

NEVERJETNA VERJETNOST

DARJO FELDA

Pedagoška fakulteta
Univerza na Primorskem

Math. Subj. Class. (2010): 97-01, 97K50

V prispevku pokažemo na napake pri vpeljevanju verjetnosti v učbenikih za matematiko za deveti razred osnovne šole.

INCREDIBLE PROBABILITY

In the paper, errors in introducing probability in mathematics textbooks for the ninth grade of primary school are shown.

Uvod

Odveč je pripomniti, da je treba učenca uvajati v katerokoli matematično vsebino z veliko mero previdnosti. Jezik, ki ga uporabljamo v procesu učenja in poučevanja, mora biti prilagojen razvojni stopnji učenca, kljub temu pa matematično korekten in nedvoumen. Učbeniki in druga učbeniška gradiva naj bi bili opora samostojnemu učenju in zato namenjeni učencu. Morali bi nuditi jasno in natančno podane matematične pojme in koncepte oziroma usmeritve, a se, žal, vanje prikradejo hude nepravilnosti.

Pri pregledovanju izdelkov, ki jih učenci oddajo na nacionalnem preverjanju znanja matematike, opazamo določene napačne oziroma površne zapise in postopke reševanja matematičnih problemov, za katere bi težko sodili, da so plod samostojnega razmisleka posameznih učencev. Prej nasprotno – izkazujejo se kot plod nekih naučenih pravil in postopkov v procesu učenja in poučevanja matematike, skozi katerega se prebijajo ti učenci.

Za ta prispevek smo se odločili potem, ko smo ob t. i. poizvedbah prejeli od nekaterih šol fotokopije delov učbenikov, s katerimi naj bi se dokazovala pravilnost in popolnost rešitev posameznih nalog, kakor so jih zapisali učenci. Prav te fotokopije so nas spodbudile, da smo natančneje pregledali poglavje o verjetnosti v obeh učbenikih, iz katerih so bili fotokopirani deli uvodnih strani omenjenega poglavja. Gre za učbenika *Kocka 9, matematika za 9. razred osnovne šole* in *Skrivnosti števil in oblik, učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole*.

Verjetnost in učni načrt

Glede na učni načrt za matematiko (glej [4]) se učenci srečajo z verjetnostjo v 9. razredu osnovne šole, čeprav so operativni cilji in vsebine le orientacijsko vezani na določen razred. Lahko bi se torej verjetnost (delno) obravnavala tudi prej v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju. Najbrž je smiselno, da bi se nekatere dejavnosti, vezane na usvajanje verjetnosti, izvajale celo že v nižjih razredih osnovne šole in da bi učenci vstopili v zaključni razred z nekaterimi predhodnimi konkretnimi izkušnjami s slučajnimi dogodki. V nižjih razredih seveda ne gre za poučevanje verjetnosti v strogem matematičnem smislu, pač pa za postopno srečevanje z verjetnostjo ter sprotno spoznavanje in nadgrajevanje pojmov iz verjetnosti ob izvajanjih poskusov, ki so učencem blizu. Pomembno je, da učenci pridobijo pravilne predstave o verjetnosti.

Verjetnost je v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju zapisana pod temo druge vsebine, za katero so opredeljeni nekateri globalni cilji tega vzgojno-izobraževalnega obdobja. Izmed njih se le eden neposredno nanaša na verjetnost, in sicer: *(učenci) na primerih spoznajo statistično verjetnost*. Ustrezni operativni cilji so zapisani v sklopu *Izkušnje s slučajnimi dogodki*, kjer je zapisano, da učenci:

- pridobijo izkušnje o številsko izraženi verjetnosti;
- ocenijo verjetnost s sklepanjem in utemeljevanjem (življenjske situacije);
- izvajajo poskuse (met kocke, met žebličkov, met kovanca, met valja idr.), opazujejo izbrane dogodke, zapišejo izide in napovedujejo verjetnost dogodka;
- izvajajo poskuse in na podlagi analize s kombinatoričnim drevesom napovedujejo izide (npr. met kovanca);
- zberejo, uredijo, analizirajo rezultate poskusa in ob konkretnih primerih (poskusih) spoznajo statistično verjetnost dogodka;
- povežejo pojma statistična in matematična verjetnost ([4]).

Pripadajoče vsebine so podane kot:

pojmi: poskus, dogodek, izid;

dogodek: nemogoč, gotov, slučajen dogodek;

verjetnost dogodka (statistična verjetnost).

Vsi naštetni operativni cilji in vsebine so obvezni.

V učnem načrtu za matematiko so zapisana tudi pripadajoča didaktična priporočila, ki jih povzemamo dobesedno: *Prve izkušnje s pojmi poskus, dogodek, izid in verjetnost dogodka naj učenci pridobivajo skozi izvajanje*

poskusov, kot so met kovanca, met kocke, vrtenje kazalca na vrtavki idr. V poskusu najprej izberejo dogodek in opazujejo (štejejo) ugodne izide za izbrani dogodek. Primer: v poskusu met kocke je lahko izbrani dogodek: „pade pet pik“. Za začetne dejavnosti pripravimo preproste situacije. Če je npr. vrtavka rdeča, je dogodek, da se bo kazalec ustavil na rdeči barvi, gotov dogodek, dogodek, da se ustavi kazalec na beli barvi, pa nemogoč. Verjetnost prvega dogodka je ena, drugega pa nič. Če je vrtavka dvobarvna (pol/pol), je verjetnost dogodka, da se ustavi na eni izmed barv, enaka $\frac{1}{2}$. V poskusu met kovanca je verjetnost dogodka, da „pade cifra“, enaka $\frac{1}{2}$. Verjetnost dogodka, da v poskusu met kocke „padejo tri pike“, pa je $\frac{1}{6}$. Z izvajanjem poskusov si učenci pridobivajo izkušnje z napovedovanjem dogodkov (nemogoč, gotov, slučajni dogodek ...) in njihovih verjetnosti (verjetnost gotovega dogodka je ena, verjetnost nemogočega dogodka je nič, verjetnost slučajnega dogodka pa med nič in ena), pri čemer se zavedajo pomena števila ponovitev poskusa. Osnove napovedovanja dogodkov lahko vpeljemo oziroma povežemo s poznavanjem delov celote (npr. ciljanje v tarčo), pri čemer učenci tudi zapišejo verjetnost dogodka s številom ([4]).

V učnem načrtu ni med standardi znanja omenjen noben standard, ki bi se neposredno navezoval na verjetnost. Niti med naštetimi minimalnimi standardi ni nobenega s področja verjetnosti.

Če pogledamo v učni načrt, sprejet leta 1998 ([3]), ki se mu veljavnost izteka, je področje verjetnosti veliko bolj skopo predstavljeno. V okviru teme *Druge vsebine – obdelava podatkov* je sklop *Izkušnje s slučajnimi dogodki* s ciljem *Pridobiti izkušnje o numerično izraženi verjetnosti*. Po učnem načrtu naj bi se obdelala vsebina, ki obsega pojme: *dogodek, izid; verjetnost (empirični pristop); dogodek: nemogoč, gotov, enako verjeten itd.* Pod specialno didaktična priporočila in dejavnosti je zapisano zgolj: *Učenec/učenka s poskusom ugotovi oz. oceni verjetnost dogodka (pri čemer se zaveda pomena števila poskusov). Na podlagi analize s kombinatoričnim drevesom napove izide.*

Učenje in poučevanje verjetnosti

V naši šolski praksi ima učbenik vlogo, ki mu ne pripada. Veliko učiteljev se namreč pri pouku oziroma načrtovanju pouka pretirano zgleduje po uvajanju vsebin na način, kot je predstavljeno v izbranem učbeniku. Tako se na šolah odločajo za učbenike, ki so „všeč“ učiteljem in so večinoma (pre)bogato opremljeni z različnimi razlagami in dodatki ter „zanimivostmi“, ki večine učencev ne zanimajo, učitelji pa dobijo v njih dovolj informacij za izpeljavo pouka, ki je podrejen tem učbenikom. Namesto da bi učitelji kritično sprejemali, kar jim ponuja učbenik, (pre)mnogokrat neposredno prenašajo učencem informacije iz učbenika in, žal, slepo zaupajo zapisanemu v njem, „ker je učbenik potrjen“. V nadaljevanju si oglejmo nekaj spodrseljavev iz

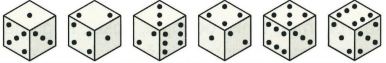
učbenikov za matematiko za 9. razred osnovne šole. Besedilo, ki ga bomo dobesečno povzeli iz učbenikov, bomo zapisali s to pisavo.

Kocka 9, matematika za 9. razred osnovne šole

V verjetnost naj bi vstopili z zgledom: Anja in Jurij sta igrala Človek ne jezi se. Anja je trdila, da bo zagotovo v prvem metu vrgla 6 pik.

Sledi pojasnilo: Anjina trditev temelji na njeni želji, da bi zares že v prvem metu vrgla 6 pik. Met kocke poimenujemo **dogodek**. Mogoč dogodek pri metu kocke je padec 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik. Če pa kocka pokaže 6 pik, kot si je želela Anja, je to **ugoden izid**.

Dodana je še preglednica in zapis pod njo:

Ugoden izid		1
Vsi dogodki		6

Vseh mogočih dogodkov je 6, le eden pa ima za Anjo tudi ugoden izid. Matematična verjetnost, da bo Anja že v prvem poskusu vrgla 6 pik, je torej $1 : 6$ ali $\frac{1}{6}$.

Verjetnost je količnik med številom ugodnih izidov in številom vseh dogodkov.

Kot lahko vidimo, se ponuja izjemno nekorekten vstop v verjetnost. Osnovni pojmi iz verjetnosti, s katerimi naj bi učenci dopolnili matematični jezik, da bi se o verjetnosti pogovarjali in jo spoznavali, so napačno vpeljeni. Met kocke je opredeljen kot *dogodek* namesto kot *poskus*, v nadaljevanju pa učence še zbegamo, saj je glede na opredelitev dogodka razumeti, da je *mogoč dogodek* pri tem *dogodku* (namreč metu kocke) padec 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik, za nameček pa je želeni *mogoč dogodek* (to je padec 6 pik) pri *dogodku* (metu kocke) *ugoden izid*.

Zdi se, da je besedna zveza „mogoč dogodek“ napačno uporabljena namesto besede „izid“. Tako bi morali zapisati: „Izid pri metu kocke je padec 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 pik.“, v preglednici pa namesto zapisa „Vsi dogodki“ uporabiti „Vsi izidi“. Pod preglednico bi morali zapisati: „Vseh izidov je 6, le eden pa je ugoden za Anjo.“ Verjetnosti ne bi smeli navajati v obliki razmerja, definicijo pa bi morali zapisati: „Verjetnost je količnik med številom ugodnih izidov in številom vseh izidov.“

V učbeniku je za tem še primer meta kovanca, ki se navezuje na primer Anje in Jurija z vprašanjem: Kaj pa če bi metala kovanec in želela, da pade podoba? Nadaljuje se analogna „zmešnjava“, vključno s preglednico, v kateri ni naveden pravi ugoden izid – namesto „podobe“ je „številka“. Tako je zapisano: Če bi metala kovanec, bi imela samo dve možnosti, pade lahko podoba ali številka.

Ugodni izidi		1
Vsi dogodki	 	2

Pri metu kovanca sta mogoča samo dva dogodka, ugoden pa je izid, ko kovanec kaže podobo. Od dveh izidov je za nas ugoden en sam, kar matematično zapišemo $\frac{1}{2}$ ali $1 : 2$.

Pri desetiških ulomkih verjetnost lahko predstavljamo v odstotkih. Tako lahko rečemo: verjetnost, da bo kovanec pokazal podobo, je 50 %.

Poudariti je treba, da je verjetnost nenegativno število, ki ni večje od 1. Zapisujemo ga lahko v obliki ulomka ali z odstotki, pa tudi z decimalno številko (npr.: $\frac{1}{8}$, 12,5 %, 0,125), zadnja zapisa včasih zaokrožamo na nekaj decimalk natančno (npr.: $\frac{1}{36}$, 2,78 %, 0,0278). Verjetnost je količnik in ne razmerje, zato zapis v obliki razmerja ni primeren. Pri uvajanju verjetnosti raje povejmo, da je ugoden npr. *en izid izmed dveh* ali *en izid izmed šestih*, kar zapišemo v obliki $\frac{1}{2}$ ali $\frac{1}{6}$.

Zanimivo sta uvedena gotov in nemogoč dogodek: Kadarkoli vržemo kovanec, bo zagotovo padel na eno stran. Dogodek, ki se zagotovo zgodi, imenujemo **gotovi dogodek**. Verjetnost gotovega dogodka je 100 % in jo lahko zapišemo s številom 1.

Verjetnost, da pade številka pri metu kovanca, je torej:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

gotov dogodek verjetnost, da pade podoba

Pri metu kovanca je enaka verjetnost, da pade podoba, kot da pade številka. Ugodna izida sta vedno enako verjetna.

Pri metu kovanca ni možnosti, da bi kovanec ostal v zraku. Dogodek, ki se ne more zgoditi, imenujemo **nemogoči dogodek**.

Po tej razlagi je gotov dogodek pri metu kovanca, da *le-ta pade na eno stran*, nemogoč pa, da *le-ta ostane v zraku*. V pojasnilu k izračunu verjetnosti, da pade številka, je nemarno zapisano, da je število 1 *gotov dogodek* namesto *verjetnost gotovega dogodka*.

Bolje bi bilo, če bi gotov dogodek v tem primeru opisali s „Pade podoba ali številka“ ali „Pade katerakoli stran“, nemogoč pa z „Ne pade ne podoba ne številka“.

Eden izmed zgledov, s katerim naj bi razjasnili nekatere osnovne pojme o verjetnosti, je podan tako:

V vrečki je 6 belih in 9 črnih žetonov.

a) Kolikšna je verjetnost, da na slepo iz vrečke potegnemo črne žetone?

b) Kolikšna je verjetnost, da potegnemo bel žeton?

Takoj opazimo, da prvo vprašanje ni jasno, saj ne vemo, ali *potegnemo vse črne žetone*. Iz postopka reševanja se sicer izkaže, da bi moralo pisati: ... *iz vrečke potegnemo črn žeton*. Iskanje odgovora na prvo vprašanje nas takoj preseneti, saj je zapisano: V vrečki je skupaj 15 žetonov, torej je vseh dogodkov 15. Učenec tako dobi zmotno prepričanje, da je število dogodkov pri poskusih, ko vlečemo žetone ali kroglice iz vrečke, enako številu žetonov ali kroglic v vrečki, kar seveda ne drži. Do odgovora nas vodi zapis: Za nas je ugoden izid, če izvlečemo črn žeton, teh pa je 9. Verjetnost, da potegnemo črn žeton, je torej $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ ali 60 %. Ta sicer napačen premislek je v skladu z zapisom na robu strani učbenika, kjer je povzeta napačna definicija verjetnosti, po kateri število ugodnih izidov delimo s številom vseh mogočih dogodkov, za nameček pa je dodana še „formula“: $\text{verjetnost} = \frac{\text{ugodni izidi}}{\text{vsi dogodki}}$.

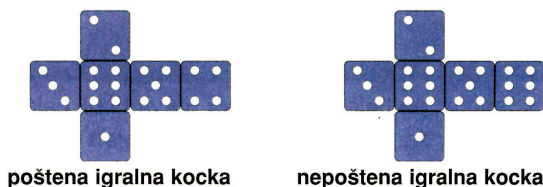
Veliko enostavneje bi bilo, če bi se naslonili na intuicijo in preprosto zapisali: „Ker je 9 izmed 15 žetonov črnih, je verjetnost, da na slepo izvlečemo črn žeton, enaka $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ ali 60 %.“ Za učence je tak razmislek veliko bolj jasan kot pa zapleteno in strokovno oporečno ovinkarjenje.

Nič manj „raztresenosti“ ni v iskanju odgovora na drugo vprašanje: Iz vrečke vedno potegnemo črn ali bel žeton, kar imenujemo gotovi dogodek. Verjetnost gotovega dogodka je vedno 1. Zato lahko verjetnost, da izvlečemo bel žeton, izračunamo kot razliko: $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Na koncu je sicer spodrsrljaj, ki nakazuje na nedoslednost pri „prevajanju“, saj se pojavi kar frnikola: Verjetnost, da iz vrečke na slepo izvlečemo črn žeton, je $\frac{3}{5}$, za belo frnikolo pa $\frac{2}{5}$.

Skrivnosti števil in oblik, učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole

Že v napovedi je zapisano, da bomo v poglavju o verjetnosti med drugim izvedeli, kdaj je dogodek slučajen, kdaj je gotov in kdaj nemogoč, čeprav je najbrž mišljeno, da naj bi izvedeli, kateri dogodek (pri nekem poskusu) je slučajen, kateri gotov in kateri nemogoč.

Ob naštevanju dogodkov, ki se zgodijo v poskusu vrzi pošteno igralno kocko, so po vrsti zapisani standardni elementarni dogodki, zmoti pa zava-jajoča slika, ki naj bi ločevala pošteno igralno kocko od nepošteno.



Kot vemo, *poštenost* običajne igralne kocke pomeni, da se vsak izid zgodi z verjetnostjo $\frac{1}{6}$ oziroma da se po metu kocke vsaka njena mejna ploskev z enako verjetnostjo postavi na „zgornjo stran“. Če je na dveh mejnih ploskvah poštene igralne kocke 6 pik, je pač verjetnost, da pade 6 pik, enaka $\frac{1}{3}$. Morda bi bilo dobro opozoriti, da je predstavljena mreža poštene igralne kocke neobičajna. Običajna igralna kocka ima namreč na nasproti ležečih mejnih ploskvah skupaj 7 pik.

V nadaljevanju srečamo nekaj nedomišljeno oblikovanih povedi, na primer „Če bi imeli v skledi same rumene kroglice, bi bila na slepo izvlečena kroglica vedno rumene barve“ kot opis gotovega dogodka. Če je namreč izvlečena kroglica rumena, je le-ta *vedno rumene barve*, razen če jo prebarvamo ali zbledi. Bolje bi bilo zapisati, da *bi bila na slepo izvlečena kroglica zagotovo rumena* (saj je predpostavljeno, da so v skledi *same rumene kroglice*).

Izrazoslovje je vprašljivo tudi v povedih „Ker so v skledi 4 rumene in 4 bele kroglice, je naključno izvlečena kroglica ali rumene ali pa bele barve. Izbor barve bi bil naključen – slučajen, zato rečemo, da je takšen dogodek **slučajen dogodek**“. Tako ni jasno, kaj slučajen dogodek sploh je – ali je to omenjeni *naključen izbor barve*? Raje bi zapisali: „Ker so v skledi 4 rumene in 4 bele kroglice, je naključno izvlečena kroglica ali rumene ali pa bele barve. Dogodek *Izvlečena kroglica je rumena* se zgodi, če naključno (slučajno) izvlečemo kroglico rumene barve, sicer pa ne. Zato je ta dogodek *slučajen dogodek*. Podobno ugotovimo, da je dogodek *Izvlečena kroglica je bela* slučajen.“

Sledijo še večje nejasnosti, saj popolnoma izgubimo rdečo nit. Po besedilu v učbeniku naj bi namreč verjetnost slučajnega dogodka lahko napovedovali empirično (s poskušanjem) ali teoretično. Avtorji opišejo empirično napovedovanje verjetnosti dobesedno tako: „Opravimo veliko število ponovitev poskusa in si sproti zapisujemo ali se dani dogodek zgodi ali ne. Izračunamo količnik med frekvenco dogodka in številom vseh izvajanj poskusa“, teoretično pa: „Verjetnost slučajnega dogodka poskušamo oceniti, ne da bi v resnici izvedli poskuse. To lahko naredimo v primerih, kjer ni nobenega razloga, da bi se en elementarni dogodek zgodil večkrat kot drugi (met kovanca ali igralne kocke)“.

Precejšnja zmeda je tudi v navedeni *klasični definiciji verjetnosti*, saj je najprej zapisano: „Kadar so posamezni izidi enakovredni glede možnosti, da se zgodijo, je verjetnost slučajnega dogodka količnik med številom ugodnih izidov (m) in številom vseh možnih elementarnih dogodkov (n) v nekem poskusu“, sledi pa formula:

$$P(A) = \frac{\text{število možnih ugodnih dogodkov}}{\text{število možnih elementarnih dogodkov}} = \frac{m}{n}.$$

V učbeniku sledi definicija frekvenca dogodka na posebnem zgledu, čeprav je bil že v opisu t. i. *empiričnega napovedovanja verjetnosti* govor o frekvenci, nato pa popolnoma nekonsistentna definicija relativne frekvenca,

saj je navedeno: „Zapišemo količnik med številom ugodnih izidov za dogodek in številom vseh ponovitev poskusa“, za tem pa ulomek:

$$\frac{\text{frekvenca dogodka}}{\text{številu vseh ponovitev poskusa}},$$

ki je poimenovan relativna frekvenca dogodka in katerega vrednost $\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$ je izračunana za posebni zgled (Pri igri Človek ne jezi se, je Špela 3-krat v 15-tih metih kocke vrgla šestico). Očitno gre za „neločevanje“ med ugodnimi izidi in frekvenco dogodka, pa tudi za nerazumevanje pojma *relativna frekvenca*, saj lahko preberemo razlago „V zapisanem primeru je Špela opravila le 15 ponovitev poskusa. Če se želimo približati točni vrednosti za relativno frekvenco, moramo izvesti veliko večje število poskusov (npr. tisoč)“ in še poseben povzetek „Relativna frekvenca je količnik med številom ugodnih izidov za dogodek in številom vseh ponovitev poskusa. Računamo jo le pri enakovrednih dogodkih. Relativna frekvenca določa teoretično verjetnost.“

Pa smo pred dilemo: najprej je bilo teoretično napovedovanje verjetnosti opisano z „Verjetnost slučajnega dogodka poskušamo oceniti, ne da bi v resnici izvedli poskuse“, čeprav ni bilo pojasnjeno, kako to dejansko napravimo, iz tega povzetka pa naj bi teoretično verjetnost določali z relativno frekvenco. Ali gre za isti pojem?

Niti z rešenima primeroma si pri razjasnjevanju pojmov ne moremo pomagati, prej nasprotno. Že besedilo prvega primera je nejasno in matematično sporno. Tako gre:

Mečem dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik na obeh kockah 5?

- a) Opravi 100 poskusov in ugotovi, kolikokrat je ugoden izid.
- b) Nariši kombinatorično drevo za vse možne izide.
- c) Določi verjetnost dogodka na osnovi meritev.
- č) Določi relativno frekvenco in napovej teoretično verjetnost.
- d) Primerjaj, ali si se pri izvajanju poskusa približal teoretični verjetnosti.

Kdor je usvojil prave verjetnostne pojme in koncepte, najbrž ne zna rešiti naloge. Porajajo se mu vprašanja: Zakaj je treba opraviti 100 poskusov, da bi ugotovili, kolikokrat je ugoden izid in kateri izid sploh? Kako naj določimo verjetnost dogodka na osnovi meritev – katerih meritev, kaj naj merimo? Kako z relativno frekvenco napovemo teoretično verjetnost – kaj sploh je teoretična verjetnost? Če relativna frekvenca določa teoretično verjetnost, ni kaj napovedovati. Kako naj primerjamo, ali smo se pri izvajanju poskusa približali teoretični verjetnosti?

Poglejmo rešitev primera, kakor je navedena v učbeniku:

a) opravimo poskuse, število padlih pik zapišemo v preglednico in obarvamo stolpec, če je vsota pik na obeh kockah 5.

Sledi preglednica v 4 delih, ni pa nikakršnega pojasnila. Nemara je treba prešteti, koliko stolpcev je obarvanih, a na ta način preštejemo, da se je ome-

njeni dogodek zgodil 12-krat, ne izvemo pa, kako *ugotovimo, kolikokrat je ugoden izid*. Pozoren bralec bi sicer našel napako že v barvanju stolpcev, saj eden izmed stolpcev v tretjem delu preglednice ni obarvan, čeprav v njem nastopata števili 4 in 1.

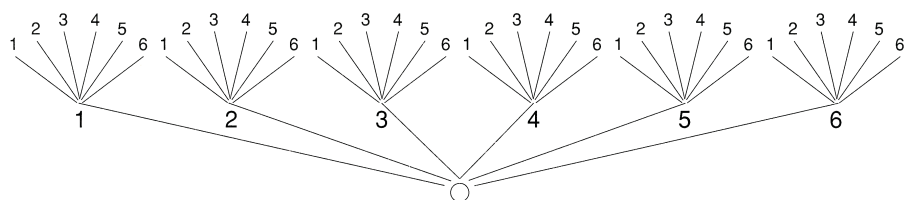
št. pik 1. kocke	1	6	3	5	5	3	4	4	6	6	5	2	4	6	3	6	4	1	4	3	1	3	4	2	6
št. pik 2. kocke	1	1	4	5	6	2	3	6	3	2	2	3	6	2	5	1	5	1	5	2	1	2	1	3	6

št. pik 1. kocke	2	1	6	1	6	4	6	1	4	1	5	4	4	4	4	2	3	5	2	2	6	5	2	2	5
št. pik 2. kocke	1	1	2	5	3	4	3	1	1	5	6	2	3	5	4	5	3	3	5	3	4	2	6	4	2

št. pik 1. kocke	6	3	1	3	6	6	4	3	5	3	4	1	2	5	3	6	2	5	4	5	2	4	3	3	6
št. pik 2. kocke	2	4	4	2	3	4	5	3	5	1	6	1	4	1	4	4	4	2	1	4	6	1	3	4	5

št. pik 1. kocke	3	5	3	4	6	2	6	1	5	1	4	4	4	6	3	1	1	5	1	1	4	2	4	6	5
št. pik 2. kocke	1	1	1	6	2	6	6	5	4	4	2	3	3	4	1	1	1	4	2	3	3	6	4	1	5

b) narišemo kombinatorično drevo vseh možnosti za met dveh kock. Vidimo, da je vseh možnosti 36.



c) Vsota 5 pik je padla 12-krat v 100 poskusih, zato je verjetnost na osnovi meritev

$$P(A_m) = \frac{12}{100} = 0,12 = 12 \%$$

Glede na rešitev je torej *verjetnost dogodka na osnovi meritev* pravzaprav kar relativna frekvenca in ni jasno, zakaj je tako poimenovana.

č) Ugodne možnosti za vsoto 5 pik so štiri: 1, 4 2, 3 3, 2 4, 1. Izračunamo relativno frekvenco $P(A) = \frac{4}{36} = 0,1\bar{1} \doteq 11,1 \%$.

Tu ni kaj dodati, saj je v resnici izračunana verjetnost po klasični definiciji, ki jo avtorji napačno imenujejo relativna frekvenca.

d) Izračunamo; kolikšen del teoretične verjetnosti je verjetnost pri merjenju. $P(A_m) = \frac{12}{100}$ $P(A) = \frac{4}{36}$ $\frac{12}{100} : \frac{4}{36} = 1,08 = 108 \%$ Teoretična verjetnost se od dejansko izmerjene verjetnosti razlikuje za 8 %.

Verjetno si to znajo razložiti le pisci učbenika. Če privzamemo, da je $P(A_m)$ verjetnost pri merjenju, pa karkoli že to je, je torej $P(A)$ teoretična

verjetnost, da smo lahko izračunali, kar je zahtevano pod d). Pod č) je isti $P(A)$ imenovan *relativna frekvenca* ...

Oglejmo si še drugi primer:

Rok je v zrak hkrati metal dva kovanca za 50 centov, Špela pa je v tabelo zapisovala dogodke, ki so se pri tem zgodili.

a) dogodek A : na obeh kovancih pade Triglav

b) dogodek B : na obeh kovancih pade številka

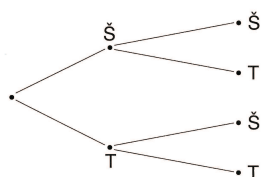
c) dogodek C : na enem od kovancev pade Triglav, na drugem pa številka



Poskus sta ponovila stokrat.

Z računanjem verjetnosti ugotovi, ali sta se pri izvajanju poskusa približala pričakovanim rezultatom.

Pred samo rešitvijo primera je v učbeniku dodano:



Š = številka, T = Triglav



POZOR!

Če opravimo premajhno število poskusov, se rezultati meritev razlikujejo od teoretične verjetnosti dogodka.

Vse možne rešitve so 4.

številka – številka	številka – Triglav	Triglav – številka	Triglav – Triglav
+++ +++ +++ +++	+++ +++ +++ +++	+++ +++ +++ +++ +++	+++ +++ +++ +++ +++

Seveda se takoj vprašamo, o katerih rešitvah je govor; najbrž so mišljeni izidi pri metu dveh kovancev. Iz preglednice naj bi razbrali, kolikokrat se je zgodil posamezni izid. Nekoliko nejasno je, kako je Špela vedela, na katerem kovanecu je padla številka, če nista na obeh kovancih padli številki – ali sta bila kovanca označena? Pozoren bralec opazi, da je namesto besede *številka* napačno uporabljena beseda *števka*.

Naj navedemo le rešitev a), kot je zapisana v učbeniku, drugi dve sta rešeni analogno.

Rešitev:

a) Izračunamo verjetnost za dogodek A : $P(A) = \frac{1}{4} = 0,25$.

ugoden
dogodek

možni
dogodki

Izmerjena verjetnost dogodka A : $P(A_m) = \frac{28}{100} = 0,28$.

Pri izvajanju poskusa A Rok in Špela nista dobila pričakovanega rezultata. Verjetnost pri meritvah je 112 % ($0,28 : 0,25$) izračunane verjetnosti, torej sta se zmotila za 12 %.

Spet ostanemo brez besed, zlasti ob dodatku ... *sta se zmotila za* ... Zelo nenavadne so tudi nekatere naloge za vajo. Navedimo dve:

Zapiši vse možne dogodke za vsak poskus.

- a) Rok obiskuje pouk
- b) učiteljica pisno ocenjuje
- c) Špela naključno izbere osebo iz njene nivojske skupine

Če ne „pokukamo“ v rešitve, bi stežka uganili, kateri so vsi možni dogodki za poskus *Rok obiskuje pouk*. A rešitev je sila preprosta: Rok je pri pouku, Rok ni pri pouku. Sedaj bi morda bralec naštel tudi vse možne dogodke za poskus *učiteljica pisno ocenjuje*.

Iz kupa 32 igralnih kart (komplet vsebuje 4-krat: kralj, dama, fant, as, 10, 9, 8, 7) 100-krat na slepo izvleci eno karto, jo poglej, zapiši, katera je, in karto vrni.

- a) v razpredelnico zapisuj vse dogodke
- b) izračunaj verjetnost za dogodek A: izvlečena karta je kralj
- c) na osnovi podatkov v razpredelnici izračunaj, kolikokrat se je zgodil dogodek A
- č) za koliko se razlikujeta rezultata pri b in c?

Reševalec je pred dilemo, ali naj po vrsti zapisuje vse dogodke, ki se lahko zgodijo, če izvlečemo karto iz kupa 32 kart, ali naj sproti zapisuje, kateri dogodek se je dejansko zgodil pri posamezni ponovitvi poskusa. Pod točko b je najbrž mišljena ena izvedba poskusa, ni pa jasno, kaj pravzaprav pove razlika rezultatov pri b in c oziroma zakaj primerjamo verjetnost dogodka A s frekvenco tega dogodka pri 100 ponovitvah poskusa.

Nasploh je v opisanem delu toliko protislovij in nekorektno vpeljanih pojmov, da bi bilo treba vse pojme uvesti povsem na novo in sistematično ter se pri tem opreti na neki „znani“ poskus, na primer met (poštene igralne) kocke. Frekvenco dogodka in relativno frekvenco dogodka bi morali navezati na število ponovitev poskusa, statistično verjetnost dogodka pa bi opredelili z relativno frekvenco pri dovolj velikem številu ponovitev poskusa. Pri matematični (klasični) verjetnosti bi si lahko pomagali s preglednico, kot je podana v prej omenjenem učbeniku *Kocka 9*, le da je treba besedno zvezo „Vsi dogodki“ zamenjati z „Vsi izidi“. V nadaljevanju bi morali biti primeri in naloge za vajo podani konsistentno in strokovno pravilno, prvi primer bi zapisali na primer:

Mečem dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost dogodka „Vsota pik na obeh kockah je enaka 5“?

- a) *Nariši kombinatorično drevo za vse možne izide.*
- b) *Določi matematično verjetnost omenjenega dogodka.*
- c) *Opravi 100 poskusov in preštej, kolikokrat se je zgodil omenjeni dogodek.*
- č) *Določi relativno frekvenco omenjenega dogodka.*
- d) *Primerjaj matematično verjetnost z relativno frekvenco.*

Rešitve primerov bi morale biti opremljene s koristnimi komentarji, ki bi bili učencu v pomoč pri utrjevanju posameznih pojmov iz verjetnostnega računa.

Sklep

Naj poudarimo, da ni bil naš namen kakorkoli soditi o „potrjenih“ učbenikih za osnovno šolo. Dotaknili smo se le poglavja o verjetnosti iz tistih dveh učbenikov, katerih fotokopirane strani je prejela predmetna komisija za matematiko, ki pripravlja gradivo za izvedbo nacionalnega preverjanja znanja matematike in oblikuje navodila za vrednotenje izdelkov učencev. Bralec lahko že iz dobesedno povzetih besedil presodi, da niti uporabljeni jezik ni najboljši. Primeri, s katerimi naj bi učenci vstopili v verjetnost, so dovolj elementarni in zato primerni za seznanitev z osnovnimi pojmi, a se, žal, ti pojmi uvajajo nepravilno in nekorektno. Učenci zato usvojijo napačne začetne pojme iz verjetnosti, sposobnejši pa najbrž opazijo neložične povezave med navedenimi definicijami in upati je, da pridejo do pravih informacij.

Seveda nas mora skrbeti, če se učenci naučijo izkrivljene matematične koncepte, saj z njimi lahko dosežejo kvečjemu matematično polpismenost in zelo luknjičave strategije reševanja (realističnih) problemov. Učitelji bi morali opozoriti učence na vsako napako v učbeniku in jih poučiti, kako je pravilno. Ker so učbeniki v t. i. učbeniških skladih, bi bilo treba ob prvi uporabi učbenikov vsaj označiti nepravilnosti. Sicer pa je skoraj neverjetno, da se lahko besedila s toliko nejasnosti ter strokovnih nepravilnosti in nekorektnosti sploh znajdejo v učbenikih.

LITERATURA

- [1] J. Berk, J. Draksler in M. Robič, *Skrivnosti števil in oblik, učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole*, Rokus Klett, Ljubljana, 2010.
- [2] M. Dornik, T. Smolej, M. Turk in M. Vehovec, *Kocka 9, matematika za 9. razred osnovne šole*, Modrijan, Ljubljana, 2008.
- [3] G. Tomšič, M. Cotič, Z. Magajna in A. Žakelj, *Učni načrt: program osnovnošolskega izobraževanja. Matematika*, Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport : Zavod RS za šolstvo, Ljubljana, 2002.
- [4] A. Žakelj et al., *Program osnovna šola – matematika – učni načrt*, Ministrstvo za šolstvo in šport : Zavod RS za šolstvo, Ljubljana, 2011.

<http://www.obzornik.si/>