Kako daleč je obzorje?

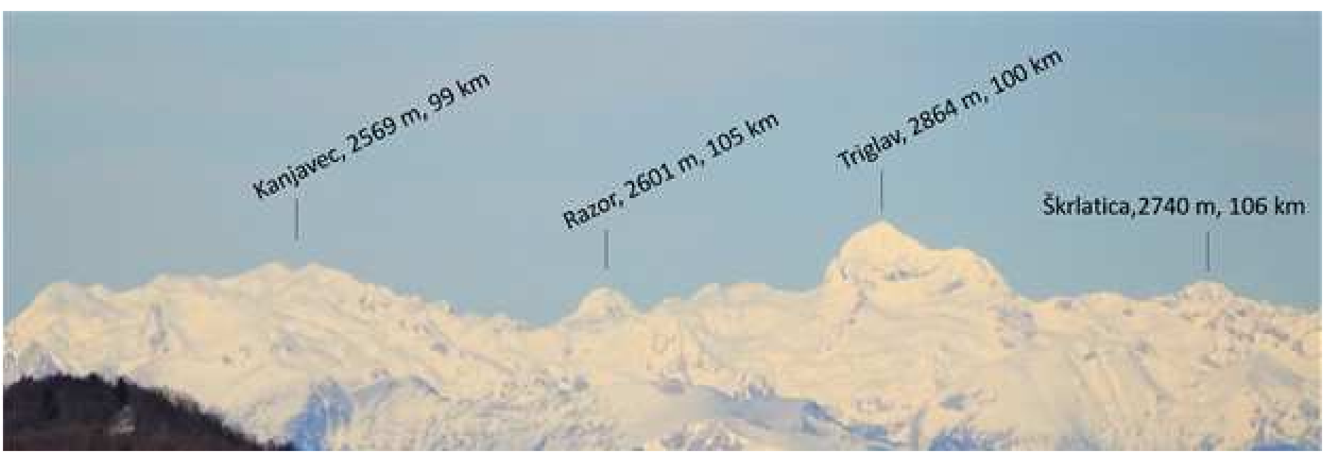
Iztok Tiselj

V tem sestavku bomo pogledali, kako daleč je v Sloveniji in njeni okolici najbolj oddaljen vrh na obzorju. Za izhodiščno točko si izberem Snežnik. Na spletni strani `www.peakfinder.org` kot razgledno točko vpišemo Veliki Snežnik in na zaslonu se pojavi skica 360 stopinjske panorame.

Na severu poiščemo Triglav in ugotovimo, da je od Snežnika oddaljen natančno 100 km (morda le par sto metrov manj). Razdalja med Snežnikom in Triglavom tako služi kot uporabna ocena za vidljivost, ki jo lahko preverimo tudi brez planinarjenja s pomočjo jugo-vzhodno usmerjene spletne kamere na Kredarici pod Triglavom, za katero skrbijo meteorologi. Če nad zahodno Slovenijo ni oblakov, se v daljavi skoraj zagotovo vidi Snežnik, izjema so morda le soparni poletni dnevi, ko kljub jasnemu vremenu vidljivost pade pod 100 km. Na sliki 1 je tipičen zimski pogled na Triglav in njegove sosede s poti med Sviščaki in Snežnikom. Fotografija na sliki 1 je narejena 24. decembra 2019 z drobnim žepnim fotoaparatom, ki zmore 20-kratno povečavo. Na sliki so višine označenih gora v metrih ter razdalje do njih v kilometrih. Snežnik in Triglav sta označena tudi na zemljevidu Slovenije in okolice na sliki 4.

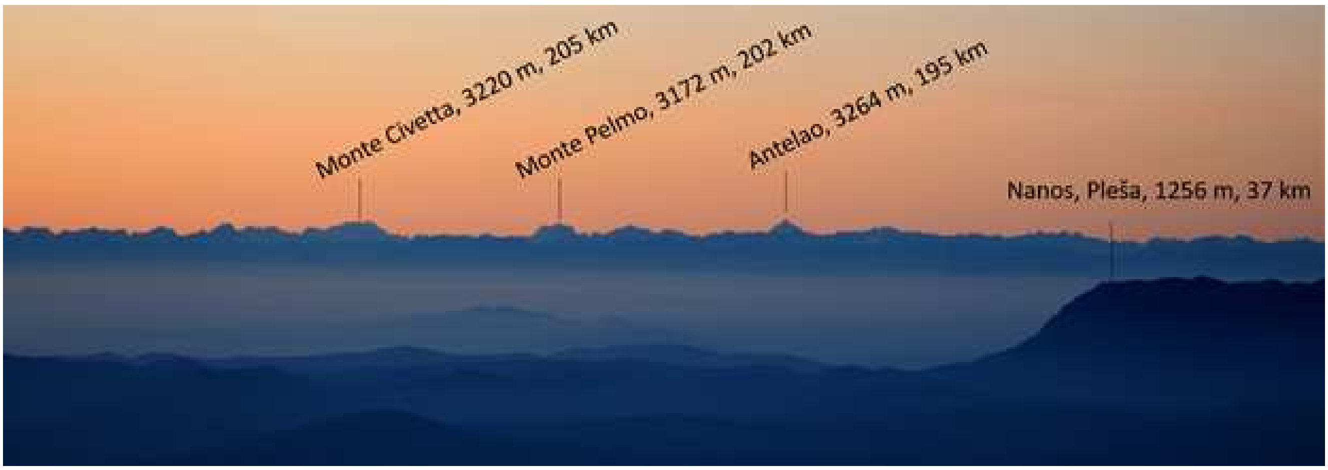
Kaj pa večje razdalje? Za 200 kilometrske razglede s Snežnika so primerne predvsem zime. Vzhodno od Triglava in levo od Nanosa na sliki 2 štrlijo v nebo vršaci italijanskih Dolomitov. Poleti jih, celo ob jasnem vremenu, preko dneva vidimo bolj poredko. Pozimi pa jih pogosto opazimo že podnevi, posebej izrazite pa postanejo njihove silhuete po sončnem zahodu, ko se zimsko sonce sprehaja pod njihovim obzorjem. Fotografija na sliki 2 je narejena konec decembra 2018 s polprofesionalnim fotoaparatom.

Če na spletni strani `www.peakfinder.org` podrobneje pogledamo še razgled s Snežnika na jug,



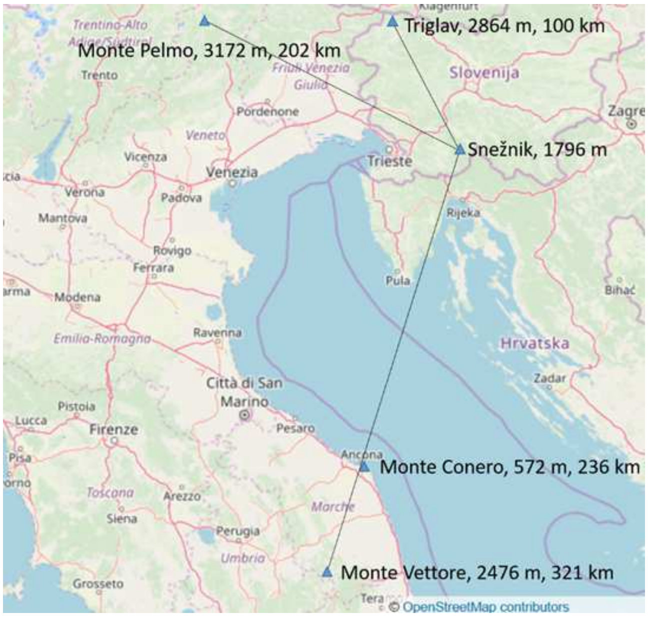
SLIKA 1.
100 kilometrski pogled. Triglav s poti Sviščaki-Snežnik z nadmorske višine okoli 1400 m

ugotovimo, da nam spletna stran obljublja pogled preko Jadranskega morja na hribe na Apeninskem polotoku, ki so oddaljeni več kot 300 km. Da pa sem obljubljeni pogled prek Jadranskega morja dočakal tudi v živo, sem v zadnjih treh zimah potreboval šest večernih vzponov na Snežnik – vse v dneh, ko so meteorologi tako nad Slovenijo kot tudi nad Jadranom in srednjo Italijo napovedali jasno vreme. Verjetno bi meteorologi lahko pojasnili, zakaj sem bil 24. decembra 2019 nagrajen s pogledom na Apenine in v čem se je ta večer razlikoval od preostalih, ko med otokom Cresom in vzhodno obalo Istre kljub jasnemu vremenu nisem videl ničesar. Na sliki 3 sem s pomočjo peakfinder-ja označil nekaj vrhov na drugi strani Jadrana oddaljenih od 230 do 320 km ter dva vrhova v hrvaški Istri. Fotografiji sta narejeni z žepnim fotoaparatom. Iz zemljevida na sliki 4 je razvidno, da skoraj 2500 metrov visoko goro Monte Vet-



SLIKA 2.
200 kilometrski pogled s Snežnika na italijanske Dolomite (foto: T. Kastelic)

SLIKA 3.
300 kilometrski pogled na Apenine izpod Srednjega Snežnika z višine okoli 1700 m



SLIKA 4.

Razgledi s Snežnika, smeri fotografij s slik 1, 2, in 3. (zemljevid: www.openstreetmap.org)

tore gledamo praktično čez pristaniško mesto Ancona, nad katerim se nahaja 572 m visok hrib Monte Conero, ki je označen na levem robu fotografije na sliki 3.

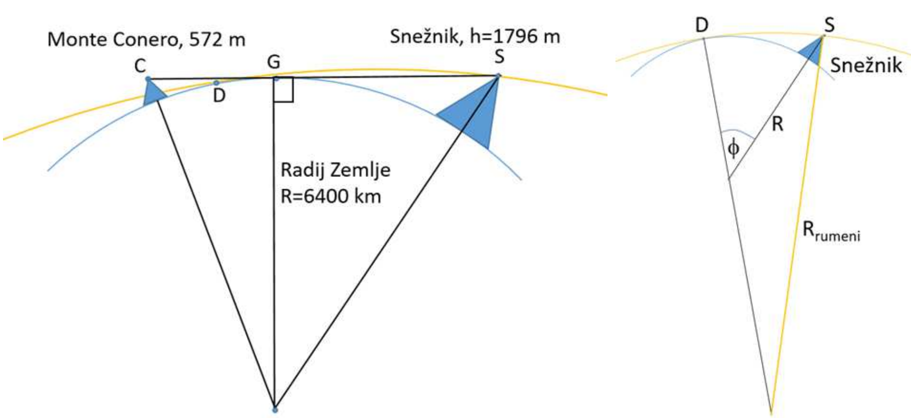
Zdaj pa je na vrsti nekaj matematike in nato še nekaj fizike. S pomočjo skice na sliki 5 s Pitagorovim izrekom izračunamo geometrijsko oddaljenost obzorja za razgled s Snežnika na Jadransko morje. Na skici je ta razdalja dolžina daljice med točkama S in G. Po Pitagorovem izreku bo plavalec na 0 metrih nadmorske višine, ki bo iz Ancone plaval v smeri Snežnika, zagledal vrh, ko se mu bo približal na razdaljo

$$\overline{SG} = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \approx \sqrt{2Rh} = 152 \text{ km}. \qquad (1)$$

Za Monte Conero, ki je visok 572 m, je geometrijsko obzorje (dolžina daljice CG na sliki 5) oddaljeno 85 kilometrov. Višini obeh hribov na sliki 5 sta seveda močno povečani v primerjavi s polmerom Zemlje.

Če obe razdalji do obzorja seštejemo, dobimo vsoto $\overline{CG} + \overline{SG} = 237$ kilometrov, kar je le kilometer več od izmerjene razdalje med obema vrhoma, zapisane na sliki 3. To pomeni, da bi bil po Pitagorovem izreku z vrha Snežnika hrib Monte Conero neviden, saj daljici CG in SG ležita praktično na isti tangenti na zemeljsko krožnico. Nad obzorje bi morala štrleti kvečjemu drobna pika, ki bi jo morda videli s kakšnim teleskopom. Če pa pogledamo spodnjo fotografijo na sliki 3, je Monte Conero precej dobro viden in nad obzorje štrli kar precejšen del hriba. Da bo zadeva še bolj sumljiva, je potrebno povedati, da sta fotografiji na sliki 3 posneti pod vrhom Snežnika s kakšnih 1700 metrov nadmorske višine. Veter na vrhu je bil namreč tako močan in moji prsti tako premrli, da kljub vnetemu pritiskanju na moj mali fotoaparat s samega vrha nisem prinesel nobene uporabne fotografije. Je torej kaj narobe z radijem Zemlje ali morda celo s Pitagorovim izrekom?

Pojasnilo tega pojava bo verjetno razočaralo tiste, ki bi želeli s fotografijama na sliki 3 dokazovati teorijo o ploščati Zemlji. Prav nič ni narobe z radi-



SLIKA 5.

Daljica SG – geometrijsko obzorje s Snežnika, krožni lok SD – dejansko obzorje.

jem Zemlje in še manj s Pitagorovim izrekom. Lom svetlobe v ozračju je kriv, da je dejanska oddaljenost obzorja nekoliko večja od geometrijske razdalje, ki jo napove Pitagorov izrek. Pri fiziki smo zrak največkrat obravnavali kot sredstvo z lomnim količnikom 1, kar pa ni čisto res: lomni količnik zraka n je nekoliko večji od 1 in se zmanjšuje z nadmorsko višino, ko se gostota zraka manjša. Za spodnjih nekaj kilometrov atmosfere lahko brez prevelike izgube natančnosti predpostavimo, da gostota zraka z višino h pada linearno, zato linearno pada tudi lomni količnik. Namesto računanja gostote iz enačb adiabatne atmosfere sem vrednosti gostote ob morju $1{,}225\,\mathrm{kg/m^3}$ in na 2 km nadmorske višine $1{,}007\,\mathrm{kg/m^3}$ prebral kar s spletne strani `www.engineeringtoolbox.com/standard-atmosphere-d_604.html`. Od tod sledi približek

$$n = 1 + 2{,}9 \cdot 10^{-4}(1 - h(km)/11{,}5km). \qquad (2)$$

Tako je lomni količnik zraka ob morju $n = 1{,}00029$ in na Snežniku 1,00025. Zato se žarek svetlobe, ki začne svojo pot nekje na pobočju hriba Monte Conero pod geometrijskim obzorjem opazovalca na Snežniku, lomi na optično redkejšem zraku na višjih nadmorskih višinah. Žarek potuje po ukrivljeni poti, ki jo približno nakazuje rumeni lok na sliki 5, ter konča svojo pot na vrhu Snežnika. Tudi žarek, ki potuje v nasprotni smeri, ubira popolnoma enako pot.

Bralci, ki še ne poznajo diferencialnega računa, in tisti, ki niso razpoloženi za predolge izpeljave, lahko spodnji del besedila preskočijo in nadaljujejo branje pri enačbi (4). Za ostale pa izpeljimo približni polmer rumenega loka na sliki 5.

Izhajamo iz lomnega zakona, ki ga poznamo v obliki

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2,$$

ko obravnavamo prehod svetlobe iz ene gostote v drugo. V ozračju, kjer se lomni količnik spreminja zvezno, pa zato velja, da je vzdolž poti žarka

$$n \sin\alpha = \text{konst.}$$

Namesto kota α glede na normalo na (bolj ali manj horizontalne) zračne plasti raje obravnavajmo strmino žarka, to je kot β glede na horizontalo, ki ga kaže slika 6. Torej velja

$$n \cos\beta = \text{konst.}$$

Zanima nas, kako se spreminjata n in β, ko žarek preide iz plasti z lomnim količnikom n v plast s količnikom $n + dn$ na sliki 6. Kdor zna izračunati diferencial te enačbe, hitro ugotovi, da je

$$dn \cos\beta - n \sin\beta d\beta = 0 \quad \text{ali} \quad dn = n \operatorname{tg}\beta d\beta.$$

Recimo, da gre iz neke točke žarek navzdol pod kotom β, kot kaže slika 6. Vzdolž poti s se n poveča za dn/ds, zato iz zgornjega diferenciala sledi

$$\frac{dn}{ds} = n \operatorname{tg}\beta \frac{d\beta}{ds}. \qquad (3)$$

Iz slike 6 je razvidno tudi, da je $d\beta/ds$ v enačbi (3) povezan z radijem rumene krožnice, po kateri potuje žarek na sliki 5. Velja

$$ds = R_{\text{rumeni}} d\beta \quad \text{oziroma} \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{R_{\text{rumeni}}}.$$

Če upoštevamo še zvezo med diferencialom poti ds in diferencialom višine dh, ki jo tudi razberemo s slike 6: $dh = \sin\beta ds$, lahko ta radij iz enačbe (3) tudi izračunamo:

$$R_{\text{rumeni}} = n \cdot \operatorname{tg}\beta / \frac{dn}{ds} = \frac{n}{\cos\beta} / \frac{dn}{dh}.$$

Za žarke v tem prispevku velja, da je $\beta \approx 0$. Lomni količnik se z višino spreminja po enačbi (2), iz katere sledi $dn/dh = 2{,}9 \cdot 10^{-4}/11{,}5$ km. Iz teh podatkov izračunamo, da žarki v spodnjih kilometrih atmosfere potujejo približno po krožnicah z radijem okoli sedemkrat večjim od radija Zemlje $R_{\text{rumeni}} = 44\,000$ km. Zgornja izpeljava je podobna opisu loma zvočnih valov v ozračju v Preseku **29** (2001/2002), 40–46, podrobno izpeljavo pa je mogoče najti tudi na spletni strani `www.mathscinotes.com` pod iskalnim pojmom »distance to horizon«.

Z nekaj truda iz znanega radija R_{rumeni} lahko izračunamo še razdaljo do obzorja. Če za trikotnik, ki ga oklepajo središče Zemlje, središče rumene krožnice in vrh Snežnika na sliki 5 desno zapišemo kosinusni izrek

$$\begin{aligned} R^2_{\text{rumeni}} = {} & (R_{\text{rumeni}} - R)^2 + (R + h)^2 - \\ & - 2(R_{\text{rumeni}} - R)(R + h)\cos(\pi - \phi), \end{aligned}$$

lahko od tu izračunamo velikost kota ϕ. Če pri tem upoštevamo, da je kot ϕ zelo majhen in zato velja

$\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$, ter $R_{\text{rumeni}} >> h$ in $R >> h$, pridemo do približne enačbe (izpeljava je prepuščena bralcu) za razdaljo do obzorja.

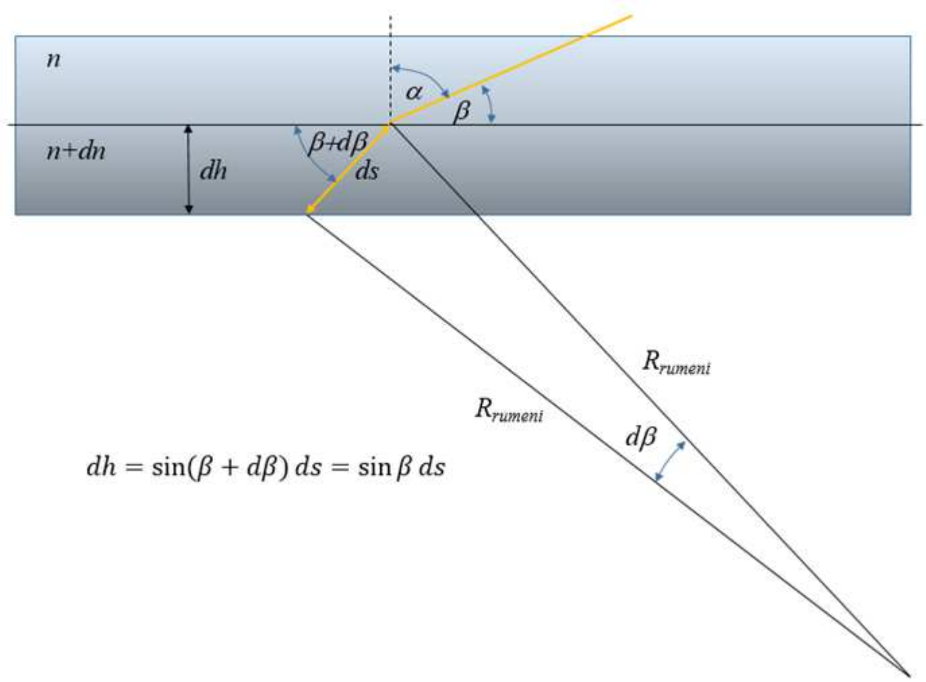
Za pogled z vrha Snežnika je razdalja do dejanskega obzorja (točka D na skici 5)

$$\overline{SD} = \sqrt{\frac{2Rh}{1 - \frac{R}{R_{\text{rumeni}}}}}. \qquad (4)$$

Vidimo, da je enačba podobna enačbi (1), popravek pod ulomkom pa je nekoliko odvisen od vremena. Faktor $R/R_{\text{rumeni}} = 1/7$ velja za t. i. standardno atmosfero, v kateri temperatura pada za 11 °C na vsak kilometer nadmorske višine. Približno tolikšen popravek upošteva tudi spletna stran `www.peakfinder.org`.

S tem popravkom se razdalja s Snežnika do obzorja poveča iz $SG = 152$ km na $SD = 164$ km, z Monte Conero pa na 94 km. S pomočjo popravljene enačbe lahko ocenim tudi, da je prek Jadranskega morja videti približno zgornjih 200 metrov vrha hriba Monte Conero ter zgornjih 700 do 800 metrov gore Monte Vettore. Te številke se kar dobro ujemajo z ročnim merjenjem razdalj na fotografijah slike 3, kjer sem iz znanih horizontalnih razdalj med vrhovi ocenil vidno višino obeh vrhov. Fotografiji sem torej posnel v vremenskih pogojih, ki približno ustrezajo standardni atmosferi.

Za konec še kazalec na menda najdaljšo fotografirano razdaljo na planetu. Z vrha Pic de Finistrelles (2826 m) v Pirinejih med Francijo in Španijo se tik pred sončnim vzhodom na vzhodu lahko vidi okoli 400 kilometrov oddaljene alpske vrhove nad Grenoblom blizu francosko-italijanske meje. Fotografijo sem zadnji dan leta 2019 našel na spletnem naslovu `9gag.com/gag/a7Mxmez`. Naj omenim, da pri tako ekstremnih oddaljenostih »peakfinder« odpove. Po pogovoru z avtorjem programa sem dobil informacijo, da je njegov trenutni domet nastavljen na približno 320 km, povečevanje dometa po njegovih besedah zelo hitro (eksponentno) povečuje računsko zahtevnost programa. Na spletu sem nato našel še stran `www.udeuschle.de`, na kateri lahko generiramo panoramo z izbrane točke s poljubno nastavljenim dometom. Ta spletna stran pravi, da je najbolj oddaljen vrh, ki ga s Snežnika lahko vidimo ob izjemni vidljivosti, 354 km oddaljeni in 2912 metrov visoki Corno Grande, najvišji vrh Apeninov. Njegova fotografija s Snežnika pa naj ostane izziv za prihodnje planince in fotografe.



SLIKA 6.
Lom svetlobe pri prehodu iz plasti z lomnim količnikom n v plast s količnikom $n + dn$.

× × ×