# NEKAJ NESTANDARDNIH METOD ZA RAČUNANJE DETERMINANT

EDVARD KRAMAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 15A15, 1501, 1503

V članku prikažemo nekaj enostavnih nestandardnih postopkov računanja determinant. Pri tem uporabljamo dvovrstne poddeterminante, izrezovanje stolpca in vrstice ali odštevanje števila od vseh elementov matrike.

**SOME NONSTANDARD METHODS FOR EVALUATION OF DETERMINANTS**

In this article we present some simple nonstandard algorithms for evaluation of determinants. We are using subdeterminants of order two, removing some row and column or subtracting some number from all elements of the matrix.

## Uvod

Računanje determinante kvadratne matrike večjih redov je zamudno delo. Algoritmi računanja z računalnikom običajno uporabljajo razcep matrike na produkt spodnje in zgornje trikotne matrike (glej na primer [1]). Ta postopek je v tesni zvezi s tako imenovanimi elementarnimi operacijami na vrsticah in stolpcih matrike. Kadar računamo determinante „ročno“, torej brez uporabe računalnika, običajno prav z omenjenimi operacijami skušamo priti do čim bolj enostavne oblike. Namen prispevka je prikazati nekaj manj znanih metod računanja determinant, ki so lahko same po sebi zanimive.

## 1. Računanje determinante s pomočjo dvovrstnih poddeterminant

Vzemimo matriko $A$ reda $n \times n$ in v njej izberimo poljuben neničelni element $a_{ik}$, ki ga na kratko označimo z $\alpha$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,k-1} & \alpha & a_{i,k+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Na stolpcih $s_j$, kjer je $j \neq k$, naredimo naslednje elementarne operacije: $s_j \to \alpha \cdot s_j - a_{ij} \cdot s_k$. Tako dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} \alpha a_{11} - a_{1k}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{1,k-1} - a_{1k}a_{i,k-1} & a_{1k} & \alpha a_{1,k+1} - a_{1k}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{1n} - a_{1k}a_{in} \\ \alpha a_{21} - a_{2k}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{2,k-1} - a_{2k}a_{i,k-1} & a_{2k} & \alpha a_{2,k+1} - a_{2k}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{2n} - a_{2k}a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} - a_{nk}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{n,k-1} - a_{nk}a_{i,k-1} & a_{nk} & \alpha a_{n,k+1} - a_{nk}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{nn} - a_{nk}a_{in} \end{bmatrix}.$$

Determinanto te matrike razvijmo po $i$-ti vrstici. Pri tem faktor $(-1)^{i+k}$ upoštevamo tako, da pred tem v zgornji matriki pomnožimo zadnje $n-i$ vrstice in zadnje $n-k$ stolpce s številom $-1$. Rezultat moramo še deliti s faktorjem $\alpha^{n-1}$ in ugotovimo, da je determinanta naše matrike $A$ enaka $\frac{1}{\alpha^{n-2}}$-kratniku determinante naslednje matrike

$$\begin{bmatrix} \alpha a_{11}-a_{1k}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{1,k-1}-a_{1k}a_{i,k-1} & a_{1k}a_{i,k+1}-\alpha a_{1,k+1} & \cdots & a_{1k}a_{in}-\alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i-1,1}-a_{i-1,k}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{i-1,k-1}-a_{i-1,k}a_{i,k-1} & a_{i-1,k}a_{i,k+1}-\alpha a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,k}a_{in}-\alpha a_{i-1,n} \\ a_{i+1,k}a_{i1}-\alpha a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k}a_{i,k-1}-\alpha a_{i+1,k-1} & \alpha a_{i+1,k+1}-a_{i+1,k}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{i+1,n}-a_{i+1,k}a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk}a_{i1}-\alpha a_{n1} & \cdots & a_{nk}a_{i,k-1}-\alpha a_{n,k-1} & \alpha a_{n,k+1}-a_{nk}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{nn}-a_{nk}a_{in} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

ki jo označimo z $B$. Hitro se lahko prepričamo, da elemente te matrike lahko pišemo kot dvovrstne determinante

$$B = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{i1} & \alpha \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,k-1} & a_{1k} \\ a_{i,k-1} & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1,k+1} \\ \alpha & a_{i,k+1} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1n} \\ \alpha & a_{in} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{i-1,1} & a_{i-1,k} \\ a_{i1} & \alpha \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} \\ a_{i,k-1} & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} \\ \alpha & a_{i,k+1} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{i-1,k} & a_{i-1,n} \\ \alpha & a_{in} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{i1} & \alpha \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,k} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{i,k-1} & \alpha \\ a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & a_{i,k+1} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \alpha & a_{in} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{i1} & \alpha \\ a_{n1} & a_{nk} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{i,k-1} & \alpha \\ a_{n,k-1} & a_{nk} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & a_{i,k+1} \\ a_{nk} & a_{n,k+1} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \alpha & a_{in} \\ a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Med determinantama obeh matrik velja torej zveza

$$\det(A) = \frac{1}{\alpha^{n-2}} \det(B). \tag{3}$$

Metoda sestavljanja matrike $B$ je enostavna. Najprej izberemo v matriki $A$ neničelni element $\alpha$, na primer v $i$-ti vrstici in $k$-tem stolpcu. Nato se postavimo na to mesto in sestavljamo dvovrstne determinante tako, da element $\alpha$ vsakokrat dopolnimo s tekočim elementom $a_{rs}$ (kjer $r \neq i$ in $s \neq k$) matrike in dvema elementoma, ki sta na križišču ustrezne vrstice in stolpca z $i$-to vrstico in $k$-tim stolpcem. Pri tem ohranimo pozicijo elementov, kot so v prvotni matriki, in nam tudi ni treba misliti na predznake. Pri ročnem računanju je seveda pametno, da izberemo za $\alpha$ element 1 ali $-1$, če tak obstaja. Naj opomnimo, da v primeru izbire $\alpha = a_{11}$, če je to število neničelno, dobimo tako imenovano Chiòvo formulo (glej na primer [4]). Računanje determinante reda $n$ smo prevedli na računanje determinante reda $n-1$. S ponavljanjem postopka pridemo nazadnje do ene same determinante reda 2. Naredimo zgled:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 6 & 2 & 7 \\ 3 & -4 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & \mathbf{1} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \\ \mathbf{1} & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Krepko smo označili števila, ki smo jih izbrali za naslednji korak. Oglejmo si še primer iz [6]

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_{n-1} & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_{n-1}b_n & a_nb_n \end{vmatrix},$$

kjer avtor predlaga, da najprej poiščemo zvezo med $D_n$ in $D_{n-1}$. Vzemimo najprej, da je $a_1b_n \neq 0$. Če uporabimo zvezo (3) na desnem zgornjem vogalnem elementu, hitro ugotovimo, da dobimo determinanto, ki ima vse elemente nad glavno diagonalo enake 0, diagonalni elementi pa so po vrsti: $a_1b_n(a_2b_1 - a_1b_2)$, $a_1b_n(a_3b_2 - a_2b_3)$, $\ldots$, $a_1b_n(a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n)$. Tako dobimo po krajšanju z $(a_1b_n)^{n-2}$ za vrednost determinante rezultat:

$$D_n = a_1b_n \prod_{k=1}^{n-1} (a_{k+1}b_k - a_kb_{k+1}).$$

Če je $a_1b_n = 0$, ta zveza trivialno velja.

Zvezo (3) lahko najprej posplošimo tako, da izberemo dva neničelna elementa neke vrstice. Če na primer izberemo elementa $\alpha = a_{ik} \neq 0$ in $\beta = a_{ir} \neq 0$, kjer je $1 \leq k < r < n$, podobno kot zgoraj z elementarnimi operacijami na stolpcih

$$\begin{aligned} s_j &\to \alpha \cdot s_j - a_{ij} \cdot s_k, \quad j = 1, 2, \ldots, r,\ j \neq k, \\ s_j &\to \beta \cdot s_j - a_{ij} \cdot s_r, \quad j = r+1, \ldots, n \end{aligned}$$

izpeljemo zvezo

$$\det(A) = \frac{1}{\alpha^{r-2}\beta^{n-r}} \det(B), \tag{4}$$

kjer je matrika $B$ sestavljena iz poddeterminant drugega reda, tvorjenih tako kot zgoraj, pri čemer prvi parameter $\alpha$ uporabimo za prvih $r-1$ stolpcev, za naslednje stolpce pa uporabimo parameter $\beta$. Zgoraj smo vzeli $r \neq n$, v nasprotnem dobimo zvezo z enim samim parametrom.

Kot primer vzemimo matriko $A$ reda $5 \times 5$, v kateri izberimo elementa $\alpha = a_{32}$ in $\beta = a_{34}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & \alpha & a_{33} & \beta & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

Za determinanto te matrike velja zveza

$$\det(A) = \frac{1}{\alpha^{4-2}\beta^{5-4}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ \alpha & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ \beta & a_{35} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ \alpha & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ \beta & a_{35} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{31} & \alpha \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \beta & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{31} & \alpha \\ a_{51} & a_{52} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & a_{33} \\ a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{52} & a_{54} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \beta & a_{35} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Zgornjo zvezo lahko posplošimo še na več izbranih elementov. Tako velja: če v $i$-ti vrstici matrike (1) izberemo neničelne elemente $a_{i,k_1}, a_{i,k_2}, \ldots, a_{i,k_r}$ (največ $n-2$), kjer je $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r < n$, potem velja naslednja zveza:

$$\det(A) = \frac{1}{a_{i,k_1}^{k_2-2} a_{i,k_2}^{k_3-k_2} \cdots a_{i,k_r}^{n-k_r}} \det(B), \tag{5}$$

kjer je matrika $B$ iz dvovrstnih poddeterminant, tvorjenih na zgoraj opisani način. Pri tem preskočimo pri vsakem izbranem stolpcu na naslednji parameter. Zanimivo je, da v zvezah (4) in (5) pozicija prvega parametra nima vpliva na faktor pred novo determinanto. V posebnem lahko izberemo $n-2$

neničelnih elementov neke vrstice, na primer vse razen prvega in zadnjega. Če smo to naredili v $i$-ti vrstici, dobimo zvezo

$$\det(A) = \frac{1}{a_{i2}a_{i3}\cdots a_{i,n-1}}\det(B), \tag{6}$$

kjer je matrika $B$ iz determinant reda 2, tvorjenih na zgornji način, pri čemer na vsakem koraku preskočimo na sosednji parameter. Podobne formule, kot so (4), (5) in (6), veljajo, če parametre izbiramo v nekem stolpcu. Za zgled s pomočjo zveze (6) izračunajmo naslednjo determinanto reda $n$:

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Najprej predpostavimo, da so vsa števila neničelna. Uporabimo zvezo (6) na prvi vrstici in v dobljeni determinanti iz vseh stolpcev izpostavimo potence števil $a_1$ in $b_1$ ter skupne faktorje v vrsticah. Po okrajšanju dobimo zvezo:

$$\begin{aligned} &D(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \\ &\quad = (a_1b_2 - a_2b_1)\cdots(a_1b_n - a_nb_1)\cdot D(a_2, a_3, \ldots, a_n; b_2, b_3, \ldots, b_n). \end{aligned} \tag{8}$$

Zveza velja tudi, če je kakšno od števil enako nič. Vzemimo npr., da je $a_1 = 0$. Razvijmo za ta primer determinanto (7) po prvi vrstici in dobimo:

$$\begin{aligned} &D(0, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \\ &\qquad = (-1)^{n+1}b_1^{n-1}a_2a_3\cdots a_nD(a_2, a_3, \ldots, a_n; b_2, b_3, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Isto pa dobimo, če v zvezi (8) postavimo $a_1 = 0$. Zvezo (8) rekurzivno uporabimo na vse manjših determinantah, dokler ne pridemo do determinante drugega reda, ki je enaka $D(a_{n-1}, a_n; b_{n-1}, b_n) = a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}$. Tako pridemo do identitete

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_ib_j - a_jb_i). \tag{9}$$

Naj opomnimo, da lahko pridemo do zgornje zveze tudi z uporabo Vandermondove determinante (glej npr. [4]). Po drugi strani pa dobimo zvezo za Vandermondovo determinanto, če v (9) postavimo $b_i = 1$ za vse $i$.

Oglejmo si, kako lahko uporabimo npr. zvezo (3) za računanje determinante Hessenbergove matrike. Ta ima obliko

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vzemimo, da je $a_{11} \neq 0$. Hitro opazimo, da z uporabo formule (3) na tem elementu dobimo le v prvi vrstici determinante reda 2, vse druge vrstice pa so samo pomnožene s faktorjem $a_{11}$. Tega lahko izpostavimo iz teh vrstic, ga okrajšamo in dobimo:

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1}\\ a_{21} & a_{2,n-1}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{2n}\end{vmatrix}\\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n}\\ 0 & a_{43} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Če je $a_{11} = 0$ in je $a_{21} \neq 0$, začnemo s tem elementom in dobimo enak rezultat. Če pa sta oba omenjena elementa enaka nič, zgornja zveza trivialno velja. Vidimo, da moramo izračunati samo dvovrstne determinante iz prvih dveh vrstic, druge vrstice ostanejo nespremenjene in opustimo prvi stolpec. Tako postopno pridemo do ene same determinante drugega reda. Izračunajmo primer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 6 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 6 & 5\\ 0 & 1 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5\\ 1 & 6 & 6\\ 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1\\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 7.$$

Zveze (3), (4), (5), (6) in (10) so bile predstavljene v [5].

## 2. Dodgsonova kondenzacijska metoda

Najprej si bomo ogledali neko zvezo med determinanto dane matrike in petimi njenimi poddeterminantami. Vzemimo matriko (1) z elementi $(a_{ij})$

in uvedimo krajšo oznako

$$(a_{ij}, a_{rs}) = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix}, \quad i < r, \ j < s.$$

Elemente te determinante dobimo tako, da skozi elementa $a_{ij}$ in $a_{rs}$ v matriki potegnemo vodoravni ter navpični vzporednici, in presečišča teh premic nam določajo elemente v determinanti. Podobno z $(a_{ij}, a_{km}, a_{rs})$, kjer je $i < k < r$ in $j < m < s$, označimo poddeterminanto reda 3, ki ima v oklepaju navedene elemente po vrsti na glavni diagonali, preostala mesta pa dopolnimo z elementi iz matrike, kot nam narekujejo indeksi na zgoraj opisani način. Podobno označevanje lahko uporabimo za poddeterminante višjih redov. Zaradi enostavnosti vzemimo, da je matrika $A$ reda $4 \times 4$ z elementi $(a_{ij})$ in predpostavimo, da je $a_{22} \neq 0$ in $(a_{22}, a_{33}) \neq 0$. Pri računanju determinante matrike $A$ upoštevajmo zvezo (3) z elementom $a_{22}$ in nato še enkrat to zvezo na dobljenem srednjem elementu $(a_{22}, a_{33})$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{22}^2} \begin{vmatrix} (a_{11}, a_{22}) & (a_{12}, a_{23}) & (a_{12}, a_{24}) \\ (a_{21}, a_{32}) & (a_{22}, a_{33}) & (a_{22}, a_{34}) \\ (a_{21}, a_{42}) & (a_{22}, a_{43}) & (a_{22}, a_{44}) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{22}^2 (a_{22}, a_{33})} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} (a_{11}, a_{22}) & (a_{12}, a_{23}) \\ (a_{21}, a_{32}) & (a_{22}, a_{33}) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (a_{12}, a_{23}) & (a_{12}, a_{24}) \\ (a_{22}, a_{33}) & (a_{22}, a_{34}) \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} (a_{21}, a_{32}) & (a_{22}, a_{33}) \\ (a_{21}, a_{42}) & (a_{22}, a_{43}) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (a_{22}, a_{33}) & (a_{22}, a_{34}) \\ (a_{22}, a_{43}) & (a_{22}, a_{44}) \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Namesto števila $a_{22}^2$ v imenovalcu ulomka lahko pišemo pred vsako notranjo determinanto število $\frac{1}{a_{22}}$. Potem pa prek zveze (3) spoznamo, da so na štirih mestih notranje determinante v resnici vrednosti štirih trivrstnih determinant. Tako pridemo do zveze

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_{22}, a_{33})} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Ali na krajši način:

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{22}, a_{33})} \begin{vmatrix} (a_{11}, a_{22}, a_{33}) & (a_{12}, a_{23}, a_{34}) \\ (a_{21}, a_{32}, a_{43}) & (a_{22}, a_{33}, a_{44}) \end{vmatrix}.$$

Podobno lahko z indukcijo, kjer primerno uporabimo zvezo (3), ugotovimo, da za determinanto matrike $A$ reda $n \times n$ velja

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{22}, \ldots, a_{n-1,n-1})} \begin{vmatrix} (a_{11}, \ldots, a_{n-1,n-1}) & (a_{12}, \ldots, a_{n-1,n}) \\ (a_{21}, \ldots, a_{n,n-1}) & (a_{22}, \ldots, a_{nn}) \end{vmatrix} \tag{12}$$

ob predpostavki, da je determinanta v imenovalcu od nič različna. Elementi v dvovrstni determinanti na desni so tvorjeni tako, da po vrsti zapišemo štiri vogalne determinante reda $n-1$, ki jih dobimo iz dane matrike. Ta zveza se imenuje tudi Desnanot-Jacobijeva identiteta. Na njeni podlagi sloni Dodgsonova metoda kondenzacije, ki jo je predlagal C. L. Dodgson ([3]), bolj znan pod psevdonimom Lewis Carroll in delu Alica v čudežni deželi. Dogovorimo se še za dve poimenovanji. *Sosedski minor* (krajše *s-minor*) *reda* $r$ imenujmo determinanto podmatrike, ki jo dobimo tako, da izberemo $r$ sosednjih vrstic neke matrike, druge izpustimo, ter $r$ sosednjih stolpcev in druge izpustimo. Torej se morajo deli izbranih vrstic in stolpcev držati skupaj. *Središčno* ali *centralno podmatriko* (krajše *c-podmatriko*) pa imenujmo podmatriko, ki jo dobimo iz neke matrike, če odstranimo prvo in zadnjo vrstico ter prvi in zadnji stolpec. V zvezi (11) nastopajo na desni štirje s-minorji reda 3, v imenovalcu pa imamo determinanto c-podmatrike začetne matrike.

Vzemimo sedaj dano matriko $A$ reda $n \times n$ in definirajmo zaporedje matrik $A_k$ in $B_k$, za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ po naslednjem pravilu. Najprej postavimo $A_0 = A$, medtem ko naj bo $B_0$ matrika reda $(n-1) \times (n-1)$ iz samih enojk. Potem pa za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ elemente matrike $A_k$ dobimo tako, da po vrsti računamo s-minorje reda 2 matrike $A_{k-1}$ in jih delimo z istoležnimi elementi matrike $B_{k-1}$, za matriko $B_k$ pa vzamemo c-podmatriko matrike $A_{k-1}$. Seveda moramo privzeti, da so vseskozi vsi elementi matrik $B_k$ različni od nič. Matrika $A_{n-1}$ je reda $1 \times 1$ in je ravno vrednost determinante začetne matrike $A$, matrika $B_{n-1}$ pa je prazna, saj naj bi bila c-podmatrika prejšnje matrike reda $2 \times 2$. Oglejmo si ta postopek na primeru:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -7 \\ 4 & 2 & -10 \\ 5 & 2 & -12 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -10 & 18 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \qquad B_4 = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}.$$

Torej $\det(A) = 2$. Na tem primeru pojasnimo, zakaj res dobimo na koncu vrednost determinante začetne matrike. Primerjajmo način računanja elementov matrik $A_k$ z zvezo (12), seveda glede na velikost ustreznih podmatrik. V matriki $A_1$ so ravno s-minorji matrike $A$ reda 2, v matriki $B_1$ pa minorji reda 1 notranjega dela matrike $A$. Opazimo, da so v matriki $A_2$ izračunani s-minorji reda 3 matrike $A$, v matriki $B_2$ pa s-minorji reda 2 notranjega dela matrike $A$, ki potem pridejo v poštev pri računanju s-minorjev reda 4 matrike $A$, ti so potem zbrani v matriki $A_3$. Element v $B_3$ je ravno determinanta c-podmatrike reda $3 \times 3$ začetne matrike. Nazadnje je v matriki $A_4$ izračunani s-minor reda 5 matrike $A$. Ker je ta en sam, je seveda to vrednost iskane determinante. Pomanjkljivost te metode je, da odpove, kakor hitro je kakšen element v matrikah $B_k$ enak nič. Ko naletimo na ničelni element v eni od teh matrik, moramo postopek prekiniti. Lahko gremo sicer nazaj na začetno matriko in ji zamenjamo dve ali več vrstic oziroma stolpcev ter znova začnemo postopek, mislimo pa si lahko, kako je tako ponavljanje mučno delo. Hitro pa se da najti primere matrik, pri katerih nobena zamenjava začetnih vrstic ali stolpcev ne pomaga.

## 3. Računanje determinante z izrezovanjem stolpcev in vrstic

Vzemimo zopet matriko (1) z izbranim neničelnim elementom $\alpha = a_{ik}$. Tokrat pa razdelimo matriko na bloke tako, da posebno izdvojimo $i$-to vrstico in $k$-ti stolpec. Posameznim podmatrikam dajmo svoje oznake, tako lahko pišemo

$$A = \begin{bmatrix} W_{11} & v_1 & W_{12} \\ u_1^T & \alpha & u_2^T \\ W_{21} & v_2 & W_{22} \end{bmatrix}.$$

Sedaj naredimo enako kot v prvem razdelku in matriko $B$ v (2) pišimo v obliki razlike

$$B = \begin{bmatrix} \alpha W_{11} & -\alpha W_{12} \\ -\alpha W_{21} & \alpha W_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T & -u_2^T \end{bmatrix}.$$

Dodajmo k drugemu členu faktor $\frac{\alpha}{\alpha}$. Upoštevajmo zvezo (3) med determinantama matrik $A$ in $B$ in pri računanju determinante matrike $B$ upoštevajmo faktor $\alpha^{n-1}$. Tako dobimo

$$\det(A) = \alpha \cdot \det\left(\begin{bmatrix} W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^T & -u_2^T \end{bmatrix}\right). \tag{13}$$

Pogosto je ugodno izbrati kar spodnji desni element, če je različen od nič; in dobimo zvezo

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} W & v \\ u^T & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det\left(W - \frac{1}{\alpha}(vu^T)\right). \tag{14}$$

Tako lahko zaporedoma izražamo determinante z determinantami nižjih redov. Pri ročnem računanju se splača izbirati števila 1 ali $-1$, če obstajajo, ali vsaj ne prevelikih števil ter take, da je v izbrani vrstici ali stolpcu čim več ničel. Omenjeno metodo najdemo v [2]. Prikažimo postopek na zgledu, pri tem s črtami označimo mesta razrezov:

$$\det\left[\begin{array}{cc|c|cc} 5 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] =$$

$$= 2\det\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \\ -7 & -2 & 3 & 4 \\ -5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 2\det\left(\frac{1}{2}\left[\begin{array}{rrr|r} 10 & 6 & -8 & -4 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -2 \\ \hline -13 & -4 & 6 & 5 \\ -8 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$$= \frac{2(-2)}{2^4}\det\left(\begin{bmatrix} 10 & 6 & -8 \\ 13 & 4 & -6 \\ 8 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{-1}{2^2}\det\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & -8 \\ 8 & 4 & -6 \\ \hline 8 & 2 & -4 \end{array}\right] = \frac{4}{2^2}\det\left(\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -8 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{bmatrix} -10 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = -2.$$

Pri tem bi lahko tudi zadnjo determinanto računali po istem pravilu, npr. $1 \cdot ((-10) - (2)(-4)/1) = -2$. Zgoraj je seveda šlo le za ilustracijo metode, med potjo bi lahko še marsikaj poenostavili ali primerneje izbirali elemente.

Zanimiva je zveza, ki jo dobimo iz (13) tedaj, ko so na primer nad elementom $\alpha$ v stolpcu in desno od njega v vrstici same ničle. Po kratkem računu dobimo

$$\det \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{12} \\ u_1^T & \alpha & 0 \\ W_{21} & v_2 & W_{22} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} + v_2 u_1^T/\alpha & W_{22} \end{bmatrix}$$

in podobne zveze, če se ničle glede na parameter $\alpha$ nahajajo levo in zgoraj, levo in spodaj oziroma desno in spodaj. V posebnem, če je element $\alpha$ edini od nič različen element v neki vrstici ali stolpcu dane matrike $A$, dobimo

$$\det(A) = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}.$$

## 4. Računanje determinante z odštevanjem istega števila od vseh elementov

Na koncu omenimo še en preprost postopek računanja determinante, ki je uspešen takrat, ko ima matrika veliko enakih elementov. Označimo s $C$ matriko, ki jo dobimo iz dane matrike $A$ tako, da od vseh elementov odštejemo isto število $\alpha$, torej $c_{ij} = a_{ij} - \alpha$, $i, j = 1, \ldots, n$. Determinanta naše matrike ima potem obliko

$$\det(A) = \begin{vmatrix} c_{11}+\alpha & c_{12}+\alpha & \cdots & c_{1n}+\alpha \\ c_{21}+\alpha & c_{22}+\alpha & \cdots & c_{2n}+\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}+\alpha & c_{2n}+\alpha & \cdots & c_{nn}+\alpha \end{vmatrix}.$$

Upoštevajmo, da je determinanta multilinearna funkcija stolpcev, in izpustimo determinante z vrednostjo 0, ker imajo enaka dva ali več stolpcev. Preostane nam vsota $n+1$ determinant

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \alpha & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} c_{11} & \alpha & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \alpha & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \alpha & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \alpha \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \alpha \end{vmatrix}.$$

Razvijmo zadnjih $n$ determinant po stolpcih, v katerih nastopa zgolj parameter $\alpha$, in izpostavimo skupni faktor, ta je torej pomnožen z vsoto vseh kofaktorjev $K_{ij}^C$ determinante matrike $C$. Prišli smo do zveze

$$\det(A) = \det(C) + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}^C. \tag{15}$$

Vidimo, da bomo uspešni, če bo determinanto matrike $C$ lahko izračunati in če bo kofaktorjev v determinanti matrike $C$ čim manj oziroma bodo čim bolj sorodni. Zgornjo zvezo zasledimo v zbirki [6]. Za zgled izračunajmo determinanti naslednjih dveh matrik reda $n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b & \cdots & b & b \\ b & a_2 & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a_{n-1} & b \\ b & b & \cdots & b & a_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b & x \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ -x & b & \cdots & b & a \end{bmatrix},$$

kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a$, $b$ in $x$ dana števila. Pri prvi matriki naj bo $n \geq 2$, pri drugi pa $n \geq 3$. Če od vseh elementov matrike $A$ odštejemo število $b$, dobimo matriko, ki ima samo po diagonali po vrsti razlike $a_i - b$, $i = 1, 2, \ldots, n$, drugod pa imamo ničle. Determinanto dobljene matrike je lahko izračunati, kofaktorje pa ima od nič različne le k diagonalnim elementom. Iz zveze (15) sledi

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - b) + b \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (a_i - b).$$

Tudi pri matriki $B$ odštejmo povsod število $b$, dobimo matriko, ki ima neničelne elemente samo na glavni diagonali ter na zgornjem desnem in spodnjem levem vogalnem mestu. Samo na teh mestih so tudi neničelni kofaktorji. Če za hip pišemo $z = a - b$, dobimo

$$\det(B) = z^n + (x-b)(x+b)z^{n-2} + \\ + b\big(2z^{n-1} + (n-2)z^{n-3}(z^2 - (b^2 - x^2)) - (x-b)z^{n-2} - (-x-b)z^{n-2}\big).$$

Zamenjamo nazaj $z$ z $a - b$, izraz še uredimo in dobimo:

$$\det(B) = (a-b)^{n-3}\big((a + (n-3)b)(a^2 + x^2) - 2(n-2)ab^2\big).$$

## Sklep

Namen prispevka ni bil obravnavati računanje determinante iz zornega kota numerične analize. S te strani je gotovo med najboljšimi metoda, ki temelji na razcepu matrike na produkt spodnje in zgornje trikotne matrike. Prikazali smo nekaj drugih manj znanih postopkov, ki pa za numerično računanje determinante splošne matrike vsi gotovo niso zanimivi. Morda vseeno za metode iz prvih treh razdelkov povejmo, da so po časovni zahtevnosti enake tradicionalni metodi, ki uporablja razcep matrike. Število potrebnih aritmetičnih operacij za izračun determinante reda $n$ je pri vseh velikostnega reda $n^3$. Natančnejše štetje operacij pokaže, da postopka iz prvega in tretjega razdelka zahtevata približno enako operacij, sicer nekaj več od metode z razcepom matrike, še nekaj več operacij pa zahteva Dodgsonova metoda. Če metodo prvega razdelka za numerično rabo modificiramo tako, da vsakokrat izpostavimo parameter iz izbrane vrstice, preden računamo dvovrstne determinante, pa je število potrebnih operacij skoraj enako kot pri tradicionalni metodi brez pivotiranja. Računanje determinante Hessenbergove matrike je v splošnem smiselno le z metodama iz prvega in tretjega razdelka. Za obe je število potrebnih operacij velikostnega reda $n^2$, kar je enako kot pri metodi, opisani v [1]. Natančneje, omenjena metoda in metoda z izrezovanjem zahtevata celo enako aritmetičnih operacij, metoda iz prvega razdelka pa nekaj več.

## LITERATURA


[1] Z. Bohte, *O računanju determinante*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979), 161–177.

[2] F. C. Chang in C. T. Su, *More on quick evaluation of determinants*, Appl. Math. Comput. **93** (1998), 97–99.

[3] C. L. Dodgson, *Condensation of determinants, being a new and brief method for computing their arithmetical values*, Proc. R. Soc. London **15** (1866–1867), 150–155.

[4] H. Eves, *Elementary matrix theory*, Dover Publ., New York, 1966.

[5] E. Kramar, *On the evaluation of determinants using two order subdeterminants*, Austral. Math. Soc. Gaz. **36** (2009), 201–207.

[6] I. V. Proskurjakov, *Sbornik zadač po linejnoj algebre*, 4. izd., Nauka, Moskva, 1970.