c) 12%?

2. Blago ima 2150 kg nečiste in 1978 kg čiste teže; koliko % znaša tara?

3. Kolik je skonto po $2\frac{1}{4}\%$ pri a) 2577 K, b) 3538 K, c) 939'85 K, d) 1714'17 K?

4. Koliko veljajo 4 sodi smokev, imajoči 518 kg nečiste teže, 10% tare, ako se plača za vsakih 100 kg čiste teže po 48 K in se računi $1\frac{1}{2}\%$ skonta?

*5. Ako se računi pri knjigi 20%, 25%, $33\frac{1}{3}\%$ rabata, koliki del one cene je to, po kateri se knjiga prodaja?

*6. Koliko znaša rabat po $33\frac{1}{3}\%$, ako kupi kdo knjig za a) 1518'24 K, b) 917'5 mark?

*7. Kolika je senzarija po $\frac{1}{2}\%$ od

a) 918 K, b) 506 K 58 h, c) 3096 K?

8. Za kupljeno blago se plača s $\frac{1}{2}\%$ senzarije vred 2653 K 40 h; kolika je prvotna kupnina?

9. Kolika je provizija po 2% od

a) 458 K, b) 720 K, c) 912 K 50 h?

10. Kolika je provizija od 4760 K

a) po $\frac{1}{2}\%$? b) po $\frac{5}{8}\%$? c) po $1\frac{1}{2}\%$? d) po $1\frac{3}{4}\%$?

11. A je prodal za nekoga drugega za 2085 K 25 h blaga; koliko ostane prodajalcu, ako se odbije $1\frac{3}{4}\%$ provizije?

12. Blago stane pri nakupu z 2% provizije vred 3207 K 90 h; a) kolika je provizija? b) kolika kupnina sama?

13. Za prodano blago se iztrži po odbitku 2% provizije 2158 K 88 h; koliko znaša provizija?

14. Trgovec proda za nekoga drugega za 3518 K blaga, mešetarju plača $\frac{1}{2}\%$, zase pa zaračuni $1\frac{3}{4}\%$ provizije; koliko dobi prodajalec?

15. Koliko treba plačati za 2308 kg nečiste teže, ako znaša tara 8%, 100 kg čiste teže pa velja 85'72 K, in se računi 2% skonta in $1\frac{5}{8}\%$ provizije?

16. Koliko zavarovalnine treba plačati od 7850 K

a) po $\frac{1}{2}\%$? b) po $\frac{3}{8}\%$? c) po $1\frac{0}{100}\%$? d) $1\frac{1}{2}\frac{0}{100}\%$?

*17. Hišni posestnik je zavaroval pri zavarovalnem društvu svojo hišo ter plačal 37 K 68 h; koliko je hiša vredna, ako je računilo društvo $\frac{1}{2}\%$ hišne vrednosti?

*18. 5% , $6\frac{1}{4}\%$, $8\frac{1}{3}\%$, 10% , $12\frac{1}{2}\%$, $16\frac{2}{3}\%$, 20% dobička je koliki del kupnine?

*19. Za koliko je treba prodati blago, katero se je kupilo za 780 K, da bode a) 10% dobička, b) 10% izgube?

20. Pri blagu, katero se je kupilo za 4250 K, bilo je pri prodaji dobička 340 K; koliko $\%$ je bilo dobička?

21. Trгоvec je iztržil za blago, pri katerem je imel 3% izgube, 1040 K; a) koliko je imel izgube?, b) za koliko je bil kupil blago?

22. Nekdo je iztržil za prodano blago 1590 K; koliko $\%$ je imel dobička, ako je znašal le-tá 90 K?

23. Za prodano blago se je iztržilo 1410 K; koliko $\%$ je bilo izgube, ako je znašala le-tá 90 K?

24. Dunajčan dobi iz Trsta 4 zaboje grozdjiča, imajoče 972 kg nečiste teže, tare se računi po 18 kg od zaboja, 100 kg čiste teže po 60 K, senzarije $\frac{1}{2}\%$, provizije 2% ; carina, voznina in drugi stroški znašajo 137 K 28 h; po čem mora prodati kg, ako hoče imeti 15% dobička?

II. O obrestnem računu.

1. O jednostavnem obrestnem računu.

§ 166. Denar, katerega kdo ali sam uporablja takó, da mu kaj nese, ali komu drugemu posodi proti temu, da mu plačuje le-tá za uporabo določen znesek, naposled pa vender le povrne ves posojeni denar, imenujemo kapital ali glavnico (*Kapital*), znesek pa, kateri se plačuje za uporabo kapitala, obresti (*Zinsen, Interessen*). Obresti se računijo po procentih; le-tí veljajo za 100 kapitalnih jednot in za časovno jednoto, navadno za jedno leto. Leto se računi pri obrestnih računih po 360 dnij, mesec po 30 dnij.

Obrestni račun je tedaj procentni račun, pri katerem pa treba razven količin, ki se nahajajo v vsakem procentnem računu, v poštev jemati še čas.

Obresti imenujemo enostavne ali proste (*einfache Zinsen*), ako ostane kapital ves čas, ko tečejo obresti, neizpremenjen; ako se pa obresti koncem vsakega leta ali polleta pridevajo kapitalu in same zopet nalagajo na obresti, imenujemo jih obrestne obresti (*Zinseszinsen*).

§ 167. Podlaga obrestnemu računu je sestavljeno sorazmerje; toda vsako tako nalogo je mōči tudi razrešiti po sklepovnem računu. Sklepovni račun nam rabi sosebnost, kadar računimo na pamet.

Na pr. Kapital 1346 K je naložen po 5%; koliko obrestij dá v 3 letih?

Uporabljaajoč sklepovni račun, dobimo:

$$1346 \text{ K kap. dá po } 1\% \text{ v } 1 \text{ let.} \quad \frac{1346}{100} \text{ K obrestij}$$

$$1346 \text{ " " " " } 5\% \text{ " } 1 \text{ " } \quad \frac{1346 \cdot 5}{100} \text{ " "}$$

$$1346 \text{ " " " " } 5\% \text{ " } 3 \text{ " } \quad \frac{1346 \cdot 5 \cdot 3}{100} \text{ " "}$$

$$= 201.9 \text{ K obrestij.}$$

Uporabljaajoč sestavljeno sorazmerje:

$$\begin{array}{rcl} 100 \text{ K kap. v } 1 \text{ let. } 5 \text{ K obrestij} & x : 5 = 1346 : 100 \\ 1346 \text{ " " " } 3 \text{ " } x \text{ " " } & \frac{3 : 1}{x = \frac{1346 \cdot 5 \cdot 3}{100}} \end{array}$$

V obče: Ako zaznamujemo kapital, procenete, število let in obresti oziroma s k , p , l , in o , dobimo takisto

$$o = \frac{kpl}{100}, \text{ in odtod}$$

$$k = \frac{100 \cdot o}{pl}, \quad p = \frac{100 \cdot o}{kl}, \quad l = \frac{100 \cdot o}{kp}.$$

Izrazi te formule z besedami.

Primeri.

1. Koliko obrestij dá 350 K po 4% v 3 letih?

a) Na pamet. 350 K dá v 1 letu po 1% 100ti del od 350 K, tedaj $3\frac{1}{2}$ K, po 4% torej 4krat $3\frac{1}{2}$ K = 14 K; v 3 letih tedaj 3krat 14 K = 42 K obrestij.

b) Po formuli:
$$o = \frac{350 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 42 \text{ K.}$$

2. Kateri kapital dá po 4% v 5 letih 540 K obrestij?

a) Na pamet.

4% kapitala v 5 let. = 540 K

4% " " 1 " = 108 "

1%, t. j. $\frac{1}{100}$ " " 1 " = 27 "

tedaj je kapital sam = 100krat 27 K = 2700 K.

b) Po formuli:
$$k = \frac{100 \cdot 540}{4 \cdot 5} = 2700 \text{ K.}$$

3. Po koliko % treba 3450 K kapitala na obresti naložiti, da bode dal v 2 letih 276 K obrestij?

a) Na pamet. Po 1% dá 3450 K kap. v 1 letu $34\frac{1}{2}$ K, v 2 letih 69 K; 276 K je tedaj toliko %, kolikorkrat ima 276 število 69 v sebi, torej 4%.

b) Po formuli:
$$p = \frac{100 \cdot 276}{3450 \cdot 2} = 4\%.$$

4. Koliko časa treba imeti kapital 4800 K izposojen po 5%, da dá 600 K obrestij?

a) Na pamet. 4800 K dá v 1 letu po 1% 48 K, po 5% tedaj 5krat 48 K = 240 K; 600 K obrestij dá tedaj isti kapital v toliko letih, kolikorkrat je 240 v 600, torej v $2\frac{1}{2}$ leta.

b) Po formuli:
$$l = \frac{100 \cdot 600}{4800 \cdot 5} = 2\frac{1}{2} \text{ leta.}$$

§ 168. Navadno pa se računijo obresti za katerikoli kapital in katerikoli čas takó-le:

1. Najprej izračuni obresti za jedno leto po procentnem računu, pomnoživši stoti del kapitala s procenti.

2. Obresti za več let dobiš, ako pomnožiš obresti za jedno leto s številom let.

3. Ako so dani tudi meseci in dnevi, uporabljaj razstavni način (*Zerfallungsmethode*); mesece namreč razstavi na pripravn dele leta, in dneve na pripravne dele meseca, potem vzemi od obre-

stij za jedno leto, oziroma za jeden mesec, prav toliko delov in vse te zneske prištej obrestim za leta.

Na pr. Koliko obrestij dá 4850 K kapitala po $4\frac{1}{2}\%$ v 3 letih 7 mesecih 12 dneh?

$$\begin{array}{r}
 4850 \text{ K po } 4\frac{1}{2}\% \text{ v } 3 \text{ l. } 7 \text{ m. } 12 \text{ dn.} \\
 \hline
 218'25 \text{ K obr. v } 1 \text{ l.} \\
 654'75 \text{ K obr. v } 3 \text{ l.} \\
 109'125 \text{ " " " } 6 \text{ m. } = \frac{1}{2} \text{ l.} \\
 18'187 \text{ " " " } 1 \text{ " } = \frac{1}{6} \text{ od } 6 \text{ m.} \\
 6'062 \text{ " " " } 10 \text{ dn. } = \frac{1}{3} \text{ m.} \\
 \hline
 1'212 \text{ " " " } 2 \text{ " } = \frac{1}{5} \text{ od } 10 \text{ dn.} \\
 \hline
 789'336 \text{ K.}
 \end{array}$$

§. 169. Dostikrat treba izračuniti obresti le za določeno število dni.

Ako je k oni kapital, kateri je po $p\%$ d dni na obresti naložen, ondaj dobimo

$$\begin{array}{rcl}
 100 \text{ K kap. v } 360 \text{ dn. } p \text{ K obr.} & x : p = k : 100 \\
 k \text{ " " " } d \text{ " } x \text{ " " } & d : 360 \\
 & \text{tedaj } x = \frac{kpd}{36000}.
 \end{array}$$

Ako je $p = 6$, dobimo:

$$\text{obresti} = \frac{k \cdot 6 \cdot d}{36000} = \frac{kd}{6000}.$$

Tukaj imenujemo število 6000 obrestni divizor (*Zinsdivisor*) za 6% . Sploh dobimo za nastopne procenete te-le obrestne divizorje:

$$\begin{array}{ll}
 \text{za } 3\% \dots 12000, & \text{za } 5\% \dots 7200, \\
 \text{za } 4\% \dots 9000, & \text{za } 6\% \dots 6000;
 \end{array}$$

in za te procenete velja pravilo:

Obresti za določeno število dni dobimo, ako pomnožimo kapital s številom dni ter ta produkt (obrestni produkt) razdelimo z dotičnim obrestnim divizorjem.

Primeri.

1. Koliko obrestij dá 780 K kapitala po 6% od dne 3. aprila do dne 12. avgusta?

Od dne 3. aprila do dne 3. avgusta so 4 m. = 120 dn.

$$\begin{array}{r}
 \text{" " 3. avgusta " " 12. " je} \quad \quad \quad \frac{9 \text{ "}}{129 \text{ dn.}} \\
 780 \cdot 129 \\
 1560 \\
 \hline
 7020
 \end{array}$$

$$100.620 : 6.000 = 16.77 \text{ K.}$$

2. Koliko obrestij dá 4559 K 90 h po $4\frac{1}{3}\%$ v 54 dneh?

$$4560 \times 4\frac{1}{3} \times 54$$

$$36000$$

$$= 29.64 \text{ K.}$$

$$\text{ali } 4560 \times 54$$

$$246240 : 9000$$

$$27.36 \text{ po } 4\%$$

$$+ 2.28 \text{ po } \frac{1}{3}\% = \frac{1}{12} \text{ od } 4\%$$

$$\text{K } 29.64 \text{ po } 4\frac{1}{2}\%.$$

Naloge.

*1. Izračuni letne obresti od

a) 30 K, 75 K, 120 K, 350 K, 862 K, 924 K po 5(4)%;

b) 500 K, 125 K, 350 K, 720 K, 375 K, 880 K po $4\frac{1}{2}\%$.

*2. Koliko znašajo obresti po 4% od

a) 200 K v 3 letih?

b) 525 K v 5 letih?

c) 465 " " 8 "

d) 255 " " 6 "

*3. Koliko znašajo obresti po 6% od

a) 300 K v 4 letih?

b) 475 K v 3 letih?

c) 650 " " 3 "

d) 1250 " " 5 "

4. Vdova ima naloženih 19120 K kapitala po $5\frac{1}{2}\%$; koliko sme potrošiti na dan, ako živi zgolj ob obrestih onega kapitala?

5. Koliko obrestij dá

a) 4105 K po 5% v 3 letih?

b) 2412 K po $5\frac{3}{4}\%$ v 5 letih?

6. Koliko obrestij dá 1428 K

a) po 5% v 4 mesecih?

b) po 6% v 7 mesecih?

c) po $4\frac{1}{2}\%$ v 5 mesecih?

d) po $5\frac{3}{4}\%$ v 9 mesecih?

7. Koliko obrestij dá

a) 6720 K po 4% v 1 letu 5 mesecih?

b) 2928 K po $5\frac{1}{4}\%$ v 2 letih 7 mes. 15 dneh?

c) 5704 K po $6\frac{1}{2}\%$ v 3 letih 10 mes. 20 dneh?

8. Koliko znašajo obresti po 6% od

a) 984 K v 65 dneh? b) 2250 K v 212 dneh?

c) 2127'6 K v 96 dneh? d) 3284 K v 192 dneh?

9. Koliko obrestij dá

a) 8888 K kapitala po 4% v 12 dneh?

self b) 9379 K kapitala po $4\frac{1}{2}\%$ v 147 dneh?

10. Koliko obrestij dá

a) 945 K po $5\frac{1}{2}\%$ od dne 1. avg. do dne 7. nov.?

fi b) 1278 K po $6\frac{1}{2}\%$ od dne 25. maja do dne 3. okt.?

11. Poišči obrestne divizorje (§ 169.) za

a) 2%, 8%;

b) $4\frac{1}{2}\%$, 9%.

12. Na posestvu je 18500 K dolga; čez 2 leti plača posestnik dolg in $5\frac{1}{2}\%$ obrestij; koliko mora plačati?

*13. Kolikokrat večji je kapital od letnih obrestij a) po 5%,
b) po 4%?

*14. Kateri kapital dá na leto obrestij

a) 20 K, 25 K, 30 K, 36 K, 82 K, 145 K in to po 5%?

b) 10 K, 24 K, 40 K, 75 K, 120 K, 200 K po 4%?

*15. Kateri kapital dá po 5% v 3 letih

a) 75 K, b) 90 K, c) 125 K obrestij?

16. Izračuni kapital, kateri dá

a) po 4% v 2 let. 70 K obrestij.

b) po 5% v $1\frac{1}{2}$ let. $93\frac{11}{20}$ K obrestij.

17. Kateri kapital dá

a) po $4\frac{1}{2}\%$ v 3 let. 837 K obrestij?

b) po $6\frac{1}{2}\%$ v $1\frac{2}{3}$ let. 390 K obrestij?

*18. Koliko % se računi, ako dá v 1 letu

a) 800 K kap. 40 K obrestij?

b) 1500 K kap. 80 K obrestij?

c) 600 K kap. 27 K obrestij?

d) 1400 K kap. 63 K obrestij?

*19. Koliko % se računi, ako dá

a) 400 K kap. v 2 let. 28 K obrestij?

b) 700 " " v 4 " 140 " "

c) 300 " " v 4 " 42 " "

d) 800 " " v $2\frac{1}{2}$ " 120 " "

20. Po koliko % dá 4260 K kapitala v 3 letih 4 mesecih 710 K obrestij?

21. Kapital dá v 3 letih po $4\frac{1}{2}\%$ 60 $\frac{3}{4}$ K obrestij; drug, za 150 K večji kapital pa dá v istem času 90 K obrestij; po koliko % je drugi kapital na obresti naložen?

22. Po koliko % treba 9110 K naložiti na obresti, da dajo od dne 2. maja do dne 15. oktobra 205 K 23 h obrestij?

23. Po koliko % treba kapital naložiti na obresti, da bodo jednostavne obresti a) v 20, b) v 25, c) v $33\frac{1}{3}$ let. kapitalu jednake?

24. Koliko % nosi sreberna renta, katero kupimo (po kurzni vrednosti) za 97'53 gl.? (4'2 gl. je letni znesek.)

*25. V katerem času dá

a) 225 K kap. po 4% 45 K obrestij?

b) 320 " " " 5% 32 " "

c) 1200 " " " 4% 240 " "

d) 450 " " " 6% $94\frac{1}{2}$ " "

26. V katerem času dá

a) 5460 K kap. po $5\frac{1}{2}\%$ 365 K obrestij?

b) 5244'55 K kap. po $5\frac{1}{4}\%$ 956'3 K obrestij?

27. Koliko časa mora biti kapital naložen na obresti, da znašajo obresti a) po 4%, b) po 5%, c) po 6% prav toliko kakor kapital?

2. O diskontnem računu.

§ 170. Recimo, da kdo takój izplača vsoto, katero ima brez obrestij plačati še-le čez nekaj časa; tedaj mu očitvidno ne bode treba plačati vsega, kar je dolžan, nego plačal bode le oni znesek, kateri dá, povečan z obrestmi, ki bi narasle do plačilnega roka, ves dolg; dolžniku se mora tedaj dovoliti nekaj odbitka. Ta odbitek se zove diskont (*Diskont*) ter se računi po procentih. Ako

Naloge.

1. Kateri kapital narase v 6 mesecih ($\frac{1}{2}$ leta) s $5\frac{1}{2}\%$ obrestni vred na 349 K 35 h?

2. Dolžnik plača upniku 5343 K 75 h ter poplača s tem kapital in $5\frac{1}{2}\%$ obresti za $1\frac{1}{4}$ leta; koliko znašajo obresti, in kolik je kapital?

3. Nekdo bi moral 2345 K plačati čez 1 leto; a on plača takój ter dobi 5% diskonta; koliko znaša a) diskont, b) gotovo plačilo?

4. Koliko je vrednih 850 K, katere treba plačati čez 2 leti, sedaj, ako se računi 5% diskonta?

5. A ponuja za hišo 11820 K proti temu, da plača kupnino še-le čez 1 leto in 4 mesece; koliko K je ponudba sedaj vredna, ako se računi $4\frac{1}{2}\%$ diskonta?

6. A mora plačati B-ju 1245 K čez 5 let; koliko bi mu moral plačati čez 3 leta in 2 meseca, ako se računi $5\frac{1}{4}\%$ diskonta?

7. Za 980 K, izplačnih čez 6 mesecev, plača se takój 931 K; koliko $\%$ diskonta se računi?

8. A posodi B-ju 1850 K po 6% ter mu précej odtegne obresti za 1 leto; za koliko je na škodi B, kateri bi moral obresti prav za prav plačati še-le koncem leta?

9. A ponuja za posestvo 40000 K v gotovini, B pa 44000 K, in sicer hoče plačati 20000 K precej, ostalo vsoto pa čez 2 leti. Kateri ponuja več, ako se računi 5% diskonta?

3. O rokovnem računu.

§ 171. Dostikrat se plačajo brezobrestne vsote, katere bi trebalo plačati drugo za drugo ob določenih rokih (*Termine*), vse kar ob jednom, ali pa ob drugih rokih, nego je bilo iz prva določeno. Kdaj naj se to zgodi, da ne bode na škodo niti dolžniku niti upniku, uči rokovni račun (*Terminrechnung*).

Recimo, da so k_1, k_2, k_3 oni kapitali, katere treba plačati oziroma čez m_1, m_2, m_3 let (mesecev) brez obrestij. Vzemimo dalje, da se plačajo vsi ob jednom in to čez t let (mesecev).

Da ne bode na ta način oškodovan niti dolžnik niti upnik, treba, da je gotova vrednost vsega plačila jednaka vsoti gotovih vrednostij vseh posamičnih plačil. Določujoč gotove vrednosti, morali bi računati diskont nad sto (Hofmannov način). V resnici pa se navadno uporablja ne takó natančni, a pripravnější Carpsowov način, kateremu je podstava diskont od sto, t. j. obresti. Ta način se tedaj opira na izrek: Obresti vsega plačila $k_1 + k_2 + k_3$ morajo biti tolike kakor obresti posamičnih plačil k_1, k_2, k_3 skupaj. Tedaj, ako vzamemo obrestno mero po $p\%$, je

$$\frac{(k_1 + k_2 + k_3) pt}{100} = \frac{k_1 p m_1}{100} + \frac{k_2 p m_2}{100} + \frac{k_3 p m_3}{100},$$

ali, ako razdelimo s $\frac{p}{100}$,

$$(k_1 + k_2 + k_3) t = k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3.$$

Iz te jednačbe je móči določiti vsako posamično količino, ako so znane vse druge.

Navadno treba poiskati t , t. j. povprečni plačilni rok (*mittlerer Zahlungstermin*). Iz prejšnje jednačbe dobimo:

$$t = \frac{k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3}{k_1 + k_2 + k_3};$$

t. j. povprečni plačilni rok najdemo, ako pomnožimo vsako posamično plačilo z njegovim rokom ter vsoto teh produktov razdelimo z vsoto vseh posamičnih plačil.

Na pr. 4 je kupil hišo za 8000 K proti temu, da plača kupnino v več obrokih, ne da bi se mu računile obresti, in sicer: 3500 K čez 2 meseca, 2000 K čez 3 mesece, 1500 K čez 4 mesece in 1000 K čez 5 mesecev; kdaj lahko plača vso kupnino ob enem? (Povprečni plačilni rok.)

3500 K čez 2 mes.		7000
2000 " " 3 "		6000
1500 " " 4 "		6000
1000 " " 5 "		5000
<u>8000</u>		

$$24000 : 8000 = 3 \text{ mes.}$$

Kakó se lahko prepričaš, je li rezultat prav?

Dostavek. Kadar so posamična plačila jednaka, in sicer vsako = k , ondaj je povprečni plačilni rok

$$t = \frac{km_1 + km_2 + km_3}{3k} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3},$$

tedaj jednak povprečnemu številu posamičnih rokov.

Naloge.

*1. Štirje kapitali po 600 K so izplačni čez 4, 5, 7, 8 mesecev; čez koliko mesecev se lahko plačajo vsi ob enem?

*2. 4800 K treba plačati v treh enakih obrokih čez 2, $2\frac{1}{2}$ in 3 leta; kdaj se plača lahko ves dolg na jedenkrat?

*3. Nekdo je dolžan 1200 K in od teh mora vsake 3 mesece odplačati po 300 K; kdaj bi moral plačati ves dolg ob enem?

*4. A mora 10000 K plačati v 4 obrokih, in sicer: 3000 K čez 4 mesece, 2500 K čez 6 mesecev, 2000 K čez 8 mesecev in kar ostane, čez 1 leto; kdaj lahko plača vse ob enem? (Preskušnja na obresti.)

*5. Kdaj treba plačati 1800 K ob enem, ako je izplačnih 300 K čez 1 leto, 400 K čez $1\frac{1}{4}$ leta, 500 K čez $2\frac{1}{2}$ leta in ostanek čez $3\frac{1}{3}$ leta in to brez obrestij?

*6. A mora B-ju plačati: 1600 K dne 1. julija, 1400 K dne 1. septembra, 1000 K dne 1. novembra; kdaj lahko plača vse tri kapitale ob enem?

Roke računi od dne 1. julija.

*7. A bi moral plačati brez obresti 2000 K čez 2 leti in 1600 K čez 4 leta, plača pa 2400 K že čez $1\frac{1}{6}$ leta; kdaj mora plačati ostanek?

Ker povprečni rok x ni zavisen od procentov (zakaj ne?), računimo najbolje jednoprocentne obresti:

$$20 \cdot 2 + 16 \cdot 4 = 24 \cdot 1\frac{1}{6} + 12 \cdot x \quad (\text{Ostanek} = 1200 \text{ K})$$

$$x = ?$$

*8. Nekdo bi moral 3000 K plačati čez 8 mesecev, plača pa 1800 K takoj; kdaj mora plačati ostanek?

*9. A bi moral plačati 800 K čez 2 meseca, 500 K čez 3 mesece in 600 K čez 4 mesece, plača pa 800 K čez 1 mesec in 500 K čez $3\frac{1}{2}$ meseca; kdaj mora plačati ostalih 600 K?

10. Nekdo bi moral plačati dné 20. marcija 1500 K, dné 25. junija 2000 K in dné 30. septembra 1200 K; plača pa dné 1. marcija 1000 K, dne 25. maja 800 K in dné 15. avgusta 1600 K; kdaj mora plačati ostanek?

4. O obrestnoobrestnem računu.

§ 172. Ako se pridevajo obresti koncem vsakega leta ali polleta kapitalu ter se s tem vred nalagajo zopet na obresti, pravimo, da je kapital naložen na obrestne obresti. (§ 166.)

Pri obrestnoobrestnem računu imamo, prav takó kakor pri jednostavnem obrestnem računu, štiri količine, namreč: kapital, čas, procente in obresti. Obrestna dōba je tudi tu jedno leto, ako se izrekoma kaj nasprotnega ne poudarja. Ako je kapital po $p\%$ naložen na obresti, narase 100 kapitalnih jednot (kron, mark) v jednom letu z obrestmi vred na $100 + p$; 1 kapitalna jednota je tedaj vredna čez 1 leto z obrestmi vred $\frac{100 + p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$. Vrednost $1 + \frac{p}{100}$, na katero narase kapitalna jednota z obrestmi v 1 letu (v obče v 1 časovni dōbi), navadno imenujemo obrestno mero (*Zinsfuss*).

Za 4% je tedaj obrestna mera $1 + \frac{4}{100} = 1.04$.

§ 173. Naloga. Na koliko narase kapital a v m letih, ako ga po $p\%$ naložimo na obrestne obresti?

Ker je vredna kapitalna jednota z obrestmi vred čez 1 leto $1 + \frac{p}{100}$, zato ima kapital a čez 1 leto vrednost

$$e_1 = a \left(1 + \frac{p}{100} \right),$$

t. j.: Vrednost, na katero narase kapital v jednom letu, dobimo, ako pomnožimo njega početno vrednost z obrestno mero.

Naloživši novi kapital e_1 zopet jedno leto na obresti, dobimo koncem leta

$$e_2 = e_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = a \left(1 + \frac{p}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \right) = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

V 3, 4, ... letih narase kapital na

$$e_3 = e_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,$$

$$e_4 = e_3 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4,$$

i. t. d.

Kapital ima tedaj koncem m tega leta vrednost

$$e_m = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m,$$

t. j.: Končni kapital je jednak početnemu kapitalu, pomnoženemu s toliko potenco obrestne mere, kolikor je dób.

Ako je naloženih na pr. 2000 K po 5% na obrestne obresti, narasejo:

v 1 let. na 2000 . 1'05 K
„ 2 „ „ 2000 . (1'05) ² „
„ 3 „ „ 2000 . (1'05) ³ „
„
„ 10 „ „ 2000 . (1'05) ¹⁰ „

Ako se obresti ne pridevajo kapitalu koncem vsacega leta, nego koncem vsacega polleta, treba vzeti dvakrat toliko dób, kakor je danih let, a za vsako dobo le polovico procentov, tedaj v formuli

$e_m = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m$ za p in m oziroma $\frac{p}{2}$ in $2m$. Na pr. za 4% in 8 let dobi bi $e_{16} = a \cdot (1'02)^{16}$.

V nastopni preglednici so sestavljene že izračunane potence obrestne mere za 2, 2½, 3, 4, 5 procentov za $m = 1, 2, 3, \dots, 29, 30$.

m	2%	2½%	3%	4%	5%
1	1'02	1'025	1'03	1'04	1'05
2	1'0404	1'050625	1'0609	1'0816	1'1025
3	1'061208	1'076891	1'092727	1'124864	1'157625
4	1'082432	1'103813	1'125509	1'169859	1'215506
5	1'104081	1'131408	1'159274	1'216653	1'276282

m	2%	2½%	3%	4%	5%
6	1'126162	1'159693	1'194052	1'265319	1'340096
7	1'148686	1'188686	1'229874	1'315932	1'407100
8	1'171659	1'218403	1'266770	1'368569	1'477455
9	1'195093	1'248863	1'304773	1'423312	1'551328
10	1'218994	1'280085	1'343916	1'480244	1'628895
11	1'243374	1'312087	1'384234	1'539454	1'710339
12	1'268242	1'344889	1'425761	1'601032	1'795856
13	1'293607	1'378511	1'468534	1'665074	1'885649
14	1'319479	1'412974	1'512590	1'731676	1'979932
15	1'345868	1'448298	1'557967	1'800944	2'078928
16	1'372786	1'484506	1'604706	1'872981	2'182875
17	1'400241	1'521618	1'652848	1'947901	2'292018
18	1'428246	1'559659	1'702433	2'025817	2'406619
19	1'456811	1'598650	1'753506	2'106849	2'526950
20	1'485947	1'638616	1'806111	2'191123	2'653298
21	1'515666	1'679582	1'860295	2'278768	2'785963
22	1'545980	1'721571	1'916103	2'369919	2'925261
23	1'576899	1'764611	1'973587	2'464716	3'071524
24	1'608437	1'808726	2'032794	2'563304	3'225100
25	1'640606	1'853944	2'093778	2'665836	3'386355
26	1'673418	1'900293	2'156591	2'772470	3'555673
27	1'706886	1'947800	2'221289	2'883369	3'733456
28	1'741024	1'996495	2'287928	2'998703	3'920129
29	1'775845	2'046407	2'356566	3'118651	4'116136
30	1'811362	2'097568	2'427262	3'243398	4'321942

Primera.

1. Koliko bode vrednih 5800 K čez 20 let, ako se 3% obresti kapitalizujejo celoletno?

$$5800 \cdot (1.03)^{20} = 5800 \cdot 1.806111 \dots = 10475.44 \text{ K.}$$

V gorenji preglednici so razven števil v prvih treh vrstah vsa nastopna števila okrajšana na 6 mest.

470. 1'480244 490. 1'480244
 13322196
 1332220
 59

2. Na koliko narase kapital 1234 K v 7 letih, ako je po 4% na obrestne obresti naložen in se obresti kapitalizujejo polletno?

Tu treba vzeti 14 polletij in procenke za polleta, namreč 2%;
tedaj $1234 \cdot (1.02)^{14} = 1234 \cdot 1.319479 \dots = 1628.24$ K.

§ 174. Ako pa treba obratno določiti vrednost, katero je imel kapital pred toliko časom, in to glede na obrestne obresti, t. j. iz končnega kapitala izračunati početni kapital, ondaj dobimo iz formule

$$e_m = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m \text{ takój}$$

$$a = \frac{e_m}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m} = e_m \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m};$$

t. j.: Početni kapital je jednak končnemu kapitalu, razdeljenemu s toliko potenco obrestne mere, kolikor je ddb, ali jednak končnemu kapitalu, pomnoženemu z recipročno vrednostjo te potence.

Na pr. 2000 K je bilo vrednih pred 12 leti, ako se računi 5% obrestnih obrestij

$$2000 \cdot \frac{1}{(1.05)^{12}} \text{ K.}$$

V nastopni preglednici so sestavljene že izračunane recipročne vrednosti dotičnih potenc obrestne mere za 2, 2½, 3, 4, 5 procentov in to za $m = 1, 2, 3, \dots, 29, 30$.

m	2 %	2½ %	3 %	4 %	5 %
1	0.980392	0.975610	0.970874	0.961538	0.952381
2	0.961169	0.951814	0.942596	0.924556	0.907029
3	0.942322	0.928599	0.915142	0.888996	0.863838
4	0.923845	0.905951	0.888487	0.854804	0.822702
5	0.905731	0.883854	0.862609	0.821927	0.783526
6	0.887971	0.862297	0.837484	0.790315	0.746215
7	0.870560	0.841265	0.813092	0.759918	0.710681
8	0.853490	0.820747	0.789409	0.730690	0.676839
9	0.836755	0.800728	0.766417	0.702587	0.644609
10	0.820348	0.781198	0.744094	0.675564	0.613913

m	2%	2½%	3%	4%	5%
11	0'804263	0'762145	0'722421	0'649581	0'584679
12	0'788493	0'743556	0'701380	0'624597	0'556837
13	0'773033	0'725420	0'680951	0'600574	0'530321
14	0'757875	0'707727	0'661118	0'577475	0'505068
15	0'743015	0'690466	0'641862	0'555265	0'481017
16	0'728446	0'673625	0'623167	0'533908	0'458112
17	0'714163	0'657195	0'605016	0'513373	0'436297
18	0'700159	0'641166	0'587395	0'493628	0'415521
19	0'686431	0'625528	0'570286	0'474642	0'395734
20	0'672971	0'610271	0'553676	0'456387	0'376889
21	0'659776	0'595386	0'537549	0'438834	0'358942
22	0'646839	0'580865	0'521893	0'421955	0'341850
23	0'634156	0'566697	0'506692	0'405726	0'325571
24	0'621721	0'552875	0'491934	0'390121	0'310068
25	0'609531	0'539391	0'477606	0'375117	0'295303
26	0'597579	0'526235	0'463695	0'360689	0'281241
27	0'585862	0'513400	0'450189	0'346817	0'267848
28	0'574375	0'500878	0'437077	0'333477	0'255094
29	0'563112	0'488661	0'424346	0'320651	0'242946
30	0'552071	0'476743	0'411987	0'308319	0'231377

Primeri.

1. Koliko je bilo vrednih 7310'75 K pred 15 leti, ako se računi 5% obrestnih obrestij in kapitalizovanje celoletno?

$$7310'75 \cdot \frac{1}{(1'05)^{15}} = 7310'75 \cdot 0'481017 \dots = 3516'6 \text{ K.}$$

2. Kateri kapital treba naložiti po 4% na obrestne obresti, da narase pri polletnem kapitalizovanju v 12 letih na 5200 K?

$$5200 \cdot \frac{1}{(1'02)^{24}} = 5200 \cdot 0'621721 \dots = 3232'95 \text{ K.}$$

zn = a / (1 + r/n)^n
a = 1 + r/n

Dostavek. Formule, katere smo dobili v §§ 173. in 174. za obrestne obresti, veljajo tudi za druge količine, rastoče v stalnem razmerju, n. pr. za prirastek prebivalstva v deželi, lesa v gozdu, i. t. d.

N a l o g e.

1. Na koliko narase 1350 K v 24 letih, ako so naložene po 4 % na obrestne obresti?

2. Na koliko narase, ako se računijo obrestne obresti:

a) 3480 K po 5 % v 15 letih? c) 120 K po 5 % v 12 letih?

b) 6340 „ „ 4 % „ 22 „ d) 5165 „ „ 3 % „ 28 „

3. Nekdo ima v hranilnici 4600 K. Na koliko narase ta kapital v 11 letih, ako plačuje hranilnica po 5 % na leto ter kapitalizuje obresti polletno?

4. Nekdo naloži 3560 K po 4 % na obresti proti temu, da se le-té kapitalizujejo polletno; na koliko narase kapital v 10 letih?

5. Gozd ima sedaj 9800 m³ lesa; koliko ga bode imel čez 10 let, ako ga vsako leto prirase po 3 %?

6. Mesto je imelo 1850. leta 35846 prebivalcev; koliko jih je imelo leta 1880., ako se je pomnožilo prebivalstvo vsako leto za 2½ %?

7. Nekdo mora plačati 3000 K čez 1 leto, 2000 K čez 2 leti, 1000 K čez 3 leta in 4000 K čez 4 leta; koliko bodo vredni vsi ti zneski čez 4 leta, ako se računi 5 % obrestnih obrestij in se obresti kapitalizujejo celoletno?

8. Nekdo je nosil 4 leta zaporedoma v začetku vsakega polleta po 140 K v hranilnico; koliko si je prihranil v tem času, ako plačuje hranilnica za pol leta 2 % obrestij in jih kapitalizuje polletno?

9. Koliko je bilo vrednih 2485 K pred 5 leti, ako se računi 5 % obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

10. Koliko je 8500 K, izplačnih čez 9 let, sedaj vrednih, ako se računi 4 % obrestnih obrestij ter celoletno kapitalizovanje?

11. Koliko je sedaj vrednih

a) 750 K izplačnih čez 25 l., ako se računi 3 % obr. obrestij?

b) 4060 „ „ „ 17 „ „ „ „ 4 % „ „

c) 6372 „ „ „ 12 „ „ „ „ 5 % „ „

12. Kateri kapital treba po 4 % naložiti na obrestne obresti, da narase v 7 letih na 4711'03 K?

13. Kateri kapital treba naložiti po 5% na obrestne obresti s polletnim kapitalizovanjem, da narase v 10 letih na 8000 K?

14. Dežela ima sedaj 1258750 prebivalcev; koliko jih je imela pred 25 leti, ako jih je vsako leto priraslo po $2\frac{1}{2}\%$?

15. Nekdo hoče prôdati njivo. A mu ponuja 3600 K v gotovini, B 4250 K, izplačnih brez obrestij čez 2 leti, C 4310 K, izplačnih brez obrestij čez 3 leta. Katera ponudba je za prodajalca najugodnejša, ako se računi 5% obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

Da bode môči ponudbe drugo primerjati drugi, treba izračunati njih vrednost za isti čas, torej njih sedanjo ali pa njih vrednost čez 3 leta.

16. Nekdo hoče dobivati 3 leta koncem vsakega leta po 1000 K; koliko mora v ta namen takôj naložiti, ako se računi 5% obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

17. Koliko mora A dati B-ju, da mu bode ta 5 let zaporedoma koncem vsacega leta izplačeval po 586 K, ako se računi 4% obrestnih obrestij in celoletno kapitalizovanje?

18. A prevzame hišo ter se zaveže, da bode dosedanjemu posestniku 15 let zaporedoma koncem vsakega leta izplačeval po 1200 K; na koliko se je cenila hiša, ako se računi 5% obrestnih obrestij?

III. O družbenem računu.

§ 175. Družbeni račun ali razdelbeno pravilo (*Gesellschaftsrechnung, Theilregel*) se uporablja tedaj, kadar treba razdeliti dano število na več delov takô, da so ti deli med seboj v istem razmerju kakor druga dana števila. Števila, izražajoča razmerje med posamičnimi deli, zovemo razmerska števila (*Verhältniszahlen*).

Družbeni račun je jednostaven ali sestavljen; prvega uporabljamo, kadar je dana le jedna vrsta, drugega pa, kadar je danih več vrst razmerskih števil.

§ 176. Recimo, da je v jednostavnem družbenem računu s število, katero nam je razdeliti, a , b in c pa so razmerska števila. Ako imenujemo neznane dele x , y in z , tedaj velja

$$x : y = a : b \text{ in } y : z = b : c, \text{ ali}$$

$$x : a = y : b \text{ in } y : b = z : c, \text{ tedaj}$$

$$x : a = y : b = z : c.$$

Odtod pa dobimo, po dostavku k § 115.

$$(x + y + z) : (a + b + c) = x : a$$

$$= y : b$$

$$= z : c,$$

ali, ker je po pogoju $x + y + z = s$,

$$s : (a + b + c) = x : a, \text{ tedaj } x = \frac{s}{a + b + c} \cdot a$$

$$s : (a + b + c) = y : b, \quad " \quad y = \frac{s}{a + b + c} \cdot b$$

$$s : (a + b + c) = z : c, \quad " \quad z = \frac{s}{a + b + c} \cdot c.$$

Pri jednostavnem družbenem računu razdeli tedaj število, katero treba razdejevati na dele, z vsoto vseh razmerskih števil, dobljeni kvocijent pa pomnoži zaporedoma z vsakim razmerskim številom; produkti so iskani deli.

Ako so razmerska števila ulomki, treba vsa pomnožiti z najmanjšim skupnim imenovalcem ter takisto pretvoriti na cela števila; ako imajo vsa razmerska števila kako skupno mero, treba jih ž njo okrajšati.

Na pr. Med štiri osebe A, B, C, D treba razdeliti 5610 K v razmerju števil $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$.

$A \frac{1}{2}$	6;	$170 \text{ K} \cdot 6 = 1020 \text{ K}$ dobi A ,
$B \frac{2}{3}$	8;	$170 \text{ " } \cdot 8 = 1360 \text{ "}$ " B ,
$C \frac{3}{4}$	9;	$170 \text{ " } \cdot 9 = 1530 \text{ "}$ " C ,
$D \frac{5}{6}$	10;	$170 \text{ " } \cdot 10 = 1700 \text{ "}$ " D ,
$5610 : 33 = 170$		5610 K vsi skupaj.

Prav tisto pravilo dobimo tudi po sklepnem računu.

Vzemimo, da treba na pr. 640 K med tri osebe A, B, C razdeliti v razmerju števil 9, 7 in 4; koliko dobi vsaka oseba?

A dobi 9, B 7 in C 4, tedaj vsi skupaj 20 enakih delov; 20i del od 640 K je 32 K; tedaj dobi

$$A \text{ 9krat } 32 \text{ K} = 288 \text{ K}$$

$$B \text{ 7krat } 32 \text{ " } = 224 \text{ "}$$

$$C \text{ 4krat } 32 \text{ " } = 128 \text{ "}$$

Takisto sklepamo posebej tedaj, kadar računimo na pamet.

§ 177. Vsak sestavljeni družbeni račun lahko pretvorimo na jednostavnega.

Na pr. Trije trgovci so se združili za podjetje, pri katerem je bilo 2300 K dobička; kakó jim je razdeliti ta dobiček, ako se je udeleževal podjetja *A* z 2000 K 8 mesecev, *B* s 4000 K 6 mesecev, *C* z 8000 K 5 mesecev?

Tu treba dobiček razdeliti ne le v razmerju vlog, ampak tudi v razmerju časa. Toda, ker je prav tisto,

če se udeležuje *A* z 2000 K 8 mes. ali pa s 16000 K 1 mesec,

„ „ „ *B* s 4000 „ 6 „ „ „ „ 24000 „ 1 „

„ „ „ *C* z 8000 „ 5 „ „ „ „ 40000 „ 1 „

zato morajo dobiti vsi trije v obeh slučajih prav toliko dobička. Toda v drugem slučaju se vsi trije udeležujejo podjetja jednako dolgo, in zato treba razdeliti dobiček med nje le po razmerju vlog, t. j. produktov 16000 K, 24000 K in 40000 K, katere lahko smatramo za razmerska števila jednostavnega družbenega računa. Račun stoji takó-le:

<i>A</i> 2000 K 8 mes.	16000	2	$230 \cdot 2 = 460$ K
<i>B</i> 4000 „ 6 „	24000	3	$230 \cdot 3 = 690$ „
<i>C</i> 8000 „ 5 „	40000	5	$230 \cdot 5 = 1150$ „
	2300 : 10 = 230		2300 K.

Pri sestavljenem družbenem računu pomnoži tedaj vsa istemu delu pripadajoča razmerska števila drugo z drugim, dobljene produkte pa vzemi za razmerska števila jednostavnega družbenega računa in le-téga potem uporabi v razrešitev naloge.

Naloge.

*1. 175 K treba med dve osebi *A* in *B* razdeliti takó, da dobi *A* 2, *B* 3 jednake dele; koliko dobi vsaka oseba?

*2. Razstavi število 160 na dva dela takó, da se bosta imela kakor 7 : 9; kolika sta ta dva dela?

*3. Štiri osebe kupijo srečko; *A* dá 50 h, *B* dá 1 K, *C* 1 K 50 h, *D* 2 K. Srečki pripade dobiček 8000 K; koliko dobi vsaka oseba?

4. Za skupno podjetje dá *A* $\frac{1}{2}$, *B* $\frac{1}{5}$ in *C* ostali del potrebne vsote. Dobička imajo 240 K; koliko dobi vsak?

5. Za belo steklo se vzame 13 delov kremenjaka, 4 dele pepelíke in 1 del krede; koliko treba vzeti vsake tvarine za 125 kg stekla?

6. Iz 1 kg zmesi, ki ima 95 delov bakra, 4 dele kositra in 1 del cinka, skuje se 600 jednovinarskih kosov. Koliko kg je treba vzeti vsake kovine, da se nakuje jednovinarskih kosov za 15000 K?

7. Trгоvec je dolžan: *A*-ju 2000 K, *B*-ju 3200 K, *C*-ju 1200 K, *D*-ju 2800 K, *E*-ju 4600 K, imetja pa ima le 8625 K; koliko dobi vsak upnik pri delitvi in koliko procentov izgubi vsak?

8. 67270 K treba razdeliti med pet oseb v razmerju števil $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{32}, \frac{9}{40}, \frac{13}{60}$; koliko dobi vsaka?

9. Nekdo zapusti 15845 K imetja, katero je takó razdeliti med njegove tri dediče, da dobi *A* 2krat toliko kakor *B*, in *B* 3krat toliko kakor *C*; koliko dobi vsak dedič?

10. Med tri osebe treba 9150 K razdeliti takó, da dobi *A* tolikokrat po 5 K kakor *B* po 3 K, in *C* tolikokrat po 3 K kakor *B* po 4 K; koliko dobi vsaka oseba?

11. Trije trgovci kupijo nekaj blaga; pri prodaji imajo 15% dobička in tega razdelé med seboj po razmerju svojih vlog. Koliko je vložil vsak izmed njih, ako ima *A* 810 K, *B* 350 K in *C* 220 K dobička?

12. Trije trgovci so zložili 16000 K ter nekaj časa tržili skupaj. Ko so se razdružili, dobil je *A* 5400 K, *B* 6200 K, *C* 8400 K; koliko je bil vsak vložil, in koliko % je bilo dobička?

13. Tri osebe so tržile skupno. *A* je vložil 1500 K na 1 leto, *B* 1200 K na 6 mesecev, *C* 1000 K na 8 mesecev; dobička imajo 960 K; koliko tega dobička dobi vsak?

14. Tri občine dobé za neko delo 500 K. Iz občine *A* je delalo 11 delavcev 10 dnij po 9 ur na dan; iz občine *B* 9 delavcev 9 dnij po 10 ur na dan, iz občine *C* 15 delavcev 5 dnij po 6 ur na dan; koliko plačila dobi vsaka občina?

15. *A* začne tržiti dne 1. januarja z 8000 K kapitala; dne 1. marcija pristopi *B* s 5000 K in dne 1. maja *C* s 3000 K. Koncem leta imajo 1059 K dobička; koliko tega dobička dobi vsak?

16. Za podjetje se je potrebovalo 9000 K; *A* je dal $\frac{1}{3}$ na 10 mesecev, *B* $\frac{4}{9}$ na 8 mesecev, *C* pa ostali del vsote na 6 me-

secev; računski sklep je izkazal 629 K dobička; kakó se je moral ta razdeliti?

17. *A* je najel v gostilni 3 sobe za 3 dni, *B* 1 sobo za 4 dni, *C* 3 sobe za 5 dnij. Ob koncu tedna je dobil krčmar, ki računi posamično sobo (*B*) za polovico draže, 48 K. Koliko je plačala vsaka oseba?

IV. O zmesnem računu.

§ 178. Dostikrat je treba več istovrstnih, a po vrednosti ali dobrini različnih stvari zmešati takó, da dobimo zmes srednje vrednosti. Pri tem je paziti na té-le količine: 1.) na množino posamičnih sestavin, 2.) na njih vrednost in 3.) na vrednost zmesi.

Račun, kateri uči, kakó je katerokoli teh količin najti iz drugih, zovemo v obče zmesni račun (*Mischungsrechnung*). Sèm spadajo zelo različne naloge, a izmed vseh sta té-le dve za praktično življenje najbolj važni.

1. Kakó je najti, koliko je vredna jednota zmesi, katero smo dobili iz več istovrstnih stvari različne vrednosti. Ta račun imenujemo povprečni račun (*Durchschnittsrechnung*).

2. Kakó je najti razmerje, v katerem treba dvoje ali več istovrstnih stvari različne vrednosti zmešati, da dobimo zmes srednje vrednosti. Zmesni račun imenujemo v tem slučaju aligacijski račun (*Alligationsrechnung*).

§ 179. 1. Podstava povprečnemu računu so prav jednostavni sklepi.

Na pr. Trгоvec zmeša trojo kavo: 6 *kg* po 3'84 K, 8 *kg* po 3'60 K in 10 *kg* po 3'36 K; koliko velja 1 *kg* zmesi?

6 <i>kg</i> po 3'84 K	velja	23 04 K
8 " " 3'60 " "		28 80 "
10 " " 3'36 " "		33 60 "
24 <i>kg</i> zmesi		85 44 K
tedaj velja 1 <i>kg</i> zmesi		3 56 K

2. Pri aligacijskem računu pa treba sklepati na poseben način; kakó, pokaže tá-le naloga:

Krčmar hoče imeti vino po 40 K *hl*, ima pa le vino po 32 K in po 60 K *hl*; v katerem razmerju mora zmešati to dvoje vino, da velja *hl* zmesi ravno 40 K?

Ako pomeni x množino hl , katere je treba vzeti od boljše vrste, in y število hl , kateri se vzemó od slabše vrste, tedaj je, ker morata biti vrednosti obeh snovij skupaj jednaki vrednosti zmesi,

$$60x + 32y = 40(x + y). \text{ Iz tega dobimo:}$$

$$(60 - 40)x = (40 - 32)y \text{ ali}$$

$$x : y = (40 - 32) : (60 - 40) = 8 : 20 = 2 : 5.$$

Pismeni račun stoji takó-le:

$$\begin{array}{r|l|l|l} 60 & 40 - 32 & 8 & 2 \\ 40 & & & \\ 32 & 60 - 40 & 20 & 5 \end{array}$$

Boljšo vrsto moramo zmešati s slabšo vrsto v razmerju 8 : 20 ali 2 : 5.

Vzemimo v obče, da sta A in B dve istovrstni tvarini in da ima njiju jednota vrednost a , oziroma b in da je $a > b$. V katerem razmerju treba zmešati te dve tvarini, ako hočemo, da bode imela jednota zmesi srednjo vrednost m , tedaj $a > m > b$?

Recimo, da treba zmešati x jednot tvarine A z y jednotami tvarine B . Ker morata pa sestavini, kateri smo porabili za zmes, biti toliko vredni kakor zmes sama, velja

$$x \cdot a + y \cdot b = (x + y) \cdot m, \text{ tedaj}$$

$$x(a - m) = y(m - b), \text{ ali}$$

$$x : y = (m - b) : (a - m);$$

t. j.: Množina boljše in množina slabše tvarine se imata kakor diferenca med srednjo in slabšo vrednostjo in diferenca med boljšo in srednjo vrednostjo.

Račun stoji takó-le:

$$\begin{array}{r|l} a & m - b \\ m & \\ b & a - m \end{array}$$

Kadar je dana tudi množina zmesi, izvršujemo račun po družbenem računu.

Naloge.

*1. Nekdo zmeša 1 l vina po 72 h z 1 l po 80 h in 1 l po 90 h; koliko velja 1 l zmesi?

*2. Nekega dne je kazal termometer zjutraj 16°, opoldne 22°, zvečer 13°; kolika je bila povprečna temperatura onega dneva?

3. Posestvo je dalo čistih dohodkov v 5 letih zaporedoma po 2565 K 24 h, 2844 K 64 h, 2085 K 38 h, 2633 K, 2408 K 84 h; koliko povprek na leto?

*4. Koliko je vreden 1 l zmesi, ako zmešaš 5 l vina po 72 h s 4 l vina po 80 h in 1 l vode?

5. Krčmar zmeša 4 hl vina po 48 K, 3 hl po 56 K in 5 hl po 60 K; koliko je vreden 1 hl zmesi?

6. Nekdo zmeša 39 l špirta po 40 stopinj s 26 l po 30 stopinj; koliko stopinj ima zmes?

7. Nekdo je izposodil 3600 K po $4\frac{3}{4}\%$, 4500 K po 5% in 1900 K po 6%; po koliko % bi moral izposoditi vsoto vseh teh treh kapitalov, da bi dobil iste obresti?

*8. Trгоvec ima dvoji riž, kg po 70 h in po 56 h; ta dvoji riž hoče zmešati takó, da mu bode móči kg zmesi prodajati po 64 h; v katerem razmerju mora zmešati oboji riž?

*9. V kakšnem razmerju treba zmešati špirit po 60 stopinj in po 45 stopinj, da dobimo špirit po 50 stopinj?

10. Iz srebra po 800 in po 600 tisočin čistine hoče srebrar zlit (legovati) srebro po 720 tisočin čistine; v katerem razmerju mora zlit oboje srebro?

11. Koliko l vina po 75 h in koliko po 1 K moraš zmešati, ako hočeš dobiti 100 l zmesi po 84 h?

12. Čisto srebro (po 1000 tisočin čistine) in srebro po 400 tisočin čistine treba zlit takó, da bode imela zlitina po 835 tisočin čistine; koliko je vsakega srebra treba vzeti za 24 kg zlitine?

13. Avstrijske dvajsetice se kujejo iz 500tisočinskega, goldinarji iz 900tisočinskega srebra. Koliko kg mora novčarnica zlit od vsake vrste, da skuje 5000 K (po 835 tisočin), ako tehta 1 K 5 g?

14. Koliko kg po 18 h treba dodati 564 kg po 32 h, da bode veljal kg zmesi 24 h?

15. Koliko (y) kg bakra treba dodati 3 kg zlata po 850 tisočin čistine, da bode imela zlitina po 700 tisočin čistine? (y + 3) kg tehta zlitina.

V. 0 verižnem računu.

§ 180. Verižni račun (*Kettenrechnung*) uporabljamo tedaj, kadar treba poiskati odnošaja med dvema količinama s pomočjo znanih vmesnih določil.

Primer. Iz 1 *kg* čistega zlata se nakuje 164 kosov po dvajset kron (3280 K). Koliko kron dá 10 funtov sterlingov (£), ako se iz 40 standard-troy-funtov nakuje 1869 £, ako je v 12 standard-troy-funtih 11 troy-funtov čistega zlata in ako tehta 1 troy-funt 0'373242... *kg*?

Tukaj imamo nastopne jednačbene odnošaje:

$$\begin{aligned} x \text{ K} &= 10 \text{ £}, \\ 1869 \text{ £} &= 40 \text{ standard-troy-funtov}, \\ 12 \text{ standard-troy-funtov} &= 11 \text{ troy-funtov čistega zlata,*)} \\ 1 \text{ troy-funt čistega zlata} &= 0'373242 \dots \text{ kg čistega zlata}, \\ 1 \text{ kg čistega zlata} &= 3280 \text{ K}. \end{aligned}$$

Ker stojé na levi in desni jednačaja zgolj istovredna števila, dobimo, ako produkt desnih števil razdelimo s produktom levih števil, kvocijent 1.

$$\frac{10 \text{ £} \times 40 \text{ st.-troy-ft.} \times 11 \text{ ft. čist. zl.} \times 0'373242 \dots \text{ kg čist. zl.} \times 3280 \text{ K}}{x \text{ K} \times 1869 \text{ £} \times 12 \text{ st.-troy-ft.} \times 1 \text{ ft. čist. zl.} \times 1 \text{ kg čist. zl.}} = 1.$$

Različna imena ne predružačijo računa, ako so števci in imenovalci istoimenski (pri množenju ni treba jemati imen v poštev), ker dá kvocijent iz istoimenskih števil neimenovano število:

$$\frac{10 \text{ £}}{1869 \text{ £}} \cdot \frac{40 \text{ st.-troy-ft.}}{12 \text{ st.-troy-ft.}} \cdot \frac{11 \text{ ft. čist. zl.}}{1 \text{ ft. čist. zl.}} \cdot \frac{0'373242 \dots \text{ kg čist. zl.}}{1 \text{ kg čist. zl.}} \cdot \frac{3280 \text{ K}}{x \text{ K}} = 1,$$

$$\frac{10}{1869} \cdot \frac{40}{12} \cdot \frac{11}{1} \cdot \frac{0'373242 \dots}{1} \cdot \frac{3280 \text{ K}}{x \text{ K}} = 1,$$

$$\text{torej } x \text{ K} = \frac{10 \times 40 \times 11 \times 0'373242 \dots \times 3280}{1869 \times 12 \times 1 \times 1} \text{ K},$$

$$= \frac{10 \times 10 \times 11 \times 0'124414 \dots \times 3280}{1869} \text{ K},$$

$$= 448884 \dots : 1869 = 240'174 \dots \text{ K.**)}$$

*) Na vrednost primešanega bakra (prim. prihodnji oddelek) se v novčinem računu nikoli ne oziramo.

**) Ker je bila po zakonu z dné 2. avgusta 1892. leta, iz katerega smo posneli jednačbeni odnošaj „1 *kg* čistega zlata = 164 kosov po dvajset kron“, vrednost 10 £ = 240'174 K = 120'08 gl., zató se je dejalo, da smo prešli po kurzu 120 h kronski veljavi.“

Da dobimo v števcu in v imenovalcu vedno ista imena, pričnemo račun vselej z istim imenom, s katerim smo nehali, in sklenemo verigo še-le potem, ko se je vrnilo ime neznanke. — Odtod imé verižni račun.

Ako primerjamo ravnokar najdeni izraz za x in pa dano nalogo, kakeršna je v verižni obliki, razvidimo, da velja za verižni račun tó-le pravilo:

1. Najprej potegni vertikalno črto in zapiši na levo te črte neznanko x z nje imenom, na desno pa ono znano količino, za katero treba iskati zneska, katera ima torej isto vrednost kakor neznanka x . Spodaj zapiši vsa vmesna določila, in sicer začni na levi vselej s količino, ki ima isto ime kakor najbližja prejšnja na desni; zraven na desno pa postavi vsakikrat tisto količino, ki ima isto vrednost kakor ona na levi. Takisto nadaljuj, dokler ne dobiš na desni količine, ki ima isto ime kakor neznanka x .

2. Potem razdeli produkt vseh neimenovanih števil, zapisanih na desni, s produktom vseh števil, zapisanih na levi spodaj pod x ; kvocijent je iskana vrednost neznanke x .

Na pr. Ako velja v Angleški 1 kvarter pšenice 40 šilingov, koliko K velja potem 1 hl? (11 kvarterjev = 32 hl, 20 šiling. = 1 £, 10 £ = 240 K.)

Razrešitev:

x K	1 hl	$x = \frac{11 \cdot 40 \cdot 240}{32 \cdot 20 \cdot 10}$ = 175 K
32 hl	11 kvart.	
1 kvart.	40 šiling.	
20 šiling.	1 £	
10 £	240 K	

Naloge.

1. Nekdo kupi v Hamburgu 3894 funtov kave za 5125 mark; koliko K velja 1 kg, ako sta 2 hamb. fnt. = 1 kg, in je 100 mark = 118 K. [Preskušnja po sklepkih in po sorazmerjih.]

2. Koliko K velja 1 frank? (1 kg čistega zlata = 164 kosov po dvajset kron = $3444\frac{4}{9}$ frankov.) [Preskušnja po sklepkih.]

3. Vzemimo, da tehta 5 m dolga železnična šina $125\frac{1}{2}$ kg in da velja v Belgiji 100 kg šin $27\frac{6}{10}$ franka; koliko gl. a. v. stanejo šine, katerih je treba za 1 km? (100 frankov = 46 gl. a. v.)

4. Avstrijski goldinar ima 900 tisočin čistega srebra; koliko g tehta tak goldinar, ako je v 45 goldinarjih 500 g čistega srebra?

5. Koliko velja blago, ki ima 455 kg nečiste teže, ako se plača po odbitku 10% tare kg čiste teže po 62 h ?

6. Trгоvec kupi 4 kose sukna, kos po 30 m , za 612 K ; po čem mora prodajati m , ako hoče imeti 15% dobička, t. j., ako hoče za vsakih 100 K , katere je izdal pri nakupu, 115 K iztržiti pri prodaji?

7. Nekdo je kupil 949 kg blaga za 876 K , potem pa je po 100 kg prodal za 87 K ; ali je pri tej kupčiji kaj pridobil ali izgubil, in to koliko procentov?

Verigo začni: x K pri prodaji dá 100 K pri nakupu (izdanih), ako i. t. d.

8. Ako se kupi hl vina po 48 K , l pa proda po 64 h , koliko % je dobička?

9. Koliko penc veljá 1 standard-unca zlata, ako se iz 40 standard-troy-funtov (po 12 sterl.-unc) nakupe 1869 funtov sterlingov (£)? [1 £ = 12 šilingov po 12 penc.] V kakšnem razmerju sta si ceni zlata in srebra, ako velja 1 standard-unca srebra v Londonu 39 penc?

10. Stroj velja v Angleški 875 funtov sterl.; stroškov je v Londonu 8%, prevoznih in drugih stroškov do Dunaja pa 25% tega, kar stroj velja; koliko K stane stroj na Dunaju, ako je 10 funt. sterl. = 240 K ?

VI. O novčnem računu.

§ 181. Pri novcih treba razločevati:

1. Kov (*das Gepräге*), t. j. napise in podobe, ki se nahajajo na novcih vzvišeni.

2. Kovino (*das Metall*), iz katere je novec skovan. Menj vredni drobiž (*Scheidemünzen*) se kuje navadno iz brona, bakra in niklja, novci večje vrednosti pa so od srebra ali zlata. Ker sta pa te dve kovini precej mehki, zlivata se s tršo kovino, navadno z bakrom, da se novci preveč ne obrusijo v prometu.

3. Težo. Vso težo novca imenujemo njega robelj (*Schrot oder Rohgewicht*), težo čistega zlata ali srebra, kar ga je v njem, pa

jedro ali zrno (*Korn, Feingewicht*). Kot novčna utež (*Münzgewicht*) rabi v avstrijsko-ogrski državi kilogram s svojimi nižjimi razdelki.

Prej je rabila kot novčna utež kolonjska marka (*kölnische Mark*) = = 233·87 g, tudi dunajska marka (*Wiener Mark*) = 280·67 g in od l. 1857. nemški funt = 500 g.

4. Čistino (*Feinheit*), t. j. razmerje med zrnom in robľem. Izraža jo navadno ulomek, čegar števec je zrno, imenovalec pa robľ. V Avstrijsko-Ogrski, v Nemčiji in v večini drugih držav se izraža čistina v tisočinah (*Tausendtheilen*); na pr. čistina avstr. kosom po 20 kron je $\frac{900}{1000}$ ali 0·900, pravi se: v 1000 utežnih delih novca (robľ) je 900 delov čistega zlata (zrno) in 100 delov bakra (primesi); krajše pravimo tudi: kosi po dvajset kron imajo $\frac{9}{10}$ čistine.

Prej se je izražala v Avstriji in Nemčiji čistina srebrnih novcev v lotih, zlatih novcev v karatih, in sicer se je delila marka (= 288 grénov) pri srebru na 16 lotov po 18 grénov, pri zlatu na 24 karatov po 12 grénov. Na pr. Stare avstrijske dvajsetice so bile $9\frac{1}{3}$ lotne, t. j. v 16 delih je bilo $9\frac{1}{3}$ dela čistega srebra; ces. zlatniki (cekini) so $23\frac{2}{3}$ karatni, t. j. v 24 delih je $23\frac{2}{3}$ dela čistega zlata; standardsko srebro in standardsko zlato (na Angleškem) je 22karatno ali ima $\frac{11}{12}$ čistine.

Za zlatino in srebrnino so v Avstriji ustanovljene nastopne stopinje čistine:

Zlato štev.	1	čistina	0·92,0	srebro štev.	1	čistina	0·950,
"	"	2	" 0·84,0	"	"	2	" 0·900,
"	"	3	" 0·75,0	"	"	3	" 0·800,
"	"	4	" 0·580;	"	"	4	" 0·750.

Zakonite določbe o teži, čistini, razdelitvi in kovanju novcev zovemo novčno mero (*Münzfuß*).

Pri novcih treba razločevati trojno vrednost: notranjo ali kovinsko, zakonito in trgovsko. Notranja vrednost novca je vrednost njega čiste kovine; zakonito vrednost določuje vlada, in ta vrednost velja v obče za ono deželo, kjer se kuje novce; trgovska ali kurzna vrednost (*Handelswert, Curswert*) je ona premenljiva vrednost, katero ima novce v trgovini in prometu.

Ako se ravna v kaki deželi vrednost vseh novcev po določenem srebrnem novcu, pravimo, da ima dežela sreberno veljavo (*Silberwährung*); kadar je pa zlato novce podlaga denarnemu sistemu,

ima dežela zlato veljavo (*Goldwährung*); na pr. Avstrija (kronska veljava), Nemčija, Angleška. Ako je naposled kje v državi, na pr. na Francoskem, vrednostno razmerje med zlatimi in srebrnimi novci zakonito določeno, takó da vsakdo lahko plača, v kateri kovini hoče, tedaj pravimo, da ima država dvojno veljavo (*Doppelwährung*).

Avstrijsko novčno razmerje.

§ 182. Denar, po katerem se računi v državi, imenuje se računski novce te države.

V avstrijsko-ogrski monarhiji se je doslej računilo na goldinarje in krajcarje avstrijske veljave. (1 gl. = 100 kr.)

Vrednost goldinarju avstrijske veljave je bila iz prva ustanovljena po takó zvani „petinštiridesetgoldinarski meri“, t. j. iz 500 g čistega srebra se je kovalo po 45 gl. ($\frac{9}{10}$ čistine). Ko so pa leta 1879. kovati nehali sreberne novce na račun zasebnikov, tedaj je bila avstrijska veljava oproščena usode srebrá, čegar vrednost je čimdalje bolj padala v trgovini.

Ker je bila denarna potreba čimdalje večja in se menjala niso do malega nič pomnožila, narasla je trgovska vrednost goldinarju dosti nad notranjo vrednost, ki je znašala leta 1892. po tržni ceni srebrá samó okolo 75 kr.

Z zakonom z dne 2. avgusta 1892. leta se je namesto dotedanje avstrijske veljave uvedla zlata veljava (*Goldwährung*). Nje računska jednota je **krona** (K), ki se deli na 100 vinarjev (h).

Razločujemo: 1. Deželne novce (*Landesmünzen*), 2. drobiž (*Scheidemünzen*) in 3. trgovske novce (*Handelsmünzen*).

1. Deželni novci so prava denarna znamenja, katera morajo deželni prebivalci v vsaki množini prejemati za denar. Po avstrijski kronski veljavi se kuje iz $\frac{900}{1000}$ skega zlatá:

- a) dvajsetkronskih novcev 164 iz 1 kg čistega zlatá; njih zrno znaša 6'09756 g, torej njih robelj 6'77506 g;
- b) desetkronskih novcev 328 iz 1 kg čistega zlatá.

Iz jednega kilograma čistega zlatá se torej nakuje 3280 kron.

20kronski novci se kujejo tudi na račun zasebnikov, ako plačajo le-ti kovalnine 4 do 6 kron.

Zlati novci, katerim se teža v navadnem prometu ni zmajšala pod 6.74 g oziroma 3.37 g (prestopna teža, *Passiergewicht*), prejemljejo se pri vseh plačilih za polnotežne; nasprotno pa se zlati novci, ki so se v prometu tolikanj obrusili, da nimajo več gorenje prestopne teže, ob državnih troških jemljó iz prometa.

2. Drobiž se rabi samó tedaj, kadar se poravnavajo manjši novčni zneski. Država določuje, koliko drobiža mora največ vsakdo vzprejemati. Drobiž se kuje ali iz srebra, toda njega notranja vrednost je manjša od zakonite vrednosti, ali pa iz nežlahtnih kovin, t. j. iz niklja, bron, bakra. Vrednost drobiža je torej seštevno oprta na zaupanje (kredit) države.

Ti-le novci se še kujejo po kronski veljavi:

- 1) sreberni novci: jednokronskih novcev 200 iz 1 kg $\frac{835}{1000}$ skega srebra (robelj 5 g);
- 2) novci od niklja: a) dvajsetvinarskih novcev 250 iz 1 kg čistega niklja (teža 4 g);
b) desetvinarskih novcev 333 iz 1 kg;
- 3) bronasti novci: a) dvovinarski novci, b) jednovinarski novci (300 oziroma 600 iz 1 kg).

Jednokronski novci, novci iz niklja in bron se kujejo samó na račun države. Jednokronskih novcev se smé nakovati za 140 milijonov, novcev od niklja za 42 milijonov, novcev od bron največ za 18.2 milijona.

Pri vseh državnih in javnih blagajnicah se vzprejemljejo ti novci po nominalni vrednosti, in sicer jednokronski novci neomejeno — ti so torej višja vrsta drobiža — novci od niklja in bron pa do 10 kron.

V zasebnem prometu ni nihče dolžan vzprejemati za plačilo jednokronskih novcev nad 50 K, novcev od niklja nad 10 K in novcev od bron nad 1 K.

3. Trgovski novci nam v obče ne rabijo kot denar; kujejo se zató, da se olajšava trgovina z inozemstvom. Vrednost, izražena v računskih deželnih novcih, imenuje se njih kurz.

V Avstriji se kujejo cesarski zlatniki (cekini) kot trgovski zlati novci, in sicer se nakuje 290.519 cekina (H) iz 1 kg čistega zlata (zlato je $23\frac{2}{3}$ karatno)*);

levantinski tolarji s podobo cesarice Marije Terezije slavnega spomina in z letnico 1780 kot trgovski sreberni novci, in sicer se kuje po 12 tolarjev iz dunajske marke (srebro je $13\frac{1}{3}$ lotno).

*) $81\frac{189}{355}$ ces. zlatnikov se nakuje iz dunajske marke (0.280668 kg) čistega zlata v čistini 23 karatov 8 grénov.

Izza leta 1870. sta v prometu še dva avstrijska trgovska zlata novca, kakeršnih pa sedaj več ne kujejo:

- a) osemgoldinarski novci v vrednosti 20 frankov;
- b) štirigoldinarski novci v vrednosti 10 frankov, $172\frac{2}{9}$ iz 1 kg, oziroma $\frac{1}{2}$ kg čistega zlata.

42 avstrijskih zlatih goldinarjev (carinskih ali frankovnih zlatih goldinarjev) ima po zakonu tisto vrednost kakor 100 kron.

Nihče ni dolžan vzprejemati novcev po osem in po štiri goldinarje, vender pa se pri vseh carinskih plačilih prejemajo za 8, oziroma za 4 carinske zlate goldinarje.

Jednogoldinarski novci avstrijske veljave ostanejo še nadalje v prometu in se računijo po 2 kroni. Računi se torej:

1 dvajsetkronski novce	po 10 goldinarjev,
1 desetakronski novce	" 5 "
1 krona	" 50 krajcarjev,
1 dvajsetvinarski novce	" 10 "
1 desetvinarski novce	" 5 "
1 dvovinarski novce	" 1 krajcar,
1 jednovinarski novce	" $\frac{5}{10}$ krajcarja.

Kdaj se drobiž avstrijske veljave vzame iz prometa, to se do-
loči ukazoma.

Prej so računili v Avstriji na konvencijske novce (*Conventionsmünze*). 1 goldinar je imel 60 kr., 1 krajcar 4 fenige (*Pfennig*); 100 gl. konvencijske veljave = 105 gl. avstrijske veljave.

§ 183. V Avstriji imamo tudi papirnat denar, in sicer:

- a) državne note po 1, 5, 50 gl.;
- b) bankovce po 10, 100, 1000 gl.

To so imovniški papirji (*Inhaberpapiere*), s katerimi se izdatnik (država, oziroma avstrijsko-ogrska banka) zaveže, da plača zneske, na katere se glasé. Njih vrednost v trgovini se opira zgolj na zaupanje (*Credit*), katero ima izdatnik.

Avstrija si mora večino zlata, katerega je treba, da se zamenjajo državne note, še-le preskrbeti takó, da si izposodi zlato; zaradi tega dandanašnji še ni móči do cela zamenjati vseh not („izplačavati v zlato“). V naši državi imajo državne note „posilni kurz“; vse državne blagajnice jih prejemljejo za plačilo.

Če zaradi neugodnega (trgovskega ali politiškega) položaja opeša zaupanje do izdatnika, utegne se zgoditi, če se vrše plačila v notah,

ko bi se morala vršiti v kovanem denarju, da se mora plačati nadavek ali ažija (*Agio*). Ta se izraža v procentih kovanega denarja.

V državah, kjer so državne note in bankovci popolnoma pokriti (fundirani) s kovanim denarjem in rabijo zato le za lažji promet, zgodi se tudi, da imajo proti kovanemu denarju nadavek (disažijo), ker jih je pripravneje razpošiljati.

Najvažnejši inozemski novci.

§ 184. 1. Nemška država ima zlato veljavo in računi na marke po 100 fenigov.

1 kg čistega zlata = $139\frac{1}{2}$ zlatnika po 20 mark = 2790 mark = 3280 K. 1 marka = 1'17562 K.

Na Nemškem se kujejo zlatniki po 20, 10 in 5 mark.

2 marki = 2'35125 K veljata jeden avstrijski zlati goldinar (markovni zlati goldinar).

2. Francoska in Belgija računata v zlatu in srebru na franke po 100 centimov.

1 kg čistega zlata = $172\frac{2}{9}$ zlatnika po dvajset frankov (napoleondori) = $3444\frac{4}{9}$ franka = 3280 K.

1 frank = 0'952258 K.

Na Francoskem se nakuje 3100 frankov iz 0'9 kg čistega srebra (sreberni franki). Zlatnik za 20 frankov ima prav tisto notranjo vrednost kakor 1 avstr. zlatnik po osem goldinarjev, 1 zlatnik za 10 frankov pa ima tisto notranjo vrednost kakor 1 avstr. zlatnik po štiri goldinarje.

Jednačba 1 frank = 0'952258 K velja tudi za švicarski, italijanski, srbski, grški, bolgarski, romunski kov in za ruske polimperijale novejšega kova. Novčne jednote nazivljejo v teh deželah franke (po 100 rapnov), lire (po 100 centesimov), dinare (po 100 par), drahme (po 100 sept), leve (po 100 stotink), leje (po 100 banov).

Na Nizozemskem računijo na zlate goldinarje. Holandski goldinar = 1'983744 K. — Na Švedskem in Norveškem imajo skandinavске krone. Skandinsavska krona = 1'32258 avstr. kron.

3. Angleška računi v zlatu na funte ali livre sterlingov (£) po 20 šilingov (sh.) po 12 pencev ali denierjev (d.).

1 kg čistega zlata = 136'5776 funta sterlingov = 3280 K.

1 funt sterlingov (sovereign) = 24'01741 K.

4. Severna Amerika računi v zlatu in srebru na dolarje.

1 kg čistega zlata = 664'662 dolarja = 3280 K.

1 dolar v zlatu = 4'9351 K.

5. Ruska: 1 zlati rubelj (po 100 kopejk) = 3'809525 K.

Vrednostno merilo za inozemstvo je papirnat rubelj s posilnim kurzom in srebrni rubelj, čegar vrednost za inozemstvo se da izračunati le po dnevnem kurzu.

6. Turška: 1 zlata lira (po 100 pijastrov) = 21'4288 K.

§ 185. Kakó je računati čistino, zrno in robelj. Čistina ($\check{c}$) se izračuni, ako zrno (z) razdelimo z robljem (r) (§ 181).

$$\check{c} = \frac{z}{r}.$$

Zató je

$$\text{zrno } z = r \cdot \check{c},$$

$$\text{robelj } r = z : \check{c}.$$

Primeri. 1. Avstrijska krona tehta 5 g in ima $4\frac{7}{10}$ g čistega srebra; kolika je čistina?

$$\check{c} = 4\frac{7}{10} g : 5 g = \frac{167}{200} = \frac{835}{1000}.$$

2. Iz 1 kg $\frac{9}{10}$ čistega zlata se nakuje 155 zlatnikov po osem goldinarjev; koliko čistega zlata ima 1 zlatnik po osem goldinarjev?

$$\boxed{\text{Robelj}} = \frac{1000}{155} g; \text{ zrno } = \frac{1000}{155} \cdot \frac{9}{10} = 5'80645 g.$$

3. Koliko tehta dvajsetkronski novc, ki ima $\frac{9}{10}$ čistine in 6'09756 g čistega zlata?

$$\text{Robelj} = 6'09756 g : \frac{9}{10} = 60'97560 : 9 = 6'77506 g.$$

§ 186. Kakó izračunimo novcem notranjo vrednost. Da izračunimo novcem notranjo vrednost, uporabljamo najjednostavneje jednačbene odnošaje § 184.:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kg čistega zlata} &= 3280 \text{ kron} = 2790 \text{ mark} = 3444\frac{4}{9} \text{ frankov} = \\ &= 136'5776 \text{ funtov sterlingov} = 664'662 \text{ dolarjev.} \end{aligned}$$

Račune izvršujemo ali po sklepovnem ali po verižnem računu; na pr.

1. Koliko mark je 100 kron?

x mark	100 K	$x = 27900 : 328 = 85\cdot061 \dots \text{mark.}$
3280 K	2790 mark.	

Ker velja 100 K primeroma 85 mark, izpremenimo jih pri manjših zneskih v marke kar tako, da od števila kron odštejemo 15%. Za večje zneske nam rabi jednačba 1 K = 0·85061 mark. Kakó preračunimo torej vinarje na fenige?

2. Koliko centimov je 100 vinarjev?

x cent.	100 h	$x = \frac{310000}{9} : 328 = 105\cdot0135 \text{ cent.}$
100 h	1 K	
3280 K	3444 $\frac{4}{9}$ fr.	
1 fr.	100 cent.	

Če je treba torej vinarje izpremeniti na centime, prištejemo vinarjem 5%. Takisto se tudi manjši zneski kron preračunajo na franke (zakaj?)

3. Koliko mark velja avstrijski zlatnik po osem goldinarjev?

x mark	1 zl. po osem gold.	$x = 2790 : \frac{1550}{9} = 2511 : 155 =$ $= 16\cdot2 \text{ mark.}$
172 $\frac{2}{9}$ zl. po 8 gl.	1 kg čistega zlata	
1 kg čist. zl.	2790 mark	

1 zlatnik po osem goldinarjev je torej = 8·4 avstr. zlatega goldinarja (markovnega zlatega goldinarja).

4. Pri carinskih plačilih se vzprejemlje osmi del avstrijskega osemgoldinarskega novca za jeden carinski zlati goldinar (frankovni zlati goldinar). Koliko kron velja 1 carinski zlati goldinar?

x K	1 car. zl. gl.	$x = 410 : \frac{1550}{9} = 2\cdot38064 \text{ K.}$
8 car. zl. gl.	1 osemgold. novce	
172 $\frac{2}{9}$ osemgl. n.	3280 K	

42 carinskih zlatih goldinarjev je 99·987 ... K; zato je ustanovil zakon z dné 2. avgusta 1892. leta, da je pri plačilih, katera se dejanski morajo izvršiti v avstrijskih zlatih goldinarjih (sosebno carinska plačila), 42 avstr. zlatih goldinarjev (frankovnih zlatih goldinarjev) = 100 K.

§ 187. Kakó izračunimo novcem kurzno vrednost. Na dunajski bórzi se zabelezuje kurz posamičnih novcev (*per Stück*), in to v bankovcih (*Bankvaluta*). Navadno sta zabeležena dva kurza: po prvem (denar) se je novce želel kupiti, po drugem (blago) se je prodajal. Na pr. Dné 31. decembra 1892. so zabeleženi v kurzni tabeli (kurznem listu):

Novci po 20 frankov . . 9'59 (denar), 9'61 (blagó).

Novci po 20 mark . . 11'82 (denar), 11'835 (blagó).

Torej se je dobilo 60 mark za 35'505 gl. a. v.

Naloge.

1. Izračuni naloge 1., 2., 3. v § 186. po sklepovnem računu.

*2. Koliko čistino ima sreberna kepa, katera tehta 640 g ter ima 480 g čistega srebra?

3. Koliko tisočin primesi je v zlitini, v kateri je $\frac{11}{12}$ čistega srebra?

4. Ruski sreberni rubelj tehta 20'7315 g ter ima 17'9961 g čistega srebra; kolika je njegova čistina v tisočinah?

5. Koliko čistino dobí zlitina, ako zlijemo 3 kg srebra, imajočega 0'800 čistine, a) z jednim kg čistega srebra, b) z jednim kg bakra?

6. Od 1 kg srebra, imajočega 0'945 čistine, nakuje se 100 holandskih goldinarjev; izračuni hol. goldinarju zrno.

7. Koliko srebra in koliko bakra je v sreberni šibiki, katera tehta $3\frac{2}{5}$ kg in ima 0'520 čistine?

8. Od 1 kolonjske marke (233'87 g) $23\frac{2}{3}$ karatnega zlata se kuje po 67 ces. zlatnikov; izračuni ces. zlatniku zrno.

9. Koliko tehta denarna pošiljatev 100 novcev po dvajset kron?

10. Novčno zlato ima takisto $\frac{9}{10}$ čistine; koliko zlata in koliko bakra je v 3'82 kg novčnega zlata?

11. V 45 gl. a. v. je 500 g čistega srebra, njih čistina znaša $\frac{9}{10}$; koliko tehta 100 srebernjakov po goldinarju?

12. Od 500 g čistega zlata se kuje po $69\frac{3}{4}$ nem. zlatnikov po 20 mark; njih čistina znaša $\frac{9}{10}$; izračuni robelj zlatnika po 20 mark.

13. Koliko tehta sreberna zlitina, ki ima 2257 g čistega srebra in $\frac{37}{40}$ čistine?

14. Preračuni 60 h, 80 h, 75 h v centime.)

*) Zneski v štev. 14., 15., 16., 18. se jemljó kot manjši zneski (primeri § 186.)

***15.** Preračuni 20 K, 90 K, 24 K v franke.

16. Preračuni *a)* 66 h, *b)* 48 h, *c)* 24 h, *d)* 54 h v fenige.

17. Koliko kron je *a)* 120 frankov, *b)* 360 mark, *c)* 180 frankov 45 cent., *d)* 1204 mark 5 fenigov?

18. Preračuni *a)* 42 K, *b)* 18 K, *c)* 72 K, *d)* 84 K v marke?

19. Koliko frankov dobimo *a)* za 2080 K, *b)* za 745 K?

20. Koliko mark je *a)* 3844 K, *b)* 703 K 50 h?

21. Koliko frankov je *a)* 120 funtov sterlingov, *b)* 80 funtov sterlingov 15 šilingov?

22. Koliko kron je *a)* 10 šilingov (sh.), *b)* 6 penc (d.)?

23. Trгоvec prinese 2 kg lomnega zlata šte. 3. (§ 181.) v avstrijski novčni urad. Koliko kron prejme, če plača novčni urad za 1 kg čistega zlata 3274 K. (6 K je kovalnina za zasebnike.)

24. Trгоvec je dolžan v London 60 ft. st. (£) 10 šilingov (sh.). Koliko goldinarjev a. v. mora poslati v London, če je treba plačati nadavka *a)* 8 0/00, *b)* 1%?

25. Koliko avstrijskih markovnih zlatih goldinarjev (2 marki) je vreden 1 frank?

26. Trгоvec mora plačati 120 gl. v zlatu carine. Koliko znaša carina *a)* v kronah, *b)* v goldinarjih a. v., če se računi 19% nadavka?

27. Koliko se je moralo dné 31. decembra 1892. leta na dunajski borzi plačati *a)* za 240 mark 60 fen., *b)* za 120 frankov 50 cent. (§ 187.) (Računi podobne naloge po dnevnem kurzu!)

VII. O meničnem računu.

§ 188. Da bi bil trgovski promet lahek, vender pa popolnoma varen, ustanovil se je za promet najvažnejših listin o terjatvah zakonito poseben postopek (menični red), ki je tako strog in hiter, da je moči ž njim dolžnika najizdatneje pravno preganjati.

Listina, s katero se je izdatnik meničnopravno zavezal, da plača določeno vsoto denarja o določenem času določeni osebi ali sam ali

po kom drugem, imenuje se menica (*Wechsel*). — Izdatnik mora to listino v nje vsebini (kontekstu) označiti za menico in jo podpisati; navadno se podpiše na koncu listine na desni strani. —

Gledé na plačevalca razločujemo lastne ali suhe (*eigene*) in potegnene, tuje menice (*fremde, gezogene Wechsel*).

a) V lastni menici (jediní menici) (*Solawechsel*) izreka izdatnik z besedo „plačam“, da sam izplača menico. (Primer na str. 207.)

b) V potegnjeni (trasovani) menici, imenovani tudi kar potezka ali trata, naroči izdatnik komu drugemu z besedo „plačajte“, naj izplača menično vsoto, in je porok za izplačilo. (Primer na strani 207.)

a) Lastna menica na strani 207. je nastala také-le:

Peter Koren je kupil pri Ivanu Selanu blagá za 500 K 20 h in se zavezal, da plača ta znesek na koncu leta. Podpisavši menico, podredil se je menični strogosti.

V lastni menici imamo vsaj dve osebi: 1. izdatnika (*Aussteller*), ki se zaveže plačati menično vsoto (tukaj Petra Korena); 2. remitentá (*Remittent*) ali prvega imetnika menice, kateremu se izdatnik zaveže plačati znesek (tukaj Ivana Selana).

Obične besede „vrednost v blagu“, „vrednost v gotovini“, „vrednost prejel“, „vrednost v računu“ (valutna pobotnica) pomenijo, kakšno vrednost je izdatnik prejel od remitenta.

Besede „ali na njega ukaz“ pomenijo, da smé Ivan Selan menico odstopiti tudi komu drugemu. Če je na pr. Ivan Selan jednako vsoto dolžan Jakobu Kosu v Ljubljani, lahko provzroči z odstopnim izrecilom, ki se vselej napiše na zadnjo (hrbthno) stran menice, da se znesek izplača naravnost Jakobu Kosu.

Če izpustimo te obične besede, takisto dvojno oznanilo meničnih vsot, tedaj menica nikakor še ne izgubi svoje veljavnosti.

Menični imovnik smé po avstrijskih in nemških meničnih zakonih odstopiti svojo menico, komurkoli hoče, če se ni izreklo kaj nasprotnega (z besedami „ne na ukaz“ ali kakó drugače). Odstopno izrecilo se mora vselej zapisati menici na hrbet (*in dosso*) in se imenuje indosament. Kdor menico odstopi, zove se indosant ali žirant; on je „meničnopravno“ porok za znesek, kakor vsakdo, ki menico podpiše.

Obrazec lastne jedine menice:

V^o Ljubljani, dne 23. oktobra 1893.

Na 500.00 a. št. u.

Dne 31. decembra 1893. plačam za to jedino menico gospodu Ivanu
Jelencu v Ljubljani ali na njegov ukaz vsoto od

petsto tisoč 20 h. ali u.

vrednost v blagu prejel ter plačam pravčasno po meničnem pravu.

Težava menici na me samga, izplačila tukaj in drugod. Peter Skoren.



Obrazec trate ali potegnene menice:

V^o Ljubljani, dne 19. januarja 1894.

Na 1200 a. št. u.

Tri mesece v datu plača jše za to pravo (sušna) -menico na ukaz
gospoda Matjaža Polajna vsoto od

jedentaindvajset tisoč 30 h. a. št. u.

vrednost v opnu in postavite jo na račun po poročilu.

Gospodu Jožifu Lemnu v Beču.

Joan Stark.



*Za me na ukaz
gospoda Jakoba Kosa.*

Vrednost prejel.

V Ljubljani, dne 1. nov. 1893.

Juan Selan.

*Za me na ukaz
gospoda Leopolda Stanica.*

Vrednost prejel.

V Celju, dne 23. janur. 1894.

Martin Kolar.

*Za me na ukaz kmetške
posojilnice ljubljanske okolice.*

Vrednost na račun.

V Celju, dne 1. februar. 1894.

Leopold Stanic.

*Za nas
gospodu Andreju Rosu.*

Vrednost prejeli.

*Kmetška posojilnica
ljubljanske okolice.*

V Ljubljani, dne 15. febr. 1894.

J. Kner } *uldu ravnateljstva.*
J. Gorčnik

Pour acquit.

Andrej Rosa.

b) Spredi natisnena **potezka** ali **trata** je lahko nastala takó-le:

α) Ivan Rak ima terjati 120'3 K od Jožefa Semena in je ta znesek sam dolžan Martinu Kolarju. Zató izdá (potegne, trasuje) na Jožefa Semena menico in jo pošlje (remituje) Martinu Kolarju, ki ima potem pravico vsoto ob svojem času izterjati od Jožefa Semena.

β) A. B. (na pr. Anton Bregar) v Celovcu je dolžan Martinu Kolarju 120'3 K in vé, da ima Ivan Rak terjatev pri Jožefu Semenu v Celju. Zató kupi od Raka menico, katero je ta firma potegnila na Jožefa Semena, izplačno Martinu Kolarju. To menico pošlje (remituje) A. B. Martinu Kolarju, ki jo vzprejme namesto denarja za plačilo.

γ) Martin Kolar je dolžan komu (na pr. Leopoldu Staniču) 120'3 K; zató kupi od Raka menico, katero le-tá potegne na svojega trgovskega prijatelja Jožefa Semena. Odstopek se izvrši z izrecilom (indosamentom) na hrbtu menice.

V tem primeru je Martin Kolar remitent Leopoldu Staniču.

V trgovskem prometu se imenuje praviloma prvi imovnik menice remitent.

V vsaki potegnjeni menici so vsaj tri osebe: 1. izdatnik ali trasant (*Aussteller, Trassant*), ki menico izdá, potegne ali trasuje (tukaj Ivan Rak); 2. potezovnik ali trasat (*der Bezogene, Trassat*), katerega izdatnik pozove, naj plača menično vsoto (tukaj Jožef Semen); 3. oseba ali firma, kateri se izplačaj menica, remitent (*Remittent*).

Izrecilo, za čegav račun potezovnik izplačaj menično vsoto, obseženo je v obični opomnji; „in postavite jo na račun“ (pokritveno razmerje). V slučaju (β), da izdatnik ne trasuje na potezovnika na svoj račun, nego po naročilu tretje osebe (Antona Bregarja), označi se imé naročnikovo (komitentovo) z začetnicama: „in postavite jo na račun (z) A. B.“ (komisijska trata).

Ako se oddá trata dalje, pristopijo nove osebe. Na hrbtni strani spredi natisnene trate je razvidno, da jo je Martin Kolar najprej remitoval na Leopolda Staniča, ta na kmetsko posojilnico ljubljanske okolice, ta pa naposled na Andreja Roso, kateri jo še-le izterja. — *Pour acquit* (izgovóri: pur akí) pomeni: „Potrjujem vzprejem“. —

Kdor ima trato, ima pravico, le-to pokazati trasatu v plačilno izrecilo, „v vzprejem“. Še-le, ko jo je potezovnik „vzprejel“, kar

s podpisom potrdi na menice sprednji strani, porok je trasat menično-pravno. Trasat, ki je menico vzprejel (akceptoval), zove se akceptant (*Acceptant*), njega izrecilo pa vzprejem (akcept). Med trgovci se vsaka vzprejeta menica imenuje kar „akcept“.

Da je potegnena menica veljavna, mora obsezati:

1. kraj, dan, mesec in leto, ko se je izdala;
2. čas, kdaj se izplačaj menična vsota (plačilni rok ali dospelostek, (*Verfallszeit*);
3. oznamenilo „menica“, katero je vzprejeti v besedilo samo (ne v nadpis);
4. ime one osebe, kateri se menica izplačaj (ime remitentovo);
5. menično vsoto;
6. podpis izdatnikov (trasantov);
7. ime tistega, ki se je pozval, da plača (ime trasatovo);
8. kraj, kje se izplačaj menica.

V lastni menici se seveda izpusti ime trasatovo in njega bivališče.

Med trasatom in izdatnikom se imenuje menica trata, med prvim imovnikom in izdatnikom (ali v obče med prednjim i nastopnim imovnikom) rimesa (*Rimesse*).

§ 189. Čas, kdaj se ima menica izplačati, t. j. plačilni rok ali dospelostek (*Verfallszeit*), zaznamuje se četvero:

a) Na določen dan, na pr. dne 8. maja tega leta, sredi (*medio*) maja t. l. (sredi znači zmerom 15. dan meseca), zadnjega (*ultimo*) maja t. l. (dne 31. maja). Take menice se imenujejo dnevne menice (*Tagwechsel*); na pr.

V Ljubljani, dne 3. septembra 1895. Za K 800'50 a. zl. v.

Sredi meseca novembra t. l. plačam za to jedino menico na ukaz gospoda Ivana Strela vsoto od

osemsto kron 50 h a. zl. v.

vrednost v blagu.

Izplačna pri hranilnici v Celju.

Andrej Mrak.



V Trstu, dne 18. avgusta 1894.

Za K 600 a. zl. v.

Dne 1. decembra 1894. plačajte za to prvo menico na ukaz gospoda Pavla Rusa vsoto od

šeststo kron a. zl. v.

vrednost v blagu in postavite jo na račun po poročilu.

Gospodu Simonu Križanu v Ljubljani.

Anton Klun & dr.

b) Na vid (*auf Sicht*), in sicer 1. takó j na vid (na zahtevanje, *a vista, a piacere*), kadar treba menico še tisti dan izplačati, ko se je predložila, in 2. na določen čas (8 dnij, 3 tedne, 2 meseca) po vidu, kadar treba menico izplačati toliko časa po pokazu. Pri poslednjih menicah na vid mora dostaviti akceptant, kdaj jo je vzprejel. Vender ostane vzprejem veljaven, če tudi se datum ne dostavi. Na pr.

V Ljubljani, dne 19. januarja 1894.

Za K 928'85 a. zl. v.

Na vid plačajte za to prvo menico na ukaz gospoda Petra Režka vsoto od

devetstoosemindvajset kron 85 h a. zl. v.

vrednost v blagu in postavite jo na račun po poročilu.

Gospodu Jožefu Samcu v Mariboru.

Jurij Gričar.

V Trstu, dne 19. januarja 1894.

Za 508 gl. a. v.

Štirinajst dnij po vidu plačajte za to prvo menico na ukaz gospoda Simona Rožnika vsoto od

petstoinosem goldinarjev a. v.

vrednost prejeli in postavite jo na račun po poročilu.

Gospodu Jožefu Kovaču v Celju.

Peter Končan.

c) Na določen čas od izdatnega dné, na pr. 2 meseca à dato, 3 tedne od denšnjega dné. Take menice se imenujejo dato-menice. Na pr.

V Ljubljani, dne 13. maja 1894.

Za gl. 697'57 a. v.

Štiri mesece à dato plačajte za to prvo menico na ukaz najin lastni

šeststosedemindeset goldinarjev 57 kr.

vrednost v blagu in postavite jo na račun po poročilu.

Gospodu Andreju Severu v Mariboru.

Klun & Rode.

V Trstu, dne 6. maja 1894.

Za 2566'60 K a. zl. v.

Tri mesece à dato plačajte za to drugo) menico prve ne, na ukaz gospoda Petra Zorca vsoto od*

dvetisočpetstošestindeset kron 60 h

vrednost v blagu in postavite jo na račun po poročilu.

Gospodu Jožefu Trdini v Ljubljani.

Pavel Dolinar.

Vzprejeta prva menica pri gospodu Antonu Novaku.

d) Na kak sejem ali tržni dan.

V Ljubljani, dne 3. decembra 1894. Za rubljev 4800 v srebru.

Na nižjenovgorodskem semnju o sv. Petru in Pavlu leta 1895. plačajte za to prvo menico na ukaz gospoda Ivana Petroviča vsoto od

štiritisočosemsto rubljev v srebru

vrednost v blagu in postavite jo na račun po poročilu.

Gospodu Ivanu Kosu v Peterburgu.

Frančišek Gruden.

*) Izraz „druga“ (secunda) znači, da se je izdala menica v „dveh“ izvodih ter da imamo pred seboj „drugi“ izvod.

O meničnem diskontu.

§ 190. Menice, izplačne v naši državi, se imenujejo diskonti (*Disconten*). Te so ali mestne menice (*Platzwechsel*) ali rimese (v ožjem zmislu); ime se ravna po tem, če so izplačne na bivališču imovnikovem ali pa če jih je treba še-le odposlati, da se izplačajo. Ako se mestna menica izplača pred nje dospelkom, dovoli se dolžniku zaradi tega, ker plača prej, nego bi moral, primeren popust, odbitek ali diskont (*Discont, Escompt*) imenovan. Menico pred nje dospelkom prodati ali kupiti proti primernemu diskontu, pravi se, menico diskontovati (*discountieren*).

Menični diskont izražamo v procentih za 1 leto in trebalo bi ga prav za prav računati nad sto; v resnici pa se računi vselej po pripravnejšem procentnem računu od sto, ker gre tu le za kratke roke, za te je pa razloček med jednim in drugim rezultatom neznamen. Menični diskont se računi tedaj prav tako kakor obresti za določeno število dnij, namreč za čas od dne, katerega se diskontuje, do dne dospelka; a pri določevanju tega časa se ne všteva dan, katerega se diskontuje, ali pa dan dospelka. Meseci se računijo po toliko dnij, kolikor jih res imajo, leto pa po 360 dnij. Na pr.

Menica za 960 K, izplačna 31 dnij po vidu ter vzprejeta dne 18. junija, diskontuje se dne 27. junija po 4%; koliko se dobi zanjo?

Vzprejela se je dne 18. junija	Meničin znesek . . . 960 K
Dospela bode dne 19. julija	4% disk. za 22 dnij 2'35 „
Proda se dne 27. junija	gotova vrednost . . . 957'65 K
Junija 3 dni	
Julija 19 „	
22 dnij.	

Kakó je izračunavati menice na tuja mesta.

§ 191. Menice, glaseče se na tuja mesta, zovejo se tuje (inozemske) menice ali devize (*ausländische Wechsel, Devisen*). Devize se glasé na tujo veljavo. — Primere glej v § 189., d. —

Pri nakupu ali prodaji tujih menic treba s pomočjo danega meničnega kurza (*Wechselkurs*) preračunati tuji denar (menično vrednost, *Wechselvaluta*) na svoj domači denar, ali pa obratno. Takovo preračunavanje zovemo menično redukcijo (*Wechselreduction*).

5. Menica za 3048'72 K, izdana dne 13. maja, izplačna 2 meseca à dato, diskontuje se dne 18. junija; koliko treba zanjo plačati, ako se računi $5\frac{1}{2}\%$ diskonta in $\frac{1}{3}\%$ provizije?

Provizijo računi od meničnega zneska.

6. Dne 24. aprila diskontuje avstro-ogrška banka té-le menice po 5% :

za 3128 K na J. Kovača, dne 20. maja;

„ 1073 „ „ F. Lavriča, zadnjega maja;

„ 536 „ „ A. Bonača, 31. dnij po pokazu, vzprej. dne 8. aprila;

„ 2895 „ „ L. Purgaja, od dne 28. marcija, 2 meseca à dato.

Koliko mora banka izplačati za vse te menice?

7. Dunajski trgovec ima v Augsburgu terjati 2915 drž. mark; to terjatev poravna z menico, katero izda na svojega dolžnika ter proda po 57'6; koliko dobi za to menico?

8. Trgovec v Marseille-u ima od Dunajčana terjati 5682 frankov 56 centimov; koliko je vredna ta terjatev v avstr. v., če je 100 frankov = 48'10 gl. a. v.?

9. Koliko je na Dunaju vredna menica v Berlin za a) 738 mark po 56'8, b) 1335 mark po 56'92, c) 3085 mark 48 fenigov po 56'85?

10. Dunaj kupi 3708 frankov v Pariz po 46'80; koliko stane ta deviza, ako treba plačati $\frac{1}{2}0/00$ senzarije?

11. Dunaj kupi po naročilu 7123 vlaških pijastrov v devizah v Bukarešt po 17'15 ter računi $\frac{1}{4}\%$ provizije in $\frac{3}{4}0/00$ senzarije; kateri znesek v a. v. bode Dunaj pripisal naročevalčevemu računu?

12. A kupi na Dunaju menice v Hamburg:

za 2032 mark, diskonta za 126 dnij,

„ 1760 „ „ „ 80 „

„ 3188 „ „ „ 52 „

Koliko mora plačati za vse, ako je kurz v Hamburg 59'20 in se računi diskonta po $4\frac{1}{2}\%$?

13. V Amsterdam se je poslalo za 2227'75 gl. a. v. 2345 hol. gl.; po katerem kurzu je odposlal Dunaj svojo menico?

14. Kolik je kurz v Bruselj, ako se pri $\frac{1}{2}\%$ provizije za 5248 frankov dobi 2241 gl. 55 kr. a. v.?

VIII. Kakó je izračunavati državne papirje in akcije.

§ 102. Kapitale za večja družbena podjetja (železniške zgradbe, tvorniške naprave i. t. d.), takisto posojila države, deželâ in večjih občin se pogostoma priskrbé takó, da po več zasebnikov vsak nekaj vplača. Tem se plačilo potrdi z listino, ki izreka, da je imovnik plačal določen delski znesek, da mu torej vsako leto gré določen delež podjetniškega dobička, oziroma državnih (deželnih, občinskih) dohodkov. Kdor ima tak vrednostni papir, ta se udeležuje družbenega podjetja, oziroma upnik je tistega, kdor je najel posojilo. Svojega zneska pa ne more nikoli odpovedati, nego le, če prodá vrednostni papir, utegne dobiti zanj primerno vrednost. Po drugi plati pa prihranke lahko plodonosno nalagamo, če kupujemo take vrednostne papirje.

Vrednostni papirji so ali javni ali zasebni ter se glasé na določen znesek, katerega imenujemo imensko ali nominalno vrednost (*Nominalwert*).

1. Javni vrednostni papirji (*öffentliche Effecten*) so dolžna pisma, katera izdadó ali posamične države (državni papirji) ali pa z državno dovolitvijo dežele in večja mesta za delske zneske obrestljivega posojila. Gledé na razdolžitev so državne zadolžnice: *a*) obligacije (*Obligationen*), ki se poravnavajo po določenem (razdolžnem) načrtu; *b*) neobrestljive in obrestljive srečke (*Lose*), katerih kapitalna vrednost se poravnava po žrebem načrtu, pri čemer se uporablja ali ves obrestni znesek ali le del tega zneska za izplačilo premij (dobitkov); *c*) rente (stalen, fundiran državni dolg), pri katerih se je država pač zavezala, da plačuje obresti, ne pa da vrne posojeni kapital. Javnim vrednostnim papirjem prištevamo tudi: zastavna pisma (*Pfandbriefe*), zadolžnice, ki se izposojajo s posredovanjem bank in kreditnih društev na zemljišča (*Hypotheken*); zemljiškoodvezne obligacije (deželne rente), s katerih izdajo (emisijo) se zemljišče oprosti realnih bremen; zadolžnice mest in javnih podjetij (uravnava dunavske reke).

2. Zasebni vrednosti papirji so ali akcije (delnice), prioritete (prednice) ali zasebne srečke.

Akcije ali delnice (*Actien*) so oni vrednostni papirji, kateri spričujejo, da je postal njih lastnik s tem, da je vplačal določen znesek, deležnik večjih prevoznih, obrtnih ali trgovskih podjetij.

Dohodki od vsake posamične akcije se zovejo dividenda, in ti so ali določene obresti ali del dobička, ki ga potjetje nese, ali največkrat oboje ob jednom. Redna divenda velja v zadnjem slučaju za obresti, izvenredna pa razdeljuje ostali dobiček.

Prioritetne obligacije ne dajo imovniku pravice, da bi imel kaj deleža pri dobičku, kar ga je več; zato pa se morajo njih popolne obresti izplačevati pred obrestni akcij.

Zasebne srečke se izdajajo z dovolitvijo dotične države (pogostoma v dobrodelne namene).

Da se obresti pripravneje plačujejo, imajo zadolžnice več obrestnih nakaznic (pobotnic), ki se zovejo kuponi (odstrižki).

Imovnik ob vsakem obrestnem roku odstriže določeni kupon in ga prinese (kot pobotnico) določeni izplačevalnici (*Zahlstelle*), da se mu izplačajo obresti. — Kupon sreberne rente za 100 gl. slove:

Zinsen-Coupon	Nr. 186.857.	Zinsen-Coupon	Nr. 186.857.
<u>Zahlbar am 1. Juli 1895</u>		<u>Zahlbar am 1. Jänner 1895</u>	
bei der k. k. Staatsschuldencasse in Wien		bei der k. k. Staatsschuldencasse in Wien	
nach Abzug der		nach Abzug der	
zwei Gulden	210	zwei Gulden	210
österr. Währ. in klingender Münze.	16% Steuer mit zehn Kreuzer	österr. Währ. in klingender Münze.	16% Steuer mit zehn Kreuzer
	27		26

§ 193. Vrednostni papirji imajo premenljivo vrednost; ta premenljiva vrednost se zove kurz ter ni zavisna le od nominalne vrednosti, nego tudi od obrestne mere in dobička, dalje od tega, ali se po dotičnem papirju povprašuje ali se papir ponuja. Na avstrijskih borzah se zabeležujejo kurzi v gl. a. v. bankovne valute (v papirnatem denarju), in sicer pri vseh zasebnih srečkah in akcijah za vsako posebej (*pr. Stück*), a pri vseh državnih papirjih, zemljiških odveznih obligacijah, zastavnih pismih in večinoma tudi pri prioritetah v procentih, t. j. za 100 gl. nominalne vrednosti.

Pri nakupu takih vrednostnih papirjev, kateri nesó obresti, mora kupec prodajalcu plačati ne le kapitalno vrednost, nego tudi še ne

potegnene obresti, in to od zadnjega obrestnega roka do dne, katerega jih kupi. Pri vrednostnih papirjih se računijo obresti vselej od nominalne vrednosti; mesec se računi po 30 dnij. Na avstrijskih borzah se računijo obresti v papirnatem denarju tudi pri onih vrednostnih papirjih, pri katerih bi se morale računiti prav za prav v zlatu ali srebru, in to brez ačije za zlato ali srebro.

Primeri.

1. A kupi dne 3. decembra 8 akcij avstro-ogrske banke po 985; koliko mora plačati zanje? (Nominalna vrednost jedne akcije = 600 gl. a. v., 5% obresti niso izplačane od dne 1. julija.)

8 akcij po 985 gl.	7880 gl.
obresti od 8 akcij po 600 gl. = 4800 gl.	
od dne 1. jul., t. j. za 150 dnij po 5% .	101 „ 33 kr.
	<u>7981 gl. 33 kr.</u>

2. Nekdo kupi dne 6. novembra 2400 gl. jednotnega državnega dolga v srebru po 97⁵⁰; koliko mora plačati? (4¹/₅% obresti od dne 1. julija.)

2400 gl. po 97 ⁵⁰	2340 gl.
4 ¹ / ₅ % obr. od dne 1. jul., t. j. za 125 dnij	35 gl.
	<u>2375 gl.</u>

3. Dne 17. februarja se proda na borzi 45000 gl. zlate rente (4%) po 116¹⁰. Mešetarina $\frac{1}{2}$ %. Kuponi 1./IV. in 1./X.

45000 gl. po 116 ¹⁰	52245 gl.
Obresti od dne 1. oktobra, 136 dnij po 4%	680 gl.
	<u>52925 gl.</u>
$\frac{10}{2}$ /oo mešetarine	26 gl. 12 kr.
Cistega zneska	<u>52898 gl. 88 kr.</u>

Mešetarina se pri nakupu prišteva, pri prodaji odšteva.

Naloge.

*1. Koliko velja 9 sreček iz leta 1864. po 187?

*2. Kolike velja

6 kreditnih sreček po 184,

12 Palfy-jevih sreček po 55 in

15 sreček Rudolfove ustanove po 24⁷⁵?

3. Koliko je vrednih dne 18. avgusta 2500 gl. jednotnega državnega dolga v bankovcih s kuponi od dne 1. maja po 97'89? (Obresti po $4\frac{1}{5}\%$.)

4. Nekdo proda dne 6. decembra 3000 gl. zlate rente po 116'15; koliko dobi zanje? (Obresti 4% od dne 1. oktobra.)

5. Koliko treba plačati dne 9. septembra za 6 celih sreček iz leta 1860. po 143'50? (Nominalna vrednost po 500 gl., 4% obresti od dne 1. maja.)

6. Nekdo kupi dne 1. maja:

9 akcij Rudolfove železnice po 100'70 ($4\frac{3}{4}\%$) in

12 „ erdeljske „ „ 200'50.

(Nominalna vrednost po 200 gl., 5% obresti od dne 1. januarija.)

7. Nekdo proda dne 26. februarja:

18 prioritetnih obligacij erdeljske železnice po 99'75.

(Nominalna vrednost po 200 gl., 5% obresti od dne 1. oktobra.)

8. A kupi dne 8. oktobra 6000 gl. zastavnih pisem štajerskega hranilnega društva po 101; koliko mora plačati zanje, ako se računi $\frac{1}{2}0/00$ senzarije? ($4\frac{1}{2}\%$ obresti od dne 1. septembra.)

9. Koliko treba plačati dne 26. aprila za a) 2 akciji Ferdinandove sev. železnice po 2800 (nominalna vrednost po 1000 gl. k. v.), b) 6 akcij Elizabetine železnice po 250'50 (nominalna vrednost po 200 gl. k. v.), ako treba povrniti nepotegnene 5% obresti od dne 1. januarija naprej, in se računi $\frac{1}{2}0/00$ senzarije?

10. Nekdo proda na Dunaju dne 26. novembra:

4 akcije avstro-ogrske banke po 928 (nominalna vrednost po 600 gl., 5% obresti od dne 1. julija);

8 sreček iz leta 1860. po 144 (nominalna vrednost po 500 gl., 4% obresti od dne 1. nov.);

3500 gl. zastavnih pisem avstr. zemljišnega kreditnega zavoda po 119, (4% obresti od dne 1. novembra);

koliko dobi za vse, ako se računi $\frac{1}{2}0/00$ senzarije in $\frac{1}{3}\%$ provizije?

IX. Naloge v ponavljanje.

*1. Nekega dne je kazal termometer ob 6ih zjutraj 12° , ob 10ih 15° , ob 2h popoldne 21° , ob 6ih zvečer 16° ; kolikā je bila povprečna toplina onega dne?

*2. Nekdo zmeša 3 l vina po 80 h s 5 l po 112 h; koliko velja 6 l zmesi?

*3. Razdeli po razmerju 3 : 5 števila: a) 20, b) 28, c) 35, d) $\frac{1}{5}$, e) 0.32.

*4. Izmed dveh števil, katerih diferenca je 30, je jedno število trikrat toliko kakor drugo; kateri sta te števili?

$$5. 100 - \left\{ \left(2\frac{1}{4} + 16\frac{7}{12} + 3\frac{5}{8} + 8\frac{3}{7} \right) \cdot \frac{9}{10} \right\}.$$

6. $3280 \text{ K} = 3444\frac{4}{9}$ frankov. Koliko kron ima 1 frank?

7. Izmed štirih števil je prvo $25\frac{1}{3}$, drugo za $8\frac{3}{4}$ večje od prvega, tretje za $12\frac{3}{5}$ manjše od drugega, četrto pa je jednako diferenci med prvim in tretjim; koliko je vsota vseh štirih števil?

8. Koliko znašajo 4% od 775 K a) od, b) nad, c) pod sto?

9. Katera vsota dá 75 K po 6% pod sto?

10. Po koliko % nad sto dá vsota 1634 K 86 K za znesek?

11. Koliko veljajo 4 zaboji smokev, imajoči 511 kg nečiste teže, ako se računi 13% tare in kg čiste teže po 50 h?

12. Ako pomnožiš neko število s 15, produktu prišteješ 20, vsoto razdeliš s 4 in od kvocijenta odšteješ 14, dobiš trojno ono število; katero število je to?

13. Za 2734 kg mandljev in 2891 kg kave se plača 121 K 95 h voznine; koliko znaša voznina za mandlje in koliko za kavo?

14. Delavcu se zviša tednina od 14 K 48 h na 16 K 80 h; za koliko % se je zvišala tednina?

15. Iz 1 kg $\frac{9}{10}$ čistega zlatá se nakuje 155 zlatnikov po 8 gl.; koliko čistega zlatá je v enem zlatniku?

16. Koliko gl. a. v. je vrednih 2350 carinskih zlatih goldinarjev, če se računi ažija v zlatu $19\frac{1}{2}\%$?

17. Koliko vrednost v zlatu ima 3285 gl. papirnatega denarja, če ima zlató 20% ažija?

*18. A kupi vrt za 1200 K ter se zaveže, da bode plačal vsake 3 mesece po 240 K; kdaj bi moral plačati vso vsoto skupaj?

*19. Koliko znašajo letne obresti po 5% od

a) 4 K, b) 20 K, c) 34 K, d) 377 K, e) 2850 K?

20. Koliko obrestij dá kapital

a) 3678 K po 5% v 1 letu 5 mes.?

b) 5782 K po $5\frac{3}{4}\%$ v 6 mes. 12 dneh?

21. Koliko obrestij dá kapital

a) 94275 K po $4\frac{1}{2}\%$ v 37 dneh?

b) 1348 K po $5\frac{1}{2}\%$ v 132 dneh?

22. Izračuni obresti teh-le kapitalov:

a) 1745 K po 6% od dne 15. aprila do dne 12. julija;

b) 5680 K po $4\frac{1}{2}\%$ od dne 1. julija do dne 18. oktobra.

23. Nekdo kupi v Trstu 5 sodov blaga; nečista teža znaša 5219 kg, tare je 10% ; koliko mora plačati za blagó, ako velja 100 kg čiste teže 28 K in se računí 2% skonta?

$$24. \frac{2375x - 25}{625} = 36x.$$

$$25. \frac{x - 0.08}{5} = \frac{2.93x}{16} - 0.00925.$$

$$26. \frac{7}{3} (2x + 5) + 3 (2x - 3) - \frac{3}{4} (5x - 7) = 1.$$

27. Nekdo zmeša 27 kg blaga, katerega velja kg 36 h, z 12 kg slabšega blaga. Sedaj je vreden kg zmesi 48 h; koliko velja 1 kg slabšega blaga?

*28. Rokodelec izdeluje svoje proizvode po 48 K in bi imel rad pri prodaji 15% dobička. Po čem mora prodajati blago, če mora dovoliti njemu, ki oskrbuje prodajanje, 10% odbitka?

29. Zlata verižica tehta $\frac{3}{10}$ kg in ima 0.840 čistine; a) koliko čistega zlata je v nji, b) koliko je vredno čisto zlato, če velja 1 kg 3280 K?

30. Za menico, ki bode dospela dne 22. julija, izplača se dne 12. junija 2135.49 K s 4% diskonta; na kateri znesek je bila izdana?

31. Nekdo si je izposodil dne 1. maja 1550 K po 4% ; ko je vrnil posojilo, znašal je kapital z obrestmi vred 1619 $\frac{3}{4}$ gl. Kdaj je vrnil kapital?

*32. Ako izdaš od denarne vsote tretjino, četrtno in petino, ostane ti še 39 K; kolika je bila vsota?

33. Uradnik dobiva na leto plače in 18% draginske doklade 1888 K; kolika je sama plača?

34. Nekdo naloži 3485 K po 4% na obrestne obresti; koliko znaša kapital po 3 letih?

35. Če plačáš vsako leto v zavarovalnico 200 K, kateri kapital dobodeš v 8 letih, če znašajo obrestne obresti 4% ?

*36. Koliko provizije po 2% dá:

a) 568 K, b) 1240 K, c) 1736 K, d) 2518 K, e) 3712 K?

*37. Koliko šenzarije po $\frac{1}{2}\%$ dá:

a) 884 K, b) 1508 K, c) 2030 K, d) 2264 K, e) 4508 K?

*38. Koliko dobička dá:

a) 250 K po 20% , b) 168 K po 25% , c) 516 K po $16\frac{2}{3}\%$?

39. Če prodáš blagó za 102 K, izgubiš 15 %; za koliko je moraš prodati, da bode 15 % dobička?

40. Pri $43\frac{1}{8}$ km dolgi železnici je bilo na koncu prvega leta 212652 K čistega dobička, také da je dal uporabljeni kapital 3 % obresti. Koliko povprek je veljal 1 km te železnice?

41. Koliko je treba plačati dné 25. februvarja za 3500 gl. zastavnih pisem češke hipotečne banke po $102\frac{3}{4}$? (Obresti po 5 % od dné 1. oktobra.)

42. Blagó se je z všteto $\frac{1}{2}$ % no senzarijo kupilo za 2653 K 40 h; kolika je senzarija?

43. Prodano blago je po odbiti $\frac{1}{2}$ % ni senzariji vredno 5537 K 40 h; za koliko se je prodalo blago?

44. Menica za 2929 mark 3 tedne po pokazu, vzprejeta dné 11. avgusta, diskontuje se v Lipskem dné 17. avgusta s 4 %; koliko je treba plačati zanjo?

45. Dunajski trgovec je dobil iz Marseille-a blaga za 5633 frankov 63 cent.; koliko gl. a. v. mora zapisati na korist trgovskemu prijatelju, če je kurz 47·90?

*46. Nekdo nakupi sukna, meter po 5 K, prodaja pa vsake 4 m po 25 K in ima 310 K dobička. Koliko m je kupil?

*47. 1000 K naj se razdeli také med A in B, da dobi A tolikokrat po 3 K kakor B po 2 K. Koliko dobi vsak?

48. Za skupno podjetje dá A 8000 K, B 7200 K, C 4800 K. Pridóbe si $232\frac{1}{2}$ K menj nego 16 % vloženega kapitala; koliko dobi vsak od skupnega dobička?

49. $\sqrt{5943'844}$ (3 dec.).

50. $\sqrt{144'1449 \dots}$

51. $\sqrt[3]{94818'816}$ (3 dec.).

52. $\sqrt[3]{22164'361 \dots}$

53. Berlinski trgovec remituje na Dunaj 2772 gl. a. v.; koliko plača za rimeso, če znaša senzarija 1 %₀₀, kurz pa 167 (100 gl. a. v. = 167 mark)?

54. Nekdo ima v hranilnici 2345 K 30 h; ob začetku vsakega polletja še vloži 50 K; kolik bode kapital v $9\frac{1}{2}$ leta, če znašajo polletne obrestne obresti 2 %?

55. Trgovec s platnom nakupi dvoje platno, boljšega 126 m po 1 K 50 h, slabšega 228 m po 1 K; za vse skupaj iztrži 491 K 28 h. Ako ima pri boljšem platnu 20 % dobička, koliko % znaša dobiček pri slabšem platnu?

56. A dobi iz Lyona 350 m svilenega blaga, meter po $4\frac{3}{4}$ frankov, skonto znaša 2 %; carine plača 20 % vrednosti, voznine in stroškov pa 4 %. Po koliko gl. mora prodajati m, da si pridobi 20 %, če je 100 frankov = 48 gl.?

57. A ima v svoji tvornici 24 plinovitih plamenov, za katere plača v 6 mesecih 600 K, če goré po 4 ure na dan. Koliko mora plačati B, ki je rabil 30 plamenov $5\frac{1}{2}$ meseca, če so goré po $4\frac{1}{2}$ ure na dan in če je potreboval vsak plamen 14 krat toliko plina kakor A-jev?

58. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$.

59. $5\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{40} + 2\sqrt[3]{135}$.

$$60. \sqrt{4x^3y} - 5y\sqrt{xy} - x\sqrt{4xy} + 25\sqrt{xy^3}.$$

$$61. \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{8}.$$

$$62. (\sqrt{a} + \sqrt[3]{a^3}) (\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^7}).$$

$$63. (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a}\sqrt{b})^2.$$

$$64. (\sqrt{8} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2.$$

$$65. 1 : \sqrt{0.25}.$$

$$66. 3\sqrt{8} : 2\sqrt[3]{2}.$$

$$67. \frac{7}{\sqrt{8}} : \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

$$68. \sqrt{\frac{3}{5}} : \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

69. Kapital dá po $4\frac{1}{2}\%$ v določenem času $239\frac{2}{5}$ K obrestij; koliko obrestij bi dal v tistem času po $5\frac{1}{2}\%$?

70. Katerega kapitala je treba, da dobiš po 5% tiste obresti, katere dá 3200 K kapitala po 4% ?

71. Ako dá kapital v 5 letih 527 K obrestij, v kolikih letih dá 210 K obrestij?

72. Po koliko $\%$ je treba naložiti kapital, da dá v 3 letih prav toliko obrestij kakor v 2 letih po 6% ?

73. Nekdo podeduje 4850 K, katere naj se mu pa izplačajo še-le v 5 letih; na njega željo se mu izplača denar takoj s $5\frac{1}{2}\%$ diskonta; kolika je dedščina v gotovem denarju?

74. Trgovec ima dvoje blago; boljšega velja kg 60 h, slabšega 36 h. Obojega bi rad namešal 80 kg tako, da bi prodajal kg zmesi po 45 h. Koliko kg mora vzeti vsakega blaga?

75. Nekdo kupi državnih zadolžnic po $97\frac{1}{2}$, ki dajó $4\frac{1}{5}\%$ obrestij v papirnatem denarju; koliko $\%$ obrestij dobiva od naloženega kapitala?

76. Kaj je bolje, ali kupiti avstrijske papirne rente (obresti $4\frac{1}{5}\%$ po 98 ali zlate rente (obresti 4% v zlatu) po 116, če ima zlató proti papirnatemu denarju 20% ažija?

77. Nekdo hoče 5 let dobivati po 1000 K letne rente; koliko kapitala mora naložiti, če se obrestne obresti celoletno nalagajo po 5% ?

78. Ko se je razdelila neka vsota, dobil je A 100 K in $\frac{1}{3}$ ostanka, B $\frac{1}{2}$ novega ostanka in še 500 K, C pa ostanek 2500 K. Kolika je bila vsota, koliko je dobil A, koliko B?

79. Izmed dveh kapitalov, ki znašata skupaj 5330 K, je naložen prvi po 5% , drugi po 4% ; kolik je vsak kapital, ako daje prvi dvakrat toliko obrestij kakor drugi?

80. A si izposodi 1200 K in plača na račun 5% obrestnih obrestij in v povrnitev kapitala na koncu vsakega leta 800 K; a) kolik bode dolžni ostanek po 10 letih, b) koliko je dolžni ostanek vreden sedaj?

31. Izračuni, koliko kron je vrednih a) 5840 frankov, b) 6800 mark 50 fenigov. (§ 184.)

Sedmi oddelek.

O jednačbah prve stopinje z več neznankami.

I. Kakó je razreševati jednačbe z dvema neznankama.

§ 194. Jedna sama jednačba ne določuje dveh neznank; zakaj brezštevilno je vrednostij, katere zadoščajo jednačbi, ako jih postaviš za dve neznanki. Ako vzamemo na pr. jednačbo $2x + 5y = 26$, dobimo, če smatramo za sedaj x za neznanko, y pa za znano število, $x = \frac{26 - 5y}{2}$. Kolikor različnih vrednostij vzamemo za y , toliko

različnih vrednostij dobimo za x ; ker pa vzamemo lahko za y brez števila različnih vrednostij, dobimo jih tudi za x brez števila; razrešitev je tedaj nedoločena. Da je mōči x in y določiti popolnoma natančno, treba še druge jednačbe, izražajoče odnošaj med x in y , da odpravi nedoločeno razrešitev prve jednačbe; druga jednačba mora biti od prve bistveno različna, nasprotovati ji pa tudi ne sme.

Da razrešimo dve jednačbi z dvema neznankama, treba iz obeh jednačeb napraviti tretjo, ki ima le jedno neznanko. O drugi neznanki pravimo, da jo iztrebimo (*eliminieren*).

§ 195. Rabijo nam sosebno trije iztrebljevalni načini.

1. Primerjalni način (*Comparationsmethode*). Vrednost jedni neznanki se določi iz obeh jednačeb, te dve vrednosti se izjednačita, in potem se razreši dobljena jednačba, ki ima le drugo neznanko, Na pr. $2x + 5y = 26 \dots 1.)$ in $3x - 2y = 1 \dots 2)$

Iz teh jednačeb dobimo

$$3) \dots x = \frac{26 - 5y}{2}, \text{ in } x = \frac{1 + 2y}{3}.$$

Tedaj
$$\frac{26 - 5y}{2} = \frac{1 + 2y}{3} \quad \text{in odtod } y = 4.$$

Ako postavimo to vrednost za y v 3), dobimo $x = 3$.

2. Zamenjevalni način (*Substitutionsmethode*). Vrednost jedni neznanki se določi iz jedne jednačbe, in ta vrednost se postavi v drugo jednačbo; takó dobljena jednačba ima le jedno neznanko, in ta se potem določi. Na pr.

$$x + 2y = 8 \dots 1) \text{ in } 6x - 5y = 14 \dots 2)$$

Iz 1) dobimo $x = 8 - 2y$.

Ako postavimo to vrednost v 2), dobimo

$$6(8 - 2y) - 5y = 14; \quad \text{in odtod } y = 2.$$

Zamenivši v 1) y s to vrednostjo, dobimo $x = 4$.

3. Način enakih koeficijentov (*Methode der gleichen Coefficienten*). Neznanki, katero je iztrebiti, priskrbi v obeh jednačbah isti koeficijent; to dosežeš, ako pomnožiš vsako jednačbo s primernim faktorjem; takó izpremenjeni jednačbi potem seštej ali odštej, kakor imata ta dva koeficijenta nejednak ali enak predznak; takó dobljeno jednačbo z jedno neznanko treba potem razrešiti. Na pr.

$$4x - 3y = 9 \dots 1) \text{ in } 6x + 5y = 61 \dots 2)$$

Pomnoživši tedaj prvo jednačbo s 3 in drugo z 2, dobimo

$$12x - 9y = 27,$$

$$12x - 10y = 122. \quad \text{Odštevši prvo od druge, dobimo:}$$

$$19y = 95, \quad \text{tedaj } y = 5.$$

Ako zamenimo s to vrednostjo y v 1), dobimo $x = 6$.

Kateri izmed teh treh iztrebljevalnih načinov je v vsakem posamičnem slučaju najugodnejši, ravna se po tem, kakšne koeficijente imajo neznanke.

§ 196. Da je moči iz dveh jednačeb z dvema neznankama določiti vrednosti teh neznank, treba, da sta te dve jednačbi popolnoma nezavisni druga od druge in tudi nasprotovati si ne smeta, kakor je razvidno iz téh-le primerov.

$$1. \quad 4x - 3y = 9 \text{ in } \frac{8x}{3} - 2y = 6.$$

Druga jednačba je závisna od prve, zakaj dobili smo jo iz prve, pomnoživši le-tó z $\frac{2}{3}$. Uporabivši za razrešitev teh dveh jednačeb primerjalni način, dobimo

$$\frac{9 + 3y}{4} = \frac{18 + 6y}{8},$$

$$18 + 6y = 18 + 6y \\ 0 = 0.$$

Za y tedaj ne dobimo nikakeršne vrednosti.

2. $4x - 3y = 9$ in $8x - 6y = 15$.

Druga jednačba nasprotuje prvi, zakaj nje prvi del je 2kratnik prvega dela prve jednačbe, 15 pa ni 2kratnik števila 9. Ako uporabimo za te dve jednačbi način enakih koeficijentov, dobimo

$$\begin{array}{r} 8x - 6y = 18 \\ 8x - 6y = 15 \\ \hline 0 = 3. \end{array}$$

Razrešitev danih jednačeb daje torej protislovje.

Naloge.

1. $x + y = 11,$

$x - y = 3.$

3. $2x - y = 4,$

$4x + 3y = 18.$

5. $7x - 2y = 12,$

$3x + 2y = 8.$

7. $8x - 5y = 25,$

$3x + 7y = 36.$

9. $16y - 25z = 7,$

$5z - 24y = 9.$

11. $3x + 7 = 4y + 3,$

$4x - 8 = 5y - 10.$

13. $x + y = 20,$

$\frac{x}{3} = y.$

15. $x - y = 12,$

$\frac{x}{9} - \frac{y}{8} = 1.$

17. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y = 2,$

$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 4.$

2. $2x + y = 12,$

$x + 4y = 12.$

4. $3x + y = 19,$

$3x - 2y = 7.$

6. $4x + 5y = 22,$

$5x - 4y = 7.$

8. $3x + 4y = 4,$

$12x - 6y = 5.$

10. $28x + 6y = 9,$

$9y - 4x = 2.$

12. $3'7x - 16'6 = 4'5y,$

$1'5x - 2'7 = 2'4y.$

14. $y = 3x - 33,$

$\frac{y}{4} = \frac{x}{3} + 8.$

16. $x + 2y = 30,$

$\frac{3x}{5} + \frac{y}{2} = 11.$

18. $\frac{5}{8}x - \frac{4}{9}y = 4,$

$\frac{1}{7}x - \frac{1}{4}y = 3.$

$$19. \frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 17.$$

$$\frac{5x}{4} + \frac{5y}{8} = 27.$$

$$21. \frac{x+7}{y} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{x}{y+4} = \frac{1}{2}.$$

$$23. \frac{12x-1}{11} + 7y = 22,$$

$$\frac{y+1}{2} - x = 1.$$

$$25. x + y = 36,$$

$$x : y = 3 : 2.$$

$$27. (2x + y - 1) : (3x + 2y + 11) = 1 : 2.$$

$$(5x - 3y + 4) : (6x - 3y + 3) = 3 : 4.$$

$$28. (x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4),$$

$$(x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1).$$

$$29. \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3,$$

$$\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4.$$

$$31. \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{6}{x} - \frac{2}{y} = \frac{3}{10}.$$

$$33. ax + y = m,$$

$$x + by = n.$$

$$35. ax - by = a^2 + b^2,$$

$$bx + ay = a^2 + b^2.$$

$$37. \frac{a}{x} = \frac{b}{y},$$

$$x - y = c.$$

$$20. \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{3}{4},$$

$$\frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y = \frac{6}{7}.$$

$$22. \frac{x+y}{2} - \frac{x+y}{3} = 4,$$

$$\frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{3} = 1.$$

$$24. \frac{x}{0.3} = \frac{y}{0.2},$$

$$\frac{x}{0.9} = 10 + \frac{y}{0.9}.$$

$$26. x : y = 4 : 1,$$

$$(x - 6) : (y + 6) = 1 : 4.$$

$$30. \frac{28}{x} + \frac{6}{y} = 9,$$

$$\frac{9}{y} - \frac{4}{x} = 2.$$

$$32. \frac{1.6}{x} = \frac{2.7}{y} - 1,$$

$$\frac{0.8}{x} = \frac{3.6}{y} - 5.$$

$$34. nx - my = m - n,$$

$$mn(x + y) = m^2 + n^2.$$

$$36. (a + c)x + (a - c)y = 2bc,$$

$$(b - c)x + (b + c)y = 2ac.$$

$$38. \frac{x - a + 2b}{b} + \frac{y}{c} = \frac{b}{c}.$$

$$\frac{x}{ab} + \frac{y}{bc} = \frac{x + y}{ac}.$$

$$39. \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b},$$

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$$

$$40. \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2,$$

$$\frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}.$$

$$41. \sqrt{x} : \sqrt{x+y} = 4:5,$$

$$x + y = 25.$$

$$43. 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5,$$

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 20.$$

$$45. \frac{3}{\sqrt{32+x}} = \frac{1}{\sqrt{12-y}},$$

$$\frac{4}{\sqrt{20-y}} = \frac{3}{\sqrt{1+y}}.$$

$$42. x = 1 + \sqrt{y},$$

$$y = 4 - 3x + x^2.$$

$$44. 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 9,$$

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1.$$

$$46. \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 6,$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = 1.$$

II. Kakó je razreševati jednačbe s tremi ali več neznankami.

§ 197. Za določitev treh ali več neznank je treba prav toliko jednačeb; le-té ne smejo biti med seboj v nikakem nasprotju in druga mora biti od druge po polnem nezavisna.

V razrešitev več skupaj spadajočih jednačeb s prav toliko neznankami se uporabljajo isti načini, katere smo navedli v § 195. za razrešitev dveh jednačeb z dvema neznankama. Iz danih jednačeb se namreč iztrebi jedna neznanka; nato se dobi jedna neznanka in jedna jednačba menj; iz teh novih jednačeb se odpravi zopet druga neznanka, in to se ponavlja, dokler ne dobimo naposled le jedne jednačbe z jedno neznanko, iz katere je mōči določiti vrednost te neznanke.

Dobljena vrednost se postavi v jedno izmed prejšnjih dveh jednačeb; tako se določi druga neznanka. Potem se postavita obe te dve vrednosti v jedno izmed prejšnjih treh jednačeb, i. t. d.; tako se določijo zaporedoma vrednosti vseh neznank.

Primeri.

$$1. \quad \begin{aligned} 8x + 5y + 2z &= 24 \\ 6x - 3y + z &= 3 \\ 4x + 9y - 6z &= 4. \end{aligned}$$

Uporablja joč primerjalni način, dobimo

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{24 - 5y - 2z}{8} \\ x &= \frac{3 + 3y - z}{6} \\ x &= \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{aligned} \right\}, \text{ tedaj } \left\{ \begin{aligned} \frac{24 - 5y - 2z}{8} &= \frac{3 + 3y - z}{6}, \\ \frac{3 + 3y - z}{6} &= \frac{4 - 9y + 6z}{4}. \end{aligned} \right.$$

Določivši iz zadnjih dveh jednačeb y , dobimo

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{60 - 2z}{27} \\ y &= \frac{6 + 20z}{33} \end{aligned} \right\}, \text{ tedaj } \frac{60 - 2z}{27} = \frac{6 + 20z}{33},$$

in odtod $z = 3$.

Ako postavimo vrednost za z v katerikoli prejšnji izraz za y , na pr. v $y = \frac{60 - 2z}{27}$, dobimo

$$y = \frac{60 - 2 \cdot 3}{27} = 2.$$

Ako postavimo naposled vrednosti za y in z v katerikoli prej dobljeni izraz za x , dobimo $x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Preskušnja.} \quad 8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 &= 24, \\ 6 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 &= 3, \\ 4 \cdot 1 + 9 \cdot 2 - 6 \cdot 3 &= 4. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 2. \quad 3x + y + z &= 18 \\ 2x + 3y + 2z &= 28 \\ 5x + 2y + 3z &= 38 \end{aligned} \right\} \text{ Po zamenjevalnem načinu.}$$

Iz prve jednačbe je $y = 18 - 3x - z$. Ako postavimo to vrednost v drugo in tretjo jednačbo, dobimo

$$\begin{aligned} 2x + 3(18 - 3x - z) + 2z &= 28, \text{ ali } 7x + z = 26, \\ 5x + 2(18 - 3x - z) + 3z &= 38, \text{ ali } x + z = 2. \end{aligned}$$

S tem smo skrčili nalogo na razrešitev dveh jednačeb. Po načinu enakih koeficijentov dobimo $x = 3$, $z = 5$.

Ako postavimo dobljeni vrednosti za x in z v izraz $y = 18 - 3x - z$, dobimo $y = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} 3. \quad 3x - 2y + 5z = 8 \\ \quad 2x + 5y - 2z = 18 \\ \quad 4x - y + 2z = 14 \end{array} \right\} \text{ Po na\u010dinu enakih koeficijentov.}$$

Da iztrebi\u0161 iz prvih dveh jedna\u010deb x , pomno\u017ei prvo z 2, drugo s 3; tak\u00f3 dobi\u0161

$$\begin{array}{r} 6x - 4y + 10z = 16 \\ 6x + 15y - 6z = 54 \\ \hline a) \quad 19y - 16z = 38 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 6x - 4y + 10z = 16 \\ 6x + 15y - 6z = 54 \end{array}} \right\} \text{ od\u0161tev.}$$

Da iztrebi\u0161 iz druge in tretje jedna\u010dbe x , treba le drugo pomno\u017eiti z 2, ter potem od\u0161teti, tedaj

$$\begin{array}{r} 4x + 10y - 4z = 36 \\ 4x - y + 2z = 14 \\ \hline b) \quad 11y - 6z = 22. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 4x + 10y - 4z = 36 \\ 4x - y + 2z = 14 \end{array}} \right\} \text{ od\u0161tev.}$$

Tako si dobil dve jedna\u010dbi z neznankama y in z , kateri prav lahko razre\u0161i\u0161:

$$\begin{array}{r|l} 19y - 16z = 38 & \times 11 \\ 11y - 6z = 22 & \times 19 \\ \hline & 209y - 176z = 418 \\ & 209y - 114z = 418 \\ & \hline & 62z = 0; \text{ tedaj } z = 0. \end{array}$$

Ako postavi\u0161 vrednost za z v jedna\u010dbo $11y - 6z = 22$, dobi\u0161 $11y = 22$; torej $y = 2$.

Ako postavi\u0161 naposled vrednosti za y in z v katerokoli danih jedna\u010deb, dobi\u0161: $x = 4$.

Naloge.

1. $x + y = 12,$

$x + z = 10,$

$y + z = 8.$

3. $x + 3y = 30,$

$3x + 2z = 25,$

$4y - 3z = 12.$

5. $3x + y + 2z = 13,$

$x + 2y + 3z = 17,$

$2x + 3y + z = 12.$

2. $x + y = 30,$

$3y - 2z = 25,$

$x - 2z = 3.$

4. $3x - 4y = 6,$

$2x + 3z = 26,$

$5y - 6z = 18.$

6. $6x - 4y + 3z = 28,$

$4x - y - 3z = 7,$

$2x - 3y + 4z = 13.$

$$\begin{aligned} 7. \quad 7x - 2y + 7z &= 60, \\ 3x + 4y + 2z &= 20, \\ 5x - 8y - 3z + 2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad 4x - 2y + 3z &= 8, \\ 7x + 8y - z &= 59, \\ 10x + 3y - 2z &= 49. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad x + y + z &= 100, \\ x : y &= 5 : 3, \\ y : z &= 3 : 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \quad \frac{x}{5} + \frac{3y}{4} + \frac{7z}{15} &= 18, \\ \frac{2x}{5} + \frac{5y}{12} + \frac{2z}{3} &= 19, \\ \frac{x}{10} + \frac{5y}{6} + \frac{4z}{5} &= 23. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15. \quad y + \frac{1}{2}x &= 112, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}z &= 36, \\ \frac{2y - z}{x - y} &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} &= 13, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{5} &= 10, \\ 3x - y - z &= 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19. \quad \frac{5}{3x-1} &= \frac{7}{3y+4}, \\ \frac{3}{5y-7} &= \frac{2}{3z-5}, \\ \frac{2}{3z+1} &= \frac{3}{5x+7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad 4x + 3y - 5z &= 13, \\ 3x - 4y + z &= 2, \\ -2x + 7y + 3z &= 11. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad x - 3y + z &= 2, \\ 20x - y - 2z &= 7, \\ 7x + 9y - 4z &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \quad 0.4x + 0.5y + 0.7z &= 51, \\ 0.3x + 0.4y + 0.5z &= 38, \\ 0.2x + 0.3y + 0.4z &= 29. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \quad x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} &= 612, \\ \frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} &= 612, \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z &= 612. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \quad \frac{x+1}{y+1} &= 2, \\ \frac{y+2}{z+1} &= 4, \\ \frac{z+3}{x+1} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. \quad \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{3} &= 7, \\ \frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{3} &= 6, \\ 2x + 2y - 5z &= 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20. \quad \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} &= 11, \\ -\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{8}{z} &= 25, \\ \frac{7}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} &= -19. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21. \quad & x + y + z = a, \\ & x - y + z = b, \\ & x + y - z = c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \quad & \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = m, \\ & \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = n, \\ & \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. \quad & \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ & \sqrt{x} + \sqrt{z} = 6, \\ & \sqrt{y} + \sqrt{z} = 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27. \quad & u + x = 15, \\ & u + y = 14, \\ & x + y = 13, \\ & x + z = 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 29. \quad & 3u - x + y + 2z = 20, \\ & 2u + 3x - y + z = 17, \\ & u + 2x + 3y - z = 21, \\ & -u + x + 2y + 3z = 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \quad & ax + by = m, \\ & ax + cz = n, \\ & by + cz = p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \quad & \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a, \\ & \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b, \\ & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. \quad & \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = 4, \\ & \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} = 6, \\ & -\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28. \quad & 3u + 5x + y + 2z = 37, \\ & u + 3x + 3y + 4z = 47, \\ & 4u + 3x + y + z = 26, \\ & 2u + 4x + 2y + 3z = 42. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30. \quad & \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 6, \\ & \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}u = 5, \\ & \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}u = 4, \\ & \frac{1}{3}y + \frac{1}{5}z - \frac{1}{4}u = 3. \end{aligned}$$

III. Kakó je uporabljati jednačbe z več neznankami v razreševanje nalog.

§ 198. Kadar ima naloga dvojje ali več neznanih števil, treba v njih določitev iz pogojev naloge sestaviti prav toliko jednačeb, kolikor je neznank. Razrešivši te jednačbe, dobimo vrednosti neznank.

Dostikrat je mōči tako nalogo razrešiti s pomočjo le jedne jednačbe z jedno neznanko; v ta namen treba le vse druge izraziti s to neznanko in z danimi znanimi števili.

Ako treba razstaviti n. pr. število 40 na dva dela, zadoščujoča danemu pogoju, lahko zaznamimo iskana dela z x in y , in jedna jednačba je potem $x + y = 40$; drugo sestavimo iz danega pogoja.

Zaznamimo pa lahko tudi jeden del z x in drugega, ker je vsota obeh 40, s $40 - x$; uporabivši drugi dani pogoj, dobimo enačbo z jedno samo neznanko.

Jednostavnejše naloge lahko razrešimo tudi kar na pamet.

Primeri.

1. Število 32 razdeli na tri dele takó, da bode prvi za 5, drugi za 3 večji od tretjega; kateri so ti deli?

a) Na pamet. 32 je vsota, ki ima tretje število trikrat in poleg tega še $5 + 3$. Zató pripada trikratniku tretjega števila 24. Tretje število je torej 8; prvo število je $8 + 5 = 13$; drugo $8 + 3 = 11$.

b) Pismeno s pomočjo treh enačeb s tremi neznankami

$$\begin{array}{ll} z = \text{tretji del} & 32 = x + y + z \\ y = \text{drugi del} & y = z + 3 \\ x = \text{prvi del.} & x = z + 5 \end{array}$$

Če postavimo vrednosti za y in x v prvo enačbo, dobimo

$$32 = z + 5 + z + 3 + z = 3z + 8$$

$$24 = 3z$$

$$z = 8 \quad y = z + 3 = 11 \quad x = z + 5 = 13.$$

c) Pismeno s pomočjo samó jedne enačbe z jedno neznanko.

$$\text{Tretji del} = z \quad (z + 5) + (z + 3) + z = 32$$

$$\text{drugi del} = z + 3 \quad 3z + 8 = 32$$

$$\text{prvi del} = z + 5 \quad 3z = 24 \text{ in } z = 8.$$

Tretji del (z) je 8; drugi del ($z + 3$) je 11; prvi del ($z + 5$) je 13. Ti trije deli dadó skupaj res 32.

2. Oče ima sedaj 2krat toliko let kakor sin; pred 15 leti pa jih je imel 5krat toliko kakor sin. Koliko let ima oče, koliko sin?

$$\text{Sin ima sedaj } x \text{ let,} \quad \text{Sin je imel pred 15 leti } x - 15 \text{ let}$$

$$\text{Oče } \quad \quad \quad 2x \quad \quad \quad \text{Oče } \quad \quad \quad 15 \quad \quad \quad 2x - 15$$

Po drugem pogoju te naloge je

$$2x - 15 = 5(x - 15),$$

iz česar dobimo $x = 20$ in $2x = 40$. Oče ima torej 40, sin 20 let.

Razreši to nalogo tudi s pomočjo dveh enačeb z dvema neznankama.

3. Nekdo razdeli 100 K med 3 osebe takó, da dobi B dvakrat toliko kakor A , in C 10 K več, nego je polovica tega, kar dobila A in B skupaj. Koliko dobi vsaka oseba?

a) S pomočjo treh jednačeb.

A dobodi x K, tedaj je: $y = 2x$.

B " y K, $z = \frac{x+y}{2} + 10$.

C " z K. $100 = x + y + z$.

Razrešivši te tri jednačbe, dobimo $x = 20$, $y = 40$ in $z = 40$.

b) S pomočjo samó jedne jednačbe.

x pomeni krone, kolikor jih dobi A ,

$2x$ " " " " " B ,

$\frac{x+2x}{2} + 10$ " " " " " C .

Zató je $x + 2x + \frac{3x}{2} + 10 = 100$.

iz česar dobimo $x = 20$.

A dobi torej $x = 20$ kron,

B " " $2x = 40$ "

C " $\frac{3x}{2} + 10 = 40$ "

4. Dve telesi, katerih specifična teža je oziroma s_1 in s_2 , treba takó spojiti v novo telo, da bode imelo le-tó specifično težo s in da bode tehtalo p kilogramov; koliko kg vsakega telesa treba vzeti za to?

Ako zaznamimo z x in y število kilogramov, katere treba vzeti od prvega, oziroma drugega telesa, ondaj je prostornina prvega telesa

$\frac{x}{s_1}$, in drugega $\frac{y}{s_2}$, $\frac{p}{s}$ pa prostornina spojine.

Ker morata imeti obe sestavini skupaj prav tisto absolutno težo kakor spojina, velja

$$x + y = p.$$

Ker morata biti tudi prostornini obeh sestavin skupaj jednaki prostornini spojine, dobimo

$$\frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} = \frac{p}{s},$$

in odtod

$$x = \frac{s_1 p (s - s_2)}{s (s_1 - s_2)} \quad \text{in} \quad y = \frac{s_2 p (s_1 - s)}{s (s_1 - s_2)}.$$

Naloge.

***1.** Vsota dveh števil je 47, njiju diferenca 9; kateri števil sta to?

***2.** Katerih dveh števil je ne le vsota nego tudi kvocijent 3?

***3.** Diferenca dveh števil je 12, 3kratnik prvega pa je enak 5kratniku drugega; kateri števil sta to?

4. Polovica nekega števila je za 18 večja nego petina drugega števila; dvojno drugo število pa je za 32 večje od prvega. Kateri sta te dve števil?

5. Mislim si dve števil, kateri sta za 1 različni. Ako razdelim večje s 4 in manjše s 5, različna sta tudi kvocijenta za 1. Kateri števil sem si mislil?

6. Diferenca dveh števil je 10; ako odštejem večje od 135, manjše od 105, imata se ostanka kakor 9 : 7. Kateri števil sta to?

7. Razmerje med dvema številoma je 2 : 3; ako prišteješ vsakemu 16, ondaj je razmerje med vsotama kakor 10 : 13. Kakó se zoveta števil?

8. Ako povečaš prvo izmed dveh števil za 10, ondaj je 4krat toliko kakor drugo; ako povečaš pa drugo za 16, potem je 3krat toliko kakor prvo. Kateri števil zadostujeta tema dvema pogojema?

***9.** Razstavi število 50 na dva dela takó, da bode prvi za 6 manjši od drugega.

10. Mislim si dve števil; prvo je za 3 manjše od drugega. Ako pomnožim prvo število s 4 in od produkta odštejem 18, dobim drugo število. Kateri sta obe števil?

11. Razstavi število 48 na tri dele takó, da bode razmerje med njimi kakor 4 : 5 : 7.

12. Število 76 razstavi na dva dela takó, da bode, ako razdeliš večjega z 11 in manjšega s 7, vsota teh kvocijentov 8.

***13.** Mislim si ulomek. Vsota iz števca in imenovalca je 16; ako pa števec povečam za 2 in imenovalec zmanjšam za 2, dobim recipročno vrednost onega ulomka. Kateri ulomek sem si mislil?

14. Kateri ulomek se izpremeni na ulomek $\frac{1}{4}$, ako odšteješ od njegovega števca in imenovalca 3; in na ulomek $\frac{1}{2}$, ako prišteješ njega števcu in imenovalcu 5?

***15.** V deželnem zboru se je vzprejel predlog z večino 10 glasov. Koliko poslancev je glasovalo za in koliko zoper predlog, ako jih je 64 sploh glasovalo?

***16.** Sredi maja je nekje dan za 6 ur 15 minut daljši od noči; kakó dolg je dan, kakó dolga noč?

17. Izmed treh števil je prvo jednako polovici vsote iz drugih dveh, drugo tretjini vsote iz prvega in tretjega, tretje pa je za 10 manjše od vsote prvih dveh. Katera so ta števila?

18. Poišči tri števila, katera imajo tá-le svojstva: Ako zmanjšaš vsako izmed prvih dveh za 3, ondaj se imata ostanka kakor 1 : 2; ako zmanjšaš prvo in tretje vsako za 4, dobiš ostanka, katera se imata kakor 1 : 3; ako povečaš drugo in tretje vsako za 5, potem je razmerje med vsotama 3 : 4.

***19.** Deček pravi: Jaz in moj oče imava skupaj 60 let; a moja leta so le $\frac{1}{5}$ del očetovih let. Koliko let ima oče, koliko sin?

20. Oče, ki ima 25 let več od sina, bode jih imel čez 5 let dvakrat toliko kakor sin. Koliko let ima oče, koliko sin?

21. Oče, kateri ima sedaj 3krat toliko let kakor njegov sin, bode jih imel čez 12 let le dvakrat toliko kakor sin. Koliko let ima oče, koliko sin?

***22.** Tri osebe razdelé med seboj 350 K, in sicer takó, da dobi *B* 18 K več nego *C*, in *A* 14 K več nego *B*; koliko dobi vsaka oseba?

23. Med tri osebe se razdeli vsota takó, da dobi *B* 20 K menj nego *A*, in *C* 20 K menj nego *B*; vsota sama je za 25 K večja nego štirikratni *C*-jev delež. Koliko dobi vsak?

***24.** *A* ima v dveh mošnjah 206 K, in sicer v prvi 44 K več nego v drugi; koliko ima v vsaki?

25. Dve osebi imata vsaka nekaj denarja. Ako bi *A* dal *B*-ju 4 K, imela bi oba jednako; ako bi pa *B* dal *A*-ju 5 K, imel bi *A* dvakrat toliko kakor *B*. Koliko denarja ima vsak?

26. Na mizi leži nekaj denarja. *A* pravi: „Jaz imam dvakrat toliko denarja“; *B*: „Jaz ga imam 3krat toliko“; *C*: „Jaz ga imam

le na pol toliko, kolikor ga imata A in B skupaj". Vsi skupaj imajo 240 K; koliko denarja je na mizi, in koliko ga ima vsak?

*27. V družbi je 88 oseb, gospodov in gospá, in sicer je razmerje med številom gospodov in gospá 5 : 6. Koliko gospodov in koliko gospá je v družbi?

28. V družbi je bilo 3krat toliko gospodov kakor gospá; pozneje pa so prišli še 3 gospodje s 4 gospémi, in potem je bilo 2 krat toliko gospodov kakor gospá; koliko gospodov in gospá je bilo iz prva v družbi?

29. V družbi je bilo 2krat toliko moških kakor žensk; ko je pa odšlo 6 gospodov s svojimi gospémi, ostalo je 5krat toliko moških kakor žensk. Koliko moških in koliko žensk je bilo iz prva v družbi?

*30. Kapital daje na leto 420 K obrestij; ako bi bil naložen po 1% več, dajal bi 84 K obrestij več. Kolik je kapital, koliki so procenti?

31. Nekdo ima izposojena dva kapitala, prvega po 4%, drugega po 5%; oba skupaj mu neseta na leto 1000 K obrestij. Ako bi bil pa vsak kapital izposodil po 1% več, dobil bi vsako leto 220 K več obrestij. Kolika sta kapitala?

32. Dva zidarja zidata zid. Ako delata oba, sezidala bi zid v 12 dneh; ako pa dela A 2 in B 3 dni, sezidata v tem času 5ti del vsega zidú. V koliko dneh bi dovršil delo vsak sam?

33. Za skupno podjetje je dal A 10000 K, B 12000 K. Ko sta razdelila dobiček, dobil je A 800 K menj nego B . Koliko dobička je imel vsak? (Tudi na pamet in s sorazmerjem.)

34. Hieron, kralj Sirakuški, je imel krono od zlata in srebra, ki je tehtala 20 funtov, pod vodo pa le $18\frac{3}{4}$ funta; koliko zlata in koliko srebra je bilo v kroni, ako izgubi v vodi na videz zlato $\frac{1}{10}$ in srebro $\frac{1}{10}$ svoje teže?

35. Nekdo ima dvoje vino. Ako zmeša 12 litrov boljšega in 4 litre slabšega vina, velja 1 liter zmesi 1 K 4 h; ako pa zmeša 6 litrov boljšega in 10 litrov slabšega vina, stane liter zmesi 92 h. Po čem je liter vsakterega vina?

36. V dveh sodih je 351 litrov vina; ako ga vzameš iz prvega šestino in iz drugega tretjino, ostane ti ga v obeh sodih jednako. Koliko litrov vina je v vsakem sodu?

37. Izmed dveh cevij daje prva v 10 minutah 17 litrov menj vode nego druga v 9 minutah; obe dasta v 5 minutah 305 litrov. Po koliko litrov daje vsaka v jedni minuti?

38. V vodnjak priteka voda iz dveh cevij. Ako je odprta prva 2, druga $1\frac{1}{2}$ ure, nateče se $25\frac{1}{2}$ hektolitra vode; ako je pa prva odprta $1\frac{1}{3}$, druga pa $1\frac{1}{3}$ ure, ondaj $3\frac{9}{10}$ hektolitra menj. Po koliko litrov vode daje vsaka cev v jedni uri?

39. Dva popotnika sta si narazen za 9 kilometrov. Ako si gresta naproti, snideta se v 1 uri; ako pa gresta v isto mer, doide hitrejši drugega v 5 urah. Po koliko kilometrov prehodi vsak v jedni uri?

IV. Naloge v ponavljanje.

*1. a) 5krat $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{8}$, $2\frac{3}{5}$, $12\frac{7}{10}$, $27\frac{3}{4}$, $55\frac{5}{9}$, $138\frac{9}{16}$;

b) 8krat $\frac{7}{16}$, $1\frac{5}{8}$, $7\frac{3}{4}$, $15\frac{4}{5}$, $48\frac{9}{10}$, $61\frac{17}{24}$, $104\frac{5}{12}$
je koliko?

2. $(11\frac{7}{12} + 9\frac{14}{15} + 7\frac{5}{8}) \cdot 64 - (2\frac{5}{6} + 8\frac{7}{10} + 13\frac{13}{18}) \cdot 54$.

*3. Koliko obrestij dá

a) 350 K po 4% v 3 letih?

b) 375 K po 6% v 2 letih?

c) 780 K po 5% v 4 letih?

d) 1600 K po $4\frac{1}{2}\%$ v 3 letih?

*4. Kateri kapital dá po $3\frac{1}{2}\%$ $62\frac{1}{2}$ K obrestij na leto?

5. Kapital dá po 4% 321 K obrestij na leto; v koliko letih dá kapital po $3\frac{1}{2}\%$ prav tiste obresti?

6. A ponuja za hišo 8850 K v gotovini, B pa 9000 K in sicer hoče plačati polovico takój, drugo polovico čez 6 mesecev. Kateri ponuja več, ako se računi 4% obrestij?

7. Menica za 2345 K, izplačna sredi novembra, diskontuje se dne 5. septembra po 4%; koliko dobi prodajalec zanjo?

8. Hamburški trgovec plača za Dunajčana 12820 mark in za ta znesek izda na Dunajčana menico, računa joč sebi $\frac{1}{2}\%$ provizije in 1% senzarije ter 166 mark po 100 gl. a. v. Za koliko gl. a. v. izda tedaj menico?

*9. Koliko gl. papirnatega denarja treba plačati za 3200 gl. v zlatu, ako ima zlato 20% ažije?

*10. Koliko % ima zlato ažije, ako dobiš za 1080 gl. v papirju 900 gl. v zlatu?

*11. Krčmar ima pri hl vina 18 K ali 25% dobička; po čem je kupil hl?

12. Trговец dobi 1400 *kg* blaga, po 12 K 100 *kg*, in 1225 *kg*, po 15½ K 100 *kg*; stroškov je 12 K 75 h. Koliko % bode imel dobička, ako proda *kg* po 20 h?

$$13. \frac{a-x}{b-x} = \frac{a+x}{b+x}.$$

$$14. \frac{-2a}{ax-2b} = \frac{ax-2b}{ax+2a}.$$

$$15. \sqrt{x} + \sqrt{3x} = 2.$$

$$16. 2\sqrt{3x-1} = \frac{5x+8}{\sqrt{3x-1}}.$$

*17. Katerega števila 8kratnik je za 6 manjši od števila 50?

18. Od katerega števila treba odšteti njega desetino, da dobiš število 77?

19. Mislim si število. Ako je pomnožim z 2, na desni pripišem številko 5, potem razdelim z 11 ter kvocijent povečam za 1, dobim dvakrat toliko število, kakor sem si je mislil. Katere število je to?

20. Iz nekega mesta se odpošlje sel, kateri potrebuje za vsakih 54 *km* po 5 ur; 4 ure pozneje se pošlje za njim drugi sel, kateri potrebuje za vsakih 42 *km* 3 ure. V koliko urah dohiti drugi sel prvega?

*21. 15 *m* velja 64 K; koliko velja 40 *m*?

22. Nekdo zmeša 5 *l* po 36 h in 7 *l* po 48 h; koliko velja 1 *l* zmesi?

23. Izmed dveh cevij dáje prva v 1 uri po 6½ *hl* vode, druga pa v istem času po 7½ *hl*; v koliko urah se nateče 77½ *hl* vode, ako sta odprti obe cevi?

24. ⅓ nekega dolga treba izplačati dne 15. januarija, ¼ dne 31. januarija, ⅙ dne 28. februarja in ostanek dne 31. marcija. Kdaj bi se lahko poplačal ves dolg objednem?

*25. Tri osebe razdelé 360 K med seboj takó, da dobi B dvakrat toliko kakor A, in C 3krat toliko kakor A; koliko dobi vsaka oseba?

26. Tri osebe razdelé 688 K med seboj takó, da dobi A tolikokrat po 2 K kakor B po 3 K, in C tolikokrat po 6 K kakor B po 5 K; koliko dobi vsak?

27. Nekdo je zapustil 15650 K, določivši, naj si razdelé njegovi štirje dediči to imetje takó-le: B naj dobi 250 K več nego A, C 300 K menj nego A in B skupaj, D pa 750 K menj nego A, B in C skupaj. Koliko bode vsak dobil?

$$28. \sqrt{269361}.$$

$$29. \sqrt{64617} \text{ (4 dec.)}$$

$$30. \sqrt{12921112} \dots$$

$$31. \sqrt[3]{592704}.$$

$$32. \sqrt[3]{125751} \text{ (3 dec.)}$$

$$33. \sqrt[3]{2918076} \dots$$

34. Koliko velja 3600 gl. 4% ne zlate rente po 116½ z obrestmi za 136 dnij?

35. Ako se računi 1 *kg* čistega zlata po 3280 K (3274 K), koliko velja 4½ *kg* zlata po 900 tisočin čistine?

36. Koliko gl. a. v. velja 95½ *m*, ako velja 68½ angl. yarda 17½ funta sterlinga, in je 17 yard. = 16 *m*, 10 funt. sterl. = 12½ gl. a. v.

37.

$$2x - 3y + 4z - u = 4,$$

$$3x + y - 5z + u = -6,$$

$$-x + 4y + 2z - 5u = -7,$$

$$x - y + z - u = -2.$$

*38. Razstavi število 150 na dva dela takó, da bode prvi jednak $\frac{2}{3}$ drugega?

39. 1200 K treba takó razdeliti med tri osebe, da dobi druga 3krat toliko kakor prva menj 20 K, tretja 4krat toliko kakor druga in še 20 K. Koliko dobi vsaka oseba?

40. Mislim si dva ulomka, ki imata isti imenovalec; njiju diferenca je jednaka $\frac{3}{4}$, razmerje med njiju števčema pa je 5 : 1; ako zmanjšam večji števec za 12, in povečam manjšega za 12, velja obratno razmjerne 1 : 5. Katera dva ulomka sem si mislil?

41. Nekdo ima dva soda in v vsakem nekaj vina. Ako ga izlije iz prvega $\frac{1}{5}$ v drugega, in potem iz tega $\frac{1}{5}$ v prvega, tedaj ga je v vsakem sodu 80 l. Koliko l ga je bilo iz početka v vsakem sodu?

42. Krčmar ima dvoje vino, hl po 80 K in hl po 120 K, in iz tega dvojega vina hoče namešati 15 hl po 96 K. Koliko mora vzeti vsakega vina?

43. Nekdo naloži v hranilnico početkom vsakega leta po 2000 K po 5% na obrestne obresti; koliko mu mora hranilnica izplačati koncem tretjega leta?

44. Koliko je vrednih 7520 K, izplačnih v 8 letih, sedaj, ako se računi 5% obrestnih obrestij?

45. Za skupno podjetje vložil: A 3000 K takój in čez 1 leto še 2000 K; B 2000 K takój in čez $1\frac{1}{2}$ leta še 2400 K; C 4000 K takój in čez 2 leti še 1600 K. Podjetje traja 3 leta ter dá 9050 K dobička. Koliko tega dobička dobi vsak družabnik?

46. 1 K = 0.85061 ... mark. a) Koliko kron je 605.09 (703.4 ...) mark?
b) Koliko mark je 208.4 K (309.7 ... K)?

47. Šola šteje 178 učencev. V drugem razredu je 5 učencev več nego v prvem, v tretjem pa 9 menj nego v drugem, v četrtem 7 menj nego v tretjem. Koliko učencev je v vsakem razredu?

48. Izmed dveh igralcev ima A 4krat toliko denarja kakor B. Ko pa A izgubi B-ju 5 K, ima A sam še 3krat toliko kakor B. Koliko denarja je imel vsak iz početka?

49. Ob konkurzu dobí nekdo za svojo terjatev v znesku 5760 K samó 3840 K; koliko % je izgube?

50. Blagó ima nečiste teže 430 kg in velja 480 K; tara znaša 30 kg, provizija 2%, voznina 54 K. Po čem je treba prodajati 1 kg, ako znašaj dobiček $16\frac{1}{2}\%$?

51. Dolg 160 K, ki je izplačen čez 6 mesecev, plača se takój; koliko znaša gotovo plačilo, če je 5% diskonta?

52. A prodá na Dunaju te-le menice:

a) za 3416 državní mark v Berlin po 59.20,

b) za 5204 franke v Pariz po 48.30,

c) za 837 funtov sterlingov v London po 121.75;

koliko iztrži za vse, ako se računi $\frac{1}{2}\%$ senzarije?

53. Iz dveh mest, kateri sta si vsaksebi za 81 km, gresta si *A* in *B* naproti. Ako odide *A* 3 ure prej z doma nego *B*, srečata se v 7 urah; ako odide pa *B* 3 ure prej, srečata se še-le v 8 urah. Koliko km prehodi vsakteri v jedni uri?

*54. Pšenici je padla cena za 8%; koliko velja sedaj 1 hl, ako je veljal doslej 15 K 50 h?

*55. Koliko vode je treba priliti 8 l kisa po 40 h, da bode 1 l zmesi vreden še 32 h?

56. Nekdo hoče namešati 27 hl pšenice in rži; vsak hl tehtaj 76 kg. Koliko je treba vzeti vsakega žita, ako tehta 1 hl pšenice 78 kg, 1 hl rži pa 72 kg?

57. Poišči tri števila, katera imajo tá-le svojstva: Ako prišteješ prvo 3 kratni vsoti drugih dveh, dobiš 115; ako prišteješ drugo 4 kratni vsoti drugih dveh, dobiš 135; ako prišteješ naposled tretje 5 kratni vsoti drugih dveh, dobiš 145.

58. Kakšna bi bila razrešitev prejšnje naloge, ako postaviš za števila 3, 4, 5, 115, 135, 145 občna števila *m*, *n*, *p*, *a*, *b*, *c*?

*59. Pri 100 K je $12\frac{1}{2}$ K dobička; koliko ga je pri 325 K?

*60. Pri 40 K je $3\frac{1}{2}$ K dobička; koliko ga je pri 100 K?

61. *A* mora plačati 400 K takó, 500 K v 6 mesecih in 500 K v 1 letu; plača pa 300 K čez 1 mesec, 200 K čez 2 meseca in 100 K čez 3 mesece. Kdaj mora plačati ostanek?

62. Blago se je kupilo za 1573 K 20 h. Koliko velja blago v resnici, ako je bilo 2% skonta, $\frac{1}{4}$ % senzarije (od kupnine), 216 K 50 h drugih stroškov in 2% provizije (od vsega zneska)?

*63. Kateri kapital dá po 5 (4) %

a) 30 K, b) 45 K, c) 52 K, d) 75 K, e) 124 K letnih obrestij?

64. *A* mora plačati *B*-ju:

dné 15. julija 2340 K 58 h,

dné 20. sept. 1547 K 83 h;

nasprotno pa mora *B* plačati *A*-ju:

dné 18. oktobra 3104 K 75 h,

dné 10. decembra 873 K 6 h.

Dné 31. decembra obračunata oba; kdo izmed njiju je drugemu kaj dolžan in koliko, ako se računijo obresti po 4%?

65. Nekdo dobiva od svojega kapitala 2392 K obrestij na leto; $\frac{4}{5}$ kapitala ima naložene po 5%, $\frac{1}{5}$ po 6%. Kolik je ves kapital?

*66. Število 108 razdéli na 3 dele takó, da se ima prvi del proti drugemu kakor 3 : 5, in drugi proti tretjemu kakor 10 : 11.

67. Ded in oče imata skupaj 112 let, oče in sin 46 let, ded in sin 82 let. Koliko let ima vsak?

68. Nekdo ima dvoje srebro. Ako zlije $7\frac{1}{2}$ kg prvega in $2\frac{1}{2}$ kg drugega, dobi srebro po 0·880 čistine; ako pa zlije $4\frac{1}{2}$ kg prvega in $5\frac{1}{2}$ kg drugega srebra, tedaj ima zlitina po 0·850 čistine. Koliko čistino ima vsako srebro?

69. Narodna banka diskontuje dne 18. junija po 4%
menico za 556 K izplačno sredi julija;

„ „ 1320 „ izdano dne 28. aprila 3 mesece *a dato*;

„ „ 1084 „ izplačno 31 dnij po vidu ter vzprejeto dne 8. junija;
koliko mora plačati za vse?

70. Dunajčan ima plačati v Londonu 425 funtov sterl. V ta namen kupi menico v Amsterdam po 99·80 (100 hol. gl. = 99·8 gl. a. v.) ter jo pošlje v London, kjer se mu za vsakih 12·10 hol. gl. 1 funt sterl. zapiše na korist. Koliko plača za oni dolg?

71. Nekdo kupi dne 13. januvarija 3500 gl. zastavnih pisem n. a. hranilnice po $100\frac{3}{4}$; koliko mora plačati zanje? (Zaostale $4\frac{1}{2}\%$ obresti od dne 1. novembra.)

72. Kapital je izposojen po 4%. Ako razdeliš peti del kapitala z letnimi obrestmi vsega kapitala in prišteješ kvocijentu 75, dobiš toliko kron, kolikor znašajo letne obresti vsega kapitala. Kolik je kapital?

73. Mesto je imelo 1850. leta 35846 prebivalcev; koliko jih je imelo leta 1875., ako se je pomnožilo prebivalstvo vsako leto za $2\frac{1}{2}\%$?

74. Nekdo je 10000 K dolžan; koliko bode še čez 10 let dolžan, ako odplača čez 3 leta 2500 K, čez 6 let 1000 K in se računi 5% obrestnih obrestij?

75. A mora plačevati B-ju, dokler ta živi, vsako leto po 320 K; B pa želi, da mu izplača A vse zneske takój; koliko mu bode A izplačal, ako vzamemo, da bode B še 12 let živel in se računi 5% obrestnih obrestij ter celoletno kapitalizovanje?

76. Dunajčan dobi iz Trsta 12 vreč milanskega riža, nečiste teže 2110 kg, tare 15 kg, 100 kg čiste teže po $24\frac{1}{2}$ gl. Stroškov je v Trstu 5 gl. 25 kr., provizije 2%, voznine po $2\frac{3}{5}$ gl. od 100 kg, carine po 80 kr. od 50 kg nečiste teže, stroškov na Dunaju 7 gl. 47 kr. Koliko ga stane 100 kg čiste teže na Dunaju?



Dodatek.

O jednostavnem knjigovodstvu.

Občna pojasnila.

§ 1. Trgovci in obrtniki morajo vse dogodke, ki se tičejo njih trgovskega imetja in njegovih izprememb, zapisavati v knjige, v to odločene, in to zaradi tega, da vedó vsak čas natančno, kakó je z njih trgovino ali obrtom, koliko imajo terjati in koliko so dolžni ter koliko je vsega njih imetja. To zapisavanje imenujemo knjigovodstvo (*Buchführung, Buchhaltung*).

§ 2. Pri vsakem knjigovodstvu je treba najprej vedeti, koliko je bilo imetja takrat, ko je kdo začel trgovino ali obrt.

Imetju v širšem zmislu pripada ne le vsa premoženja in neprimičenina, ki jo kdo ima, nego tudi vse iz te posesti izvirajoče, še ne izpolnjene zaveze; v ožjem zmislu razločujemo trojno imetje: aktivno, pasivno in čisto imetje.

Aktivnemu imetju pripadajo denarji in vse druge, denarno vrednost imajoče stvari, katere ima kdo ali v svoji posesti ali od drugih terjati, ne gledé na to, ali so vse te stvari njegova prosta, popolna lastnina, ali pa so zadolžene. V aktivno imetje trgovca spadajo tedaj denarji, državni papirji, blago, menice, ki se mu imajo izplačati, terjatve (aktivni dolgovi), premoženja (hišna oprava, orodje, i. t. d.) in neprimičenina (poslopja, zemljišča, i. t. d.)

Pasivno imetje pa imenujemo vse, kar imajo drugi od trgovca ali obrtnika terjati. Semkaj spadajo menični in drugi dolgovi, katere ima poplačati (pasivni dolgovi).

Kar ostane, ako pasivno imetje odštejemo od aktivnega imetja, imenujemo čisto imetje.

Popis in ocenitev vseh posamičnih sestavin aktivnega in pasivnega imetja imenujemo inventar ali inventuro; posamične sestavine treba v ta namen res prešteti, stehtati ali izmeriti.

§ 3. Vsak dogodek, kateri izpremeni sestavine trgovskega imetja, zovemo poslovni dogodek (*Geschäftsfall*). Poslovni dogodek je na pr., ako se blago proti gotovemu plačilu proda, zakaj takrat se zmanjša zaloga, a gotovina se poveča.

Da bode mōči poslovne dogodke prav zapisavati v posamične knjige, treba se posebno natančno razločevati, kdo je dolžnik, kdo upnik. Vsakdo, kdor od trgovca (obrtnika) kaj prejme, ne da bi mu zato kaj dal, postane njegov **dolžnik** (*debitor, Schuldner*). Vsakdo, kdor trgovcu (obrtniku) kaj dá, ne da bi za to od njega kaj prejel, postane njegov **upnik** (*creditor, Gläubiger*). Dolžnika zaznamujemo v knjigovodstvu z „debet“ ali „ima dati“ (*debet, Soll*), upnika pa s „credit“ ali „ima dobiti“ (*credit, Haben*). Koga za dolžnika zapisati, pravi se tudi: zapisati mu kaj v dolg (*ihn debitieren, ihn belasten*); koga za upnika zapisati, pravi se tudi: zapisati mu kaj na korist (v imetek) (*ihn creditieren, ihm gutschreiben*).

Pri meničnih plačilih velja tó-le:

Vsakdo, kdor menico izda, postane trasatov dolžnik za meničin znesek. Vsakdo, kdor menico vzprejme, postane trasantov upnik. Vsakdo, kdor nam menico pošlje, postane naš upnik za meničin znesek. Vsakdo, kdor rimeso prejme, postane pošiljateljev dolžnik.

§ 4. Poslovne dogodke zapisujemo v različne knjige ali po vrsti, kakor se je ravno kateri pripetil, ali pa istovrstne skupaj v oddelke za to odločene.

Knjigo, v katero se zapisujejo najprej vsi oni poslovni dogodki, pri katerih se ne plačuje v gotovini, po vrsti, kakor se godé, zovemo dnevnik (*Tagebuch, Journal, Prima-Nota*).

V blagajniško knjigo (*Cassabuch*) zapisujemo prejemke in izdatke v gotovini, tudi po vrsti, kakor prihajajo.

Knjigo, v katero zapisujemo trgovskih prijateljev dolgove in terjatve, po osebah razvrščene, imenujemo glavno knjigo (*Hauptbuch*).

Knjige, ki opisujejo natančneje one poslovne dogodke, katerih omenja dnevnik le kratko, ali obširneje popisujejo prejem in oddajo onih stvari, katere so v blagajniški in glavni knjigi zaračunane le posredno, zovemo postranske ali pomožne knjige (*Neben-*

oder Hilfsbücher). Njih število se ravna po tem, kaka in kolika je trgovina. Najvažnejše so: pismovni prepisnik (*Briefcopierbuch*), fakturna knjiga (*Facturenbuch*), skontrovne knjige (*Scontrobücher*), in sicer blagovno-skontrovnna knjiga ali blagovna knjiga (*Waren-Scontro, Warenbuch*), menično-skontrovnna knjiga ali menična knjiga (*Wechsel-Scontro*), skontrovnna knjiga za vrednostne papirje (*Effecten-Scontro*) in dospetna knjiga (*Verfallsbuch*).

§ 5. Račun, v katerega zapisujemo vse poslovne dogodke, ki se tičejo jedne in iste osebe ali stvari, imenujemo konto (*Conto*). Konti so dvoji: osebni konti in stvarni konti; prvi pojasnjujejo računsko razmerja z osebami, drugi računsko razmerja neživih imovinskih sestavin.

Vsak konto ima po dve nasprotni strani. Na levo, z „debet“ ali „ima dati“ zaznamovano stran se zapisujejo oni postavki (*Posten*), za katere postane oseba ali stvar dolžnik trgovine ali obrta, na desno s „credit“ ali „ima dobiti“ zaznamovano stran pa oni, za katere postane oseba ali stvar upnik.

§ 6. Da iz knjig ni le razvidno, koliko je dolgov in terjatev, nego tudi koliko je pri vsakterem blagu dobička ali izgube, zapisuje se vsak postavek po dvakrat, namreč pod „debet“ jednega in ob jednem pod „credit“ drugega konta takó, da sta si „debet“ in „credit“ različnih kontov vedno jednaka. Tako zapisavanje služi tudi v kontrolo, ali se je res vse prav vknjižilo. To vknjiževanje imenujemo **dvojno knjigovodstvo** (*doppelte Buchführung*).

Poslovni dogodki se pa vknjižujejo lahko tudi takó, da je razvidno zlasti računsko razmerje s trgovskimi prijatelji. Tako vknjiževanje zovemo **jednostavno knjigovodstvo** (*einfache Buchführung*). A tudi iz jednostavnega knjigovodstva se dá v obče razvideti uspeh trgovine (obrta).

Jednostavno knjigovodstvo je pripravno osobito za manjše trgovine, za obrte in rokodelstva.

§ 7. Kakó je voditi posamične knjige, določuje nekoliko zakon, nekoliko pa veljajo občna načela in one oblike, kakor so se sčasoma razvile v trgovskem prometu.

V prvem oziru določuje občni trgovski zakonik z dne 17. dec. l. 1862. tó-le:

Člen 28.: „Vsak trgovec je dolžán voditi knjige, iz katerih je razvidna njega trgovina in stan njegovega imetja.

Dolžán je hraniti prejeta trgovska pisma in od odposlanih pridržavati prepise (odtiske) ter jih po vrsti, kakor gredó, vpisavati v pismovni prepisnik.

Člen 29.: „Vsak trgovec mora tedaj, ko začne trgovati, natančno popisati vsa svoja zemljišča, svoje terjatve in dolgove, svojo gotovino in vse drugo svoje imetje, ob enem tudi povedati, koliko sô posamični deli imetja vredni, ter ta popis skleniti takó, da je razmerje med imetjem in dolgovi razvidno; tak inventar in tako bilanco mora izdelati vsako leto.“

Člen 30.: „Inventar in bilanco mora trgovec svojeróčno podpisati. Ako je več družbenikov, ki so porok vsak záse, morajo se vsi podpisati.

Inventar in bilanca se zapisujeta lahko v knjigo, za to odločeno, ali pa se sestavita vsakokrat vsak posebej. V zadnjem slučaju se morajo inventarji in bilance po vrsti urejati in hraniti.“

Člen 31.: „Sestavlja je inventar in bilanco, treba postaviti vsem delom imetja in terjatvam ceno, ki jo res imajo ob popisu.

Dvojbenim terjatvam je postaviti verjetno ceno, one pa, ki se ne dado izterjati, treba je odpisati.“

Člen 32.: „Pri vknjiževanju v trgovske knjige in pri drugih potrebnih zapiskih mora rabiti trgovec živ jezik in njega pismenke.

Knjige morajo biti vezane, in list za listom mora imeti zaporedoma tekoče številke.

Na prostoru, ki se navadno popisuje, ne sme biti praznin. Kar se je zapisalo iz prva, ne sme se s prečrtavanjem ali drugače izpremeniti takó, da bi se ne moglo čitati; strgáti (*radieren*) se ne sme nič in tudi ne predrugačiti takó, da bi se potem ne vedelo, ali je bilo iz prva takó, ali se je naredilo še-le pozneje.“

Člen 33.: „Trgovci morajo trgovske knjige hraniti deset let, računajoč od dne, katerega se je zadnjič kaj vanje zapisalo.

Prav tisto velja o prejetih trgovskih pismih, o inventarjih in bilancah.“

Člen 34.: „Trgovske knjige, katere so se pravilno vodile, veljajo trgovcem pri pravih o trgovskih stvarih za nepopoln dokaz, katerega je móči spopolniti s prisego ali drugimi dokazili.“

Člen 35.: „Koliko se je móči na trgovske knjige, katere so se vodile nepravilno, ozirati kot dokazilo, ravna se po tem, kakšna in kakó važna je nepravilnost in vsa stvar sploh.“

Člen 36.: „V trgovske knjige zapisujejo lahko tudi trgovski pomočniki, ne da bi se s tem zmanjšala njih dokazilna moč.“



I. O jednostavnem trgovskem knjigovodstvu.

1. Bistvene knjige.

§ 8. Bistvene knjige jednostavnega knjigovodstva so: inventarna knjiga, ako se inventure vsaka posebej ne pišejo in spravljajo, dnevnik, blagajniška knjiga in glavna knjiga.

O inventuri ali popisu.

Popisuje imetje (§ 2.), naštejemo najprej aktivno imetje. Začeti je z gotovino, katera se prešteje. Potem se popišejo vrednostni papirji in menice v tuja mesta; njih vrednost se določi na podlagi dnevnega kurza. Nato se določi vrednost onim mestnim menicam, katere se nam bodo izplačale — diskont se odšteje. Potem pride na vrsto zaloga blaga; to se v resnici stehta, izmeri ali prešteje ter navadno zaračuni po isti ceni, kakor je bilo kupljeno. Ako je še kaj drugega, trgovini pripadajočega premičnega ali nepremičnega imetja, oceni in popiše se tudi to. Naposled se naštejejo še dolžniki vsak posebej s svojim dolgom; ti se izpišejo iz glavne knjige. Vsota teh zneskov kaže, koliko je aktivnega imetja.

Potem se popiše pasivno imetje. Temu pripadajo najprej trate, katere bode treba plačati; tudi pri teh se diskont odšteje. Potlej se navedejo posamič vsi upniki s svojimi terjatvami. Ako se vsi ti zneski seštejejo, dobi se vse pasivno imetje.

Ako se od aktivnega imetja odšteje pasivno, kaže diferenca čisto imetje.

Ako se koncem kake dobe imetje zopet popiše ter čisto imetje prvotne inventure primerja čistemu imetju te inventure (bilance) kaže diferenca med obema, koliko je bilo v tem času dobička ali izgube, kakor je zadnje imetje večje ali manjše od prejšnjega.

Kakó je urejena inventura, razvidno je iz tega-le primera.

Inventura,
sestavljena dne 30. junija 1895. leta.

Število, zaporedno- ma tekoče	Aktivno imenje.	K	h	K	h
1.	Gotovine			5160	—
2.	Vrednostnih papirjev:				
	4000 gl. papirne rente po 101	8080	—		
	obresti od dne 1. februarja	140	—	8220	—
3.	Mestnih menic:				
	Na K. Kovača tukaj v dan 25. julija	1750	—		
	„ J. Lukana v Kamniku v dan 15. avgusta	1245	16		
	„ M. Čuka tukaj v dan 20. avgusta	1460	—	4455	16
4.	Blaga:				
	Kakor izkazuje blagovna knjiga			21560	—
5.	Premičnine po odbitku 5%			1710	—
6.	Terjatev:				
	„ Pri J. Bizjaku tukaj	1175	—		
	„ A. Lisjaku tukaj	1410	—		
	„ G. Jakliču v Postojini	1688	40		
	„ A. Klembasu v Celju	560	—	4833	40
	Vsega aktivnega imenja skupaj			45938	56
	Pasivno imetje.				
1.	Trat:				
	Na ukaz J. Kluna v dan 10. julija	1700	—		
	„ „ A. Goloba v dan 31. julija	971	60		
	„ „ M. Ranta v dan 10. avgusta	1184	—	3855	60
2.	Dolgovi:				
	F. Tomcu v Trstu	1944	70		
	R. Zupančiču tukaj	1230	—		
	G. Lenarčiču tukaj	2660	—	5834	70
	Vsega pasivnega imetja skupaj			9690	30
	Rekapitulacija.				
	Aktivnega imetja			45938	56
	Pasivnega imetja			9690	30
	Ostane čistega imetja 30. junija 1895. l.			36248	26
	V Ljubljani, dne 30. junija 1895. l.				
	Josip Kos, s. r.				

O dnevniku.

§ 9. Dnevnik je odločen v to, da se vánj najprej jasno in natančno zapisujejo vsi oni poslovni dogodki, kateri povzročujejo dolg ali terjatev, in to po vrsti, kakor prihajajo.

V dnevniku se zaznamujejo strani z zaporedoma tekočimi števili.

Vsakemu postavku se dostavi datum, ime in bivališče trgovskega prijatelja, ob enem se kratko in jasno pove, zakaj je postal naš dolžnik ali upnik, in naposled znesek; le-tá se zapiše pri dolžnikih v razpredelek, zaznamovan z „debet“, pri upnikih pa v onega, ki je zaznamovan s „credit“. Najprej se zapišejo v dnevnik terjatve in dolgovi, kakor jih navaja inventura.

V pojasnilo bodi ta-le primer:

D n e v n i k.

1.		Julija 1895. l.	Debet		Credit	
			K	h	K	h
G. 1.	1.	J. Bizjak tukaj za saldo prejšnjega računa	1175	—		
G. 2.	1.	A. Liskaj tukaj za saldo prejšnjega računa	1410	—		
G. 3.	1.	G. Jaklič v Postojni za saldo prejšnjega računa	1688	40		
G. 4.	1.	A. Klembas v Celju za saldo prejšnjega računa	560	—		
G. 5.	1.	F. Tomec v Trstu za saldo prejšnjega računa			1944	70

2.

Debet

Credit

		Debet		Credit	
		K	h	K	h
G. 6.	1.	<i>R. Zupančič</i> tukaj za saldo prejšnjega računa		1230	—
G. 7.	1.	<i>G. Lenarčič</i> tukaj za saldo prejšnjega računa		2660	—
G. 8.	2.	<i>F. Rak v Litiji</i> poslal sem mu, 2 meseca na up : 2 soda Rio-kave št. 54., 55., čiste teže 520 kg po 270 . 1404 K — h 2 soda sladkorja št. 30., 31. čiste teže 915 kg po 86 . 786 K 90 h		2190	90
G. 2.	3.	<i>A. Lisjak</i> tukaj za svojo rimeso na <i>F. Breganta</i> tukaj v dan 20. julija		1200	—
G. 5.	3.	<i>F. Tomec v Trstu</i> za svojo trato po ukazu <i>P. Lasniku</i> tukaj v dan 31. julija		1920	—
G. 6.	4.	<i>J. Lukman</i> tukaj kupil sem od njega 4 sode sladkorja št. 1., 2., 3., 4. neč. teže 474, 478, 482, 485 kg tare 23, 26 26 27 kg č. teže 451, 452, 456, 458 kg 1817 kg po 88		1598	96
G. 1.	6	<i>J. Bizjak</i> tukaj prodal sem mu na up 520 kg Rio-kave po 270		1425	60

3.

Debet

Credit

			K	h	K	h
G. 1.	6.	<i>J. Bizjak</i> tukaj za svoj akcept v dan 5. avgusta			1900	—
G. 5.	7.	<i>F. Tomec v Trstu</i> poslal mi je po železnici 4 vreče Rio-kave in 1 sod zabelnega olja, kakor izkazuje fakturna knjiga . . .			1847	40
G. 5.	7.	<i>F. Tomec v Trstu</i> za poslano mu rimeso na <i>K. Porento</i> , 2 meseca <i>a dato</i>	1700	—		
G. 3.	9.	<i>G. Jaklič v Postojini</i> poslal mi je po železnici 5 hektolitrov špirita po 78			390	—
G. 4.	10.	<i>A. Klembas v Celju</i> poslal sem mu po železnici 2 vreči Rio-kave, 502 <i>kg</i> po 270	1355	40		
G. 7.	12.	<i>G. Lenarčič</i> tukaj za moj akcept v dan 25. julija	2000	—		
G. 1.	14.	<i>J. Bizjak</i> tukaj prodal sem mu na up 375 <i>kg</i> sladkorja po 66 . . . 247 K 50 h 100 <i>kg</i> grozdjiča po 60 . . . 60 K — h	307	50		

O blagajniški knjigi.

§ 10. V blagajniško knjigo se zapisujejo vsi dohodki in razhodki v gotovini, in sicer vsak dan sproti.

V blagajniški knjigi se zaznamujeta po dve nasprotni strani z istim številom. Leva stran ima nadpis „debet“ ali „dohodki“, desna „credit“ ali „razhodki“. Na levi strani se zabeleži prejeti, na desni izdani denar. Vsakemu postavku se dostavlja 1. leto, mesec in dan; 2. kratko pojasnilo, od koga in zakaj se je prejel denar, ali komu se je dal in zakaj; 3. znesek.

Kadar je jedna stran polna, seštejejo se zneski dohodkov in razhodkov, vsoti pa se preneseta na nastopni dve strani.

Blagajniška

1.

Debet (dohodki)

Julija

			K	h
G. 3.	1.	Gotovine, kakor izkazuje inventura	5160	—
	2.	Od <i>G. Jakliča v Postojini</i>	1500	—
	5.	Za prodano rimeso na <i>M. Čuka</i> . . K 1460 h — 6% diskonta do 20. avgusta . . K 11 h 20	1448	80
G. 8.	16.	Od <i>F. Raka v Litiji</i>	1000	—
	20.	Za <i>J. Perdanu</i> tukaj prodani sladkor	336	56
	20.	Za rimeso na <i>F. Berganta</i>	1200	—
	25.	Za rimeso na <i>K. Kovača</i>	1750	—
G. 4.	28.	Od <i>A. Klembasa v Celju</i>	1600	—
G. 1.	30.	Od <i>J. Bizjaka</i> tukaj	700	—
			14695	36
Avgusta 1895 l.				
	1.	Ostanek v blagajnici od prejšnjega meseca	6140	58

Koncem vsakega meseca se račun blagajniške knjige sklene. V ta namen se seštejejo dohodki in razhodki, potem se zadnja vsota od prve odšteje in diferenca, saldo imonovana, postavi kot ostanek v blagajnici (*Cassabestand*) na stran razhodkov; tako se vsoti na obeh straneh izjednačita. Te vsoti se zapišeta pod črti, kateri sta se prej potegnili v razpredelkih za zneske, in pod vsako se potegne nekoliko niže potem še črta sklepovnica. Naposled se prenese saldo pod prvi dan nastopnega meseca kot prejemek na nov račun, in to zaradi tega, da je razvidno, koliko je v blagajnici denarja.

V pojasnilo je pridejan tu-le obrazec blagajniške knjige.

knjiga.

1.

1895 l.

Credit (razhodki)

			K	h
G. 6.	1.	Za domače potrebe	320	—
	2.	R. Zupančiču tukaj	1200	—
	3.	Za različne trgovske stroške	97	20
	7.	Za voznino in druge stroške ob prejemu blaga; poslanega od F. Tomca v Trstu	257	64
	10.	Plačal trato na ukaz J. Kluna	1700	—
	15.	Plačal dobitkovine	100	—
G. 9.	20.	Za voznino in druge stroške ob prejemu blaga; poslanega od F. Tomca v Trstu	196	74
	25.	Plačal svoj danes izplačni akcept	2000	—
	27.	J. Lukmanu tukaj	1300	—
G. 3.	30.	G. Jakliču v Postojini	201	60
	31.	Za trato na ukaz A. Goloba	971	60
	31.	Trgovskim pomočnikom	210	—
	31.	Saldo (ostanek v blagajnici)	6140	58
			14695	36

O glavni knjigi.

§ 11. Namen glavni knjigi je, da nam pojasnjuje, koliko nam je vsakdo, s komer smo v trgovski zvezi, dolžan ali koliko ima od nas terjati.

V nji ima vsak trgovski prijatelj svoj račun (*konto*); le-tá ima dve nasprotni, z istim številom zaznamovani strani, zgeraj v sredi pa kot nadpis ime in bivališče trgovskega prijatelja. Na levo, z „debet“ zaznamovano stran se zapisujejo vsi oni postavki, za katere je postal trgovski prijatelj naš dolžnik, na desno, s „credit“ zaznamovano stran pa vsi oni, za katere je postal naš upnik (§ 5.)

Na jeden in isti folij (*folium*) pa postavimo lahko tudi dva ali tri račune, ako vemo že naprej, da bodo posamič potrebovali le malo prostora.

Na koncu se doda glavni knjigi abecedno urejen imenik vseh onih oseb, katerim so se računi zapisali, in vsakemu imenu se dostavi število folija, na katerem je dotični račun.

V glavno knjigo se prepisujejo postavki iz dnevnika in blagajniške knjige.

Iz dnevnika se morajo prepisati vsi postavki v glavno knjigo, zakaj v njem so zabeleženi le taki dogodki, ki provzročujejo dolg ali terjatev, in sicer pod „debet“ ali pod „credit“ dotičnega računa, kakor so v dnevniku zapisani pod „debet“ ali pod „credit“.

Iz blagajniške knjige pa se prepišejo v dotične račune glavne knjige le oni postavki, kateri so se prejeli (izdali) v ta namen, da se kaka terjatev (dolg) poplača ali deloma ali popolnoma. Tudi se prepisujejo tu postavki drugače, nego iz dnevnika. Dohodki so v blagajniški knjigi zapisani pod „debet“; a ker se morajo plačevalcu zapisati na korist, treba jih je postaviti v njegovem računu v glavni knjigi pod „credit“. Obratno pa je treba razhodke, kateri so v blagajniški knjigi zapisani pod „credit“, prejemniku zapisati v dolg, torej jih v njegov račun v glavni knjigi zapisati pod „debet“.

Prepisujoč posamične postavke v dotični račun glavne knjige, zapiši na dotično stran: 1. datum, 2. stran dnevnika ali blagajniške knjige, na kateri je zapisan dotični postavek, 3. kratko pojas-

nilo, zakaj je postala ona oseba naš dolžnik ali upnik, in 4. znesek. — Vsakemu postavku je v glavni knjigi odločena posebna vrsta; vrste naj bodo druga od druge jednako oddaljene, da ne bode mōči pozneje kaj zapisati mednje.

V znamenje, da si postavek prepisal v glavno knjigo, zapiši v takó zvani kazalni razpredelek (*Bezugscolonne*) dnevnika ali blagajniške knjige pred prepisani postavek število folija glavne knjige.

§ 12. Ako treba glavno knjigo skleniti koncem katerekoli dobe, seštejejo se zneski vsakega računa pod „debet“ in pod „credit“, potem pa se manjša vsota odšteje od večje; razliko imenujemo saldo. Ako je vsota vseh posamičnih zneskov pod „debet“ večja od vsote pod „credit“, ondaj nam je oseba, za katero velja račun, več dolžna nego ima od nas terjati; ona je tedaj res naš dolžnik, in saldo kaže, koliko nam je dolžna. Ako pa je pod „credit“ večja vsota nego pod „debet“, ondaj ima oseba več od nas terjati, nego nam je dolžna, in saldo kaže, koliko ima sploh od nas terjati.

Ako se zapiše saldo na ono stran, kjer se je dobila manjša vsota, tedaj se obe vsoti izjednačita. Pod tema jednakima vsotama se potem potegnejo sklepovne črte, prazni prostor pa se preseče s prečno črto. Ako je na vsaki strani le po jeden postavek tudi potem, ko se je saldo zapisal, treba le potegniti črte sklepovnice.

Ker se zapisuje saldo le zaradi tega na ono stran, kjer je manjša vsota, da se obe vsoti izjednačita, zato je treba, da se spozna pravi prejšnji račun, isti saldo v novem računu zapisati na nasprotno stran. Ker se je postavil saldo jedenkrat pod „debet“, drugikrat pa pod „credit“, izpremenil se ni račun prav nič; a doseglo se je to, da je prejšnji račun poravnan, in da izraža saldo, prepisan v novi račun, rezultat prejšnjega računa.

V pojasnilo so sestavljeni tu-le trije računi glavne knjige.

Glavna

1

Debet

J. Bizjak

1895 l.				K	h
Julija	1.	D. 1.	Za saldo prejšnjega računa	1175	—
"	6.	D. 2.	" prodano mu kavo	1425	60
"	14.	D. 2.	" " " blago	307	50
				2908	10
Avgusta	1.		Za saldo prejšnjega računa	308	10

3

Debet

G. Jaklič

1895 l.				K	h
Julija	1.	D. 1.	Za saldo prejšnjega računa	1688	40
"	30.	B. 1.	" moje gotovo plačilo	201	60
				1890	—

5

Debet

F. Tomec

1895 l.				K	h
Julija	3.	D. 1.	Za svojo trato po naredbi P. Lasnika . .	1920	—
"	7.	D. 2.	" moje rimeso na K. Porento	1700	—
"	31.		" saldo na novi račun	1684	56
				5304	56

knjiga.

1

tukaj

Credit

1895 l.				K	h
Julija	6.	D. 2.	Za svoj akcept	1900	—
"	30.	B. 1.	" svoje gotovo plačilo	700	—
"	31.		" saldo na novi račun	308	10
				2908	10

3

v *Postojini*.

Credit

1895 l.				K	h
Julija	2.	B. 1.	Za svoje gotovo plačilo	1500	—
"	9.	D. 2.	" poslani mi špirit	390	—
				1890	—

5

v *Trstu*

Credit

1895 l.				K	h
Julija	1.	D. 1.	Za saldo prejšnjega računa	1944	70
"	7.	D. 2.	" poslano mi blago	1847	40
"	20.	D. 3.	" " " kavo	1512	46
				5304	56
Avgusta	1.		Za saldo prejšnjega računa	1684	56

2. O pomožnih in postranskih knjigah.

O pismovnem prepisniku.

§ 13. Knjigo, v katero se prepisujejo trgovska pisma, katera piše trgovec svojim trgovskim prijateljem, zovemo pismovni prepisnik.

V pismovnem prepisniku se zaznamujejo strani z zaporedoma tekočimi števili. Pri vsakem prepisu se zapiše v prvo vrsto na levo kraj, kamor je pismo namenjeno, v sredo ime trgovskega prijatelja, kateremu smo pisali, in na desno datum. Potem se začne v drugi vrsti prepis pisma od besede do besede. Končni poklon se kot nebitvena reč izpušča. Pod prepis se potegne še prečnica.

Pismovni prepisnik ima na koncu abecedni imenik vseh trgovcev, katerim so se odposlala pisma; v ta imenik treba précej, ko se je pismo prepisalo, zapisati stran, na kateri je prepis.

O fakturni knjigi.

§ 14. V to knjigo se prepisujejo od vnanjih trgovcev prejete fakture od besede do besede; ob enem se spodaj dostavlja voznina in drugi stroški, navadno tudi kalkulacija.

Za blago, katero se kupi ali proda doma, ni treba posebne postranske knjige, ako so dotični računi natančno zabeleženi v dnevniku in blagajniški knjigi.

O skontrovnih knjigah.

§ 15. Skontrovne knjige imenujemo one knjige, v katere se zapisuje prejem ali oddaja blaga, s katerim tržimo.

V skontrovni knjigi ima vsako posamično blago poseben račun (konto). Vsak tak konto ima po dve nasprotni strani; na levi strani dobi nadpis „debet“ ali „prejem“, na desni „credit“ ali „oddaja“, v sredo pa se zapiše ime blaga. Vsak prejem se vknjiži z vsemi bistvenimi okoliščinami z zneskom vred na levo, vsaka oddaja prav takó na desno stran.

Najvažnejše skontrovne knjige so te-le:

1. Blagovno-skontrovnna knjiga ali blagovna knjiga. Iz blagovne knjige ni le vsak čas razvidno, kolika je zaloga, nego tudi, kdaj, kaj in po čem smo kupili ali prodali, od koga smo kupili ali komu smo prodali; blagovna knjiga naposled tudi kaže, koliko dobička ali izgube je bilo pri vsakterem blagu.

Vsakemu posamičnemu blagu se odmeni poseben račun in v tem se nahaja: 1. leto, mesec in dan, 2. prodajalčevo ali kupčevo ime, 3. mera in teža, 4. cena, 5. znesek.

2. Menično-skontrovna knjiga. V to knjigo se zapisujejo one menice, katere prejemamo, in katere se nam imajo ali ob dospelku izplačati ali s katerimi smemo ukreniti drugače. Pri vsaki menici treba povedati znesek in dospeltek, kje in kdaj se je izdala, kdo je akceptant, po čegavem ukazu, i. t. d.

Kadar se menica izkupi ali proda, treba to zabeležiti v razpredelku, za to odmenjenem, znesek in dospeltek pa prečrtati.

3. Skontrovna knjiga za vrednostne papirje; vánjo se zapisujejo kupljeni in prodani vrednostni papirji.

Vsake vrste vrednostni papir ima svoj račun, v katerem treba navesti pri vsakem postavku: 1. leto, mesec in dan, 2. prodajalčevo ali kupčevo ime, 3. število obligacije, 4. nominalno vrednost, 5. kurz, 6. znesek.

Kdor trži z državnimi papirji le po malem, temu ni treba zato posebne skontrovne knjige, nego naj dotične račune zapiše kar v blagovno knjigo.

§ 16. Kadar hočemo v blagovni ali skontrovni knjigi za vrednostne papirje skleniti račun, treba le zalogo, katero je izkazala inventura, s ceno in zneskom vred zapisati na stran oddaje, kakor bi se bilo blago res prodalo. Potem se seštejejo zneski na obeh straneh; vsota na levi strani kaže, koliko se je izdalo za prejeto blago; vsota na desni strani pa pové, koliko se je za prodano blago res izkúpilo in koliko bi se še izkúpilo za zalogo. Ako se jedna vsota odšteje od druge, kaže ostanek dobiček, ako je vsota na strani oddaje večja, v nasprotnem slučaju izguba. Da se račun izjednači, postavi se ostanek kot dobiček na levo, kot izguba na desno stran.

Potem se potegnejo pod vsotami tež (mer) in zneskov, katere vsote morajo biti na levi in desni strani jednake, sklepovne črte. Naposled se postavi še zaloga s ceno in zneskom vred na levo stran v novi račun.

Menično-skontrovna knjiga ne potrebuje sklepa; zaloga se kar prepiše v novi račun.

V pojasnilo bodi ta-le račun iz blagovne knjige.

1
Prejem Račun o

1895. l.			kg	po	K	h
Julija	1.	Zaloge:				
		4 sode	1835	88	1614	80
		7 sodov	3080	80	2464	—
"	4.	Od J. Lukmana tukaj				
		4 sode	1817	88	1598	96
"	15.	Od J. Lukmana tukaj				
		3 sode	1348	88	1186	24
		8 sodov	3653	80	2922	40
"	20.	Od G. Lenarčiča tukaj				
		5 sodov	2275	80	1820	—
"	31.	Dobička			514	82
			14008		12121	22
Avgusta	1.	Zaloge: 5 sodov	2215	88	1949	20
		9 sodov	4141	80	3312	80

O dospetni knjigi.

§ 17. Namen dospetni knjigi je ta, da trgovec iz nje vsak čas lahko razvidi, katere menice bode moral plačati in kdaj, za katere menice bode denar prejel in kdaj se bode to zgodilo; v prvem slučaju mora pripraviti potrebni denar, v drugem pa lahko določi že naprej, kaj bode počel s prejetim denarjem. V dospetni knjigi se odloči vsakemu mesecu po jeden folij; na levo stran se zapisujejo rimese, na desno trate.

O odpravni ali spedijski knjigi.

§ 18. V to knjigo se zapisuje vse ono vozno blago, katero se pošilja dalje.

knjiga.

1

sladkorju.

Oddaja.

1895 l.			kg	po	K	h
Julija	2.	<i>F. Raku v Litiji</i>				
		2 soda	915	86	786	90
"	14.	<i>J. Bizjaku tukaj</i>				
		1 sod	375	86	322	50
"	16.	<i>A. Klembasu v Celju</i>				
		1 sod	445	96	427	20
		2 soda	914	86	786	4
"	21.	<i>A. Lisjaku tukaj</i>				
		3 sode	1328	86	1142	8
"	26.	<i>M. Dolinšku v Šiški</i>				
		2 soda	992	96	952	32
		3 sode	1335	86	1148	10
"	27.	<i>J. Ramoršu tukaj</i>				
		3 sode	1348	96	1294	8
"	31.	Zaloge:				
		5 sodov	2215	88	1949	20
		9 sodov	4141	80	3312	80
			14008	—	12121	22

V odpravni knjigi sta odločeni vsakemu dogodku po dve nasprotni strani; na levo se zapiše prejem voznega blaga, na desno njega odposlatev. Na levo stran se zapiše tedaj ime in bivališče onega, ki je blago izročil ali poslal, dan naznanila, ime voznika, ki je blago pripeljal, čas, v katerem se ima blago oddati, in voznina; ime in bivališče onega, kareremu je blago namenjeno, in kakó se bodo plačali stroški, ali se namreč povzamejo ali pa zapišejo na pošiljateljev račun; naposled se dostavi dan, katerega se je blago prejelo in koliko je bilo stroškov ob prejemu in do odposlatve. Na desno stran se zapiše ime onega, komur se je poslalo blago, ime voznika, čas, v katerem mora blago oddati, in voznina, natančni popis voznega blaga in stroškovni račun; naposled se še dostavi, ali so se stroški povzeli, ali na čegav račun so se zapisali.

3. Kakó je izkazati uspeh pri jednostavnem knjigovodstvu.

§ 19. Sklep glavne knjige kaže, koliko ima trgovec terjati in koliko je dolžan. Da dobimo uspeh vsega trgovanja, treba vse imetje popisati in temu še dodati terjatve in dolgove, kakor jih kažejo saldi glavne knjige. Iz tega je mōči določiti končno čisto imetje. Primerjajoč to čisto imetje prvotnemu, zvemo, koliko dobička ali izgube je dala trgovina v tej dobi.

O resničnosti tako najdenega uspeha se prepričamo, ako, sklenivši skontrovne knjige, iz njih in iz dnevnika izpišemo ter skupaj sestavimo posamične dobičke in izgube. Ako potem vse dobičke in vse izgube seštejemo ter manjšo vsoto odštejemo od večje, mora se pokazati isti uspeh, kakor ga je izkazala inventura.



II. O jednostavnem obrtnem knjigovodstvu.

1. Za večje obrte.

§ 20. Pri večjih obrtih so knjige urejene prav takó kakor pri trgovskem knjigovodstvu in se tudi prav takó vodijo. Inventarna knjiga, dnevnik, blagajniška in glavna knjiga so tudi tu bistvene knjige; kot pomožne knjige pa nam rabijo: pismovni prepisnik, fakturna knjiga, materialna knjiga (zapisnik neizdelanega tvoriva, *Materialienbuch*), blagovna ali skladiška knjiga (*Lagerbuch*), naročilna knjiga (*Bestellungsbuch*), menično-skontrovna in dospetna knjiga.

V inventarno knjigo se prepisujejo inventure (§ 8.)

V dnevnik (§ 9.) se zapisujejo oni poslovni dogodki, ki se vršé na up, in sicer po redu, kakor prihajajo.

V blagajniški knjigi (§ 10.) se zaračunavajo dohodki in razhodki v gotovini: prvi se vknjižujejo na levi, drugi na desni strani, in to vsak dan sproti; sklepajo pa se računi vsak mesec.

Gledé uredbe glavne knjige in vpisavanja vanjo velja, kar smo povedali v §§ 11. in 12. Ako se v blagajniško knjigo in dnevnik natančno vpisujejo posamični poslovni dogodki, onđaj jih je treba v glavni knjigi omenjati le ob kratkem, zakaj v kazalnem razpredelku zapisana stran kaže, kje so natančno zabeleženi v onih knjigah.

Fakturne knjige je treba le tedaj, kadar obrtnik tvorivo naroča s tujih trgovišč in dobiva o njem račune.

Pri večjih obrtih je treba posebnega zapisnika za neizdelano tvorivo (materijalne knjige); na levo stran se zapisuje kupljeno, na desno v delavnico oddano tvorivo. Koristna je pri takih obrtih tudi skladiška knjiga; urejena je nekamo takó kakor blagovna knjiga pri jednostavnem trgovskem knjigovodstvu. Na levo stran se zapiše vsako skladišču oddano, izvršeno delo z izdelno ceno vred; kadar pa se prodaja, zapiše se zopet na desno z dostavkom, za koliko se je prodalo.

Naročena dela se zapisujejo v naročilno knjigo; le-tá ima té-le razpredelke: 1. za datum naročila, 2. za ime in stanovanje naročnikovo, 3. za natančen popis naročenih stvari in 4. za opazko, da se je naročilo izvršilo.

Obrtnikom, ki imajo le po malem opraviti z menicami, ni treba menično-skontrovne knjige; menice, ki jim pridejo kdaj v roke, zabeležujejo lahko v dospetni knjigi.

2. Za manjše obrte.

§ 21. Trgovsko knjigovodstvo je móči uporabljati le pri večjih obrtih. Mali obrtnik nima časa za tako zamudno zapisavanje; on hoče iz svojih zapiskov le razvideti, kaj bistveno pospešuje njegov obrt. A misliti mu je vendar tudi na to, da si zagotovi, če bi nastala pravda, s svojim knjigovodstvom važno dokazilo.

Da veljajo po § 121. občnega sodnega reda rokodelcu knjige za pol dokaza, treba, da ima svoj dnevnik v redu; v tega mora natančno zapisavati vse, kar je dolžan in kar ima terjati, leto, dan in tudi osebe, za katere je naredil kako delo, ali katere so mu izgotovile kako delo.

Da rokodelec ustreza tej zakoniti določbi in da vsak čas lahko pozvé, koliko je vsega njegovega imetja, zato mu je treba najprej dnevnika, v katerega mora kratko in jasno zapisavati vse obrtne dogodke, bodisi da se vršé proti gotovemu plačilu ali na up, in to po redu, kakor se vršé.

Obrtnik mora vse one poslovne dogodke, ki se vršé na up, iz dnevnika prepisati v naročniško knjigo (*Kundenbuch*) ter jih tu

urediti po osebah, in to zato, da vsak čas ve, kaj je vsaki posamični osebi dal na up ali koliko je sam od nje prejel na up.

Dnevnik in naročniška knjiga sta bistveni knjigi vsakega malega obrtnika.

Dnevnik dobi za nadpis mesec in leto, v njega posamične razpredelke pa se zapisuje:

1. Stran naročniške knjige, na katero so se prepisali iz dnevnika oni poslovni dogodki, ki so se na up vršili.

2. Dan.

3. Poslovni dogodek z vsemi bistvenimi okoliščinami. Pri postavkih, ki povzročujejo dolg ali terjatev, zapiše se najprej ime in bivališče osebe, kateri se je kaj dalo na up ali od katere se je kaj prejelo na up, in potem še-le poslovni dogodek.

4. Znesek. Le-tá se zapiše pri poslovnih dogodkih, ki se vršé proti gotovemu plačilu, pod „dohodke“ ali „razhodke“ četrtega (gotovinskega), pri onih na up pa pod „debet“ ali „credit“ petega (upnega) razpredelka.

Kadar se plača katerokoli na up prodano ali kupljeno blago, prečrta se znesek v upnem razpredelku ter dostavi, kdaj se je to zgodilo, potem pa se isti znesek zapiše v gotovinski razpredelk pod „dohodke“ ali „razhodke“.

Kadar je katera stran popisana, preneseta se vsoti dohodkov in razhodkov na nastopno stran.

V naročniški knjigi ima vsak naročnik svoj račun; le-tá ima za nadpis naročnikovo ime in bivališče, v posamične razpredelke pa se zapisuje:

1. Datum.

2. Stran dnevnika, s katere se je dotični postavk prepisal semkaj.

3. Stvar, katera se je prodala ali kupila.

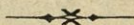
4. Znesek, kateri se zapiše pod „debet“ ali pod „credit“.

Ako se pošlje naročniku račun, treba to zabeležiti v naročniški knjigi.

Iz naročniške knjige obrtnik koncem vsake dobe lahko izpiše svoje terjatve in dolgoe. Da zve uspeh svojega obrta, treba mu je le prešteti gotovino (le-tá se mora ujemati z diferenco prejemkov in izdatkov, zabeleženih v dnevniku), določiti vrednost blagu in izdelkom,

ter sestaviti inventuro. Primerjajoč zadnjo inventuro prvotni, zvé, koliko je imel v dotični dobi dobička ali izgube.

Dobro je, ako ima mali obrtnik razven ravno kar omenjenih dveh bistvenih knjig tudi naročilno knjigo (§ 20.) in dospetno knjigo. V prvo naj zabeleži naročena dela, v drugo pa naj zapiše k dotičnemu dnevu račune ali menice, za katere bode denar prejel ali katere bode moral plačati. Dospetno knjigo lahko nadomešča tudi pratika.



III. Načrt jednómesečne trgovine kot vaja v praktični uporabi jednostavnega knjigovodstva.

Josef Leban v *Ljubljani* si omisli za svojo trgovino na podlagi inventure dne 1. julija l. 1895. nove knjige.

Kakó je tekla trgovina meseca julija l. 1895.

Dne 1. julija. Kakor inventura izkazuje, imel sem aktivnega in pasivnega imetja:

1. Gotovine 3984 K.

2. Rimes:

za 1440 K na	<i>A. Vičiča</i>	v dan 12. julija,
„ 980 „ „	<i>B. Kočevanja</i>	„ „ 15. julija,
„ 2520 „ „	<i>M. Pavliča</i>	„ „ 10. avgusta.

3. Blaga:

1256 kg	Java-kave	po 356,
1470 „	Rio-kave	„ 328,
875 „	sladkorja	„ 92,
1613 „	„	„ 84,
428 „	zabelnega olja	„ 148,
315 „	grozdjiča	„ 50,
528 „	riža	„ 48.

4. Blaga v prodajalnici:

Kakor izkazuje prodajalniška inventura za 952 K.

Terjatev 356 K, a od teh treba odbiti 3%.

5. Premičnine in pohištva za 1920 K.

6. Terjatev:
 pri *G. Lozarju* v *Kranju* 1520 K
 „ *F. Kosu* v *Loki* 900 „
 „ *J. Golobu* v *Kamniku* 1632 „
 „ *K. Končanu* v *Borovnici* 420 „
 „ *M. Volku* tukaj 540 „

7. Trat:
 za 1348 K na ukaz *S. Čeha* v dan 9. julija,
 „ 1760 „ „ „ *P. Noraka* „ „ 15. julija,
 „ 1038 „ „ „ *A. Kralja* „ „ 25. avgusta.

8. Dolgov:
A. Pasiniju v *Trstu* 1700 K
N. Finku v *Brnu* 1452 „
K. Bregarju tukaj 1070 „

Za domače potrebe sem dal 360 K, trgovskim pomočnikom 240 K.
 Prodajalnica je iztržila 190 K.

Dne 3. julija. Prodajalnici sem dal za prodajo na drobno:
 150 kg Java-kave po 356, 300 kg Rio-kave po 328,
 100 „ sladkorja „ 92, 400 „ sladkorja „ 84,
 100 „ zabeln. olja „ 148, 50 „ grozdjiča „ 48.
 100 „ riža „ 48.

G. Lozar v *Kranju* je poslal 600 K v gotovini in rimeso za 820 K na *M. Turka* v dan 10. julija, na up pa je prejel:

200 kg Java-kave po 360, 350 kg Rio-kave po 336,
 150 „ sladkorja „ 94, 500 „ sladkorja „ 86.

Stroškov za zaboje i. t. d. sem računil 37 K.

Prodajalnica je iztržila 162 K.

Dne 4. julija. Izplačal sem trato za 1348 K na ukaz *S. Čeha* v dan 9. julija s 6% diskonta.

Kupil sem od *K. Bregarja* tukaj proti svojemu akceptu v dan 20. julija 663 kg sladkorja po 80.

Prodajalnica je iztržila 134 K.

Dne 5. julija. *S. Kosu* v *Loki* sem poslal na njegovo naročilo:

120 kg Java-kave po 360, 100 kg sladkorja po 94,
 350 „ sladkorja „ 86, 50 „ zabel. olja „ 164.

Prodajalnica je iztržila 204 K.

Dne 6. julija. Prejel sem od *K. Goloba* v *Kamniku* 1200 K v gotovini ter mu prodal na up:

100 kg Java-kave po 360,	100 kg sladkorja po 94,
200 „ sladkorja „ 86,	100 „ riža „ 50.

Prodajalnica je iztržila 162 K.

Dne 7. julija. Kupil sem menico za 1600 K na *J. Kluna* v *Trstu* v dan 31. julija s 6% diskonta ter jo poslal *A. Pasiniju* v *Trst*.

Prodajalnica je iztržila 156 K.

Dne 8. julija. Prejel sem po naročilu od *N. Finku* v *Brnu* na up:

1 sod sladkorja, nečiste teže 435 kg, tare 24 kg, po 86
3 sode „ „ „ 1336 „ „ 73 „ „ 78

ter plačal za voznino in druge stroške 33 K 48 h.

Prodajalnica je iztržila 186 K.

Dne 10. julija. Za rimeso na *M. Turka* sem prejel 820 K.

Prodal sem *J. Končanu* v *Borovnici*:

200 kg Rio-kave po 336 in 300 kg sladkorja po 86.

Prodajalnica je iztržila 176 K.

Dne 11. julija. *M. Volk* tukaj mi je plačal v gotovini 500 K ter prejel:

100 kg sladkorja po 94 in 200 kg sladkorja po 86.

Kupil sem menico za 2000 K na *A. Simona* v *Brnu* v dan 10. avgusta ter jo poslal *N. Finku* v *Brn*.

Prodajalnica je iztržila 160 K.

Dne 12. julija. *A. Pasini* v *Trstu* mi je poslal na moje naročilo fakturo o

2 sodih Java-kave, neč. teže 497 kg, tare 38 kg, po 320,
3 „ Rio-kave, „ „ 728 „ „ 52 „ „ 272,
2 „ zabel. olja „ „ 532 „ „ 65 „ „ 122,
1 zaboju grozdjiča, „ „ 271 „ „ 27 „ „ 36.

Stroškov je računil 36 K 92 h, za ves znesek pa potegnil name menico po naredbi *G. Funteka* v dan 12. septembra.

Za rimeso na *A. Vičiča* sem prejel 1440 K.

Prodajalnica je iztržila 224 K.

Dne 13. julija. Prodal sem *B. Sirku* tukaj proti njega jedno-mesečnemu akceptu:

200 kg Java-kave po 360,	200 kg sladkorja po 94,
100 „ zabel. olja „ 164,	50 „ grozdjica „ 54.

Prodajalnica je iztržila 148 K.

Dne 14. julija. Kupil sem od *J. Perdana* tukaj proti gotovemu plačilu:

350 kg riža po 46.

Prodajalnica je iztržila 140 K.

Dne 15. julija. Za rimeso na *B Kočevarja* se mi je izplačalo 980 K.

Izplačal sem 1760 K za danes izplačno trato na ukaz *P. Novaka*.

Prodajalnica je iztržila 190 K.

Dne 17. julija. Dobil sem gori naznanjeno blago od *A. Pasinija* v *Trstu* ter plačal za voznino in druge stroške 258 K 44 h.

Prodajalnica je iztržila 156 K.

Dne 18. julija. Dal sem prodajalnici za prodajo na drobno:

100 kg Java-kave po 356,	420 kg Rio-kave po 328,
150 „ sladkorja „ 92,	500 „ sladkorja „ 84,
150 „ zabel. olja „ 148,	100 „ grozdjica „ 48,
200 „ riža „ 48.	

Prodajalnica je iztržila 182 K.

Dne 19. julija. *F. Kos* v *Loki* je poslal rimeso za 1500 K na *A. Kuglerja* v *Brnu* v dan 20. avgusta ter prejel na up:

200 kg Rio-kave po 336,	250 kg sladkorja po 86,
100 „ zabel. olja „ 164,	100 „ grozdjica „ 54.

Prodajalnica je iztržila 170 K.

Dne 20. julija. Izplačal sem za svoj danes dospeli akcept 530 K 40 h.

Prodajalnica je iztržila 156 K.

Dne 21. julija. Prejel sem od *N. Finka* v *Brnu*:

1 sod sladkorja, neč. teže 412 kg,	tare 23 kg,	po 88,
2 soda „ „ „ 883 „ „ 47 „ „ 78.		

ter mu poslal rimeso za 1500 K na *A. Kuglerja* v *Brnu* v dan 20. avgusta.

Stroškov sem plačal ob prejemu blaga 24 K 50 h.

Prodajalnica je iztržila 166 K.

Dne 22. julija. Plačal sem *K. Bregarju* tukaj 1000 K v gotovini ter prejel:

200 kg sladkorja po 88, 500 kg sladkorja po 80.

Prodajalnica je iztržila 196 K.

Dne 24. julija. *J. Končan* v *Borovnici* je poslal 900 K v gotovini.

Prodajalnica je iztržila 172 K.

Dne 25. julija. Prodal sem *M. Volku* tukaj na up:

100 kg sladkorja po 94 in 200 kg sladkorja po 88.

Prodajalnica je iztržila 174 K.

Dne 26. julija. Prodal sem *J. Kovaču* tukaj proti gotovemu plačilu:

50 kg Java-kave po 356, 100 kg zabeln. olja po 148,
100 „ riža „ 48, 50 „ grozdjčica „ 54.

Prodajalnica je iztržila 232 K.

Dne 27. julija. Izplačal sem trato za 1038 K na ukaz *A. Kralja*, izplačno dne 25. avgusta, s 6% diskonta.

Prodajalnica je iztržila 168 K.

Dne 28. julija. *A. Pasini* v *Trstu* mi je poslal na moje naročilo na up:

2 soda Java-kave, neč. teže 478 kg, tare 39 kg, po 320,

3 sode Rio-kave, „ „ 725 „ „ 51 „ „ 272.

Za voznino in druge stroške sem plačal 155 K 82 h.

Prodajalnica je iztržila 186 K.

Dne 29. julija. *G. Lozar* v *Kranju* mi je poslal 100 ces. zlatnikov, katere sem na njegov račun po 10 K 56 h prodal; senzarije sem plačal $\frac{1}{2}\%$.

Prodajalnica je iztržila 266 K.

Dne 30. julija. V prodajalnici je bilo meseca julija 56 K stroškov; danes pa je iztržila 196 K ter izkazuje:

Blaga za 1078 K.

Dolgov 410 K, od teh treba 3% odbiti.

Dne 31. julija se sklenejo knjige in sestavi inventura. Recimo, da se ujema ostanek v blagajnici s saldonom blagajniške knjige in da je v zalogi toliko blaga, kolikor ga izkazuje blagovnik. Premičnina in pohištvo naj se postavi v račun po prvotni vrednosti z 1% odbitka.

a) Koliko je sedanje aktivno, pasivno in čisto imetje?

b) Kolik je uspeh enomesečne trgovine?



Kazalo.

	Stran
Uvod	1
Prvi oddelek. Četvero osnovnih računov s posebnimi in občnimi celimi števili	4
I. O dekadnem številnem sistemu	—
II. Seštevanje	6
III. Odštevanje	11
IV. Množenje	28
V. Deljenje	40
VI. O deljivosti števil, o največji skupni meri in o najmanjšem skupnem mnogokratniku	51
VII. Naloge v ponavljanje	62
Drugi oddelek. Četvero osnovnih računov z ulomljenimi števili 65	
I. Navadni ulomki	66
II. Decimalni ulomki	79
III. Naloge v ponavljanje	92
Tretji oddelek. Jednačbe prve stopinje z jedno neznanko	95
I. Razreševanje jednačeb prve stopinje z jedno neznanko	96
II. Uporaba jednačeb	100
III. Naloge v ponavljanje	107
Četrty oddelek. Razmerja in sorazmerja	110
I. Razmerja	—
II. Sorazmerja	112
III. Uporaba sorazmerij	118
IV. Naloge v ponavljanje	125
Peti oddelek. O potencah in korenih	127
I. O potencah	—
II. O korenih	138
III. Naloge v ponavljanje	156

Šesti oddelek. O najvažnejših gospodarskih in trgovskih računih 159

I. O procentnem računu	—
II. O obrestnem računu	170
1. O jednostavnem obrestnem računu	—
2. O diskontnem računu	176
3. O rokovnem računu	178
4. Obrestnoobrestnem računu	181
III. O družbenem računu	187
IV. O zmesnem računu	191
V. O verižnem računu	194
VI. O novčnem računu	196
VII. O meničnem računu	205
VIII. Kakó je izračunavati državne papirje in akcije	216
IX. Naloge v ponavljanje	220

Sedmi oddelek. O jednačbah prve stopinje z več neznankami 224

I. Kakó je razreševati jednačbe z dvema neznankama	—
II. Kakó je razreševati jednačbe s tremi ali več neznankami	228
III. Kakó je uporabljati jednačbe z več neznankami v razreševanje nalog	232
IV. Naloge v ponavljanje	238

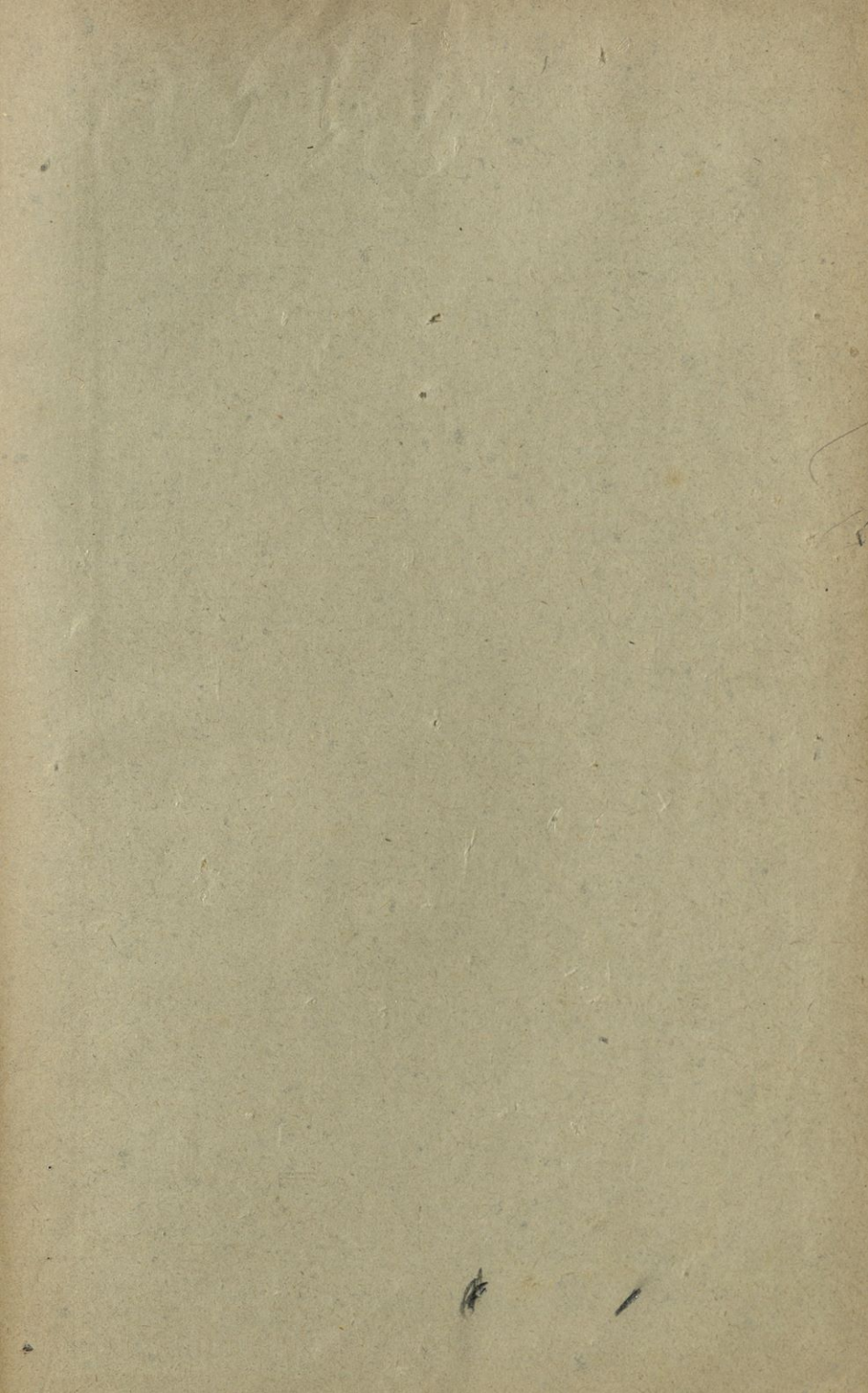
Dodatek. O jednostavnem knjigovodstvu 243

Občna pojasnila	—
I. O jednostavnem trgovskem knjigovodstvu	247
II. O jednostavnem obrtnem knjigovodstvu	262
III. Načrt jednomesečne trgovine kot vaja v praktični uporabi jednostavnega knjigovodstva	265





Natisnil Karol Gorišek na Dunaju.



NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA

COBISS •



000000492089

Open to work

also (open) good

also proletarianism also

also proletarianism also
proletarianism
also proletarianism also

544 (045.3)

111

12. März 1906.

4

6

6

6 66

33 33

Bruch

8

