

R. ✓
Odr ✓
(46573)

10921/25



Jan. 7. 1945

Univerza Edvarda Kardelja v Ljubljani
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO
VTO MATEMATIKA IN MEHANIKA

Vito Lampret

SPEKTER IN NUMERIČNI ZAKLAD ELEMENTA REALNE ALI
KOMPLEKSNE NORMIRANE ALGEBRE (BREZ ENOTE)

Disertacija

Ljubljana 1982

Math. Subj. Class. (1980)

46 H 99

Delo obravnava spekter in numerični zaklad realne ali kompleksne normirane algebre, ki je lahko tudi brez enote, a je večinoma asociativna.

Opisan je odnos med spektrom in numeričnim zakladom ter med spektralnim radijem, numeričnim radijem in normo. Študirane so lastnosti poševno-hermitskih in hermitskih elementov ter pozitivnih in normalnih elementov. Obravnavana je algebrska struktura linearne prostora $H(A) + iH(A)$ ter njegova povezava z involutivnimi normiranimi algebrami. Na koncu je danih nekaj preprostih primerov, ki osvetlijo spekter in numerični zaklad elementa kompleksne oz. realne asociativne B-algebre. Ti primeri tudi pokažejo kakšne anomalije v zvezi z numeričnim zakladom in hermitskimi elementi lahko nastopajo v kompleksni asociativni normirani algebri, ki ima lahko enoto ali pa je brez nje.

ABSTRACT

The work deals with spectrum and algebra numerical range of an element of a real or complex normed algebra which may be without a unit.

It describes the relationship between spectrum and numerical range and characterizes skew-hermitian elements of a real algebra as well as hermitian and positive elements of a complex normed algebra. Hermitian and $\ast$ -hermitian elements are treated with respect to involutive normed algebras. The attention is drawn to the properties of all the above mentioned elements and also to normal elements of a complex normed algebra.

The main tool in this work is the complexification of a real algebra and the non-standard adjunction of a unit to a normed algebra.

The given examples explain relations between spectrum and numerical range and show certain irregularities which may occur in connection with spectrum, numerical range and hermitian elements. This may happen in case an algebra is without a unit or the norm of an eventual unit is $\neq 1$. There exists for example a complex associative commutative B-algebra without a unit including a sequence h_n of hermitian elements such that $\|\sin h_n\| > n$ ($n \in \mathbb{N}$).

V S E B I N A

0.	UVODNO POGLAVJE (polnormirane algebre, eksponentna funkcija, kompleksifikacija realne normirane algebre, formalna adjunkcija enote)	1 - 9
1.	SPEKTER	10 - 23
2.	NUMERIČNI ZAKLAD	24 - 48
3.	SPEKTRALNI RADIJ IN NUMERIČNI RADIJ	49 - 62
4.	DISIPATIVNI ELEMENTI	63 - 65
5.	POŠEVNO-HERMITSKI ELEMENTI	65 - 76
6.	HERMITSKI ELEMENTI	77 - 87
7.	POZITIVNI ELEMENTI	88 - 91
8.	PROJEKTORJI	92 - 93
9.	NORMALNI ELEMENTI	94 - 101
10.	PROSTOR $J(A) = H(A) + iH(A)$	102 - 106
11.	DVOSTRANSKI ELEMENTI	107 - 108
12.	INVOLUTIVNE NORMIRANE ALGEBRE	109 - 112
13.	PRIMERI	112 - 122
	ODPRTA VPRAŠANJA	123 - 124
	LITERATURA	125 - 126

P R E D G O V O R

Teorija algebrskega numeričnega zaklada asociativne, kompleksne, enotske, Banachove algebre je razmeroma že precej razvita. To, da ima Banachova algebra enoto, je zelo lepa lastnost algebre, še posebej, če je norma enote $= 1$. Na primer, asociativna, kompleksna, enotska, Banachova algebra s hilbertsko normo (norma ustreza paralelogramski enakosti, t.j. izhaja iz skalarne produkta) je izomorfna obsegu $\mathbb{C}$ (gl. npr. /7, IZREK 9,10 in 9,3/ na straneh 96 in 90)*. Po drugi strani pa eksistira asociativna, kompleksna, Banachova algebra brez enote s hilbertsko normo, ki ni izomorfna obsegu $\mathbb{C}$ (gl. npr. Primer 2.3.13 na str. 41)*. Nadalje je vsaka realna (ne nujno asociativna) enotska normirana algebra z multiplikativno normo - "absolutno vrednostjo" ($\|xy\| = \|x\|\|y\|$ za vsak x, y) končno-dimenzionalna (dimenzije $= 1, 2, 4$ ali 8). Po drugi strani pa eksistira neskončno-dimenzionalna realna (neasociativna) normirana algebra brez enote z multiplikativno normo (gl. npr. Proc. Amer. Math. Soc. 11(1960), 861-866).

Ker v literaturi še nisem zasledil obravnave algebrskega numeričnega zaklada za Banachove algebre brez enote (oz. za Banachove algebre, za katere se ne ve, ali enoto imajo ali so brez nje), sem se vprašal, kaj bi se kljub tej pomanjkljivosti (odsotnosti enote) dalo povedati o numeričnem zakladu. Ko sem naletel na dvajset let staro disertacijo prof. Grassellija, v kateri je avtor metrično (neposredno s pomočjo norme) definiral in okarakteriziral sebi-adjungirane elemente asociativne, kompleksne, Banachove algebre brez enote in med drugim pokazal, da leži spekter sebi-adjungiranega elementa vedno na realni številski osi, me je to vzpodbudilo, da raziščem odnos med spektrom in numeričnim zakladom elementa asociativne, kompleksne, Banachove algebre (brez enote). Po drugi strani so prof. Vidava zanimale lastnosti hermitskih (sebi-adjungiranih) elementov kompleksne Banachove algebre brez enote. To me je vzpodbudilo k intenzivnemu študiju navedenega problema. Pričujoče delo je sad tega prizadevanja.

Pri obravnavi problema sem sledil svoji mag. nalogi. Pokazalo se je, da se da o spektru, numeričnem zakladu in hermitskih elementih povedati veliko tudi v primeru, če algebra nima enote, oz.

*Eksistira kompleksna asociativna komutativna B-algebra $(A, \|\cdot\|)$ z enoto e , $\|e\| > 1$, kjer je norma $\|\cdot\|$ hilbertska, pri čemer A ni izomorfna obsegu $\mathbb{C}$ (gl. primer 13.4.1).

če je norma enote $\neq 1$. Rezultati za kompleksno Banachovo algebro brez enote so podobni rezultatom za kompleksno enotsko Banachovo algebro. Zahteve v zvezi z enoto v formulacijah velikega dela trditev sploh ne nastopajo. Veliko izrekov (npr. v zvezi s hermitskimi, poševno-hermitskimi in normalnimi elementi) velja neodvisno od tega, če algebra ima enoto ali pa je brez nje. Nekaj rezultatov (npr. v zvezi s poševno-hermitskimi elementi) je novih celo v primeru enotske Banachove algebre in delo vsebuje skoraj vse rezultate disertacije prof. Grassellija.

Prisrčno se zahvaljujem prof. Vidavu za vse sugestije in dragoceno pomoč pri nastajanju tega dela!

Ljubljana, oktober 1982

Vito Lampret

O Z N A K E

$:=$	... enako po definiciji
$\cong$	... izomorfizem (algebrski oz. topološki)
$\lim_{t \downarrow 0}$	... desna limita
$\ \cdot\ $	... norma
$ \cdot , \cdot _d$	... leva oz. desna operatorska polnorma (0.5.2)
$*$	... involucija (oz. konjugiranje kompleksnih števil)
A	... algebra (0.1.1)
$A^\bullet$	... algebra glede na obratno množenje (0.1.3)
A'	... dualni prostor normirane algebre (0.2.3)
A_e	... polnormirana algebra, ki jo dobimo s formalno adjunkcijo enote (0.5.1)
$\widehat{A}_e$	... kvocientna algebra po jedru polnorme na A_e (0.5.4)
$\overline{A}_e$	... izpopolnitev kvocientne normirane algebre $\widehat{A}_e$ (0.5.5)
$(A_C, \ \cdot\ _C)$	... kompleksifikacija realne normirane algebre $(A, \ \cdot\)$ (0.4.1)
$\mathcal{B}(A)$	... algebra vseh linearnih omejenih operatorjev na normirani algebri A
C	... obseg vseh kompleksnih števil
$\text{co}M, \text{co} M, \overline{\text{co}}M$	... konveksna ogrinjača, absolutno konveksna ogrinjača, zaprta konveksna ogrinjača podmnožice M linearnega topološkega prostora, $\overline{\text{co}}M = \overline{\text{co}}M$ (/13, 0.0.5.24.9, 0.0.5.25.5, 0.0.6.23/)
$\mathcal{D}(A)$	... množica vseh dvostranskih elementov normirane algebre A (11.1)
$D(A)$ /oz. $D_d(A)$ /	... množica vseh levo /oz. desno/-disipativnih elementov normirane algebre A (4.1)
$D(x) = \{f \in A' : \ f\ = f(x) = 1\}$	(2.1.1)
$\mathfrak{F}$	... obseg vseh realnih oz. kompleksnih skalarjev
$f(M) = \{f(m) : m \in M\}$	... slika množice M pri preslikavi f

$H(A)$ /oz. $H_d(A)$ /	... množica vseh levo /oz. desno/ <u>-hermitskih</u> elementov normirane algebre A (6.1)
$H'(A)$ /oz. $H'_d(A)$ /	... množica vseh levo /oz. desno/ <u>-poševno-hermitskih</u> elementov algebre A (5.1)
$*H(A)$	... množica vseh <u>*</u> -hermitskih elementov involutivne algebre A (12.1)
$*H'(A)$	... množica vseh <u>*</u> -poševno-hermitskih elementov involutivne algebre A (12.1)
$H^+(A)$ /oz. $H_d^+(A)$ /	... množica vseh levo /oz. desno/ <u>-pozitivnih</u> elementov algebre A (7.1)
$\text{Im}M = \{\text{Im } m : m \in M\}$	... imaginarni del podmnožice M obsega skalarjev $\mathfrak{F}$
$J(A) = H(A) + iH(A)$	
$\mathcal{L}(A)$	... algebra vseh linearnih operatorjev na algebri A
$\text{lan}A$	... levi <u>anihilator</u> algebre A (0.5.0)
$M_1 \setminus M_2$	... razlika množic $(= M_1 \cap M_2^C)$
$M_1 \overset{+}{\cup} M_2 = \{m_1 \overset{+}{\cup} m_2 : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$	... vsota (oz. razlika) podmnožic linearnega prostora
$\lambda M = \{\lambda m : m \in M\}$	... produkt podmnožice M linearnega prostora s skalarjem λ
$\Lambda M = \{\lambda m : \lambda \in \Lambda, m \in M\}$	... produkt podmnožice Λ obsega skalarjev s podmnožico M linearnega prostora
$M_1 M_2 = \{m_1 m_2 : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$	... produkt podmnožice M_1 s podmnožico M_2 algebre
$ M = \{ m : m \in M\}$	... množica vseh absolutnih vrednosti (pod) množice M skalarjev
$\overline{M}, M^0, \partial M$	... zaprtje, notranjost in rob (topološki) podmnožice M topološkega prostora
N	... množica vseh naravnih števil
$\mathcal{N}$	... jedro algebrske polnorme na A_e (0.5.4)
$N(A)$ /oz. $N_d(A)$ /	... množica vseh levo /oz. desno/ <u>-normalnih</u> elementov normirane algebre A (9.1)
$P(A)$ /oz. $P_d(A)$ /	... množica vseh levih /oz. desnih/ <u>-projektorjev</u> algebre A (8.1)

- R ... obseg vseh realnih števil
 R^+ /oz. R^- / ... množica vseh pozitivnih /oz. negativnih/ realnih števil
 $\text{Re}M = \{ \text{Re}m : m \in M \}$... realni del podmnožice M obsega skalarjev $\mathfrak{F}$
 $r(a) = \inf \{ \|a^n\|^{1/n} : n \in \mathbb{N} \}$... spektralni radij elementa a normirane algebre $(A, \|\cdot\|)$ (3.1)
 $\mathcal{S}(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n})$... (3.2(v))
 $S = S(A) = \{ a \in A : \|a\| = 1 \}$... enotska sfera (pol)normirane algebre $(A, \|\cdot\|)$
 $S' = S(A') = \{ f \in A' : \|f\| = 1 \}$... enotska sfera dualnega prostora (pol)normirane algebre
 $\mathcal{G}(A, a), \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a), q\text{-}\mathcal{G}(A, a), q\text{-}\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a)$... spekter, $\mathfrak{F}$ -spekter, kvazi-spekter, kvazi- $\mathfrak{F}$ -spekter elementa $a \in A$ glede na algebro A (1.4, 1.5, 1.2.1)
 $V(A, a)$ /oz. $V_d(A, a)$ /... levi /oz. desni/ numerični zaklad elementa a normirane algebre A glede na algebro A (2.1.3)
 $v(A, a)$ /oz. $v_d(A, a)$ /... levi /oz. desni/ numerični radij elementa a normirane algebre A glede na algebro A (3.1)

0.1 ALGEBRE

0.1.1 Naj bo A linearen prostor nad obsegom skalarjev $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Vsako preslikavo $\varphi: A \times A \rightarrow A$, kjer pišemo $\varphi(a,b) = ab$, bomo imenovali množenje. Preslikavo $(a,b) \mapsto ba := a.b$ imenujemo obratno množenje k množenju $(a,b) \mapsto ab$. Če je na linearnem prostoru A definirano množenje $(a,b) \mapsto ab$ z lastnostmi:

$$(i) \quad a(b+c) = ab + ac \quad \text{za vsak } a,b,c \in A$$

$$(i') \quad (b+c)a = ba + ca \quad \text{za vsak } a,b,c \in A$$

(ii) $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ za vsak $\lambda \in \mathcal{F}$ in $a,b \in A$,
potem bomo imenovali A algebro nad obsegom $\mathcal{F}$ (glede na dano množenje).

0.1.2 Algebro A imenujemo realno (kompleksno), če je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ (oz. $\mathcal{F} = \mathbb{C}$). Če je A algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), označimo z $A_{\mathbb{R}}$ algebro A glede na obseg skalarjev $\mathbb{R}$ realnih števil. (Če je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, pišemo $A_{\mathbb{R}} = A$.)

0.1.3 Če je A algebra glede na dano množenje, je očitno A algebra tudi glede na obratno množenje; to algebro označimo z A^* .

0.1.4 Množenje imenujemo trivialno, če je $ab=0$ za vsak $a,b \in A$. Algebro imenujemo netrivialno, če je $A \neq \{0\}$.

0.1.5 Če velja v algebri A asociativni zakon, $(ab)c = a(bc)$ za vsak $a,b,c \in A$, imenujemo A asociativno algebro. Algebro A imenujemo komutativno, če je množenje komutativno, t.j. če je $ab=ba$ za vsak $a,b \in A$.

0.1.6 Vektor $e \in A$ imenujemo levo enoto algebre A , če je $ea=a$ za vsak $a \in A$. Analogno imenujemo desno enoto, če je $ae=a$ za vsak $a \in A$. Leva oz. desna enota netrivialne algebre je $\neq 0$. Vektor e imenujemo enoto algebre A , če je e hkrati leva in desna enota.

0.1.7 Preslikavo $a \mapsto a^*$ algebre A vase imenujemo linearno involucijo, če velja:

$$(i) \quad a^{**} = a \quad \text{za vsak } a \in A$$

(ii) $(\alpha a + \beta b)^* = \alpha^* a^* + \beta^* b^*$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ in $a,b \in A$,
kjer pomeni λ^* konjugiranje kompleksnega števila $\lambda \in \mathcal{F}$.

0.1.8 Linearno involucijo imenujemo algebrsko involucijo ali

kratko involucijo, če velja enakost $(ab)^* = b^* a^*$ za vsak $a, b \in A$. Algebro, za katero je definirana involucija, imenujemo involutivno.

0.2 POLNORMIRANE ALGEBRE

0.2.1 Urejeno dvojico (A, p) imenujemo polnormirano algebro nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), če je A algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ in p algebrska polnorma, t.j. p je preslikava $A \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ z lastnostmi: **(i)** Eksistira $a \in A$, da je $p(a) \neq 0$; **(ii)** $p(a+b) \leq p(a) + p(b)$ za vsak $a, b \in A$; **(iii)** $p(\lambda a) = |\lambda| p(a)$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$ in $a \in A$; **(iv)** $p(ab) \leq p(a)p(b)$ za vsak $a, b \in A$. Zaradi (i) je vsaka polnormirana algebra netrivialna. Polnormirano algebro (A, p) imenujemo enotsko, če ima A enoto e in če je $p(e)=1$. Polnormirano algebro (A, p) imenujemo asociativno (komutativno), če je A asociativna (komutativna) algebra. Polnormirano algebro (A, p) imenujemo realno (kompleksno), če je obseg skalarjev $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$ (oz. $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$). Polnormirano algebro (A, p) imenujemo normirano, če je p norma, t.j. če je jedro $\ker p = \{0\}$. Polno normirano algebro imenujemo Banachovo algebro ali B-algebro.

0.2.2 Če je (A, p) polnormirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$, je množica $\mathcal{N} := \ker p := \{a \in A : p(a)=0\}$ dvostranski ideal algebre A . Zato je faktorska (kvocientna) množica $\hat{A} := A/\mathcal{N}$ algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ glede na operacije:

- (i)** $\hat{a} + \hat{b} := (a+b)^\wedge$ za vsak $a, b \in A$
- (ii)** $\lambda \hat{a} := (\lambda a)^\wedge$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$ in $a \in A$
- (iii)** $\hat{a}\hat{b} := (ab)^\wedge$ za vsak $a, b \in A$

kjer je $\hat{x} = x + \mathcal{N} = \{x+y : y \in \mathcal{N}\}$ = ekvivalenčni razred elementa x (za vsak $x \in A$). Ker je preslikava $\|\cdot\| : \hat{A} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\|\hat{x}\| := p(x)$ za vsak $x \in A$ ($\|\hat{x}\| = \inf\{p(x+y) : y \in \mathcal{N}\}$, saj je $p(x+y) = p(x)$ za vsak $y \in \mathcal{N}$), algebrska norma na $\hat{A}$, je $(\hat{A}, \|\cdot\|)$ normirana algebra, ki jo imenujemo faktorsko (kvocientno) algebro polnormirane algebre (A, p) . Kvocientna preslikava $q : A \mapsto \hat{A}$, $q(a) = \hat{a}$ za vsak $a \in A$, je izometrični homomorfizem. Če je (A, p) enotska polnormirana algebra z enoto e , je $(\hat{A}, \|\cdot\|)$ enotska normirana algebra z enoto $\hat{e}$.

0.2.3 Če je (A, p) polnormirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), potem je dualni prostor $A' := \{f : f \text{ linearen zvezen funkcional } A \mapsto \mathfrak{F}\}$ Banachov prostor glede na dualno normo

$\| \cdot \|$, $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in A, p(x) \leq 1\} = \sup\{|f(x)| : x \in A, p(x) = 1\}$. Torej velja ocena $|f(a)| \leq \|f\| p(a)$ za vsak $a \in A$.

0.2.4 Če je (A, p) polnormirana algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $(\hat{A}, \| \cdot \|)$ njena faktorska algebra, potem inducira kvocientna preslikava $q: A \rightarrow \hat{A} = A/\mathcal{N}$ preslikavo $Q: A' \rightarrow (\hat{A})'$ takole: $Q(f) = \hat{f} \stackrel{\text{def}}{\iff} \hat{f}(\hat{x}) = f(x)$ za vsak $x \in A$ (funkcional $\hat{f}$ je enolično definiran, t.j. velja: $x_1, x_2 \in \hat{x} \Rightarrow (x_1 - x_2) \in \mathcal{N} \Rightarrow |f(x_1 - x_2)| \leq \|f\| p(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$). Preslikava Q je linearna surjektivna izometrija (če je $\hat{f} \in (\hat{A})'$, velja za funkcional $f := \hat{f} \circ q$ enakost $Q(f) = \hat{f}$, kar pomeni surjektivnost preslikave Q).

0.3 EKSPONENTNA FUNKCIJA V ASOCIATIVNI BANACHOVI ALGEBRI (brez enote)

Oznaka: $S = S(A) = \{a \in A : \|a\| = 1\}$ = enotska sfera normirane algebre $(A, \| \cdot \|)$.

Naj bo $(A, \| \cdot \|)$ asociativna Banachova algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$); ni treba, da ima A levo ali desno enoto. Za vsak $a, x \in A$ definiramo:

$$e^a x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} x \quad \text{in} \quad x e^a = x + \sum_{k=1}^{\infty} x \frac{a^k}{k!}. \quad \text{Obe vrsti sta abso-}$$

lutno konvergentni, zato velja:

- (i) $(a, b, x \in A, ab=ba) \Rightarrow e^{a+b} x = e^a (e^b x) = e^b (e^a x)$
- (ii) $a, x \in A \Rightarrow e^a (e^{-a} x) = x = e^{-a} (e^a x)$
- (iii) $(a, x \in A, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow e^{na} x = e^a (e^a (\dots (e^a x) \dots))$
- (iv) $(a, b, x, y \in A, ab=ba, bx=xb) \Rightarrow (e^a x) (e^b y) = e^{a+b} (xy)$
- (v) $(a, x \in A, ax=xa) \Rightarrow (e^a x)^n = e^{na} x^n$
- (vi) $e^{-\|a\|} \|x\| \leq \|e^a x\| \leq e^{\|a\|} \|x\|$ za vsak $a, x \in A$
- (vii) $e^{-|\lambda| \|a\|} \leq \sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| \leq e^{|\lambda| \|a\|}$ za vsak $\lambda \in \mathcal{F}$ in $a \in A$
- (viii) $(\sup_{x \in S} \|e^{-\lambda a} x\|) (\sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\|) \geq 1$ za vsak $\lambda \in \mathcal{F}$ in $a \in A$.

Dokaz: Ker lahko absolutno konvergentne vrste v Banachovi algebri členoma množimo v poljubnem vrstnem redu, veljajo točke (i) - (v).

Ker je $\|e^a x\| \leq \|x\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|a\|^k}{k!} \|x\| = e^{\|a\|} \|x\|$, je zaradi (ii) tudi

$\|x\| = \|e^{-a} e^a x\| \leq e^{\| -a \|} \|e^a x\|$, t.j. $\|e^a x\| \geq e^{-\|a\|} \|x\|$, kar dokazuje točko (vi) in ta točko (vii). Zaradi (vi) je $\|e^{-b} y\| > 0$ za vsak $y \neq 0$, $b, y \in A$; po točki (ii) je $\sup_{x \in S} \|e^b x\| \geq \|e^b (\|e^{-b} y\|^{-1} e^{-b} y)\| = \|e^{-b} y\|^{-1} \|y\|$ za vsak $b, y \in A$, $y \neq 0$, kar dokazuje (viii).

0.4 KOMPLEKSIFIKACIJA REALNE NORMIRANE ALGEBRE

0.4.1 Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ realna normirana algebra. Potem je kartezični produkt $A_C := A \times A$ kompleksna algebra glede na operacije:

$$(a, b) + (a', b') = (a+a', b+b') \quad \dots \text{ seštevanje}$$

$$(\alpha + i\beta)(a, b) = (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a) \quad \dots \text{ množenje s kompleksnim skalarjem } \alpha + i\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba') \quad \dots \text{ množenje}$$

Preslikava $a \mapsto (a, 0) := \tilde{a}$ je injektivni homomorfizem (vložitev).

Naj bo $\mathcal{U}$ odprta enotska krogla v algebri A , t.j. $\mathcal{U} = \{a \in A : \|a\| < 1\}$, $\mathcal{V}$ absolutna konveksna ogrinjača množice $\mathcal{U} \times \{0\}$ v algebri A_C , t.j. $\mathcal{V} = |\text{co}|(\mathcal{U} \times \{0\}) =$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{a}_k : n \in \mathbb{N}; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}; a_1, \dots, a_n \in \mathcal{U}; \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1 \right\} \text{ in}$$

$\|\cdot\|_C$ Minkowski-jev funkcional množice $\mathcal{V}$. Potem velja:

(i) $\|\cdot\|_C$ je algebrska norma na A_C

(ii) $\mathcal{V}$ je odprta enotska krogla algebre A_C glede na normo $\|\cdot\|_C$, t.j. $\mathcal{V} = \{\xi \in A_C : \|\xi\|_C < 1\}$

(iii) $\max\{\|a\|, \|b\|\} \leq \|(a, b)\|_C \leq 2\max\{\|a\|, \|b\|\}$ za vsak $a, b \in A$

(iv) $\|\tilde{a}\|_C = \|a\|$ za vsak $a \in A$.

Če je A asociativna (Banachova) algebra, je tudi A_C asociativna (Banachova) in če ima A enoto e , je $\tilde{e}$ enota algebre A_C . Normirano algebro $(A_C, \|\cdot\|_C)$ bomo imenovali (standardno) kompleksifikacijo realne normirane algebre $(A, \|\cdot\|)$ in preslikavo $a \mapsto \tilde{a}$ vložitev algebre A v A_C . Vložitev $a \mapsto \tilde{a}$ je torej izometrični homomorfizem in če označimo $\tilde{A} = \{\tilde{a} : a \in A\}$, lahko zapišemo $A_C = \tilde{A} \oplus i\tilde{A}$.

Dokaz: /5, str. 68/.

0.4.2 Če je $(A, \|\cdot\|)$ realna asociativna algebra, $a, x \in A$ in

$$\xi, \eta \in A_C, \text{ definiramo za poljuben polinom } P \text{ z realnimi koeficienti, } P(t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k t^k \quad (t, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}),$$

vektorja $P(a)x \in A$ in $P(\xi)\eta \in A_C$ takole:

$$P(a)x := \lambda_0 x + \sum_{k=1}^n \lambda_k a^k x, \quad P(\xi)\eta := \lambda_0 \eta + \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi^k \eta.$$

Ker je preslikava $x \mapsto \tilde{x}$ izometrični homomorfizem, velja:

(i) $P(\tilde{a})\tilde{x} = (P(a)x)^\sim$ in zato tudi $\|P(\tilde{a})\tilde{x}\|_C = \|P(a)x\|$ za vsak $a, x \in A$

(ii) $e^{\tilde{a}}\tilde{x} = (e^a x)^\sim$ in $\|e^{\tilde{a}}\tilde{x}\|_C = \|e^a x\|$ za vsak $a, x \in A$, A $\mathbb{B}$ -alg.

0.4.3 Lema Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ realna normirana algebra, $(A_C, \|\cdot\|_C)$ njena kompleksifikacija, $S = \{a \in A : \|a\| = 1\}$ in $S_C = \{\xi \in A_C : \|\xi\|_C = 1\}$. Potem velja:

(i) $\sup_{\xi \in S_C} \|\xi + \tilde{a}\xi\|_C = \sup_{x \in S} \|x + ax\|$ za vsak $a \in A$

(ii) Če je A asociativna algebra in P polinom z realnimi koeficienti, je $\tilde{p} := \sup_{\xi \in S_C} \|P(\tilde{a})\xi\|_C = \sup_{x \in S} \|P(a)x\| := p$ za vsak $a \in A$.

(iii) Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna Banachova algebra, je $\sup_{\xi \in S_C} \|e^{\tilde{a}}\xi\|_C = \sup_{x \in S} \|e^a x\|$ za vsak $a \in A$.

Opomba: Če je P linearen polinom, v točki (ii) ni potrebna asociativnost algebre A .

Dokaz: (i), (ii) : Ker je vložitev $x \mapsto \tilde{x}$ izometrija, sledi iz 0.4.2(i) ocena $\tilde{p} \geq p \dots (1)$. Nadalje za poljuben $\varepsilon > 0$ eksistira tak $\xi_\varepsilon \in S_C$, da je $\tilde{p} - \varepsilon < \|P(\tilde{a})\xi_\varepsilon\|_C \dots (2)$.

Po 0.4.1(ii) eksistirajo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ in $x_1, \dots, x_n \in A$, da je $\xi_\varepsilon = \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{x}_k$, $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1$ in $\|x_k\| < 1$ za $k=1, \dots, n$. To zara-

di (2) in 0.4.2(i) pomeni $\tilde{p} - \varepsilon < \|P(\tilde{a}) \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{x}_k\|_C = \|\sum_{k=1}^n \lambda_k P(\tilde{a})\tilde{x}_k\|_C =$

$$= \|\sum_{k=1}^n \lambda_k (P(a)x_k)^\sim\|_C \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \cdot \|P(a)x_k\| \leq (\sum_{k=1}^n |\lambda_k|) \sup\{\|P(a)x\| : x \in A, \|x\| < 1\} \leq 1 \cdot \sup\{\|P(a)x\| : x \in A, \|x\| \leq 1\} = \sup_{x \in S} \|P(a)x\| = p,$$

t.j. $\tilde{p} - \varepsilon < p$ za vsak $\varepsilon > 0$, kar zaradi (1) pomeni $\tilde{p} = p$.

(iii) Za vsak $t \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$P_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!}. \text{ Potem je } \|e^a x - P_n(a)x\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|a\|^k}{k!} \|x\| \leq$$

$$\leq \frac{\|a\|^{n+1}}{(n+1)!} \|x\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|a\|^j}{j!} = \frac{\|a\|^{n+1}}{(n+1)!} \|x\| e^{\|a\|} \text{ in zato}$$

$\sup_{x \in S} \|e^a x - P_n(a)x\| \leq \frac{\|a\|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\|a\|} \dots (3)$ ter analogno tudi

$$\sup_{\xi \in S_C} \|e^{\tilde{a}} \xi - P_n(\tilde{a})\xi\|_C \leq \frac{\|\tilde{a}\|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\|\tilde{a}\|} = \frac{\|a\|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\|a\|} \dots (4).$$

Po že dokazani točki (ii) je $\sup_{\xi \in S_C} \|P_n(\tilde{a})\xi\|_C = \sup_{x \in S} \|P_n(a)x\| \dots (5).$

Za poljubno neprazno podmnožico $\mathcal{Y}$ normiranega prostora X in poljubni omejeni funkciji $f, g: \mathcal{Y} \rightarrow X$ velja ocena $\|f(x)\| \leq \|f(x) - g(x)\| + \|g(x)\|$ in zato $\sup_{x \in \mathcal{Y}} \|f(x)\| \leq \sup_{x \in \mathcal{Y}} \|f(x) - g(x)\| + \sup_{x \in \mathcal{Y}} \|g(x)\|$ ter analogno tudi $\sup_{x \in \mathcal{Y}} \|g(x)\| \leq \sup_{x \in \mathcal{Y}} \|g(x) - f(x)\| + \sup_{x \in \mathcal{Y}} \|f(x)\|$, torej $\left| \sup_{x \in \mathcal{Y}} \|f(x)\| - \sup_{x \in \mathcal{Y}} \|g(x)\| \right| \leq \sup_{x \in \mathcal{Y}} \|f(x) - g(x)\| \dots (6).$

Zaradi (5), (6), (3) in (4) je $\left| \sup_{\xi \in S_C} \|e^{\tilde{a}} \xi\|_C - \sup_{x \in S} \|e^a x\| \right| \leq \dots (5)$
 $\leq \left| \sup_{\xi \in S_C} \|e^{\tilde{a}} \xi\|_C - \sup_{\xi \in S_C} \|P_n(\tilde{a})\xi\|_C \right| + \left| \sup_{x \in S} \|P_n(a)x\| - \sup_{x \in S} \|e^a x\| \right| \leq \dots (6)$
 $\leq \sup_{\xi \in S_C} \|e^{\tilde{a}} \xi - P_n(\tilde{a})\xi\|_C + \sup_{x \in S} \|P_n(a)x - e^a x\| \stackrel{(4)}{\leq} 2 \frac{\|a\|^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{(3)}{\leq} \dots$

za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ta ocena dokazuje (iii).

0.5 FORMALNA ADJUNKCIJA ENOTE - VLOŽITEV ASOCIATIVNE

NORMIRANE ALGEBRE V ENOTSKO NORMIRANO ALGEBRO

(neodvisno od tega ali ima prvotna algebra enoto ali pa je brez nje)

0.5.0 V tem odstavku naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), $S = \{a \in A : \|a\| = 1\}$ in $\text{lan} A = \{a \in A : ax = 0 \text{ za vsak } x \in A\} = \text{levi anihilator algebre } A$.

0.5.1 Kartezični produkt $\mathcal{F} \times A := A_e$ je algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ z enoto $e = (1, 0)$ glede na operacije:

- (i) $(\lambda, a) + (\lambda', a') := (\lambda + \lambda', a + a')$... seštevanje
- (ii) $\lambda_0(\lambda, a) := (\lambda_0 \lambda, \lambda_0 a)$... množenje s skalarjem
- (iii) $(\lambda, a)(\lambda', a') := (\lambda \lambda', \lambda a' + \lambda' a + a a')$... množenje

Preslikava $a \mapsto (0, a) := \tilde{a}$ algebre A v algebro A_e je injektivni homomorfizem (vložitev). Algebra A je torej izomorfna podalgebri $\tilde{A} := \{\tilde{a} : a \in A\}$ algebre A_e in velja enakost $A_e = \mathcal{F}e \oplus \tilde{A}$. Če je algebra A asociativna (komutativna), je taka tudi algebra A_e .

0.5.2 Preslikava $|\cdot| : (\lambda, a) \mapsto \sup_{x \in S} \|\lambda x + ax\| := |(\lambda, a)|$ algebre A_e v prostor $R^+ \cup \{0\}$ je algebrska polnorma (gl. /10/, str. 29)* in $(A_e, |\cdot|)$ je polnormirana enotska algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ (t.j. $|e| = 1$). Polnormo $|\cdot|$ imenujemo (levo) operatorsko polnormo na algebri A_e . Za vsak $a \in A$ je očitno $|\tilde{a}| \leq \|a\|$. Preslikavo $a \mapsto |\tilde{a}| = \sup_{x \in S} \|ax\|$ imenujemo levo operatorsko polnormo na algebri A in preslikavo $a \mapsto |\tilde{a}|_d := \sup_{x \in S} \|xa\|$ imenujemo desno operatorsko polnormo algebre A .

0.5.3 OPOMBE: **(i)** Če je $\text{lan}A = \{0\}$ (levi anihilator je trivialen), je leva operatorska polnorma $|\cdot|$ očitno norma na A .

(ii) Če je $\text{lan}A = \{0\}$ in je A brez leve enote, je operatorska polnorma $|\cdot|$ norma na A_e . (Naj bo namreč $ax + \lambda x = 0$ za vsak $x \in A$. Če je pri tem $\lambda \neq 0$, je $((-1/\lambda)a)$ leva enota algebre A . Torej je $\lambda = 0$ in zato $a \in \text{lan}A = \{0\}$, t.j. $a = 0$.)

(iii) Leva operatorska (pol)norma $|\cdot|$ je na A ekvivalentna normi $\|\cdot\| \iff$ Eksistira $\alpha \in R^+$ z lastnostjo, da za vsak $a \in A$ eksistira tak $x_a \in A \setminus \{0\}$, da je $\|ax_a\| \geq \alpha \|a\| \|x_a\|$.

(iv) Če je leva operatorska (pol)norma $|\cdot|$ na A ekvivalentna normi $\|\cdot\|$ in je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra, je tudi $(A_e, |\cdot|)$ B-algebra in velja enakost $(e^a x)^\sim = e^{\tilde{a}} \tilde{x}$ za vsak $a, x \in A$. (Zaradi ekvivalence norm je $\tilde{A}$ poln podprostor prostora $(A_e, |\cdot|)$ in je zato tudi $A_e := \mathfrak{F}e \oplus \tilde{A}$ poln prostor.) V vsaki B^* -algebri A je očitno $|a| = \|a\| = |a|_d$ za vsak $a \in A$.

(v) Posplošeno zaporedje $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ imenujemo /omejeno/ desno (levo) kvazi-približno enoto normirane algebre $(A, \|\cdot\|)$, če je $\sup_{\gamma \in \Gamma} \|e_\gamma\| < \infty$ in $\lim_{\gamma \in \Gamma} \|xe_\gamma\| = \|x\|$ za vsak $x \in A$ (oziroma $\lim_{\gamma \in \Gamma} \|e_\gamma x\| = \|x\|$ za vsak $x \in A$). Očitno je vsaka /omejena/ leva (desna) približna enota tudi /omejena/ desna (leva) kvazi-približna enota (/5/, str. 57, 58). Posplošeno zaporedje $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ imenujemo /omejeno/ kvazi-približno enoto, če je $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ /omejena/ leva in hkrati desna kvazi-približna enota.

(vi) Če ima normirana algebra $(A, \|\cdot\|)$ omejeno desno (levo) kvazi-približno enoto $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, potem je leva (desna) operatorska (pol)norma ekvivalentna prvotni normi $\|\cdot\|$ in njej celo enaka, če je $1 = \sup_{\gamma \in \Gamma} \|e_\gamma\| :=$ norma kvazi-približne enote.

*Ker je A asociativna, je preslikava $(\lambda, a) \mapsto (\lambda I + T_a)$ algebre A v algebro $\mathcal{B}(A)$ ($Ix = x$, $T_a x = ax$ za vsak $x \in A$) homomorfizem in je zato preslikava $|\cdot| : A_e \mapsto R^+ \cup \{0\}$, $|(\lambda, a)| := \|\lambda I + T_a\|$, algebrska polnorma.

(vii) Če ima normirana algebra $(A, \|\cdot\|)$ desno kvazi-približno enoto $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, je $\text{lan} A = \{0\}$. Če je pri tem $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra in je $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ omejena ter je A brez leve enote, je $(A_e, |\cdot|)$ tudi B-algebra.

0.5.4 Naj bo $\mathcal{N} = \{\xi \in A_e : |\xi| = 0\}$ - jedro polnorme $|\cdot|$ na A_e . Po 0.5.2 je $\mathcal{N}$ dvostranski ideal algebre A_e in je zato faktorska (kvocientna) množica $\hat{A}_e := A_e / \mathcal{N}$ enotska normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ glede na kvocientno normo $\|\cdot\|$, $\|\xi + \mathcal{N}\| := |\xi|$ za vsak $\xi \in A_e$, če definiramo: $\hat{\xi} + \hat{\eta} = (\xi + \eta)^\wedge$, $\lambda \hat{\xi} = (\lambda \xi)^\wedge$ in $\hat{\xi} \hat{\eta} = (\xi \eta)^\wedge$, kjer je $\hat{\xi} = \xi + \mathcal{N}$ za vsak $\xi \in A_e$. Zato je kvocientna preslikava $\xi \mapsto \hat{\xi}$ homomorfizem algebre A_e v algebro $\hat{A}_e$, ki preslika enoto e algebre A_e v enoto $\hat{e} = e + \mathcal{N}$ algebre $\hat{A}_e$ ($\|\hat{e}\| = 1$).

0.5.5 Normirano algebro $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ lahko na standardni način izometrično homomorfno vložimo v enotsko Banachovo algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$. Pri tej vložitvi pripada elementu $\hat{\xi}$ algebre $\hat{A}_e$ element $\bar{\xi}$ (= ekvivalenčni razred Cauchy-jevih zaporedij) in enota $\hat{e}$ algebre $\hat{A}_e$ se preslika v enoto $\bar{e}$ algebre $\bar{A}_e$.

0.5.6 Torej imamo homomorfizme $A \mapsto A_e \mapsto \hat{A}_e \mapsto \bar{A}_e$, $a \mapsto \tilde{a} := (0, a) \mapsto \hat{a} = \tilde{a} + \mathcal{N} \mapsto \bar{a} = [\hat{a}]$, kjer velja:

1.P polinom s koeficienti iz obsega $\mathfrak{F} \Rightarrow \|P(\bar{a})\| = \|P(\hat{a})\| = |P(\tilde{a})| = \sup_{x \in \tilde{S}} \|P(a)x\|$ in v posebnem $\|\bar{a}\| = \|\hat{a}\| = |\tilde{a}| = \sup_{x \in \tilde{S}} \|ax\| \leq \|a\|$ za vsak $a \in A$.

2. Konvergenca v algebri $(A, \|\cdot\|)$ implicira konvergenco v algebrah $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ in $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (čeprav $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ v splošnem ni Banachova algebra):

(i) $(a_n \in A, a_n \mapsto a \in A) \Rightarrow \hat{a}_n \mapsto \hat{a}$ in $\bar{a}_n \mapsto \bar{a}$

(ii) Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a^k$ ($\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathfrak{F}$) konvergentna

v A in ima vsoto s, sta vrsti $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \hat{a}^k$ in $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \bar{a}^k$

konvergentni v $\hat{A}_e$ oz. v $\bar{A}_e$ in imata vsoto $\hat{s}$ oz. $\bar{s}$.

0.5.7 Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ (= R ali C), običajna potenčna vrsta $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \lambda^k$ ($\lambda_k \in \mathfrak{F}$) naj bo konvergentna za $|\lambda| < r$ ($r > 0$) in naj ima vektor $a \in A$

spektralni radij $r(a) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} (= \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}) < r$. Potem je

vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \hat{a}^k$ konvergentna in absolutno konvergentna v $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$,

njena vsota je enolično določena z f -om in jo označimo z $f(\hat{a})$,
 $f(\hat{a}) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \hat{a}^k$; elementa $\hat{a}$ in $f(\hat{a})$ očitno komutirata. Analogno
lahko trdimo za $f(\bar{a})$, $f(\bar{a}) := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \bar{a}^k$. Velja:

$$(i) \quad \|f(\bar{a})\| = \|f(\hat{a})\| = \sup_{x \in S} \|f(a)x\|, \text{ kar pomeni}$$

$$(ii) \quad \|e^{\bar{a}}\| = \|e^{\hat{a}}\| = \sup_{x \in S} \|e^{a^k}x\| \text{ za vsak } a \in A.$$

Dokaz: Ker je $r(a) < r$, je $\|a^n\| < (r-\varepsilon)^n$ za vse dovolj velike
 $n \in \mathbb{N}$ in za vsak $\varepsilon > 0$ ($n \geq n(\varepsilon)$) ... (*). Ker je vrsta

$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \lambda^k$ konvergentna za $|\lambda| < r$, je absolutno konvergentna

za $|\lambda| < r$ in je zato vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| (r-\varepsilon)^k$ konvergentna, t.j.

vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a^k$ je zaradi (*) absolutno konvergentna v B-pr. A in

zato konvergentna. Po 0.5.6.2(ii) sta zato konvergentni tudi vrsti

$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \hat{a}^k$ in $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \bar{a}^k$. Po 0.5.1, 0.5.4 in 0.5.6.2(ii) je

$$f(\hat{a}) = \lambda_0 \hat{e} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \hat{a}^k = \lambda_0 \hat{e} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a^k \right)^{\wedge} = (\lambda_0, 0) + (0, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a^k) +$$

$$+ \mathcal{N} = (\lambda_0, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a^k) + \mathcal{N}, \text{ kar po 0.5.4 in 0.5.2 pomeni } \|f(\hat{a})\| =$$

$$= \left| (\lambda_0, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a^k) \right| = \sup_{x \in S} \|\lambda_0 x + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a^k x\| = \sup_{x \in S} \|f(a)x\| \dots (**).$$

Ker je preslikava $\hat{a} \rightarrow \bar{a}$ izometrični homomorfizem, je $\|f(\hat{a})\| =$
 $= \|f(\bar{a})\|$, kar zaradi (**) dokazuje (i).

1 SPEKTER ELEMENTA ASOCIATIVNE BANACHOVE ALGEBRE

V tem odstavku naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna Banachova algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $S = \{a \in A : \|a\| = 1\}$.

1.1 Za poljubna elementa $a, b \in A$ imenujemo izraz $a+b-ab := a \circ b$ kvazi-produkt elementa a z elementom b . Če je $a \circ b = 0 = b \circ a$, imenujemo b kvazi-inverzen (kratko q -inverzen) element elementa a . Če q -inverzen element elementa a eksistira, je enolično določen in ga označimo z a_{-1} . Element algebre A , za katerega eksistira q -inverzen element, imenujemo q -obrnjljiv. Množico vseh q -obrnjljivih elementov algebre A označimo s q -InvA (odprta množica v A).

1.2.1 Kvazi $\mathcal{F}$ -spekter elementa $a \in A$ glede na algebro A označimo s $q-\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a)$ in ga definiramo z enačbo $q-\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathcal{F} \setminus \{0\} : (1/\lambda)a \notin q\text{-Inv}A\}$. Kvazi-spekter elementa $a \in A$ glede na algebro A nad obsegom $\mathcal{F}$ označimo s $q-\mathcal{G}(A, a)$ in ga definiramo takole:

- (i) Če je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$, je $q-\mathcal{G}(A, a) = q-\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(A, a)$
- (ii) Če je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, je $q-\mathcal{G}(A, a) = q-\mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})$ (gl. 0.4).

1.2.2 Velja enakost $q-\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A_{\mathbb{R}}, a) = \mathbb{R} \cap (q-\mathcal{G}(A, a))$ za vsak $a \in A$ (gl. 0.1.2). (To sledi v primeru $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ iz dejstva $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ in v primeru $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ iz ekvivalence $a \in q\text{-Inv}A \Leftrightarrow \tilde{a} \in q\text{-Inv}A_{\mathbb{C}}$. (gl. 0.4.1))

1.2.3 Množica $q-\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a)$ je neprazna kompaktna podmnožica prostora $\mathcal{F}$ (gl. /11, 24.2.4, 24.3.2, 24.3.4/)

1.3 Če ima algebra A enoto e , označimo z $\text{Inv}A$ množico vseh obrnjljivih (regularnih) elementov algebre A in za vsak $a \in A$ definiramo: $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) = \{\lambda \in \mathcal{F} : (\lambda e - a) \notin \text{Inv}A\} \dots$ $\mathcal{F}$ -spekter elementa a glede na algebro A . Lahko se primeri, da je $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) = \emptyset$, če je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.

(i) Za vsak $a \in A$ velja: $b = a_{-1} \Leftrightarrow e - b = (e - a)^{-1} / 5$, Propozicija 3.5(ii)/, t.j. $a \in q\text{-Inv}A \Leftrightarrow (e - a) \in \text{Inv}A$.

(ii) To pomeni enakost $q-\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \cup \{0\}$ za vsak $a \in A$ (saj imamo za vsak $\lambda \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ ekvivalence: $(1/\lambda)a \notin q\text{-Inv}A \Leftrightarrow (e - (1/\lambda)a) \notin \text{Inv}A \Leftrightarrow (\lambda e - a) \notin \text{Inv}A$).

1.4 SPEKTER elementa a algebre A nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) glede na algebro A označimo s $\mathcal{G}(A, a)$ in ga definiramo takole:

- (i) Če ima A enoto in je $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$, je $\mathcal{G}(A, a) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}_{\mathbb{C}}(A, a)$ (gl. 1.3)
- (ii) Če ima A enoto in je $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$, je $\mathcal{G}(A, a) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})$ (gl. 0.4)
- (iii) Če je A brez enote, je $\mathcal{G}(A, a) \stackrel{\text{def}}{=} q\text{-}\mathcal{G}(A, a)$ (gl. 1.2.1)
- (iv) Če je A realna algebra, torej zaradi 1.4(iii) in 1.2.1(ii) velja enakost $\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})$ /5, Propozicija 13.5(i)/.

1.5 Če ima algebra A enoto, je definiran $\mathfrak{F}$ -spekter $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a)$ elementa $a \in A$ glede na algebro A v točki 1.3, če pa je A brez enote, definiramo $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) = q\text{-}\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a)$ (gl. 1.2).

1.6(i) Za vsak $a \in A$ je $\mathcal{G}(A, a)$ neprazna kompaktna podmnožica prostora kompleksnih števil $\mathbb{C}$ in je $\max|\mathcal{G}(A, a)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} := r(a) \leq \|a\|$ za vsak $a \in A$.

(gl. /5; Definicija 2.7, Trditve 2.8 in Teorem 5.8/)

(ii) Če ima A enoto, je zaradi 1.3(ii) $q\text{-}\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A, a) \cup \{0\}$.

(iii) Za vsak $a \in A$ je $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A_{\mathbb{R}}, a) = \mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A, a)$ (gl. 0.1.2 in 1.2.2) in zato

(iv) $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) = \mathfrak{F} \cap \mathcal{G}(A, a)$ za vsak $a \in A$, kar pomeni $\max|\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a)| \leq r(a) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$ za vsak

$a \in A$ (kjer definiramo $\max \emptyset = -\infty$).

1.7 Če je A_e algebra, ki jo dobimo iz algebre A z adjunkcijo enote e in preslikava $a \mapsto \tilde{a}$ vložitev algebre A v A_e (gl. 0.5.1), potem je* $q\text{-}\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) = \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A_e, \tilde{a})$ za vsak $a \in A$ (gl. /5, Lema 5.2/) in zato tudi $q\text{-}\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A_e, \tilde{a})$ za vsak $a \in A$. (Vse to velja neodvisno od tega, če A ima enoto ali ne. Enoto e namreč algebr A formalno adjungiramo). Če je A brez enote, to po definiciji 1.4(iii) pomeni, da je $\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A_e, \tilde{a})$ za vsak $a \in A$.

(Če je $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$, upoštevamo izomorfizem algebr $(A_{\mathbb{C}})_e$ in $(A_e)_{\mathbb{C}}$, gl. 0.4,

*Upoštevamo: (1) $a \notin q\text{-Inv}A \iff \tilde{a} \notin q\text{-Inv}A_e \xleftrightarrow{1.3(i)} (e-\tilde{a}) \notin \text{Inv}A_e$
 (2) $0 \in \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A_e, \tilde{a})$, ker $\tilde{a} \notin \text{Inv}A_e$

0.5 in /13, Trditev 0.1.10 na str. 182/).

1.8 Trditev Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, je

$q - \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) = \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A_e, \tilde{a}) \supset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(\hat{A}_e, \hat{a}) \supset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(\bar{A}_e, \bar{a})$ za vsak $a \in A$ (gl. 0.5.1, 0.5.4 in 0.5.5), kjer je po 1.3(ii) $q - \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) = \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) \cup \{0\}$, če ima A enoto, oziroma je po 1.5 $q - \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) = \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a)$, če je A brez enote.

Dokaz: Upoštevamo 1.7 in to, da so po 0.5.6 preslikave $\xi \mapsto \hat{\xi} \mapsto \bar{\xi}$ homomorfizmi $A_e \mapsto \hat{A}_e \mapsto \bar{A}_e$, ki preslikajo enoto v enoto (cele algebre).

1.9 Trditev Za poljubna $a, b \in A$ velja implikacija: $ab = ba \Rightarrow \mathcal{G}(A, a+b) \subset \mathcal{G}(A, a) + \mathcal{G}(A, b)$ in $\mathcal{G}(A, ab) \subset \mathcal{G}(A, a)\mathcal{G}(A, b)$.

Dokaz: Trditev je dokazana za kompleksno B -algebro z enoto /13, Trditev 0.4 - str. 271/, velja pa očitno tudi za realne B -algebre z enoto ... (*); (upoštevati je treba le def. 1.4(ii) in to, da je po 0.4.1 vložitev algebre A v $A_{\mathbb{C}}$ homomorfizem).

Če A nima enote, ji enoto e adjungiramo. Na algebri A_e (gl. 0.5.1) definiramo normo $\|\cdot\|_e$, $\|(\lambda, a)\|_e = |\lambda| + \|a\|$. Potem je $(A_e, \|\cdot\|_e)$ enotska B -algebra. Po 0.5.1 je preslikava $a \mapsto \tilde{a}$ homomorfizem algebre A v A_e in je zato po 1.7 in (*) $\mathcal{G}(A, a+b) = \mathcal{G}(A_e, \tilde{a}+\tilde{b}) \subset \mathcal{G}(A_e, \tilde{a}) + \mathcal{G}(A_e, \tilde{b}) = \mathcal{G}(A, a) + \mathcal{G}(A, b)$. Analogno potrdimo tudi drugo inkluzijo.

1.10 Trditev Če je B zaprta podalgebra B -algebre $(A, \|\cdot\|)$ nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), velja (gl. še /5, Propozicija 5.12/):

- 1.(i) $[(A \text{ ima enoto } e \text{ in je } e \in B) \text{ ali } (A \text{ in } B \text{ sta brez enote})] \Rightarrow \partial \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) \subset \partial \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b)$ za vsak $b \in B$.
- (ii) $(A \text{ ima enoto } e, e \notin B) \Rightarrow \partial \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) \subset \partial(\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) \cup \{0\}) \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) \cup \{0\} \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b)$ za vsak $b \in B$.
- (iii) $(A \text{ brez enote, } B \text{ ima enoto}) \Rightarrow \partial(\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) \cup \{0\}) \subset \partial \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) \cup \{0\}$ za vsak $b \in B$.

2. Če je b tak element algebre B , da je $\partial \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) = \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b)$, velja:

- (i) $[(A \text{ ima enoto } e, e \in B) \text{ ali } (A \text{ in } B \text{ sta brez enote})] \Rightarrow \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) = \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b)$.
- (ii) $(A \text{ ima enoto } e, e \notin B) \Rightarrow \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) \cup \{0\} = \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b)$.
- (iii) $(A \text{ brez enote, } B \text{ ima enoto}) \Rightarrow \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) = \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) \cup \{0\}$.

3. ($\mathfrak{F} = \mathbb{C}$, $\mathcal{G}(B, b) \subset \mathbb{R}$) $\Rightarrow \mathcal{G}(B, b) \subset \mathcal{G}(A, b) \cup \{0\}$.

Dokaz: Trditev 1.10.1(i) velja za primer, da ima A enoto e in je $e \in B$ /13, Trditev 0.2.32, str. 215/ ... (1). Če pa sta A ali B brez enote, formalno adjungiramo enoto $e = (1, 0)$ obema algebrama A in B. Ker je B podalgebra algebre A, je $B_e := \{(\lambda, b) : \lambda \in \mathfrak{F}, b \in B\}$ podalgebra algebre $A_e := \{(\lambda, a) : \lambda \in \mathfrak{F}, a \in A\}$, kjer vsebuje B_e enoto e algebre A_e . Algebra A_e je tudi Banachova, glede na normo $\|\cdot\|_e$, $\|(\lambda, a)\|_e := |\lambda| + \|a\|$ in B_e je njena zaprta podalgebra. Po točki (1) je zato $\partial \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B_e, \tilde{b}) \subset \partial \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A_e, \tilde{b}) \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A_e, \tilde{b}) \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B_e, \tilde{b}) \dots$ (2). Zaradi 1.7 je $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A_e, \tilde{b}) = q - \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b)$ in $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B_e, \tilde{b}) = q - \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) \dots$ (3). Za poljubno podmnožico M prostora $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) velja implikacija: $\partial M = M \Rightarrow M^0 = \phi \Rightarrow (M \cup \{0\})^0 = \phi \Rightarrow \partial(M \cup \{0\}) = M \cup \{0\} \dots$ (4). Trditev 1.10.1 sledi sedaj iz (2), (3), (4) in 1.5. Trditev 1.10.2 sledi neposredno iz 1.10.1, 1.10.3 sledi iz 1.10.2 in 1.6(iv).

1.10' Posledica: Naj bo B zaprta podalgebra Banachove algebre $(A, \|\cdot\|)$ nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem velja:

- (i) Če ima B enoto, ki je enota algebre A ali pa če sta A in B brez enote, je $\text{co } \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) = \text{co } \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b)$ za vsak $b \in B$.
- (ii) Če ima A enoto, ki ne leži v podalgebri B, je $\text{co } \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) = \text{co}(\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) \cup \{0\})$ za vsak $b \in B$.
- (iii) Če ima B enoto, ki ni enota algebre A, je $\text{co}(\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(B, b) \cup \{0\}) = \text{co } \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b)$ za vsak $b \in B$.

Opomba: $\text{co } \phi = \phi$ po definiciji.

Dokaz: Trditev je neposredna posledica trditve 1.10, če upoštevamo, da za vsako kompaktno konveksno množico K končnodimenzionalnega normiranega prostora velja enakost $\text{co } \partial K = \text{co } K$.

1.11 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Za vsak $a \in A$ naj bo $\Delta(a) = \{f : f \text{ potenčna vrsta skalarne spremenljivke } \lambda \in \mathfrak{F} \text{ s konvergenčnim polmerom } r > r(a) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}\}$.

Množica $\Delta(a)$ je očitno asociativna komutativna algebra z enoto. Po 0.5.7 je definiran $f(\hat{a}) \in \hat{A}_e$ in $f(\bar{a}) \in \bar{A}_e$ (gl. 0.5.5). Ker smemo vrste, ki so v normirani algebri konvergentne in hkrati abso-

lutno konvergentne, členoma seštevati in množiti v poljubnem vrstnem redu, je:

- (i) preslikava $f \mapsto f(\hat{a})$ homomorfizem algebre $\Delta(a)$ v algebro $\hat{A}_e$, ki enoto algebre $\Delta(a)$ preslika v enoto $\hat{e}$ algebre $\hat{A}_e$; za vsak $f, g \in \Delta(a)$ elementa $f(\hat{a})$ in $g(\hat{a})$ očitno komutirata.
- (ii) To pomeni, da je $f(\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(\hat{A}_e, \hat{a})) \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(\hat{A}_e, f(\hat{a}))$ za vsak $f \in \Delta(a)$ (gl. /20/, prvi del dokaza Izreka 22 na str. 29 in 30; po 1.8 in 1.6(iv) je $\sup |\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(\hat{A}_e, \hat{a})| \leq \max |\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a)| \leq r(a)$).
- (iii) Analogno je tudi $f(\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(\bar{A}_e, \bar{a})) \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(\bar{A}_e, f(\bar{a}))$ za vsak $f \in \Delta(a)$.

1.12 Spektralni teorem Če je $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna B-algebra in $a \in A$, veljajo enakosti:

- (i) $\mathcal{G}(\hat{A}_e, f(\hat{a})) = f(\mathcal{G}(\hat{A}_e, \hat{a}))$ in $\mathcal{G}(\bar{A}_e, f(\bar{a})) = f(\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}))$ za vsak $f \in \Delta(a)$ (gl. 1.10, 0.5.4 ter 0.5.5) ter zato
- (ii) $\mathcal{G}(\hat{A}_e, e^{\hat{a}}) = e^{\mathcal{G}(\hat{A}_e, \hat{a})}$ in $\mathcal{G}(\bar{A}_e, e^{\bar{a}}) = e^{\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a})}$.

Opomba: Normirana algebra $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ ni nujno polna!

Dokaz točke (i): Inkluzijo $\mathcal{G}(f(\hat{a})) \subset f(\mathcal{G}(a))$ dokazuje v bistvu /20/, drugi del dokaza Izreka 22 na str. 30/, kjer bazira dokaz na naslednjem: če je potenčna vrsta $g(\lambda)$ na konvergenčnem krogu $|\lambda| < r$ (kjer je $r > r(a)$) povsod $\neq 0$, je $1/g(\lambda)$ holomorfná na tem krogu in je zato $1/g \in \Delta(a)$ in $g(\hat{a})$ je obrnljiv element algebre $\hat{A}_e$ ter velja enakost $(g(\hat{a}))^{-1} = (1/g)(\hat{a})$. Obratno inkluzijo " $\supset$ " potrjuje 1.11(ii). To dokazuje prvo enakost v 1.12(i), drugo enakost dokažemo na enak način.

1.13 Trditev: Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$).

Potem za vsak $a \in A$ eksistira $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t}$ (gl. 0.3)

$$\text{in velja: } \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t} = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t} = \\ = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}).$$

Opomba: Algebra A ima lahko enoto ali pa je brez nje (formalna adjunkcija enote).

Dokaz: (I) $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$: Tedaj je $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ kompleksna enotska B-algebra, kar po /3, Teorem 1.3.8/ pomeni $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{t\bar{a}}\|^{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|e^{t\bar{a}}\|^{1/t}$, to pa zaradi 0.5.6 in 0.5.7(ii) že dokazuje trditev (v primeru $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$).

(II) $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$: Ker je $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ realna enotska B-algebra, je po definiciji 1.4(ii) $\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \mathcal{G}(\bar{A}_{e\mathbb{C}}, \bar{a})$ in veljajo zato spet po / 3, Teorem 1.3.8 / enakosti: $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(\bar{A}_{e\mathbb{C}}, \bar{a}) =$
 $= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{t\bar{a}}\|_{\bar{C}}^{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|e^{t\bar{a}}\|_{\bar{C}}^{1/t} \quad \dots (1).$ Vložitev realne algebre v njeno kompleksifikacijo je izometrični homomorfizem (gl. 0.4.1) in veljajo zato po 0.5.7(ii) enakosti: $\|e^{t\bar{a}}\| = \|e^{t\bar{a}}\| = \sup_{x \in S} \|e^{ta}x\| \quad \dots (2).$ Točki (1) in (2) dokazujeta trditev 1.13 v primeru, da je $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$.

1.14 IZREK Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in za vsak $a \in A$ naj bo $s(A, a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta}x\|^{1/t}$ in

$$s_d(A, a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|xe^{ta}\|^{1/t} \quad (\text{gl. 0.3}). \text{ Potem je}$$

$$s(A, a) = \lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \rightarrow \infty}} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta}x\|^{1/t} \quad \text{in} \quad s_d(A, a) = \lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \rightarrow \infty}} \ln \sup_{x \in S} \|xe^{ta}\|^{1/t} \quad \text{in}$$

v oznakah $s(a) := s(A, a)$ ter $s_d(a) := s_d(A, a)$ velja:

1. A ima enoto $\Rightarrow s(a) = s_d(a) = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{ta}\|^{1/t} = \lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \rightarrow \infty}} \ln \|e^{ta}\|^{1/t}.$
2. A je brez enote $\Rightarrow \sup \operatorname{Re} (\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\}) \leq s(a), s_d(a) \leq \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a).$

Opomba: Za prazno množico ϕ definiramo: $\sup \phi = -\infty!$

3. Če je A brez enote in če velja vsaj eden izmed naslednjih štirih pogojev:

- (i) $\mathcal{G}(A, a) = \{0\},$
 - (ii) $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) > 0,$
 - (iii) 0 ni izolirana točka množice $\operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a)$
 - (iv) $\mathcal{G}(A, a) \cap (i\mathbb{R} \setminus \{0\}) \neq \phi,$
- potem je $s(a) = s_d(a) = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a).$

Dokaz: Pokažimo najprej, da za število $s(a)$ veljajo vse trditve izreka! Da je $s(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta}x\|^{1/t}$, sledi iz

1.13 ... (1) .

1. A ima enoto ε , $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$: Ker je $\sup_{x \in S} \|e^{ta}x\| \leq \|e^{ta}\| \cdot 1$ in $\sup_{x \in S} \|e^{ta}x\| \geq \|e^{ta}\| \cdot \|\varepsilon\|^{-1}$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$, slede po (1) in /3, Teorem 1.3.8/ enakosti $s(a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta}x\|^{1/t} =$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta}x\|^{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|e^{ta}\|^{1/t} = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{ta}\|^{1/t} =$

$$= \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) \quad \dots (2).$$

1. A ima enoto ε , $\mathcal{F} = \mathbb{R}$: Po 1.4(ii) je $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A_C, \tilde{a})$ in ker je $\tilde{a}$ enota kompleksificirane algebre A_C (gl. 0.4.1), slede za algebro A_C in element $\tilde{a} \in A_C$ iz točke (2) enakosti: $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{t\tilde{a}}\|_C^{1/t} =$
- $$= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|e^{t\tilde{a}}\|_C^{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \sup_{\xi \in S_C} \|e^{t\tilde{a}} \xi\|_C^{1/t} = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{\xi \in S_C} \|e^{t\tilde{a}} \xi\|_C^{1/t},$$
- kjer je $S_C = \{\xi \in A_C : \|\xi\|_C = 1\}$. Od tod zaradi 0.4.3(iii) spet sledi trditev (2) ... (2'). Zaradi (2) in (2') velja za število $s(a)$ trditev 1.14.1 ... (3).

2. A brez enote, $\mathcal{F} = \mathbb{C}$: Po 1.8, 1.5, 1.2.1(i), 1.4(iii) in 1.4(i) je $\mathcal{G}(A, a) \supset \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a})$... (4), kar zaradi (1) in 1.13 pomeni $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) \geq \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = s(a)$... (5).

Če je $\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, vzemimo poljuben λ_0 ,

$\lambda_0 \in \mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\}$... (6). Potem je $a \neq 0$ in veljajo zaradi 1.6(i), /11, Spektralni teorem 24.5.5 na str. 693/ ter točke (6) za vsak $n \in \mathbb{N}$ ocene $\sup_{x \in S} \|e^{na} x\| \geq \|e^{na} a\|^{-1} \|a\| =$

$$= \|a\|^{-1} \|e^{na} a\| \stackrel{(6)}{\geq} \|a\|^{-1} \max |\mathcal{G}(A, e^{na} a)| \stackrel{(11)}{=} \|a\|^{-1} \max \{|e^{n\lambda} \lambda| : \lambda \in \mathcal{G}(A, a)\} \stackrel{(6)}{\geq} \|a\|^{-1} |e^{n\lambda_0} \lambda_0| = \|a\|^{-1} |\lambda_0| e^{n \operatorname{Re} \lambda_0} \text{ in zato}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sup_{x \in S} \|e^{na} x\|^{1/n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \frac{|\lambda_0|}{\|a\|} + \operatorname{Re} \lambda_0 \right), \text{ kar zaradi (1) in}$$

(6) pomeni $s(a) \geq \sup \operatorname{Re} (\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\})$... (7). Točki (5) in (7) kažeta, da za število $s(a)$ velja trditev 1.14.2 in to v primeru, ko je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$... (8).

2. A brez enote, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$: Po 1.4(iv) je $\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A_C, \tilde{a})$... (9).

Ker je A_C kompleksna B-algebra (brez enote, gl. /5, Propozicija 13.5(i)/), je zaradi (5) in (7) $\sup \operatorname{Re} (\mathcal{G}(A_C, \tilde{a}) \setminus \{0\}) \leq s(\tilde{a}) \leq \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A_C, \tilde{a})$... (10). Zaradi 0.4.3(iii) je $s(\tilde{a}) = s(a)$... (11). Točke (9), (10) in (11) pomenijo, da velja za število $s(a)$ trditev 1.14.2 tudi v primeru, ko je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$... (12).

Če vzamemo namesto algebre A algebro A^* (obratno množenje, gl. 0.1.3), je očitno $\mathcal{G}(A^*, a) = \mathcal{G}(A, a)$ in $s(A^*, a) = s_d(a)$. To zaradi (3), (8) in (12) v celoti dokazuje 1.14.1 in 1.14.2.

3. Če je A kompleksna algebra brez enote in je $\mathcal{G}(A, a) = \{0\}$, je zaradi 1.8 (gl. 1.4(iii), 1.2.1(i) in 1.3) in 1.6(i) tudi $\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \{0\}$ in je zato zaradi (1) in 1.13 $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) = 0 = s(a)$ ter analogno tudi $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A^*, a) =$

$$= 0 = s(A^*, a) = s_d(a) \quad \dots (13).$$

3. Če je A realna algebra brez enote in je $\mathcal{G}(A, a) = \{0\}$, je po 1.4(iv) $\{0\} = \mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A_c, \tilde{a})$ in zato po (13) $s(\tilde{a}) = s_d(\tilde{a}) = 0$, kar zaradi 0.4.3(iii) spet pomeni $s(a) = s_d(a) = 0 = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) \quad \dots (14).$

Zaradi (13) in (14) je predpostavka (i) v 1.14.3 zado-
sten pogoj za enakosti $s(a) = s_d(a) = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a)$. Te ena-
kosti pa zaradi 1.14.2 očitno veljajo tudi, če je izpolnjen
eden izmed nadaljnjih pogojev (ii), (iii) in (iv) trditve
1.14.3.

1.15 V B -algebri $(A, \|\cdot\|)$ nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) definiramo
modificirano eksponentno funkcijo ixp , $\operatorname{ixp} a =$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad \text{za vsak } a \in A, \text{ gl. /12, str. 248/. Preslikava}$$

ixp je zvezna in velja:

1. Če ima A enoto 1 , je $\operatorname{ixp} a = 1 - e^a$ za vsak $a \in A$
2. $(a, b \in A, ab = ba) \Rightarrow \operatorname{ixp}(a+b) = (\operatorname{ixp} a) \circ (\operatorname{ixp} b)$ in je zato
 $(\operatorname{ixp} a)_{-1} = \operatorname{ixp}(-a)$ (gl. 1.1)
3. Za vsak $a \in A$ eksistira limita $\lim_{t \in \mathbb{R}, t \rightarrow \infty} \ln(1 + \|\operatorname{ixp}(ta)\|)^{1/t} :=$
 $=: s_q(A, a)$ in velja:
(i) $s_q(A, a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln(1 + \|\operatorname{ixp}(ta)\|)^{1/t} = \max \operatorname{Re}(q - \mathcal{G}(A, a))$
(ii) Če je A brez enote, to pomeni $s_q(A, a) = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a)$
in če ima A enoto, je $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a) \leq s_q(A, a) =$
 $= \max \operatorname{Re}(\mathcal{G}(A, a) \cup \{0\})$.

Opomba: Primerjaj 1.14!

(i) Dokažimo točko 1.15.3(i):

- a) $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$: Algebri A formalno adjungiramo enoto $e = (1, 0)$
(ne glede na to, če že ima enoto) in na razširjeni algebri
 A_e (gl. 0.5.1) definiramo normo $\|\cdot\|_e : \|(\lambda, a)\|_e = |\lambda| + \|a\|$.
Potem je $(A_e, \|\cdot\|_e)$ kompleksna enotska B -algebra ... (1).
Ker je preslikava $a \rightarrow \tilde{a} = (0, a)$ izometrični homomorfizem, je
 $\|e^{t\tilde{a}}\|_e = \|e - \operatorname{ixp}(t\tilde{a})\|_e = \|(1, -\operatorname{ixp}(ta))\|_e = 1 + \|\operatorname{ixp}(ta)\| \dots$
... (2). Zaradi (1) in /3, Teorem 1.3.8/ je $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A_e, \tilde{a}) =$
 $= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{t\tilde{a}}\|_e^{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|e^{t\tilde{a}}\|_e^{1/t} \dots (3)$. Po 1.7 in
1.2.1(i) je $\mathcal{G}(A_e, \tilde{a}) = q - \mathcal{G}(A, a) \dots (4)$. Točke (2), (3) in
(4) dokazujejo 1.15.3(i) v primeru, da je $\mathfrak{F} = \mathbb{C} \dots (5)$.
- b) $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$: Po 1.2.1(ii) in po točki (5) je $\max \operatorname{Re}(q - \mathcal{G}(A, a)) =$

$$= \max \operatorname{Re}(q - \mathcal{G}(A_C, \tilde{a})) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln(1 + \|\exp(t\tilde{a})\|_C)^{1/t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(1 + \|\exp(t\tilde{a})\|_C)^{1/t} \quad \text{in ker je vložitev } x \mapsto \tilde{x}$$
 realne algebre A v njeno kompleksifikacijo A_C izometrični homomorfizem (gl. 0.4.1), velja trditev 1.15.3(i) tudi v primeru, da je $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$.

(ii) Trditev 1.15.3(ii) potrjujeta 1.4(iii) in 1.6(ii), če upoštevamo pravkar dokazano točko 1.15.3(i).

1.16 Primer Naj bo $\mathfrak{F}$ obseg skalarjev ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), $A = \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ in $a = (1, 0)$ ter $b = (0, 1)$. Potem je A asociativna dvodimenzionalna Banachova algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ z bazo $\{a, b\}$, če definiramo:

- (i) $(\alpha a + \beta b) + (\alpha' a + \beta' b) = (\alpha + \alpha')a + (\beta + \beta')b$ za vsak $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathfrak{F}$
- (ii) $\lambda(\alpha a + \beta b) = (\lambda\alpha)a + (\lambda\beta)b$ za vsak $\alpha, \beta, \lambda \in \mathfrak{F}$
- (iii) $(\alpha a + \beta b)(\alpha' a + \beta' b) = (\beta\alpha')a + (\beta\beta')b$ za vsak $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathfrak{F}$. Torej je $aa = 0 = ab$, $ba = a$ in $bb = b$, t.j. $a \in \operatorname{lan} A$ in b je leva enota algebre A .
- (iv) Norma: $\|\alpha a + \beta b\| := |\alpha| + |\beta|$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}$
- (v) Ker je $\operatorname{lan} A \neq \{0\}$, A nima desne enote. Torej A nima enote in je zato $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, x) = q - \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, x)$ za vsak $x \in A$.
- (vi) Za vsak $\lambda \in \mathfrak{F} \setminus \{0\}$ je očitno $(-1/\lambda)a = ((1/\lambda)a)_{-1}$ (gl. 1.1), kar pomeni $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) = \{0\}$ (gl. 1.2.1 in 1.5). Ker je b leva enota, je $(1/1)b + x - (1/1)bx = b \neq 0$ za vsak $x \in A$, kar pomeni $1 \in \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b)$. Po drugi strani pa je za vsak $\lambda \in \mathfrak{F} \setminus \{0, 1\}$ $(1/(1-\lambda))b = ((1/\lambda)b)_{-1}$ (gl. 1.1), kar pomeni $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) = \{0, 1\}$ in zato $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, -b) = \{-1, 0\}$... (*).
Opomba: Vse to očitno velja za kvazi- $\mathfrak{F}$ -spekter poljubnega elementa a iz levega ali desnega anihilatorja algebre A in za levo ali desno enoto algebre A , A poljubna.
- (vii) Ker je b leva enota, je $e^{t(-b)}x = e^{-t}x$ za vsak $t \in \mathfrak{F}$ in zato $\sup_{x \in S} \|e^{t(-b)}x\|^{1/t} = e^{-1}$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$, kar zaradi (*) v točki (vi) pomeni enakost (gl. 1.14):
 $s(A, -b) = -1 = \max \operatorname{Re}(\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, -b) \setminus \{0\})$.
- (viii) Za vsak $x = \alpha a + \beta b$ je $xb = \beta b$ in je zato $xe^{t(-b)} = \alpha a + \beta b + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}\right)(\beta b) = \alpha a + \beta e^{-t}b$ za vsak $t \in \mathfrak{F}$.

To pomeni $\sup_{x \in S} \|xe^{t(-b)}\| = \sup\{|\alpha| + |\beta| \cdot e^{-t} : \alpha, \beta \in \mathcal{F}, |\alpha| + |\beta| = 1\} = \sup\{1 - r(1 - e^{-t}) : r \in [0, 1]\} = 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$. Od tod sledi (gl. 1.14) enakost $s_d(A, -b) = 0 = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, -b)$.

- (ix) $\operatorname{ixp}(ta) = -ta$ in $\operatorname{ixp}(tb) = -(e^t - 1)b$, kar pomeni $s_q(A, a) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(1+t)^{1/t} = 0 = \max \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a)$ in $s_q(A, b) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(1 + (e^t - 1))^{1/t} = 1 = \max \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, b)$.

1.17 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) ter naj bo $\mathcal{G}_0 = \sup \operatorname{Re}(\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\})$ (če je na desni prazna množica, pišemo $\mathcal{G}_0 = -\infty$), $\mathcal{G} = \max \operatorname{Re} \mathcal{G}(A, a)$ in $\mathcal{G}' = \max \operatorname{Re}(\mathcal{G}(A, a) \cup \{0\})$. Potem je $\mathcal{G}_0 \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{G}'$ in velja:

- (i) $\sup_{x \in S} \|e^{ta}x\| \geq e^{\mathcal{G}_0 t}$ in $\sup_{x \in S} \|xe^{ta}\| \geq e^{\mathcal{G}_0 t}$ za vsak $t \geq 0$ (gl. 0.3)
- (ii) Če ima A enoto, je $\|e^{ta}\| \geq \max\{\sup_{x \in S} \|e^{ta}x\|, \sup_{x \in S} \|xe^{ta}\|\} \geq e^{\mathcal{G}t}$ za vsak $t \geq 0$
- (iii) $\|\operatorname{ixp}(ta)\| \geq e^{\mathcal{G}t} - 1$ za vsak $t \geq 0$ (gl. 1.15)
- (iv) Če je A brez enote, je $\|\operatorname{ixp}(ta)\| \geq e^{\mathcal{G}'t} - 1 \geq 0$ za vsak $t \geq 0$.

Opomba: Po 1.6(iii) je $\mathcal{G}_R(A_R, a) = \mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A, a) \subset \mathcal{G}(A, a)$.

Dokaz: Točki (i) in (ii) sledita iz 1.14.2 in 1.14.1, točki (iii) in (iv) pa sta posledici trditve 1.15(ii).

1.18 Posledica Naj bo B zaprta podalgebra Banachove algebre $(A, \|\cdot\|)$ nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Za vsako neprazno množico $M \subset \mathbb{C}$ naj $\operatorname{co}(\operatorname{Re})M$ označuje množico $\operatorname{coRe}M$ v primeru, ko je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ oziroma množico $\operatorname{co}M$, če je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$. V teh oznakah potem velja:

- (i) Če ima B enoto, ki je enota algebre A ali pa če sta A in B brez enote, je $\operatorname{co}(\operatorname{Re})\mathcal{G}(B, b) = \operatorname{co}(\operatorname{Re})\mathcal{G}(A, b)$ za vsak $b \in B$.
- (ii) Če ima A enoto, ki ne leži v podalgebri B, je $\operatorname{co}(\operatorname{Re})\mathcal{G}(B, b) = \operatorname{co}(\operatorname{Re})(\mathcal{G}(A, b) \cup \{0\})$ za vsak $b \in B$.
- (iii) Če ima B enoto, ki ni enota algebre A, je $\operatorname{co}(\operatorname{Re})(\mathcal{G}(B, b) \cup \{0\}) = \operatorname{co}(\operatorname{Re})\mathcal{G}(A, b)$ za vsak $b \in B$.

Opomba: Primerjaj 1.9, 1.9' in 1.6(iv).

Dokaz: Za poljubni kompaktni podmnožici K_1 in K_2 (spektra)

prostora kompleksnih števil velja ekvivalenca: $\text{co}(\text{Re})K_1 = \text{co}(\text{Re})K_2 \Leftrightarrow \max \text{Re}(\lambda K_1) = \max \text{Re}(\lambda K_2)$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$, $|\lambda| = 1$... (1). Za vsak $b \in B$ in $\lambda \in \mathfrak{F}$ je $\mathcal{G}(A, \lambda b) = \lambda \mathcal{G}(A, b)$ in $\mathcal{G}(B, \lambda b) = \lambda \mathcal{G}(B, b)$... (2). Trditve 1.18(i) je neposredna posledica točk 1.14.1 in 1.15.3(ii), če upoštevamo (1) in (2). Trditvi 1.18(ii) in (iii) sledita iz 1.15.3(ii), (1) in (2).

1.19 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna B-algebra brez enote.

Potem velja:

1. $\overline{\text{co}}(\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\}) \subset \text{co}\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) \subset \text{co}\mathcal{G}(A, a)$ za vsak $a \in A$ (gl. 0.5.5), kjer definiramo $\text{co } \phi = \phi$ in $\overline{\text{co}} \phi = \phi$.
2. Če je za element $a \in A$ izpolnjen vsaj eden izmed naslednjih treh pogojev:
 - (i) $\mathcal{G}(A, a) = \{0\}$
 - (ii) 0 ni izolirana točka spektra $\mathcal{G}(A, a)$
 - (iii) $\mathcal{G}(A, \lambda a) \cap (i\mathbb{R} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, potem je $\text{co}\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \text{co}\mathcal{G}(A, a)$.

Dokaz: 1. Za poljubni omejeni množici M_1 in M_2 prostora $\mathfrak{F}$ velja ekvivalenca: $\overline{\text{co}} M_1 \subset \overline{\text{co}} M_2 \Leftrightarrow \sup \text{Re}(\lambda M_1) \leq \sup \text{Re}(\lambda M_2)$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$, $|\lambda| = 1$... (1). Za vsak $a \in A$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{G}(A, \lambda a) = \lambda \mathcal{G}(A, a)$ in $\mathcal{G}(\bar{A}_e, \lambda \bar{a}) = \lambda \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a})$... (2). Po 1.14.2 in 1.12 je $\sup \text{Re}(\mathcal{G}(A, \lambda a) \setminus \{0\}) \leq s(A, a) = \max \text{Re} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \lambda \bar{a})$ za vsak $a \in A$ in $\lambda \in \mathbb{C}$. To po točkah (1) in (2) pomeni inkluzijo $\overline{\text{co}}(\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\}) \subset \overline{\text{co}}\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \text{co}\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a})$ za vsak $a \in A$... (3). Po 1.8, 1.5 in 1.4(iii) pa je $\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) \subset \mathcal{G}(A, a)$ za vsak $a \in A$... (4). Točki (3) in (4) dokazujeta trditve 1.19.1.

Če je za element a izpolnjen eden izmed treh pogojev trditve 1.19.2, je po 1.14.3 in 1.13 $\max \text{Re} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \lambda \bar{a}) = s(A, \lambda a) = \max \text{Re} \mathcal{G}(A, \lambda a)$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$. To zaradi (1) in (2) dokazuje trditve 1.19.2.

1.20 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem so za vsak $a \in A$ ekvivalentne naslednje trditve:

- (i) $\mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R}$
- (ii) $\lim_{t \in \mathbb{R}, |t| \rightarrow \infty} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/|t|} = 0$, (ii') $\lim_{t \in \mathbb{R}, |t| \rightarrow \infty} \ln \sup_{x \in S} \|xe^{ta_x}\|^{1/|t|} = 0$ (gl. 0.3)
- (iii) $\inf_{t \in \mathbb{R}} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/|t|} = 0$, (iii') $\inf_{t \in \mathbb{R}} \ln \sup_{x \in S} \|xe^{ta_x}\|^{1/|t|} = 0$

- (iv) Za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eksistira tak $t_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, da velja:
 $(t \in \mathbb{R}, |t| \geq t_\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\| < e^{|t|\varepsilon}$
- (iv') Za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eksistira tak $t_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, da velja:
 $(t \in \mathbb{R}, |t| \geq t_\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in S} \|xe^{ta}\| < e^{|t|\varepsilon}$
- (v) Za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eksistira tak $t_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, da velja:
 $(t \in \mathbb{R}, |t| \geq t_\varepsilon) \Rightarrow \|\exp(ta)\| < e^{|t|\varepsilon} - 1 \quad (\text{gl. 1.15})$
- (vi) $\inf_{t \in \mathbb{R}} \ln(1 + \|\exp(ta)\|)^{1/|t|} = 0$
- (vii) $\lim_{t \in \mathbb{R}, |t| \rightarrow \infty} \ln(1 + \|\exp(ta)\|)^{1/|t|} = 0$.

Če velja katerakoli trditev izmed zgornjih desetih, je

$$\sup_{x \in S} \|e^{ta} x\| \geq 1 \quad \text{in} \quad \sup_{x \in S} \|xe^{ta}\| \geq 1 \quad \text{za vsak } t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz: Če je $\mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R}$, je $\text{Re}\mathcal{G}(A, a) = \{0\}$ in zato

$\max \text{Re}\mathcal{G}(A, \pm a) = 0$, kar po 1.14.1 ter po 1.14.3(i) in (iv) pomeni $s(\pm a) = s_d(\pm a) = 0$. Torej velja implikacija:

$\mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R} \Rightarrow s(\pm a) = s_d(\pm a) = 0 \quad \dots (1)$. Zaradi 1.14.1, 1.4(iii) ter 1.14.3(ii) velja tudi obratna implikacija: $s(\pm a) = s_d(\pm a) = 0 \Rightarrow \max \text{Re}\mathcal{G}(A, \pm a) = 0 \Rightarrow \mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R} \quad \dots (2)$. Iz (1), (2) in 1.14 sledi ekvivalenca trditev (i), (ii), (ii'), (iii) in (iii'). Trditvi (ii) in (iv) ter (ii') in (iv') sta očitno ekvivalentni.

Zaradi 1.15.3(ii) velja ekvivalenca: $\mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \max \text{Re}\mathcal{G}(A, \pm a) = 0 \Leftrightarrow s_q(A, \pm a) = 0$, ki zaradi 1.15.3(i) dokazuje ekvivalenco naših trditev (i), (vi) in (vii). Trditvi (v) in (vii) sta očitno ekvivalentni.

Vse trditve (i), (ii), ..., (vii) so ekvivalentne trditvama (iii) in (iii'), iz katerih sledi tudi zadnji del trditve 1.20.

1.21 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), $a \in A$ in $M \in \mathbb{R}^+$. Potem velja:

- (i) $(\sup_{x \in S} \|e^{ta} x\| \leq M \text{ za vsak } t \in \mathbb{R}) \Rightarrow (M \geq 1, \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\| \geq (1/M) \text{ za vsak } t \in \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R})$
- (i') $(\sup_{x \in S} \|xe^{ta}\| \leq M \text{ za vsak } t \in \mathbb{R}) \Rightarrow (M \geq 1, \sup_{x \in S} \|xe^{ta}\| \geq (1/M) \text{ za vsak } t \in \mathbb{R} \text{ in } \mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R}) \quad (\text{gl. 0.3})$
- (ii) $(\|\exp(ta)\| \leq M \text{ za vsak } t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R}$.

Dokaz: (i) Po 0.3(ii) in predpostavki točke (i) je

$$\|x\| = \|e^{-ta}(e^{ta}x)\| \leq M\|e^{ta}x\| \text{ za vsak } t \in \mathbb{R} \text{ in } x \in A, \text{ kar}$$

$$\text{pomeni oceno } (1/M) \leq \sup_{x \in S} \|e^{ta}x\| \leq M \text{ za vsak } t \in \mathbb{R} \text{ in zato}$$

$$M \gg 1 \text{ ter } -(\ln M/|t|) \leq \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta}x\|^{1/|t|} \leq (\ln M/|t|), \text{ t.j.}$$

$$\lim_{t \in \mathbb{R}, |t| \rightarrow \infty} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta}x\|^{1/|t|} = 0, \text{ kar po 1.20(ii) pomeni } \mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R}.$$

(i') Ta primer lahko reduciramo na primer (i), če vzamemo namesto algebre A algebro A^* (obratno množenje, gl. 0.1.3).

(ii) Po predpostavki trditve (ii) je $0 \leq \ln(1 + \|\exp(ta)\|) \leq \ln(1 + M)$ in zato $\lim_{t \in \mathbb{R}, |t| \rightarrow \infty} \ln(1 + \|\exp(ta)\|)^{1/|t|} = 0$,

kar po 1.20(vii) pomeni $\mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R}$.

1.22 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ normirana algebra nad obsegom $\mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in naj ima A enoto e . Potem je preslikava $a \mapsto T_a$ ($T_a x = ax$ za vsak $x \in A$) očitno injektivni zvezni homomorfizem (leva regularna reprezentacija) algebre A v algebro $\mathcal{B}(A)$ linearnih omejenih operatorjev na normiranem prostoru $(A, \|\cdot\|)$, ki preslika enoto e algebre A v identiteto I algebre $\mathcal{B}(A)$ ter velja za vsak $a \in A$ naslednje:

- (i) $a \in \text{Inv} A \Rightarrow T_a \in \text{Inv } \mathcal{B}(A)$ in $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$ (gl. 1.3)
- (ii) $T_a \in \text{Inv } \mathcal{L}(A) \Rightarrow a \in \text{Inv} A$ in $a^{-1} = T_a^{-1}e$ ($\mathcal{L}(A)$ je algebra linearnih, ne nujno omejenih operatorjev na A)
- (iii) $\mathcal{G}_{\mathbb{F}}(A, a) = \mathcal{G}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}(A), T_a) = \mathcal{G}_{\mathbb{F}}(\mathcal{B}(A), T_a)$ (gl. /5, Propozicija I.2.19-Opomba/)
- (iv) $\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(\mathcal{B}(A), T_a)$

Dokaz: (i) $aa^{-1} = e = a^{-1}a \Rightarrow T_a T_{a^{-1}} = T_{aa^{-1}} = T_e = I = T_{a^{-1}a} = T_{a^{-1}} T_a \Rightarrow T_a \in \text{Inv } \mathcal{B}(A)$ in velja enakost $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$

(ii) $T_a \in \text{Inv } \mathcal{L}(A) \Rightarrow$ eksistira $T_a^{-1} \in \mathcal{L}(A)$. Naj bo $b = T_a^{-1}e$. Potem je $ab = T_a b = T_a(T_a^{-1}e) = (T_a T_a^{-1})e = Ie = e$ in zato $T_a T_b = T_{ab} = T_e = I$, kar pomeni $T_b = T_a^{-1}$. Zato še $ba = T_b a = T_a^{-1}a = T_a^{-1}(T_a e) = (T_a^{-1} T_a)e = e$. Torej $b = a^{-1}$, t.j. $a \in \text{Inv} A$ in $a^{-1} = b = T_a^{-1}e$.

(iii) Sledi iz (i) in (ii).

(iv) Zaradi (iii) je treba trditev dokazati le za primer,

da je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$. Naj bo torej A realna algebra in naj bo $\tilde{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}(A))_{\mathbb{C}}$ ter $\mathcal{K} = \mathcal{K}(A_{\mathbb{C}})$ (gl. 0.4.1). Za vsak $a \in A$ je $\tilde{a} = (a, 0) \in A_{\mathbb{C}}$, $T_{\tilde{a}} \in \tilde{\mathcal{K}}$ in za vsak $(x, y) \in A_{\mathbb{C}}$ je $T_{\tilde{a}}(x, y) = \tilde{a}(x, y) = (a, 0)(x, y) = (ax, ay) = (T_a x, T_a y) = (T_a, 0)^{\sim}(x, y) = T_a^{\sim}(x, y)$, t.j. $T_{\tilde{a}} = T_a^{\sim} = (T_a, 0)^{\sim} \in \mathcal{K}^{\sim}$ (gl. /13, Trditev 0.2.36.2/). Po /13, Trditev 0.2.36.3/ je zato $\sigma(\tilde{\mathcal{K}}, T_{\tilde{a}}) = \sigma(\mathcal{K}^{\sim}, T_a^{\sim}) = \sigma(\mathcal{K}, T_a) \dots (1)$. Po 1.4(ii) je $\sigma(\tilde{\mathcal{K}}, T_{\tilde{a}}) = \sigma(\mathcal{K}, T_a) \dots (2)$ in $\sigma(A, a) = \sigma(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) \dots (3)$. Po 1.22(iii) je $\sigma(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) = \sigma(\mathcal{K}(A_{\mathbb{C}}), T_{\tilde{a}})$, kjer je $\mathcal{K}(A_{\mathbb{C}}) = \mathcal{K}^{\sim} \dots (4)$. Trditev 1.22(iv) sledi iz (3), (4), (1) in (2).

2. NUMERIČNI ZAKLAD

2.1.1 Naj bo (A, p) polnormirana algebra (ne nujno asociativna) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $(\hat{A}, \|\cdot\|)$ njena faktorska algebra (gl. 0.2.2). Definiramo naslednje množice (gl. 0.2.3):

$$S := S(A) := \{x \in A : p(x) = 1\}, \quad \hat{S} := S(\hat{A}) := \{\hat{x} \in \hat{A} : \|\hat{x}\| = 1\}$$

$$S' := S(A') := \{f \in A' : \|f\| = 1\}, \quad \hat{S}' := S(\hat{A}') := \{F \in \hat{A}' : \|F\| = 1\}.$$

Za vsak $x \in S$ naj bo $D(x) := D(A, x) = \{f \in S' : f(x) = 1\}$ in za vsak $\hat{x} \in \hat{S}$ naj bo $D(\hat{x}) := D(\hat{A}, \hat{x}) = \{F \in \hat{S}' : F(\hat{x}) = 1\}$.

2.1.2 Trditev Če je (A, p) polnormirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $\mathcal{N} = \{a \in A : p(a) = 0\}$, velja:

- (i) $(x \in A, y \in \mathcal{N}) \Rightarrow p(x+y) = p(x)$
- (ii) $(x \in S, y \in \mathcal{N}) \Rightarrow D(x+y) = D(x) \neq \emptyset$
- (iii) $x \in S \Rightarrow D(\hat{x}) = \{\hat{f} : f \in D(x)\}$ (gl. 0.2.4)

Dokaz: (i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) = p(x) = p((x+y)-y) \leq p(x+y) + p(y) = p(x+y)$

- (ii) Zaradi (i) velja: $(p(x) = 1, f \in D(x), y \in \mathcal{N}) \Rightarrow \Rightarrow ((x+y) \in S, f(x+y) = f(x) + f(y) = f(x), \text{ ker je } |f(y)| \leq p(y) = 0)$. Torej: $y \in \mathcal{N} \Rightarrow D(x) \subset D(x+y)$ in zato tudi $D(x+y) \subset D((x+y) + (-y)) = D(x)$. Če je $p(x) = 1$, velja za funkcional f_0 , $f_0(\lambda x) := \lambda$, ki je definiran na prostoru $Y := \{\lambda x : \lambda \in \mathfrak{F}\}$ ocena $|f_0(y)| \leq p(y)$ za vsak $y \in Y$. Po H-B izreku lahko zato funkcional f_0 razširimo do funkcionala f , ki je linearen na A in za katerega velja ocena $|f(a)| \leq p(a)$ za vsak $a \in A$. Torej je $D(x) \neq \emptyset$.

- (iii) Sledi iz 0.2.4.

2.1.3 DEFINICIJA (gl. 2.1.1):

- (i) Za vsak $a \in A$ in $x \in S$ naj bo $V(A, a, x) = \{f(ax) : f \in D(x)\}$ in $V_d(A, a, x) = \{f(xa) : f \in D(x)\}$.
- (ii) Množico $V(A, a) := \{f(ax) : x \in S, f \in D(x)\} = \bigcup_{x \in S} V(A, a, x)$ imenujemo levi numerični zaklad elementa a polnormirane algebre (A, p) glede na algebro A .
- (iii) Množico $V_d(A, a) := \{f(xa) : x \in S, f \in D(x)\} = \bigcup_{x \in S} V_d(A, a, x)$ imenujemo desni numerični zaklad elementa a polnormirane algebre (A, p) glede na algebro A .

2.1.4 Trditev Naj bo (A, p) polnormirana algebra (ne nujno asociativna) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem veljajo za vsak $a, b \in A$ naslednje trditve:

1. $V(A, a) = V(\hat{A}, \hat{a})$ (gl. 0.2.2)
2. Če označimo z $\mathfrak{B}(\hat{A})$ enotsko normirano algebro vseh linearnih omejenih operatorjev (sup - norma) $\hat{A} \mapsto \hat{A}$ in s $T_{\hat{a}}$ operator iz $\mathfrak{B}(\hat{A})$, ki ga definira enačba $T_{\hat{a}}\xi = \hat{a}\xi$ za vsak $\xi \in \hat{A}$ ($T_{\hat{a}}$ je operator levega množenja na algebri $\hat{A}$), velja:
 - (i) $V(A, a) = V(T_{\hat{a}}) =$ prostorski numerični zaklad operatorja $T_{\hat{a}}$ (gl. /3, Definicija 3.9.1/) in zato
 - (ii) $\overline{\text{co}}V(A, a) = V(\mathfrak{B}(\hat{A}), T_{\hat{a}})$.
3. $V(A, a)$ je neprazna, omejena in povezana podmnožica prostora $\mathfrak{F}$ z lastnostjo $\sup |V(A, a)| \leq \sup_{x \in S} p(ax) \leq p(a)$.
4. $V(A, \lambda a) = \lambda V(A, a)$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$.
5. $V(A, a+b) \subset V(A, a) + V(A, b)$
6. $V_d(A, a) = V(A^*, a)$ (gl. 0.1.3).

Dokaz: 1. Po 2.1.2(iii) in 0.2.4 je $V(\hat{A}, \hat{a}) = \{F(\hat{a}\hat{x}) : \hat{x} \in \hat{S}, F \in D(\hat{x})\} = \{\hat{f}((ax)^\wedge) : x \in S, f \in D(x)\} = \{f(ax) : x \in S, f \in D(x)\} = V(A, a)$

2. (i) Po /3, Definicija 3.9.1/ je $V(T_{\hat{a}}) = V(\hat{A}, \hat{a})$, kar zaradi 2.1.4.1 dokazuje enakost (i).
 (ii) Sledi iz (i) in /3, Teorem 3.9.4(i)/.

3. Zaradi 2.1.2(ii) je $V(A, a) \neq \emptyset$, zaradi 2.1.4.2(i) in /3, Korolar 3.11.5/ je $V(A, a)$ povezana v $\mathfrak{F}$ in po definiciji 2.1.3(ii) velja: $\lambda \in V(A, a) \Rightarrow$ eksistira $x \in S$ in $f \in D(x)$, da je $\lambda = f(ax)$, $\Rightarrow |\lambda| \leq \|f\|p(ax) = p(ax) \leq p(a)p(x) = p(a)$ (gl. 0.2.3).

4., 5., 6. Očitno.

2.1.5 Trditev Naj bo (A, p) enotska polnormirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) z enoto e ($p(e) = 1$). Potem za vsak $a \in A$ velja:

- (i) $V(A, a) = V_d(A, a) = \{f(a) : f \in D(e)\}$ neprazna kompaktna in konveksna podmnožica prostora $\mathfrak{F}$.
- (ii) $\max \text{Re} V(A, a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((p(e+ta)-1)/t) = \lim_{t \downarrow 0} ((p(e+ta)-1)/t)$
- (iii) Če je B podalgebra algebre A in $e \in B$, je $V(B, b) = V(A, b)$ za vsak $b \in B$.

Dokaz: (i) Ker je faktorska algebra $(\hat{A}, \|\cdot\|)$ polnormirane algebre (A, p) enotska normirana algebra z enoto $\hat{e}$ (gl. 0.2.2), je po /3, Lema 1.2.2 in Teorem 1.2.3/ $V(\hat{A}, \hat{a}) = \{F(\hat{a}) : F \in D(\hat{e})\}$ neprazna kompaktna in konveksna podmnožica prostora $\mathfrak{F} \dots$ (1). Po 2.1.4.1 je $V(A, a) = V(\hat{A}, \hat{a}) \dots$ (2) in po 2.1.2(iii) ter 0.2.4 sledi $\{F(\hat{a}) : F \in D(\hat{e})\} = \{\hat{f}(\hat{a}) : f \in D(e)\} = \{f(a) : f \in D(e)\} \dots$ (3). Trditev (i) dokazujejo točke (1), (2), (3) in trditev 2.1.4.6.

(ii) Zaradi 0.2.2 je $(p(e+ta)-1)/t = (\|\hat{e}+t\hat{a}\|-1)/t$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$ in ker je faktorska algebra $(\hat{A}, \|\cdot\|)$ enotska normirana, to zaradi 2.1.4.1 in /3, Teorem 1.2.5/ že dokazuje trditev (ii).

(iii) Zaradi 2.1.4.4, (i) in (ii) je $\max_{\lambda \in \mathfrak{F}} \operatorname{Re}[\lambda V(B, b)] = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((p(e+t\lambda b)-1)/t) = \max_{\lambda \in \mathfrak{F}} \operatorname{Re}[\lambda V(A, b)]$ za vsak $b \in B$ in $\lambda \in \mathfrak{F}$. Ker sta po (i) $V(A, b)$ in $V(B, b)$ kompaktni in konveksni množici, to že dokazuje trditev (iii) (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.18).

2.1.6 Trditev Naj bosta (A, p) in (B, q) enotski polnormirani algebri nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) z enotama $e \in A$ in $f \in B$ ter naj bo Φ homomorfizem algebre A v algebro B z lastnostjo $\Phi(e) = f$ in $q(\Phi(a)) \leq p(a)$ za vsak $a \in A$. Potem je $V(B, \Phi(a)) = V(\Phi(A), \Phi(a)) \subset V(A, a)$ za vsak $a \in A$.

Dokaz: Enakost sledi iz 2.1.5(iii), inkluzija pa iz ocene $\max_{\lambda \in \mathfrak{F}} \operatorname{Re}[\lambda V(\Phi(A), \Phi(a))] = \max_{\lambda \in \mathfrak{F}} \operatorname{Re} V(\Phi(A), \Phi(\lambda a)) \leq \max_{\lambda \in \mathfrak{F}} \operatorname{Re} V(A, \lambda a) = \max_{\lambda \in \mathfrak{F}} \operatorname{Re}[\lambda V(A, a)]$, ki velja za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$ ($|\lambda| = 1$) in ki je posledica trditve 2.1.4.4 in 2.1.5(ii) (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.18 oz. 1.19).

2.2 NUMERIČNI ZAKLAD ELEMENTA NORMIRANE ALGEBRE NAD OBSEGOM $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$)

V vsem odstavku 2.2 naj bo $(A, \|\cdot\|)$ normirana algebra nad obsegom ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), ne nujno asociativna!

2.2.1 Trditev Če je B netrivialna podalgebra algebre A , je $V(B, b) \subset V(A, b)$ za vsak $b \in B$.

Dokaz: H-B izrek nam omogoča razširitev funkcionala $f_0 \in D(B, x)$ do funkcionala $f \in D(A, x)$.

2.2.2 Trditev (i) $x \in S \Rightarrow V(A, a, x) = \bigcap_{\lambda \in \mathcal{F}} K_x(a, \lambda)$ neprazna,

kompaktna in konveksna podmnožica prostora $\mathcal{F}$, kjer je $K_x(a, \lambda) = \{\alpha \in \mathcal{F} : |\alpha - \lambda| \leq \|ax - \lambda x\|\}$ zaprt "krog" s središčem v točki $\lambda \in \mathcal{F}$.

$$(ii) \quad V(A, a) = \bigcup_{x \in S} \bigcap_{\lambda \in \mathcal{F}} K_x(a, \lambda) = \bigcap_{\lambda \in \mathcal{F}} \bigcup_{x \in S} K_x(a, \lambda).$$

Opomba: Ni treba, da je A asociativna!

Dokaz: (i) a) Naj bo $x \in S$ in $\alpha \in \bigcap_{\lambda \in \mathcal{F}} K_x(a, \lambda)$. Potem je $|\alpha - \lambda| \leq \|ax - \lambda x\|$ za vsak $\lambda \in \mathcal{F}$ (1). Če je ax kolinearen z x , $ax = \mu x$, potem je $f(ax) = \mu f(x) = \mu$ za vsak $f \in D(x)$, kar zaradi (1) pomeni $|\alpha - f(ax)| \leq \|ax - f(ax)x\| = \|\mu x - \mu x\| = 0$, t.j. $\alpha = f(ax) \in V(A, a, x)$. Če sta pa ax in x linearno neodvisna (t.j. $ax \neq \mu x$ za vsak $\mu \in \mathcal{F}$), potem za funkcional f_0 , $f_0(\xi ax + \eta x) := \xi \alpha + \eta$ velja $f_0(ax) = \alpha$, $f_0(x) = 1$... (2) in zaradi (1) je za vsak $\xi \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ tudi $|f_0(\xi ax + \eta x)| \leq |\xi \alpha + \eta| = |\xi| |\alpha - (-\eta/\xi)| \leq |\xi| \|ax - (-\eta/\xi)x\| = \|\xi ax + \eta x\|$, t.j. $|f_0(\xi ax + \eta x)| \leq \|\xi ax + \eta x\|$ za vsak $\xi, \eta \in \mathcal{F}$. Po H-B izreku lahko zato f_0 razširimo do $f \in A'$ tako, da je $\|f\| = \|f_0\| = 1$. To zaradi (2) spet pomeni $\alpha \in V(A, a, x)$.

b) Naj bo $\alpha \in V(A, a, x)$. Potem eksistira $x \in S$ in $f \in D(x)$, da je $\alpha = f(ax)$. Zato $|\alpha - \lambda| = |f(ax) - \lambda f(x)| = |f(ax - \lambda x)| \leq \|ax - \lambda x\|$ za vsak $\lambda \in \mathcal{F}$, t.j. $\alpha \in \bigcap_{\lambda \in \mathcal{F}} K_x(a, \lambda)$. Točki a) in b) dokazujeta enakost v trditvi 2.2.2(i), iz katere sledi po definiciji 2.1.3(ii) trditev 2.2.2(ii). Po definiciji 2.1.3(i) in po 2.1.2(ii) je $V(A, a, x) \neq \emptyset$ za vsak $x \in S$ in zaradi že dokazane enakosti v (i) je $V(A, a, x)$ očitno omejena, zaprta in konveksna podmnožica prostora $\mathcal{F}$.

2.2.3 Trditev Če je algebra A končno-dimenzionalna, je za vsak $a \in A$ numerični zaklad $V(A, a)$ neprazna, kompaktna in povezana podmnožica prostora $\mathcal{F}$.

Opomba: 1) Glej primer 2.3.9 ! 2) Ni treba, da je A asociativna!

Dokaz: Vzemimo poljuben $a \in A$ in poljubno zaporedje $\lambda_n \in V(A, a)$ tako, da zaporedje $\lambda_n \rightarrow \lambda$ za $n \rightarrow \infty$... (1). Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ eksistira tak $x_n \in S$ in $f_n \in D(x_n)$, da je $\lambda_n = f_n(ax_n)$... (2). Ker je $\dim A < \infty$, je enotska sfera S kompaktna v A in zato tudi po zaporedjih kompaktna. Torej vsebuje zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno podzaporedje. Lahko vzamemo, da je konvergentno že kar prvotno zaporedje. Torej $x_n \rightarrow x \in S$... (3). Ker je

dualni prostor A' tudi končno-dimenziionalen normiran prostor, je $D(x) = \{f \in A' : f(x) = 1\} \cap S(A')$ kompaktna in zato tudi po zaporedjih kompaktna podmnožica prostora A' . Zato vsebuje zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno podzaporedje in spet lahko vzamemo, da je konvergentno že kar prvotno zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zato

$f_n \rightarrow f \in S(A')$... (4). Zaradi (2) in (3) imamo oceno

$$|f(x) - 1| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_n)| \leq \|f - f_n\| \|x\| + \|f_n\| \|x - x_n\| = \|f - f_n\| + \|x - x_n\| \text{ za vsak } n \in \mathbb{N} \quad \dots (5).$$

Iz (3), (4) in (5) sledi $f(x) = 1$ in zato po (4) $f \in D(x)$... (6).

Zaradi (2) je $|\lambda - f(ax)| \leq |\lambda - \lambda_n| + |f_n(ax_n) - f_n(ax)| + |f_n(ax) - f(ax)| \leq |\lambda - \lambda_n| + \|f_n\| \|a\| \|x_n - x\| + \|f_n - f\| \|a\| \|x\|$, kar po (1), (2), (3), (4) in (6) pomeni $\lambda = f(ax) \in V(A, a)$.

Torej je $V(A, a)$ zaprta množica, kar zaradi 2.1.4.3 dokazuje našo trditev.

2.2.4 Trditev Če je normirana algebra $(A, \|\cdot\|)$ Hilbertov prostor nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) (t.j., če je $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra in če ustreza norma $\|\cdot\|$ paralelogramski enačbi $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ za vsak $x, y \in A$), potem je numerični zaklad $V(A, a) = \{\langle ax, x \rangle : x \in S\}$ konveksna podmnožica prostora $\mathfrak{F}$ za vsak $a \in A$, kjer je $\langle, \rangle$ (enolično določen) skalarni produkt, ki ga inducira norma $\|\cdot\|$: $\|a\|^2 = \langle a, a \rangle$ za vsak $a \in A$.

Opomba: **1)** Če je $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna enotska B-algebra in za normo $\|\cdot\|$ hkrati tudi Hilbertov prostor, je A izomorfna obsegu $\mathbb{C}$ kompleksnih števil $/7; [9, 10], [9, 3]/$. Če pa je $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna B-algebra brez enote in za normo $\|\cdot\|$ tudi Hilbertov prostor, algebra A ni nujno izomorfna obsegu $\mathbb{C}$ (gl. 2.3.13).
2.) Ni treba, da je A asociativna !

3.) Paralelogramska e. ni potreben pogoj* za konveksnost n. zaklada!

Dokaz: Vzemimo poljuben $x \in S$. Po Riesz-ovem izreku eksistira za vsak $f \in D(x)$ natanko en tak $y \in A$, da je $\|y\| = \|f\|$ in $f(z) = \langle z, y \rangle$ za vsak $z \in A$. Ker je $f \in D(x)$, je $1 = f(x) = \|f\|$ in preide **zato** Schwarz-ova neenakost v enakost: $|\langle x, y \rangle| = |f(x)| = 1 = \|x\| \|y\|$. To pomeni, da eksistira tak $\lambda \in \mathfrak{F}$, da je $y = \lambda x$. Zato je $\lambda = f(\lambda x) = f(y) = \langle y, y \rangle = \|y\|^2 = 1$, t.j. $y = x$, t.j. $f(z) = \langle z, x \rangle$ za vsak $z \in A$. Torej velja za vsak $x \in S$ implikacija: $f \in D(x) \Rightarrow f(z) = \langle z, x \rangle$ za vsak $z \in A$. Obratna implikacija je očitna in zato $V(A, a) = \{\langle ax, x \rangle : x \in S\}$... (1).

Zaradi 2.1.4.3 je treba dokazati konveksnost množice $V(A, a)$

*gl. 13.2.4(15), 13.2.5(24), 13.3.2(5), 13.3.4(7), 13.4.2(4) in 4(9)

le za primer, da je $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$. Za vsak $a \in A$ je operator T_a levega množenja ($T_a x = ax$ za vsak $x \in A$) ... (2) linearen in omejen operator na Hilbertovem prostoru $(A, \langle, \rangle)$ in je zato po /4, Teorem 5.15.11/ "skalarni" numerični zaklad $W(T_a) = \{\langle T_a x, x \rangle : x \in S\}$ konveksna podmnožica prostora $\mathbb{C}$... (3). Točke (1), (2) in (3) dokazujejo konveksnost množice $V(A, a)$.

2.2.5 Trditev Če ima algebra A levo enoto e , definiramo za

vsak $a \in A$ množici $V'(A, a)$ in $V''(A, a)$, $V'(A, a) := \{g(a) : g \in D(A, e/\|e\|)\} = \{g(a) : g \in A', \|g\| = 1, g(e) = \|e\|\}$ in $V''(A, a) := \{g(a) : g \in A', 1/\|e\| \leq \|g\| \leq 1, g(e) = 1\}$. Velja naslednje:

- (i) $V'(A, a) = \|e\|V(A, a, e/\|e\|)$ neprazna, konveksna za vsak $a \in A$.
- (ii) $V'(A, a)$ in $V''(A, a)$ sta za vsak $a \in A$ kompaktni podmnožici prostora $\mathfrak{F}$.
- (iii) Za vsak $a \in A$ in $\lambda, \mu \in \mathfrak{F}$ je $V'(A, \lambda a + \mu e) = \lambda V'(A, a) + \{\mu\|e\|\}$, $V''(A, \lambda a + \mu e) = \lambda V''(A, a) + \{\mu\}$ in $V(A, e) = \{1\}$.
- (iv) Za vsak $a, b \in A$ je $V'(A, a+b) \subset V'(A, a) + V'(A, b)$ in $V''(A, a+b) \subset V''(A, a) + V''(A, b)$.
- (v) Če je B podalgebra algebre A in $e \in B$, je $V'(B, b) = V'(A, b)$ in $V''(B, b) = V''(A, b)$ za vsak $b \in B$.
- (vi) Za vsak $a \in A$ je $V'(A, a) \subset \|e\|V_d(A, a)$ in $V(A, a) \subset V''(A, a)$.
- (vi') Če je e enota (dvostranska) algebre A , je $(1/\|e\|)V'(A, a) \subset V(A, a) \cap V_d(A, a) \subset V(A, a) \cup V_d(A, a) \subset V''(A, a)$ za vsak $a \in A$.
- (vii) Če je $\|e\| = 1$, je $V(A, a) \subset V''(A, a) = V'(A, a) \subset V_d(A, a)$.
- (vii') Če je e enota (dvostranska) algebre A in je $\|e\| = 1$, je $V'(A, a) = V''(A, a) = V(A, a) = V_d(A, a)$ za vsak $a \in A$.

Opomba: Ni treba, da je A asociativna!

Dokaz: (i) Definicija 2.1.3(i) in trditev 2.2.2(i).

(ii) Da je $V'(A, a)$ kompaktna, sledi iz (i) in 2.2.2(i). Da je tudi $V''(A, a)$ kompaktna, sledi iz šibke*-kompaktnosti množice $G := \{g \in A' : g(e) = 1, 1/\|e\| \leq \|g\| \leq 1\}$, ki je posledica šibke*-zaprtosti množice G in šibke*-kompaktnosti enotske krogle prostora A' .

(iii), (iv) Očitno.

(v) Hahn-Banachov izrek.

(vi) a) $g \in D(e/\|e\|) \Rightarrow g \in A'$, $g(e/\|e\|) = 1 = \|g\| \Rightarrow g(a) = \|e\|g((e/\|e\|)a) \in \|e\|V_d(A,a)$. Torej $V'(A,a) \subset \|e\|V_d(A,a)$ in analogno $V'(A,a) \subset \|e\|V_d(A^*,a) = \|e\|V(A,a)$, če je e desna enota (gl. 2.1.4.6).
b) Vzemimo poljuben $x \in S$, $f \in D(x)$ in naj bo $\lambda = f(ax)$. Za funkcional g , $g(y) := f(yx)$ za vsak $y \in A$, zato velja: $g(e) = 1$ in $g(e/\|e\|) = (1/\|e\|)f(x) = 1/\|e\|$, t.j. $\|g\| \geq 1/\|e\|$, $|g(y)| \leq \|f\|\|y\|\|x\| \leq 1 \cdot \|y\| \cdot 1$ za vsak $y \in A$, t.j. $\|g\| \leq 1$ ter $\lambda = f(ax) = g(a) \in V''(A,a)$. Torej $V(A,a) \subset V''(A,a)$.

(vi') Če je e enota algebre A , je e tudi leva enota algebre A^* (gl. 0.1.3) in je zato po točki (vi) $V'(A,a) = V'(A^*,a) \subset \|e\|V_d(A^*,a) = \|e\|V(A,a)$ in $V_d(A,a) = V(A^*,a) \subset V''(A^*,a) = V''(A,a)$, kar skupaj s točko (vi) dokazuje (vi').

(vii) Sledi neposredno iz (vi) in iz definicije množic $V'(A,a)$ in $V''(A,a)$.

(vii') Sledi iz (vi').

2.2.6 Lema Za vsak $x \in S$ eksistira $\lim_{t \downarrow 0} ((\|x+tax\|-1)/t)$ in je

$$\sup_{\text{Re}V(A,a,x)} \leq \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|x+tax\|-1)/t) = \lim_{t \downarrow 0} ((\|x+tax\|-1)/t).$$

Opomba: Ni treba, da je A asociativna!

Dokaz: a) $(x \in S, f \in D(x)) \Rightarrow \text{Re}f(ax) = \text{Re}((f(x+tax)-1)/t) \leq (|f(x+tax)|-1)/t \leq (\|x+tax\|-1)/t$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$.

b) Ker je preslikava $\varphi(t) = \|x+ty\|$ konveksna na $\mathbb{R}$ za vsak $x, y \in A$, je preslikava $t \mapsto (\varphi(t) - \varphi(0))/(t-0) = (\|x+ty\|-1)/t$ monotono rastoča na $\mathbb{R}^+$ in je zato

$$\inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\varphi(t) - 1)/t) = \lim_{t \downarrow 0} ((\varphi(t) - 1)/t).$$

2.2.7 IZREK Za vsak $a \in A$ je $\sup_{\text{Re}V(A,a)} =$

$$= \inf_{t \in \mathbb{R}^+, x \in S} (\|x+tax\|-1)/t = \lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} ((\|x+tax\|-1)/t) =$$

$$= \sup_{x \in S} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|x+tax\|-1)/t) = \sup_{x \in S} \lim_{t \downarrow 0} ((\|x+tax\|-1)/t).$$

Opomba: Ni treba, da je A asociativna!

Dokaz: Ker je preslikava $\|\cdot\|$ norma, je ničelni prostor $\mathcal{N} = \{0\}$ (gl. 0.2.2) in je zato faktorska algebra $(\hat{A}, \|\cdot\|)$ izometrično izomorfna algebri $(A, \|\cdot\|)$. Po 2.1.4 je zato

$$\overline{\text{co}}V(A, a) = V(\mathcal{B}(A), T_a), \text{ kjer je } T_a x = ax \text{ za vsak } x \in A \quad \dots (1).$$

Ker je $\mathcal{B}(A)$, prostor vseh linearnih omejenih operatorjev na A , enotska asociativna normirana algebra (v sup-normi) z enoto I , je po /3, Teorem 1.2.5/ $\max \text{Re}V(\mathcal{B}(A), T_a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|I + tT_a\| - 1)/t) =$

$$= \lim_{t \downarrow 0} ((\|I + tT_a\| - 1)/t) \quad \dots (2). \text{ Prvi dve enakosti izreka sledita}$$

iz (1) in (2), če upoštevamo definicijo sup-norme operatorjev iz $\mathcal{B}(A)$ $\dots (3)$.

Naj bo $\mu = \sup \text{Re}V(A, a) \quad \dots (4)$. Potem eksistira za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tak $x_\varepsilon \in S$ in $f_\varepsilon \in D(x_\varepsilon)$, da je $\mu - \varepsilon < \text{Re}[f_\varepsilon(ax_\varepsilon)] = (\text{Re} f_\varepsilon(x_\varepsilon + tax_\varepsilon) - 1)/t \leq (\|x_\varepsilon + tax_\varepsilon\| - 1)/t$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$ (gl. dokaz leme 2.2.6). To pomeni $\mu - \varepsilon \leq \sup_{x \in S} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|x + tax\| - 1)/t)$ za vsak

$$\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ in zato } \mu \leq \sup_{x \in S} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|x + tax\| - 1)/t) \quad \dots (5). \text{ Ker velja za}$$

vsako realno funkcijo $F(x, t)$ ocena $\sup_{x \in S} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} F(x, t) \leq \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} F(x, t)$,

sledi iz (3), (4), (5) in iz leme 2.2.6 enakost

$$\mu = \sup_{x \in S} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|x + tax\| - 1)/t) = \sup_{x \in S} \lim_{t \downarrow 0} ((\|x + tax\| - 1)/t), \text{ kar zaradi}$$

(3) v celoti potrjuje izrek.

2.2.8 Trditev Če sta A in B normirani algebri nad obsegom $\mathcal{F}$ (= $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in je preslikava $\Phi : A \rightarrow B$ izometrični homomorfizem z lastnostjo $S(B) = \overline{\Phi(S(A))}$, potem je

$$\overline{\text{co}}V(B, \Phi(a)) = \overline{\text{co}}V(A, a) \text{ za vsak } a \in A.$$

Dokaz: Če je X topološki prostor in $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, velja za vsako neprazno podmnožico $M \subset X$ enakost

$$\sup_{x \in M} f(x) = \sup_{m \in M} f(m). \text{ Ker je } S(B) = \overline{\Phi(S(A))} \text{ in je } \Phi \text{ izome-}$$

trični homomorfizem, pomeni to enakosti: $\sup_{\xi \in S(B)} \|\xi + t\Phi(a)\xi\| =$

$$= \sup_{\xi \in \Phi(S(A))} \|\xi + t\Phi(a)\xi\| = \sup_{x \in S(A)} \|\Phi(x) + t\Phi(a)\Phi(x)\| = \sup_{x \in S(A)} \|\Phi(x + tax)\| =$$

$$= \sup_{x \in S(A)} \|x + tax\| \text{ za vsak } t \in \mathcal{F}. \text{ Zato je po 2.1.4.4 in po 2.2.7}$$

$$\sup \text{Re}[\lambda \overline{\text{co}}V(B, \Phi(a))] = \sup \text{Re}V(B, \Phi(\lambda a)) =$$

$$= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{\xi \in S(B)} ((\|\xi + t\Phi(\lambda a)\xi\| - 1)/t) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S(A)} ((\|x + t(\lambda a)x\| - 1)/t) =$$

$$= \sup \text{Re}V(A, \lambda a) = \sup \text{Re}[\lambda \overline{\text{co}}V(A, a)] \text{ za vsak } \lambda \in \mathcal{F}, |\lambda| = 1.$$

Ker je zaprta konveksna ogrinjača omejene (gl. 2.1.4.3) podmnožice prostora $\mathfrak{F}$ kompaktna, to dokazuje našo trditve (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.19).

2.2.9 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ normirana (nepolna) algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), $(\bar{A}, \|\cdot\|)$ njena standardna izpopolnitev in $a \mapsto \tilde{a}$ izometrična homomorfna vložitev algebre A v $\bar{A}$ ($\tilde{A} := \{\tilde{a} : a \in A\}$ gosta v $\bar{A}$, gl. /13, 0.2.14.1/). Potem je $\overline{\text{coV}}(\bar{A}, \tilde{a}) = \overline{\text{coV}}(A, a)$ za vsak $a \in A$.

Dokaz: Ker je $\tilde{A}$ gosta v $\bar{A}$, eksistira za vsak $\xi \in S(\bar{A})$ tako zaporedje $a_n \in A$, da je $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n$. Zaradi $|\|\tilde{a}_n\| - 1| = \|\tilde{a}_n\| - 1 \leq \|\tilde{a}_n - \xi\|$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{a}_n\| = 1$ in za zaporedje $b_n := (a_n / \|a_n\|) \in S(A)$ je zato $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{b}_n = \xi$. Torej $S(\bar{A}) \subset \overline{(S(A))^\sim}$. Trditev sledi sedaj iz 2.2.8.

2.2.10 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ realna normirana algebra, $(A_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ njena kompleksifikacija (gl. 0.4) in $a \mapsto \tilde{a} := (a, 0)$ izometrično homomorfna vložitev A v $A_{\mathbb{C}}$. Potem je $\overline{V(A, a)} = \overline{\text{ReV}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})}$ za vsak $a \in A$.

Dokaz: Po 2.2.7 in 0.4.3(i) je $\max \overline{\text{ReV}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})} = \sup \text{ReV}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{\xi \in S(A_{\mathbb{C}})} ((\|\xi + t\tilde{a}\|_{\mathbb{C}} - 1)/t) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S(A)} ((\|x + tax\| - 1)/t) = \sup V(A, a) = \max \overline{V(A, a)}$, t.j. $\max \overline{\text{ReV}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})} = \max \overline{V(A, a)}$ za vsak $a \in A$... (1). Zato je tudi $\min \text{ReV}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) = -\max \text{ReV}(A_{\mathbb{C}}, -\tilde{a}) = \max V(A, -a) = \min V(A, a)$... (2). Ker sta po 2.1.4.3 $\text{ReV}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})$ in $V(A, a)$ kompaktna intervala, sledi iz (1) in (2) iskana enakost.

2.3 NUMERIČNI ZAKLAD ELEMENTA NETRIVIALNE ASOCIATIVNE NORMIRANE ALGEBRE NAD OBSEGOM $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$)

2.3.1 Izrek Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in če ima A enoto e ($\|e\| \neq 1$), lahko algebro A renormiramo do enotske normirane algebre $(A, \|\cdot\|_1)$: $\|a\|_1 := \sup_{x \in S} \|ax\|$ za vsak $a \in A$. Če označimo na kratko z A normirano algebro glede na prvotno normo $\|\cdot\|$ in z A_1 (enotsko) normirano algebro glede na novo normo $\|\cdot\|_1$, velja za vsak $a \in A$ enakost: $\overline{\text{co}}V(A, a) = V(A_1, a) = V(\hat{A}_e, \hat{a})$, kjer je $\hat{A}_e$ enotska normirana algebra, ki jo dobimo iz normirane algebre A s formalno adjunkcijo enote (gl. 0.5.4).

Dokaz: Po 2.2.5(i) in (vii') sta $V(A_1, a)$ in $V(\hat{A}_e, \hat{a})$ neprazni kompaktni in konveksni podmnožici obsega $\mathcal{F}$... (1).

Ker sta A_1 in $\hat{A}_e$ enotski normirani algebre, je po 2.1.5(ii) in 2.2.7 $\max \text{Re} V(A_1, a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} (\|e + ta\|_1 - 1)/t =$

$$= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} (\|x + tax\| - 1)/t = \sup \text{Re} V(A, a) = \max \text{Re} \overline{\text{co}} V(A, a) \text{ za}$$

vsak $a \in A$... (2). Analogno je po 2.1.5(ii), 0.5.6.1 in

$$2.2.7 \max \text{Re} V(\hat{A}_e, \hat{a}) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} (\|\hat{e} + t\hat{a}\| - 1)/t =$$

$$= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} (\|x + tax\| - 1)/t = \max \text{Re} \overline{\text{co}} V(A, a) \text{ za vsak } a \in A \text{ ... (3).}$$

Izrek dokazujejo točke (1), (2) in (3) in trditev 2.1.4.4 (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.18 oz. 1.19).

2.3.2 IZREK Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) z enoto ali brez nje. Potem je $\overline{\text{co}}V(A, a) = V(A_e, \tilde{a}) = V(\hat{A}_e, \hat{a}) = V(\bar{A}_e, \bar{a})$ za vsak $a \in A$ (gl. 0.5.1, 0.5.2, 0.5.4 in 0.5.5).

Opomba: Algebre A_e , $\hat{A}_e$ in $\bar{A}_e$ tvorimo formalno, neodvisno od tega ali A ima enoto ali ne!

Dokaz: Po 0.5.2, 0.5.4 in 0.5.5 so $(A_e, 1.1)$, $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ in $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ enotske (pol)normirane algebre in so zato po 2.1.5(i) $V(A_e, \tilde{a})$, $V(\hat{A}_e, \hat{a})$ in $V(\bar{A}_e, \bar{a})$ neprazne, kompaktne in konveksne podmnožice prostora $\mathcal{F}$ za vsak $a \in A$... (1). Po 2.1.5(ii), 0.5.2 in 2.2.7 je $\max \text{Re} V(A_e, \tilde{a}) =$

$$= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} (\|e + t\tilde{a}\| - 1)/t = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} (\|(1, ta)\| - 1)/t =$$

$$= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} ((\|x + tax\| - 1)/t) = \sup \text{Re} V(A, a) = \max \text{Re} \overline{\text{co}} V(A, a) \quad \underline{\text{za}}$$

vsak $a \in A$... (2). Po 2.1.5 in 0.5.6.1 je $\max \text{Re} V(\hat{A}_e, \hat{a}) =$

$$\inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|\hat{e} + t\hat{a}\| - 1)/t) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} ((\|x + tax\| - 1)/t) =$$

$$= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|\bar{e} + t\bar{a}\| - 1)/t) = \max \text{Re} V(\bar{A}_e, \bar{a}) \quad \underline{\text{za vsak } a \in A} \quad \dots (3).$$

Izrek dokazujejo točke (1), (2) in (3) in trditve 2.1.4.4 (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.18 oz. 1.19).

2.3.2' Opomba Če je normirana algebra $(A, \|\cdot\|)$ brez enote, lahko na "adjungirani" algebri $A_e = \mathfrak{F} \times A$ (gl. 0.5.1) definiramo normo $\|\cdot\|_1 : \|(\lambda, a)\|_1 = |\lambda| + \|a\|$ za vsak $(\lambda, a) \in A_e$. Potem je $(A_e, \|\cdot\|_1)$ enotska normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ z enoto $e = (1, 0)$; to normirano algebro označimo kratko z A_1 . Preslikava $a \mapsto (0, a) := \tilde{a}$ algebre A v algebro A_1 , je izometrični homomorfizem in za vsak $a \in A$ je $V(A_1, \tilde{a}) = \{ \lambda \in \mathfrak{F} : |\lambda| \leq \|a\| \}$ zaprt "krog" v obsegu $\mathfrak{F}$.

Dokaz: Ker je A_1 enotska normirana algebra, je po 2.1.5(i) numerični zaklad $V(A_1, \tilde{a})$ neprazna, kompaktna in konveksna podmnožica prostora $\mathfrak{F}$. Po 2.1.4.4 in 2.1.5(i) veljajo

$$\text{za vsak } \lambda \in \mathfrak{F}, \quad |\lambda| = 1 \text{ enakosti } \max \text{Re} [\lambda V(A_1, \tilde{a})] = \\ = \max \text{Re} V(A_1, \lambda \tilde{a}) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|e + t\lambda \tilde{a}\|_1 - 1)/t) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|(1, t\lambda a)\|_1 - 1)/t) =$$

$$= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((1 + \|t\lambda a\|) - 1)/t = \|a\|, \text{ ki pomenijo, da je } V(A_1, \tilde{a})$$

zaprt "krog" v obsegu $\mathfrak{F}$, ki ima središče v točki 0 in polmer $r = \|a\|$.

2.3.3 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in B njena netrivialna podalgebra. Potem je $V(B, b) \subset V(A, b)$ in $\overline{\text{co}} V(B, b) = \overline{\text{co}} V(A, b)$ za vsak $b \in B$.

Dokaz: Inkluzijo potrjuje točka 2.2.1, po drugi strani pa je zaradi 2.1.5(iii) in 2.3.2 $\overline{\text{co}} V(B, b) = V(B_e, \tilde{b}) = V(A_e, \tilde{b}) = \overline{\text{co}} V(A, b)$ za vsak $b \in B$, saj je $B_e = \mathfrak{F}e \oplus \tilde{B}$ podalgebra algebre $A_e = \mathfrak{F}e \oplus \tilde{A}$ in je enota $e \in B_e$ (gl. 0.5.1).

2.3.4 Trditev Naj bosta $(A, \|\cdot\|)$ in $(B, \|\cdot\|')$ asociativni normirani algebri nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $\Phi : A \rightarrow B$ (algebrski) homomorfizem z lastnostima:

(i) $\|\Phi(a)\|' \leq \|a\|$ za vsak $a \in A$

(ii) $S(B) \subset \Phi(S(A))$.

Potem je $\overline{\text{co}}V(B, \Phi(a)) = \overline{\text{co}}V(\Phi(A), \Phi(a)) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$ za vsak $a \in A$.

Opomba: 1) Primerjaj 2.1.6 in 2.2.8 !

2) Zaradi (i) in (ii) je $\|\Phi\| = 1$.

Dokaz: Homomorfizem $\Phi: A \rightarrow B$ inducira homomorfizem

$\tilde{\Phi}: A_e \rightarrow B_e$, $\tilde{\Phi}((\lambda, a)) := (\lambda, \Phi(a))$ za vsak $(\lambda, a) \in A_e$,

ki preslika enoto e algebre A_e v enoto e' algebre B_e

(gl. 0.5.1) in je (gl. 0.5.2) $\|\tilde{\Phi}((\lambda, a))\|' =$

$$= \sup_{\xi \in S(B)} \|\lambda \xi + \Phi(a) \xi\|' \stackrel{(ii)}{\leq} \sup_{x \in S(A)} \|\lambda \Phi(x) + \Phi(a) \Phi(x)\|' =$$

$$= \sup_{x \in S(A)} \|\Phi(\lambda x + ax)\|' \leq \sup_{x \in S(A)} \|\lambda x + ax\| = |(\lambda, a)| \text{ za vsak } (\lambda, a) \in A_e \dots$$

... (*). Ker sta $(A_e, |\cdot|)$ in $(B_e, |\cdot|')$ enotski polnormirani algebre, sledi iz (*) in 2.1.6 inkluzija $V(B_e, \Phi(\tilde{a})) \subset V(A_e, \tilde{a})$, kar zaradi 2.3.3 in 2.3.2 pomeni $\overline{\text{co}}V(\Phi(A), \Phi(a)) = \overline{\text{co}}V(B, \Phi(a)) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$.

2.3.5 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna B-algebra.

Potem velja za vsak $a, b \in A$ ekvivalenca: $(ab - ba) \notin \text{lan}A =$
 $= \text{levi anihilator algebre } A \iff \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \overline{\text{co}}V(A, e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}) = \mathbb{C}.$

Dokaz: Izrek je bil dokazan za kompleksno enotsko B-algebro

(gl. /13, Izrek 5.3/) ... (1). Če algebra A nima enote

(ali pa enoto e ima in je $\|e\| \neq 1$), veljajo pri vložitvi

$a \mapsto \bar{a}$ algebre A v $\bar{A}_e$ (gl. 0.5.5) po 0.3 in 0.5.6.2(ii) za vsak

$x, y, b \in A$ enakosti $(e^x b e^y)^- = (e^x (b e^y))^- = e^{\bar{x}} (\bar{b} e^{\bar{y}}) = e^{\bar{x}} \bar{b} e^{\bar{y}} \dots (2).$

Zaradi 0.5.6.1, točk (1) in (2) ter 2.3.2 veljajo ekvivalence

$$(ab - ba) \notin \text{lan}A \iff (ab - ba)^- \neq 0 \iff \bar{a}\bar{b} \neq \bar{b}\bar{a} \iff \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \overline{\text{co}}V(A, e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}) =$$

$$= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} V(\bar{A}_e, e^{\lambda \bar{a}} \bar{b} e^{-\lambda \bar{a}}) = \mathbb{C}.$$

2.3.6 IZREK Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$

(= R ali C). Potem za vsak $a \in A$ eksistira

$$\lim_{\substack{t \in \mathfrak{R} \\ t \downarrow 0}} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} = (= \ln \lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} =$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} \ln \|e^{ta_x}\|^{1/t}, \text{ gl. 0.3(vi)) in velja:}$$

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \lim_{t \downarrow 0} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} = \\
 &= (\ln \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} \ln \|e^{ta_x}\|^{1/t} = \\
 &= \sup_{x \in S} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{ta_x}\|^{1/t} =) = \underline{\sup \text{Re}V(A, a)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (i') \quad \inf \text{Re}V(A, a) &= \lim_{t \uparrow 0} \ln \inf_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} = \inf_{t \in \mathbb{R}^-} \inf_{x \in S} \ln \|e^{ta_x}\|^{1/t} \\
 & \quad (\text{gl. 0.3(vi)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \sup |\text{Re}V(A, a)| &= \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/|t|} = \\
 &= (\ln \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/|t|} = \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \sup_{x \in S} \ln \|e^{ta_x}\|^{1/|t|} = \\
 &= \sup_{x \in S} \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \ln \|e^{ta_x}\|^{1/|t|}).
 \end{aligned}$$

Dokaz: Ker je $(A_e, \|\cdot\|)$ enotska B-algebra nad obsegom $\mathbb{F}$

(gl. 0.5.5), eksistira po /3, Teorem 1.3.4/

$$\lim_{t \downarrow 0} \ln \|e^{t\bar{a}}\|^{1/t}, \text{ ki je } = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{t\bar{a}}\|^{1/t} = \max \text{Re}V(\bar{A}_e, \bar{a}) \dots$$

$$\dots (1). \text{ Po 2.3.2 je } \max \text{Re}V(\bar{A}_e, \bar{a}) = \max \text{Re} \overline{\text{co}}V(A, a) =$$

$$= \sup \text{Re}V(A, a) \dots (2). \text{ Po 0.5.7(ii) je } \|e^{t\bar{a}}\| = \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\| \dots (3).$$

Trditev 2.3.6(i) sledi iz (1), (2) in (3), če upoštevamo, da "ln" komutira z "lim" in s "sup" in da "sup" komutira s "sup".

$$\begin{aligned}
 (i') \quad \text{Zaradi (i) in 2.1.4.4 je } \inf \text{Re}V(A, a) &= -\sup \text{Re}V(A, -a) = \\
 &= -\lim_{t \downarrow 0} \ln \sup_{x \in S} \|e^{t(-a)}\|^{1/t} = \lim_{t \downarrow 0} \ln (\sup_{x \in S} \|e^{-ta_x}\|^{1/t})^{-1} = \\
 &= \lim_{t \downarrow 0} \ln \inf_{x \in S} \|e^{-ta_x}\|^{-1/t} = \lim_{t \uparrow 0} \ln \inf_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} \dots (4). \text{ Analogno}
 \end{aligned}$$

$$\text{je zaradi (i) tudi } \inf \text{Re}V(A, a) = -\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{-ta_x}\|^{1/t} =$$

$$= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \inf_{x \in S} \|e^{-ta_x}\|^{-1/t} = \inf_{t \in \mathbb{R}^-} \ln \inf_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} \dots (5). \text{ Točki}$$

(4) in (5) dokazujeta (i'), če upoštevamo, da "inf" komutira z "ln".

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \text{Če je } \sup |\text{Re}V(A, a)| &= \sup \text{Re}V(A, a), \text{ je zaradi (i)} \\
 \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{-ta_x}\|^{1/t} &= \sup \text{Re}V(A, -a) = \sup [-\text{Re}V(A, a)] \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \sup |\text{Re}V(A, a)| = \sup \text{Re}V(A, a) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t}, \text{ t.j.}$$

$$\sup |\text{Re}V(A, a)| = \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/|t|} \dots (6). \text{ Če je}$$

$\sup |\text{Re}V(A, a)| = \sup [-\text{Re}V(A, a)]$, v izvajanju (6) zamenjamo element a z $(-a)$.

2.3.7 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem velja:

$$(i) \quad e^{t \inf \operatorname{Re} V(A, a)} \leq \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\| \leq e^{t \sup \operatorname{Re} V(A, a)} \quad \text{za vsak}$$

$$a \in A \text{ in } t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

$$(ii) \quad \|e^a x\| \leq \|x\| e^{\sup \operatorname{Re} V(A, a)} = \|x\| \sup e^{\operatorname{Re} V(A, a)} = \\ = \|x\| \sup |e^{V(A, a)}| \quad \text{za vsak } a, x \in A.$$

Dokaz: (i) Zaradi 2.3.6(i) je $\sup \operatorname{Re} V(A, a) \geq \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t}$

za vsak $a \in A$ in za vsak $t \in \mathbb{R}^+ \dots (*)$, kar dokazuje desno neenakost. Zaradi $(*)$ je tudi $\sup_{x \in S} \|e^{-ta} x\| \leq e^{t \sup \operatorname{Re} V(A, -a)} =$

$= e^{-t \inf \operatorname{Re} V(A, a)}$ za vsak $t \geq 0$, kar po 0.3(viii) pomeni

$$\sup_{x \in S} \|e^{ta} x\| \geq (\sup_{x \in S} \|e^{-ta} x\|)^{-1} \geq e^{t \inf \operatorname{Re} V(A, a)} \quad \text{za vsak } t \geq 0.$$

(ii) Sledi iz (i).

2.3.8 Lema Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in če eksistira tak $a \in A$, da je $\sup \operatorname{Re} V(A, a) < 0$ (oz. $\sup \operatorname{Re} V_d(A, a) < 0$), potem velja:

(i) A vsebuje levo (oz. desno) enoto

(ii) Če velja v B-algebri $(A, \|\cdot\|)$ za vsak $x \in A$ ekvivalenca $\lim_{t \in \mathbb{R}, t \rightarrow \infty} (e^{ta} x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \in \mathbb{R}, t \rightarrow \infty} (x e^{ta}) = 0$, potem vsebuje A dvostransko enoto.

Dokaz: (i) Če je $\sup \operatorname{Re} V(A, a) < 0$, pove ocena 2.3.7(i) $\|e^{ta} x\| \leq \|x\| e^{t \sup \operatorname{Re} V(A, a)}$, da za vsak $x \in A$ eksistira Riemannov integral $\int_0^\infty e^{ta} x dt$ in da je $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{ta} x = 0$ za vsak $x \in A$. Element

$$e := -\int_0^\infty e^{ta} a dt \quad \text{je zato leva enota algebre } A, \text{ saj je } ex = \\ = -\int_0^\infty e^{ta} a x dt = -\int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{ta} x) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} [-e^{Ta} x]_0^T = x \quad \text{za vsak } x \in A.$$

Če je $\sup \operatorname{Re} V_d(A, a) < 0$, je po 2.1.4.6 $\sup \operatorname{Re} V(A^*, a) < 0$ in ima zato po pravkar dokazanem algebra A^* levo enoto, t.j. algebra A ima desno enoto (gl. 0.1.3).

(ii) Če velja omenjena ekvivalenca, potem je leva enota e, ki nastopa v dokazu točke (i), hkrati tudi desna enota, saj

je $xe = - \int_0^\infty xe^{ta}adt = - \int_0^\infty \frac{d}{dt} (xe^{ta})dt = \lim_{T \rightarrow \infty} [-xe^{tT}]_0^T = x$ za vsak $a \in A$.

2.3.9 Trditev Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna Banachova algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in če A nima leve enote, potem je $\inf \text{Re}V(A, a) \leq 0 \leq \sup \text{Re}V(A, a)$ za vsak $a \in A$.

Dokaz: Ker je A brez leve enote, je po 2.3.8(i) $\sup \text{Re}V(A, a) \geq 0$ za vsak $a \in A$ in je zato po 2.1.4.4 $\inf \text{Re}V(A, a) = -\sup \text{Re}V(A, -a) \leq 0$ za vsak $a \in A$.

2.3.9' Trditev Če je $(A, \|\cdot\|)$ (nepolna) asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in če za A ne eksistira leva števna približna enota*, potem je $\inf \text{Re}V(A, a) \leq 0 \leq \sup \text{Re}V(A, a)$ za vsak $a \in A$.

*Opomba: Posplošeno zaporedje $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ elementov algebre A imenujemo levo približno enoto algebre A, če je $\lim_{\gamma \in \Gamma} (e_\gamma x) = x$ za vsak $x \in A$. Levo približno enoto imenujemo števno, če je $\Gamma = \mathbb{N}$.

Dokaz: Normirano algebro $(A, \|\cdot\|)$ izometrično homomorfno vložimo v njeno izpopolnitev $(\tilde{A}, \|\cdot\|)$. Ker je A brez leve števne približne enote, je $(\tilde{A}, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra, ki je brez leve enote (saj, če je $[(e_n)]$ leva enota algebre $\tilde{A}$, je $[(e_n)] [(x)] = [(x)]$, t.j. $[(e_n x)] = [(x)]$, t.j. $(e_n x) \sim (x)$, t.j. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n x - x\| = 0$ za vsak $x \in A$, t.j. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je leva števna približna enota algebre $(A, \|\cdot\|)$). Zato je po 2.3.9 $\inf \text{Re}V(\tilde{A}, \xi) \leq 0 \leq \sup \text{Re}V(\tilde{A}, \xi)$ za vsak $\xi \in \tilde{A}$ in zato tudi $\inf \text{Re}V(\tilde{A}, \tilde{a}) \leq 0 \leq \sup \text{Re}V(\tilde{A}, \tilde{a})$ za vsak $a \in A$, kar po 2.2.9 dokazuje trditev.

2.3.9'' Opomba Če ima algebra A levo enoto, ocena v trditvi 2.3.9 oz. 2.3.9' ne velja za vsak $a \in A$. (Če je namreč e leva enota algebre A , je po 2.2.5(vi) in (iii) $V(A, a+ae) \subset \subset V''(A, a+ae) = V''(A, a) + \{\lambda\}$ za vsak $a \in A$ in $\lambda \in \mathcal{F}$, kjer je $V''(A, a)$ kompaktna podmnožica prostora $\mathcal{F}$.)

2.3.10 Lema Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B -algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem velja:

(i) $\sup_{\mathcal{F}} \text{Re}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \setminus \{0\}) \leq \sup_{\mathcal{F}} \text{Re} V(A, a)$ za vsak $a \in A$ (gl. 1.5)

(ii) Če ima A enoto ali pa je brez leve enote, je

$\max_{\mathcal{F}} \text{Re} \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \leq \sup_{\mathcal{F}} \text{Re} V(A, a)$ za vsak $a \in A$,

kjer definiramo $\sup_{\mathcal{F}} \phi = \max_{\mathcal{F}} \phi = -\infty$ (Če je A realna algebra in če ima A enoto, je lahko $\mathbb{R}$ -spekter $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A, a)$ prazna množica za nek $a \in A$).

Dokaz: I. $\mathcal{F} = \mathbb{C}$: Če ima A enoto, je po 1.14.1 in 2.3.6

$$\max_{\mathbb{R}^+} \text{Re} \mathcal{G}(A, a) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t} =$$

$= \sup_{\mathbb{R}^+} \text{Re} V(A, a) \dots (1)$. Če je A brez enote, je analogno po 1.14.2

in 2.3.6 $\sup_{\mathbb{R}^+} \text{Re}(\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\}) \leq \dots \leq \sup_{\mathbb{R}^+} \text{Re} V(A, a) \dots (2)$. Če je

A brez leve enote, je zato po 2.3.9 $\max_{\mathbb{R}^+} \text{Re} \mathcal{G}(A, a) \leq \sup_{\mathbb{R}^+} \text{Re} V(A, a) \dots$

$\dots (3)$. Zaradi 1.5, 1.4(i) in (iii) točke (1), (2) in (3) že

dokazujejo trditev v primeru, da je $\mathcal{F} = \mathbb{C} \dots (4)$.

II. $\mathcal{F} = \mathbb{R}$: Ker je $(A, \|\cdot\|)$ realna asociativna B -algebra, je

njena kompleksifikacija $(A_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ kompleksna asociativna

B -algebra (gl. 0.4.1) $\dots (5)$. Če je $a \mapsto \tilde{a}$ vložitev algebre A

v $A_{\mathbb{C}}$, je po 2.2.10 $\sup_{\mathbb{R}^+} \text{Re} V(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) = \sup_{\mathbb{R}^+} \text{Re} V(A, a)$ za vsak $a \in A \dots (6)$.

Po 1.6(iv) in 1.4(ii) in (iii) je $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A, a) = \mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A, a) =$

$= \mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) \subset \text{Re} \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})$ in je zato $\max_{\mathbb{R}^+} \text{Re} \mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A, a) \leq \max_{\mathbb{R}^+} \text{Re} \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) \dots$

$\dots (7)$. Zaradi (4), (5), (6) in (7) velja lema tudi v primeru,

ko je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.

2.3.11 IZREK Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna Banachova algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem je $(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \setminus \{0\}) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$ za vsak $a \in A$ in velja naslednje:

1. A ima enoto (dvostransko; ni treba, da ima normo $= 1$) $\Rightarrow \text{co } \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \subset \overline{V(A, a)} \cap \overline{V_d(A, a)}$ za vsak $a \in A$
2. A je brez leve enote $\Rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$ za vsak $a \in A$
- 2'. A je brez desne enote $\Rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V_d(A, a)$ za vsak $a \in A$
3. Če je A brez enote (dvostranske) in je $a \in A$ tak element, da je izpolnjen vsaj eden izmed naslednjih treh pogojev:
 - (i) $\mathcal{G}(A, a) = \{0\}$
 - (ii) 0 ni izolirana točka spektra $\mathcal{G}(A, a)$
 - (iii) $\mathcal{G}(A, \lambda a) \cap (i\mathbb{R} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, potem je $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$.

Torej, ne glede na to ali ima A enoto (levo, desno, dvostransko) ali ne, je vedno $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$ ali pa $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V_d(A, a)$.

Opomba: Za množico $\mathcal{G}_p(A, a) := \{\lambda \in \mathcal{F} : \text{eksistira } x \in S(A), \text{ da je } ax = \lambda x\}$ = množica vseh "lastnih vrednosti" elementa a velja preciznejša inkluzija $\text{co } \mathcal{G}_p(A, a) \subset V(A, a) \cap V_d(A, a)$ (gl. /4, Teorem 5.19.3/).

Dokaz: Zaradi 2.3.10 je $\sup_{\text{Re}}[\lambda(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \setminus \{0\})] = \sup_{\text{Re}}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, \lambda a) \setminus \{0\}) \leq \sup_{\text{Re}}V(A, \lambda a) = \sup[\lambda V(A, a)]$ za vsak $\lambda \in \mathcal{F}$, $|\lambda| = 1$, kar zaradi 2.1.4.3 pomeni $\overline{\text{co}}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) \setminus \{0\}) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$ (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.19).

1.a) $\mathcal{F} = \mathbb{C}$: Ker ima A enoto, je po 1.22(iii) $\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(\mathcal{B}(A), T_a) := \mathcal{G}(T_a)$, spekter operatorja T_a levega množenja, $T_a x = ax$ za vsak $x \in A$... (1). Po /4, Teorem 5.19.4/ je $\text{co } \mathcal{G}(T_a) \subset \overline{V(T_a)}$... (2) in po 2.1.4.2(i) je $V(T_a) = V(A, a)$... (3). Točke (1), (2) in (3) pomenijo $\text{co } \mathcal{G}(A, a) \subset \overline{V(A, a)}$ in je zato po 2.1.4.6 tudi (gl. 0.1.3) $\text{co } \mathcal{G}(A, a) = \text{co } \mathcal{G}(A^*, a) \subset \overline{V(A^*, a)} = \overline{V_d(A, a)}$... (4).

b) $\mathcal{F} = \mathbb{R}$: Po 1.6(iv) in 1.4(ii) je tedaj $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A, a) = \mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A, a) = \mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) \subset \text{Re } \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})$ (gl. 0.4.1), kar po točki (4) in 2.2.10 pomeni $\text{co } \mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A, a) \subset \text{Reco } \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) \subset \text{Re } V(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) = \overline{V(A, a)}$ in zato po 2.1.4.6 tudi $\text{co } \mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A, a) = \text{co } \mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A^*, a) \subset \overline{V_d(A, a)}$.

2. Sledi iz 2.3.10(ii) enako kot prvi del dokaza našega izreka.

2'. Sledi iz pravkar dokazane točke 2.3.11.2 in iz 2.1.4.6.

3.a) $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$: Po 1.14.3 in 2.3.6(i) je tedaj $\max_{\text{Re}} \mathcal{G}(A, \lambda a) =$
 $= \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{t\lambda a} x\|^{1/t} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{t\lambda a} x\|^{1/t} =$
 $= \sup_{\text{Re}} V(A, \lambda a)$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$. Torej $\overline{\text{co}} \mathcal{G}(A, a) \subset \overline{\text{co}} V(A, a) \dots (5)$
 (gl. prvi del dokaza).

b) $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$: Enako kot v dokazu 1. točke za primer $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$ si pomagamo s kompleksifikacijo. Ker je po definiciji $\mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) = \mathcal{G}(A, a)$, je po točki (5) in 2.2.10 $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(A, a) =$
 $= \mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A, a) = \mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) \subset \mathbb{R} \cap \overline{V(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})} \subset \overline{\text{Re} V(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})} = \overline{V(A, a)}.$

2.3.12 Posledica Za vsak element a asociativne B -algebre nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) je $\overline{\text{co}} V(A, a) \cap \overline{\text{co}} V_d(A, a) \supset$
 $\supset (\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) \setminus \{0\}).$

Dokaz: Sledi iz 2.3.11 in 2.1.4.6.

2.3.13 Primer Naj bo A dvodimenzionalna asociativna algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) z bazo $\{a, b\}$, kjer je $a \in \text{lan} A$ in b leva enota algebre A (t.j. $a^2 = 0 = ab$, $ba = a$, $b^2 = b$; gl. 1.16). Po 1.16(vi) je $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, a) = \{0\} \dots (1)$ in $\mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(A, b) = \{0, 1\} \dots (2)$. Preslikava $(\alpha a + \beta b) \mapsto \|\alpha a + \beta b\|_0 :=$
 $:= (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2}$ algebre $A = \{\alpha a + \beta b : \alpha, \beta \in \mathfrak{F}\}$ v $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ je (očitno) hilbertska algebrska norma (algebrska norma, ki ustreza paralelogramski enakosti). Ker je A končno-dimenzionalna, je zato $(A, \|\cdot\|_0)$ Banachova algebra, ki je hkrati tudi Hilbertov prostor glede na enolično določeni skalarni produkt $\langle, \rangle$, ki ustreza enakosti $\langle x, x \rangle = \|x\|_0^2$ za vsak $x \in A$, t.j. glede na skalarni produkt $\langle, \rangle$, $\langle \alpha a + \beta b, \alpha' a + \beta' b \rangle = \alpha \alpha'^* + \beta \beta'^*$ za vsak $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathfrak{F}$ ($*$ pomeni konjugiranje kompleksnega števila). Torej je $\{a, b\}$ ortonormirana baza prostora A .

Ker je $a \in \text{lan} A$, je $ax = 0$ za vsak $x \in A$ in ker je b leva enota algebre A , je $bx = x$ za vsak $x \in A$. To po 2.2.4 pomeni $V(A, a) = \{\langle ax, x \rangle : x \in S\} = \{0\} \dots (3)$ in $V(A, b) = \{\langle bx, x \rangle : x \in S\} = \{\langle x, x \rangle : x \in S\} = \{1\} \dots (4)$. Po drugi strani pa je za poljubni $x = (\alpha a + \beta b) \in A$ $xa = \beta a$ in $xb = \beta b$, kar zaradi 2.1.4.6 in 2.2.4 pomeni $V_d(A, a) = V(A^*, a) = \{\langle a.x, x \rangle : x \in S\} = \{\langle xa, x \rangle : x \in S\} = \{\langle \beta a, \alpha a + \beta b \rangle : \alpha, \beta \in \mathfrak{F}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} = \{\beta \alpha^* : \alpha, \beta \in \mathfrak{F}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} \dots (5)$ in $V_d(A, b) = \{\langle xb, x \rangle : x \in S\} = \{\langle \beta b, \alpha a + \beta b \rangle : \alpha, \beta \in \mathfrak{F}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} = \{|\beta|^2 : \alpha, \beta \in \mathfrak{F}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} = [0, 1] \subset \mathbb{R} \dots (6).$

Če sta $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}$ in $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, eksistira natanko en tak

$(1/2)t \in [0, \pi/2]$, da je $|\alpha| = \cos(t/2)$ in $|\beta| = \sin(t/2) \dots (7)$.

Ker lahko vsak $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ zapišemo v obliki $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$, $\beta = |\beta|e^{i\psi}$, kjer je $i = \sqrt{-1}$ in $\varphi, \psi \in \Delta_{\mathcal{F}}$ ($\Delta_{\mathbb{C}} = [0, 2\pi]$, $\Delta_{\mathbb{R}} = \{0, \pi\}$), sledi iz (5) in (7) enakost $V_d(A, a) = \{\cos(t/2)e^{-i\varphi} \cdot \sin(t/2)e^{i\psi} : t \in [0, \pi]; \varphi, \psi \in \Delta_{\mathcal{F}}\} = \{(1/2)\sin t \cdot e^{i(\psi-\varphi)} : t \in [0, \pi], \varphi, \psi \in \Delta_{\mathcal{F}}\} = (1/2)\{\sin t \cdot e^{i\xi} : t \in [0, \pi/2], \xi \in \Delta_{\mathcal{F}}\} = \{\lambda \in \mathcal{F} : |\lambda| \leq (1/2)\} \dots (8)$.

Torej imamo zaradi (1), (3) in (8) relacijo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) = \{0\} = V(A, a) \subsetneq V_d(A, a) = \{\lambda \in \mathcal{F} : |\lambda| \leq (1/2)\} \dots (9)$ in zaradi (2), (4) in (6) velja $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, b) = \{0, 1\} \not\subset \{1\} = V(A, b) \subsetneq V_d(A, b) = [0, 1] \dots (10)$ ter $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, b) \setminus \{0\} = \{1\} = V(A, b) \dots (11)$.

2.3.14 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem je $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a+b) \setminus \{0\} \subset \overline{\text{co}}V(A, a) + \overline{\text{co}}V(A, b)$ za vsak $a, b \in A$.

Dokaz: Po 2.3.11 in 2.1.4.5 je $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(a+b) \setminus \{0\} \subset \overline{\text{co}}V(a+b) \subset \overline{\text{co}}(V(a) + V(b)) = \overline{\text{co}}(\overline{V(a)} + \overline{V(b)}) \subset \overline{\text{co}}V(a) + \overline{\text{co}}V(b) \subset \overline{\text{co}}V(a) + \overline{\text{co}}V(b) = \overline{\text{co}}V(a) + \overline{\text{co}}V(b)$, saj sta po 2.1.3.3 $\overline{V(a)}$ in $\overline{V(b)}$ kompaktni podmnožici prostora $\mathcal{F}$.

2.3.15 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), $a \in A$ in naj bo izpolnjen vsaj eden izmed naslednjih treh pogojev:

1. $\mathcal{G}(A, a) \neq \{0\}$ in $\sup \text{Re}(\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\}) = \sup \text{Re}V(A, a)$
2. $\mathcal{G}(A, a) = \{0\} = V(A, a)$
3. $\max \text{Re} \mathcal{G}(A, a) = \sup \text{Re}V(A, a)$, pri čemer velja vsaj ena izmed tehle štirih trditev:

- (i) A ima enoto (dvostransko)
- (ii) $\max \text{Re} \mathcal{G}(A, a) > 0$
- (iii) 0 ni izolirana točka množice $\text{Re} \mathcal{G}(A, a)$
- (iv) $\mathcal{G}(A, a) \cap (i\mathbb{R} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ ($i = \sqrt{-1}$).

Potem je $\sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\| = e^{t \sup \text{Re}V(A, a)}$ za vsak $t \geq 0$.

Dokaz: Zaradi 1.14 in 2.3.6(i) velja pri omenjenih treh pogojih ocena $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} \geq \sup \text{Re}(\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\})$ (oz. $\stackrel{1.14.1-2}{=} \sup \text{Re}V(A, a)$)

$= \max \text{Re} \mathcal{G}(A, a) = \sup \text{Re}V(A, a) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t}$, kar pomeni

$\ln \sup_{x \in S} \|e^{ta_x}\|^{1/t} = \text{konst.} = \sup \text{Re}V(A, a)$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$.

2.3.15' Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ realna asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje) in $a \in A$ tak element, da je $\mathcal{G}_R(A, a) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ter $\sup(\mathcal{G}_R(A, a) \setminus \{0\}) = \sup V(A, a)$ (gl. 1.5). Potem je $\sup_{x \in S} \|e^{ta} x\| = e^{t \sup V(A, a)}$ za vsak $t \geq 0$.

Dokaz: Po 1.14, 1.6(iv) in 2.3.6(i) je $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t} \geq \sup \operatorname{Re}(\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\}) \geq \sup[R \cap (\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\})] = \sup(\mathcal{G}_R(A, a) \setminus \{0\}) = \sup V(A, a) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t}$ in je zato $\ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t} = \text{konst.} = \sup V(A, a)$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$.

2.3.16 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje). Potem velja:

1. $(a \in A, \sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = e^{\sup \operatorname{Re}[\lambda V(A, a)]} \text{ za vsak } \lambda \in \mathbb{C}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \operatorname{co} \mathcal{G}(A, a) \supset \overline{\operatorname{co}} V(A, a)$

1'. Če je A brez leve enote, velja za vsak $a \in A$ implikacija:

$(\sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = e^{\sup \operatorname{Re}[\lambda V(A, a)]} \text{ za vsak } \lambda \in \mathbb{C}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{co} \mathcal{G}(A, a) = \overline{\operatorname{co}} V(A, a)$

2. $(a \in A, \overline{\operatorname{co}}(\mathcal{G}(A, a) \setminus \{0\}) = \overline{\operatorname{co}} V(A, a)) \Rightarrow \sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = e^{\sup \operatorname{Re}[\lambda V(A, a)]} \text{ za vsak } \lambda \in \mathbb{C}.$

3. Če ima A enoto (dvostransko), velja za vsak $a \in A$ ekvivalenca: $\operatorname{co} \mathcal{G}(A, a) = \overline{\operatorname{co}} V(A, a) \Leftrightarrow \sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = e^{\sup \operatorname{Re}[\lambda V(A, a)]}$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}.$

4. Če je A brez enote (dvostranske) in $a \in A$ tak element, da velja vsaj eden izmed naslednjih treh pogojev:

(i) $\mathcal{G}(A, a) = \{0\}$

(ii) 0 ni izolirana točka spektra $\mathcal{G}(A, a)$

(iii) $\mathcal{G}(A, \lambda a) \cap (i\mathbb{R} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ ($i = \sqrt{-1}$),

potem velja ekvivalenca: $\operatorname{co} \mathcal{G}(A, a) = \overline{\operatorname{co}} V(A, a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = e^{\sup \operatorname{Re}[\lambda V(A, a)]} \text{ za vsak } \lambda \in \mathbb{C}.$

Dokaz: 1. "Tedaj" je $\ln \sup_{x \in S} \|e^{t\lambda a} x\|^{1/t} = \text{konst.} = \operatorname{Re} V(\lambda a)$ za vsak

$t \in \mathbb{R}^+$ in za vsak $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$. Zato je po 1.14.1 in 2 $\max \operatorname{Re} \mathcal{G}(\lambda a) \geq \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{t\lambda a} x\|^{1/t} = \sup \operatorname{Re} V(\lambda a)$, t.j.

$\max \operatorname{Re}[\lambda \mathcal{G}(a)] \geq \sup \operatorname{Re}[\lambda V(a)]$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, kar pomeni $\operatorname{co} \mathcal{G}(a) = \overline{\operatorname{co}} \mathcal{G}(a) \supset \overline{\operatorname{co}} V(a)$ (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.18 oz. 1.19).

1'. Sledi iz pravkar dokazane 1. točke in iz 2.3.11.2.

2. Po 1.14.1 in 2 ter po 2.3.6 je "tedaj"

$$\begin{aligned} & \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{t\lambda a} x\|^{1/t} \geq \sup \operatorname{Re}(\mathcal{G}(\lambda a) \setminus \{0\}) = \\ & = \sup \operatorname{Re}[\lambda(\mathcal{G}(a) \setminus \{0\})] = \sup \operatorname{Re}[\lambda V(a)] = \sup \operatorname{Re} V(\lambda a) = \\ & = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{t\lambda a} x\|^{1/t}, \text{ kar pomeni } \ln \sup_{x \in S} \|e^{t\lambda a} x\|^{1/t} = \text{konst.} = \\ & = \sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = \sup \operatorname{Re}[\lambda V(a)] \text{ za vsak } t \in \mathbb{R}^+ \text{ in za vsak } \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

3. Sledi iz 1.14.1 in 2.3.6 (gl. dokaz prve in druge točke naše trditve).

4. Sledi iz 1.14.3 in 2.3.6 (gl. dokaz 1. in 2. točke naše trditve).

2.3.16' Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ realna asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje), $a \in A$ in naj velja:

(i) 0 ni izolirana točka R-spektra $\mathcal{G}_R(A, a)$ ali pa je $0 \in (\operatorname{co} \mathcal{G}_R(A, a))^0 = \text{notranjost množice } \operatorname{co} \mathcal{G}_R(A, a) \subset \mathbb{R}$ (gl. 1.5),

(ii) $\operatorname{co} \mathcal{G}_R(A, a) = \overline{V(A, a)}$.

Potem je $\sup_{x \in S} \|e^{ta} x\| = e^{\sup[tV(A, a)]}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Po 1.14 je $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{t(\pm a)} x\|^{1/t} \geq \sup \operatorname{Re}(\mathcal{G}(A, \pm a) \setminus \{0\}) \geq$

$\geq \sup(\mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A, \pm a) \setminus \{0\}) \dots (1)$ in po 1.6(iv) je

$\mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A, \pm a) = \mathcal{G}_R(A, \pm a) \dots (2)$. Zaradi (i) je

$\sup(\mathcal{G}_R(A, \pm a) \setminus \{0\}) = \sup \mathcal{G}_R(A, \pm a) \dots (3)$ ter zaradi (ii)

$\sup \mathcal{G}_R(A, \pm a) = \sup V(A, \pm a) \dots (4)$. Iz (1), (2), (3), (4) in

2.3.6 sledi $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{\pm ta} x\| \geq \sup V(A, \pm a) =$

$= \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{\pm ta} x\|^{1/t}$. Torej $\ln \sup_{x \in S} \|e^{\pm ta} x\|^{1/t} = \text{konst.} =$

$= \sup V(A, \pm a) = \sup[\pm V(A, a)]$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$, kar dokazuje trditev.

2.3.17 Trditev Naj bo A kompleksna asociativna B-algebra

(z enoto ali brez nje) z lastnostjo, da je $\operatorname{co} \mathcal{G}(A, a) \supset$

$\supset \overline{\operatorname{co}} V(A, a)$ za vsak $a \in A \dots (*)$. Potem velja za poljub-

no skalarno celo funkcijo kompleksne spremenljivke λ tako, da je

$f(0) = 0$ in za poljuben $a \in A$ inkluzija $\overline{\operatorname{co}} V(A, f(a)) \subset$

$\subset \operatorname{cof}(\{0\} \cup \overline{\operatorname{co}} V(A, a))$. To na primer pomeni, da je

$\overline{\text{co}}V(A, a^n) \subset \text{co}\{\lambda^n : \lambda \in \overline{\text{co}}(\{0\} \cup V(A, a))\}$ za vsak $a \in A$ in $n \in \mathbb{N}$.

Če ima algebra A enoto (dvostransko) ali pa je brez leve enote in če ima zg. omenjeno lastnost $(*)$, velja inkluzija $\overline{\text{co}}V(A, f(a)) \subset \text{cof}(\overline{\text{co}}V(A, a))$ za vsak $a \in A$ in za poljubno celo funkcijo f , za katero je $f(0) = 0$.

Dokaz: Prvi del trditve sledi iz $(*)$, spektralnega teorema

(gl. npr. /5; I.7.4(iv)/ in /11; 24.5.5/) in 2.3.11 :

$$\overline{\text{co}}V(f(a)) \subset \text{co}\mathcal{G}(f(a)) = \text{cof}(\mathcal{G}(a)) \subset \text{cof}(\{0\} \cup \overline{\text{co}}V(a)).$$

Enako sledi tudi drugi del trditve (upoštevamo 2.3.11.1 in 2).

2.3.18 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B -algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), naj ima A enoto e in naj bo K neprazna, kompaktna in konveksna podmnožica prostora $\mathfrak{F}$. Potem velja:

- (i) Za vsak $a \in A$ imamo ekvivalenco: $V(A, a) \subset K \Leftrightarrow$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F} \setminus K$ eksistira resolventa $R(\lambda, a) := (\lambda e - a)^{-1}$ in je $\sup_{x \in S} \|R(\lambda, a)x\| \leq [d(\lambda, K)]^{-1}$, kjer je $d(\lambda, K) = \inf_{\mu \in K} |\lambda - \mu| =$ razdalja točke λ od množice K .
- (ii) Za vsak $a \in A$ in $\lambda \in \mathfrak{F} \setminus \overline{\text{co}}V(A, a)$ eksistira resolventa $R(\lambda, a) = (\lambda e - a)^{-1}$ in je $\sup_{x \in S} \|R(\lambda, a)x\| \leq [d(\lambda, \overline{\text{co}}V(A, a))]^{-1}$ (gl. (i)).
- (iii) Če je $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$, potem velja za vsak $a \in A$ in $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigvee(A, a)$ ocena: $[d(\lambda, \mathcal{G}(A, a))]^{-1} \leq \sup_{x \in S} \|R(\lambda, a)x\| \leq [d(\lambda, \overline{\text{co}}V(A, a))]^{-1}$ (gl. (i) in (ii)).

Dokaz: (i) Normirano algebro $(A, \|\cdot\|)$ renormiramo do enotske B -algebre $(A, \|\cdot\|_1)$ in po 2.3.1 ter /13, 8.6/ velja ekvivalenca $V(A, a) \subset K \Leftrightarrow V(A_1, a) \subset K \Leftrightarrow$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F} \setminus K$ eksistira $(\lambda e - a)^{-1}$ in je $\|(\lambda e - a)^{-1}\|_1 \leq [d(\lambda, K)]^{-1}$, kjer je za vsak $a \in A$ $\|a\|_1 = \sup_{x \in S} \|ax\|$.

(ii) Sledi iz (i) za $K = \overline{\text{co}}V(A, a)$.

(iii) Analogno kot (i) sledi iz 2.3.1 in /13, 2.19/.

2.3.18' Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B -algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), naj bo A brez leve enote ter naj bo K neprazna, kompaktna in konveksna podmnožica prostora $\mathfrak{F}$. Potem velja:

- (i) Za vsak $a \in A$ imamo ekvivalenco: $V(A, a) \subset K \Leftrightarrow (0 \in K$ in za

vsak $\lambda \in \mathcal{F} \setminus K$ eksistira "disolventa" $D(\lambda, a) := (\frac{1}{\lambda} a)_{-1}$ (gl. 1.1) in je $\sup_{x \in S} \|D(\lambda, a)x - x\| \leq |\lambda| [d(\lambda, K)]^{-1}$, kjer je $d(\lambda, K) = \inf_{\mu \in K} |\lambda - \mu|$.

(ii) Za vsak $a \in A$ in $\lambda \in \mathcal{F} \setminus \overline{\text{co}}V(A, a)$ eksistira disolventa $D(\lambda, a)$ (gl. (i)) in je $\sup_{x \in S} \|D(\lambda, a)x - x\| \leq$

$$\leq |\lambda| [d(\lambda, \overline{\text{co}}V(A, a))]^{-1} = [d(1, \text{co}V(A, \frac{a}{\lambda}))]^{-1} \quad (\text{gl. (i)}).$$

(iii) Če je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$, potem za vsak $a \in A$ in $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{G}(A, a)$ eksistira disolventa $D(\lambda, a)$ (gl. (i)) in je $|\lambda| [d(\lambda, \mathcal{G}(A, a))]^{-1} \leq \|D(\lambda, a)\| + 1$

(iv) Če je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ in če je preslikava $a \mapsto |a| := \sup_{x \in S} \|ax\|$

norma na A , ki je ekvivalentna prvotni normi $\|\cdot\|$ (gl. 0.5.3(iii), (iv) in (vi)), velja za vsak $a \in A$ in $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\text{co}}V(A, a)$ ocena: $[d(1, \text{co}\mathcal{G}(A, \frac{a}{\lambda}))]^{-1} = |\lambda| [d(\lambda, \text{co}\mathcal{G}(A, a))]^{-1} \leq \sup_{x \in S} \|D(\lambda, a)x - x\| \leq |\lambda| [d(\lambda, \overline{\text{co}}V(A, a))]^{-1}$ (gl. (i)).

Dokaz: (i) Zaradi 2.3.2 in /13, 8.6/ velja ekvivalenca:

$$V(A, a) \subset K \Leftrightarrow V(\bar{A}_e, \bar{a}) \subset K \Leftrightarrow \text{za vsak } \lambda \in \mathcal{F} \setminus K \text{ eksistira resolventa } R(\lambda, \bar{a}) := (\lambda \bar{e} - \bar{a})^{-1} \text{ in je } \|R(\lambda, \bar{a})\| \leq [d(\lambda, K)]^{-1} \dots (1).$$

Preverimo implikacijo " $\Rightarrow$ ": Ker je $V(A, a) \subset K$, je po 2.3.11.2

$0 \in K$ in če je $\lambda \in \mathcal{F} \setminus K$, sledi po 2.3.11.2 ter 1.5, da $\lambda \notin \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a) =$

$= q\text{-}\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(A, a)$, t.j. eksistira disolventa $D(\lambda, a) := (\frac{1}{\lambda} a)_{-1}$. Ker

je preslikava $x \mapsto \bar{x}$ homomorfizem algebre A v $\bar{A}_e$, je $[D(\lambda, a)]^- =$

$$= [(\frac{1}{\lambda} a)_{-1}]^- = (\frac{1}{\lambda} \bar{a})_{-1} = D(\lambda, \bar{a}) \dots (2). \text{ Ker je resolventa } R(\lambda, \bar{a}) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} (\bar{e} - \frac{1}{\lambda} \bar{a})^{-1}, \text{ je zaradi 1.3(i) in po točki (2) } \lambda R(\lambda, \bar{a}) =$$

$$= (\bar{e} - \frac{1}{\lambda} \bar{a})^{-1} = \bar{e} - (\frac{1}{\lambda} \bar{a})_{-1} = \bar{e} - [D(\lambda, a)]^- \dots (3). \text{ Zato po}$$

$$0.5.1 \text{ in } 0.5.6 \text{ velja } |\lambda| \|R(\lambda, \bar{a})\| = \|\bar{e} - [D(\lambda, a)]^-\| =$$

$$= \|(e - [D(\lambda, a)]^-)^{\sim}\| = \|(1, -D(\lambda, a))^{-1}\| = \sup_{x \in S} \|x + [-D(\lambda, a)]x\| \dots (4).$$

Implikacijo " $\Rightarrow$ " dokazujeta točki (1) in (4).

Dokažimo implikacijo " $\Leftarrow$ ": Ker "tedaj" za vsak $\lambda \in \mathcal{F} \setminus K$ eksistira disolventa $D(\lambda, a)$, eksistira tudi $D(\lambda, \bar{a}) \in \bar{A}_e$ in zato tudi

$\lambda R(\lambda, \bar{a}) = (\bar{e} - \frac{1}{\lambda} \bar{a})^{-1} = \bar{e} - D(\lambda, \bar{a})$ (gl. 1.3(i)) in po predpostavki implikacije je $\|R(\lambda, \bar{a})\| \leq [d(\lambda, K)]^{-1}$ (gl. točko (4)). Vse to

zaradi (1) pomeni $V(A, a) \subset K$.

(ii) Sledi iz (i) za $K = \overline{\text{co}}V(A, a)$.

(iii) Na algebro A_e (gl. 0.5.1) uvedemo običajno normo $\|\cdot\|_e$,
 $\|(\lambda, a)\|_e = |\lambda| + \|a\|$. Potem je $(A_e, \|\cdot\|_e)$ asociativna
 kompleksna enotska B-algebra in vložitev $x \mapsto \tilde{x} = (x, 0)$ algebre
 A v A_e je izometrični homomorfizem.

Po 1.7 oz. po 1.3(ii) in po /13, 0.2.40.9/ velja:

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{G}(A, a) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{G}(A_e, \tilde{a}) \Rightarrow$ eksistira resolventa $R(\lambda, \tilde{a})$ in je
 $\|R(\lambda, \tilde{a})\|_e \geq [d(\lambda, \mathcal{G}(A_e, \tilde{a}))]^{-1} = [d(\lambda, \mathcal{G}(A, a))]^{-1} \dots (5)$. Analogno
 kot v dokazu točke (i) (gl. (3)) dobimo $|\lambda| \|R(\lambda, \tilde{a})\|_e =$
 $= \|(1, -D(\lambda, a))\|_e = 1 + \|-D(\lambda, a)\|$. To zaradi (5) dokazuje (iii).

(iv) Ker je $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna B-algebra, je "tedaj" $(A_e, \|\cdot\|_e)$
 kompleksna enotska B-algebra (in $\hat{A}_e \cong A_e$, gl. 0.5.2 in
 0.5.4) ... (6). Zaradi 2.3.11.2 velja: $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\text{coV}}(A, a) \Rightarrow \lambda \notin \mathcal{G}(A, a) \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ eksistira disolventa $D(\lambda, a)$ in zato tudi $D(\lambda, \tilde{a}) = [D(\lambda, a)]^\sim \in$
 $\in A_e$. Zato po drugi strani, če $\lambda \notin \overline{\text{coV}}(A, a)$, zaradi 1.7 $\lambda \notin \mathcal{G}(A_e, \tilde{a})$
 in eksistira zato resolventa $R(\lambda, \tilde{a}) \in A_e$ ter je zaradi 2.3.2, (6)
 in /13, 2.19/ $[d(\lambda, \overline{\text{coV}}(A, a))]^{-1} = [d(\lambda, \text{V}(A_e, \tilde{a}))]^{-1} \geq \|R(\lambda, \tilde{a})\| \geq$
 $\geq [d(\lambda, \mathcal{G}(A_e, \tilde{a}))]^{-1} = [d(\lambda, \mathcal{G}(A, a))]^{-1} \dots (7)$. Po 0.5.6 je ana-
 logno kot v točki (4) $|\lambda| \|R(\lambda, \tilde{a})\| = \sup_{x \in S} \|D(\lambda, a)x - x\|$, kar zaradi
 (7) dokazuje (iv).

2.3.19 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ normirana asociativna algebra nad
 obsegom $\mathcal{F}$ (= R ali C) z enoto ali brez nje, $a \in A$ in za
 vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\alpha(n) = \inf \text{ReV}(A, a^n)$, $\beta(n) = \sup \text{ReV}(A, a^n)$
 ter $M(n) = \max\{|\alpha(n)|, |\beta(n)|\}$. Potem eksistira $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} :=$

$=: \wp(a)$ in za vsako sodo naravno število $n \in \mathbb{N}$ velja ocena:

$\wp(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} \leq r_n \max\{M(1), M(n)^{1/n}\} \dots (*)$, kjer je

$r_n^{-1} = \sin \psi_n$ in je ψ_n edini koren enačbe $(\sin \psi)^n = \cos n\psi$, ki
 leži na intervalu $(0, (\pi/2n))$, t.j. r_n^{-1} je najmanjši koren enačbe
 $\lambda^n + \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} (-1)^{k+1} (1-\lambda^2)^{n/2-k} \lambda^{2k} = 0$, ki leži na intervalu

$(0, 1)$; npr. $r_2 = \sqrt{3}$, $r_3 = \sqrt{7}$.

Ocena (*) je eksaktna, t.j. eksistira taka enotska ($\|e\| = 1$)
 B-algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ in tak $a \in A$, da je $\wp(a) =$
 $= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = r_n \max\{M(1), M(n)^{1/n}\}$ za vsako

sodo število $n \in \mathbb{N}$. Če je n liho število, ocena (*) ne velja
 /14, Opomba 3/.

Dokaz: Po 0.5.6.1 je $\|\hat{a}^n\|^{1/n} = \left(\sup_{x \in S} \|a^n x\| \right)^{1/n} = \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n}$,

kar po /5, Propozicija I.2.8/ pomeni, da eksistira $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{a}^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n}$ ter je $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{a}^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|\hat{a}^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n}$. Po Lumer-jevih izvajanjih /14, Teorem 2/ velja

naša trditev za realne enotske B-algebre in očitno velja tudi za realne enotske normirane algebre ter tudi za kompleksne enotske normirane algebre /13, Izrek 2.22/. Zaradi 0.5.6.1 in 2.3.2 pa od tod sledi, da velja naša trditev tudi za normirane algebre brez enote oz. za normirane algebre z enoto e , za katere je $\|e\| \neq 1$.

3. SPEKTRALNI RADIJ, NUMERIČNI RADIJ IN NORMA ELEMENTA ASOCIATIVNE NORMIRANE ALGEBRE, KI IMA ENOTO ALI PA JE BREZ NJE

3.1 Definicija Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), potem za vsak $a \in A$ definiramo:

- (i) $r(A, a) = r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} =$ spektralni radij elementa a
- (ii) $v(A, a) = v(a) = \sup |V(A, a)| =$ levi numerični radij elementa a algebre A
- (ii') $v_d(A, a) = v_d(a) = \sup |V_d(A, a)| =$ desni numerični radij elementa a

3.2 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), z enoto ali brez nje. Potem velja:

- (i) $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \|a\|$ za vsak $a \in A$
- (ii) $r(\lambda a) = |\lambda| r(a)$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$ in $a \in A$
- (iii) $r(a^n) = (r(a))^n$ za vsak $a \in A$ in $n \in \mathbb{N}$
- (iv)[†] $a, b \in A, ab = ba \Rightarrow r(a+b) \leq r(a) + r(b), r(ab) \leq r(a)r(b)$
- (v) Za vsak $a \in A$ eksistira $\lim_{n \rightarrow \infty, x \in S} \|a^n x\|^{1/n} := \wp(a)$ in je $\wp(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n}$ ter velja ocena $\wp(a) = r(\bar{A}_e, \bar{a}) = r(\hat{A}_e, \hat{a}) \leq r(A, a)$ za vsak $a \in A$ ($\hat{A}_e, \bar{A}_e \dots$ formalna adjunkcija enote, gl. 0.5.4 in 0.5.5)
- (vi) Če je $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$, je $r(A, a) = r(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})$ za vsak $a \in A$ (gl. 0.4.1)
- (vii) $r(a) \leq \sup |\mathcal{G}(A, a)|$ za vsak $a \in A$ in če je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra, je $\mathcal{G}(A, a)$ neprazna kompaktna podmnožica prostora $\mathbb{C}$ ter je $r(a) = \max |\mathcal{G}(A, a)|$ za vsak $a \in A$. Če je nadalje $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna B-algebra, je $r(a) = \max_{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|=1, t \in \mathbb{R}, t \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \sup_{x \in S} \|e^{\lambda t a} x\|^{1/t} = \max_{|\lambda|=1} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S} \|e^{\lambda t a} x\|^{1/t} \leq v(a)$ za vsak $a \in A$.
- (vii') $\mathfrak{F} = \mathbb{C} \Rightarrow r(a) \leq v(a)$ za vsak $a \in A$ (polnost algebre ni bistvena).
- (viii) $v(\lambda a) = |\lambda| v(a)$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$ in $a \in A$.
- (ix) $v(a+b) \leq v(a) + v(b)$ za vsak $a, b \in A$.
- (x) $v(\bar{A}_e, \bar{a}) = v(\hat{A}_e, \hat{a}) = v(A, a) \leq \sup_{x \in S} \|ax\| \leq \|a\|$ za vsak $a \in A$. (formalna adjunkcija enote)

[†] gl. LEMO ($ab=ba=0 \Rightarrow r(a+b) = \max\{r(a), r(b)\}$) v dokazu točke 6.11(vi)

(xi) Če je A kompleksna B -algebra z enoto ali brez nje (formalna adjunkcija enote), je $r(\bar{A}_e, \bar{a}) = r(A, a)$ za vsak $a \in A$ (gl. točko (v)).

Dokaz: (i) /5, Propozicija I.2.8/

(ii), (iii), (viii) Sledi neposredno iz definicije 3.1 .

(iv) /13, 0.2.15.6(iii)/

(v) Po 0.5.6.1 je $\|\hat{a}^n\| = \sup_{x \in S} \|a^n x\| = \|\bar{a}^n\|$, kar po 3.1 in (i)

pomeni $r(\hat{A}_e, \hat{a}) = r(\bar{A}_e, \bar{a}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} = \mathfrak{S}(a) \dots (1)$. Ker je $\sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} \leq \|a^n\|^{1/n}$,

je zaradi (1) in (i) $\mathfrak{S}(a) \leq r(A, a) \dots (2)$. Točki (1) in (2) dokazujeta (v).

(vi) Upoštevamo definicijo 3.1 in to, da je vložitev $a \rightarrow \tilde{a}$ realne algebre A v njeno kompleksifikacijo $A_{\mathbb{C}}$ izometrični (realni) homomorfizem.

(vii) Po /5, Teorem I.5.7 in I.13.7(ii)/ je $\sup |\mathcal{G}(A, a)| \geq r(a)$ in če je $(A, \|\cdot\|)$ B -algebra, je po /5, Teorem I.5.8 in I.13.7(iii)/ spekter $\mathcal{G}(A, a)$ neprazna kompaktna podmnožica prostora $\mathbb{C}$ ter je $\max |\mathcal{G}(A, a)| = r(a) \dots (3)$.

Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna B -algebra. Zaradi (3) in 2.3.11 je tedaj $r(a) = \max |\mathcal{G}(A, a)| \leq \max |\overline{\sigma} V(A, a)| = v(a) \dots (4)$. Če ima A enoto e , velja tedaj po /3, Korolar 1.3.9/ enakost $r(a) = \max_{|a|=1} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|e^{\lambda t a}\|^{1/t}$, pri čemer je očitno $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|e^{\lambda t a} x\|^{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{\lambda t a}\|^{1/t} \dots (5)$, saj je $\|e\|^{-1} \|e^y\| \leq \sup_{x \in S} \|e^y x\| \leq \|e^y\|$

za vsak $y \in A$. Če je A brez enote, veljajo zaradi (3), 1.19.1 in /3, Korolar 1.3.9/ enakosti $r(A, a) \stackrel{(3)}{=} \max |\mathcal{G}(A, a)| \stackrel{1.19.1}{=} \max |\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a})| = r(\bar{A}_e, \bar{a}) = \max_{|a|=1} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \|e^{\lambda t \bar{a}}\|^{1/t} \dots (6)$. Trditev (vii) potrjujejo točke (3), (4), (5), (6), 0.5.7(ii) in 1.12 .

(vii') Če je A B -algebra, potrjuje trditev točka (vii)...(7).

Če A ni B -algebra, jo izpopolnimo do B -algebre $\bar{A}$. Ker je vložitev $x \mapsto \tilde{x}$ algebre A v $\bar{A}$ izometrični homomorfizem, je $r(A, a) = r(\bar{A}, \tilde{a})$ in po 3.1(ii) ter 2.2.9 je $v(A, a) = v(\bar{A}, \tilde{a})$. To zaradi (7) dokazuje (vii').

(ix) Po definiciji 3.1 sledi iz 2.1.4.5 .

(x) Izrek 2.3.2 in definiciji 2.1.3 ter 3.1 .

(xi) Upoštevamo 3.2(vii) in 1.19 .

3.3 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ normirana algebra z enoto ali brez nje (ni treba, da je asociativna!) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem je preslikava $a \mapsto v(a)$ algebre A v $\mathbb{R}$ navzgor polzvezna, t.j. za vsak $a \in A$ in za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eksistira tak $\delta_\varepsilon(a) \in \mathbb{R}^+$, da velja: $\|b-a\| \leq \delta_\varepsilon(a) \Rightarrow v(b) < v(a) + \varepsilon$.

Dokaz: V enotski normirani algebri $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ je po /13, 4.3/ preslikava $\xi \mapsto v(\hat{A}_e, \xi)$ navzgor polzvezna, pri čemer je po 3.2(x) $v(\hat{A}_e, \hat{a}) = v(A, a)$ za vsak $a \in A$.

3.3' Trditev Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) z enoto ali brez nje, potem je navzgor polzvezna tudi preslikava $a \mapsto r(a)$.

Dokaz: Če je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra, sledi trditev iz 3.2(vii) in iz /17, Teorem 1.6.16/. Če algebra $(A, \|\cdot\|)$ ni poln prostor, jo izometrično homomorfno vložimo v njeno izpopolnitev in velja zato po zgornjem naša trditev tudi v primeru nepolne algebre.

3.4 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem je $r(e^a b e^{-a}) = r(b)$ za vsak $a, b \in A$ (gl. 0.3).

Dokaz: Če upoštevamo asociativnost algebre A in trditev 0.3(ii), lahko dokažemo s popolno indukcijo enakost $(e^a b e^{-a})^n = e^a b^n e^{-a}$, ki velja za vsak $a, b \in A$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$... (1). Po 0.3(vi) velja zato ocena $\|(e^a b e^{-a})^n\| = \|e^a b^n e^{-a}\| \leq e^{2\|a\|} \|b^n\|$, kar pomeni $r(e^a b e^{-a}) \leq r(b)$... (2). Zaradi 0.3(ii) je tudi $b^n = e^{-a} e^a b^n e^{-a} e^a$ in velja zato po 0.3(vi) in (1) ocena $\|b^n\| \leq e^{2\|a\|} \|e^a b^n e^{-a}\| = e^{2\|a\|} \|(e^a b e^{-a})^n\|$, t.j. $r(b) \leq r(e^a b e^{-a})$... (3). Oцени (2) in (3) dokazujeta našo trditev.

3.5 Trditev Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), $a, b \in A$ in $ab = ba$, je $e^{-\|a\|} r(b) \leq r(e^a b) \leq e^{\|a\|} r(b)$ (gl. 0.3).

Dokaz: Ker a in b komutirata, komutirata tudi $e^a b$ in b ter je zato po 0.3(iv) $(e^a b)^n = e^{na} b^n$, kar po 0.3(vi) pomeni $\|(e^a b)^n\| \geq e^{-\|na\|} \|b^n\|$, torej po 3.1 $r(e^a b) \geq e^{-\|a\|} r(b)$. Analogno je po 0.3(vi) $\|(e^a b)^n\| = \|e^{na} b^n\| \leq e^{\|na\|} \|b^n\|$, t.j. $r(e^a b) \leq e^{\|a\|} r(b)$.

3.6 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra nad obsegom $\mathbb{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), z enoto ali brez nje. Potem je $e^{-r(a)} r(a) \leq r(e^a a) \leq e^{r(a)} r(a)$ za vsak $a \in A$ (gl. 0.3).

Dokaz: 1. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ Po 0.3(iv), 3.1(i), 3.2(vii) in po spektralnem teoremu /11, Teorem 5.3.1 in 24.5.5/ je za vsak $n \in \mathbb{N}$ $\|(e^a a)^n\|^{1/n} = \|e^{na} a^n\|^{1/n} \geq [r(e^{na} a^n)]^{1/n} = [\max_{\lambda \in \sigma(e^{na} a^n)} |\lambda|]^{1/n} = [\max_{\lambda \in \sigma(a)} |e^{n\lambda} \lambda^n|]^{1/n} = \max_{\lambda \in \sigma(a)} \{e^{\operatorname{Re} \lambda} |\lambda|\} = e^{-r(a)} r(a)$, kar po definiciji 3.1(i) dokazuje prvo neenakost. Zaradi 3.2(vii) in spektralnega teorema pa je po drugi strani $e^{r(a)} r(a) \geq \max_{\lambda \in \sigma(a)} \{e^{|\lambda|} |\lambda|\} \geq \max_{\lambda \in \sigma(a)} \{e^{\operatorname{Re} \lambda} |\lambda|\} = \max_{\lambda \in \sigma(a)} \{e^{\lambda} \lambda\} = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = r(e^a a)$.

2. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ Sledi iz 3.2(vi), gl. 0.4.1.

3.7 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna B-algebra z enoto ali brez nje. Če za element $a \in A$ eksistira tak $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, da je $\sigma(A, a) \subset \lambda \mathbb{R}$ in da je norma $\|\sin(t\lambda^* a)\| \leq 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$... (i), potem je $r(a) = \|a\|$. Če pogoj (i) nadomestimo s šibkejšim pogojem $\sup_{x \in S} \|\sin(t\lambda^* a)x\| \leq 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$... (ii), velja (šibkejša) ocena $\wp(a) = \sup_{x \in S} \|ax\|$.

(gl. 3.2(v); * pomeni konjugiranje kompleksnega števila)

Dokaz: Trditev je dokazana za primer, da ima A enoto /13, 0.2.40.8/ ... (1). Če je A brez enote, ji enoto adjungiramo in na algebro A_e (gl. 0.5.1) uvedemo običajno normo $\|\cdot\|_e$, $\|(\lambda, a)\|_e = |\lambda| + \|a\|$. Potem je $(A_e, \|\cdot\|_e)$ kompleksna asociativna enotska B-algebra in vložitev $x \mapsto \tilde{x} = (0, x)$ je izometrični homomorfizem algebre A v A_e . Zato je $\|\sin(t\lambda^* \tilde{a})\|_e = \|(\sin(t\lambda^* a))^{\sim}\|_e = \|\sin(t\lambda^* a)\| \leq 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$... (2) in po 1.7 je $\sigma(A_e, \tilde{a}) = \sigma(A, a) \subset \lambda \mathbb{R}$... (3). Zaradi (1), (2) in (3) je $r(a) = r(\tilde{a}) = \|\tilde{a}\| = \|a\|$.

Če velja pogoj (ii), vložimo A v $\bar{A}_e$ (gl. 0.5.5) in je tedaj po 0.5.7(i) $\|\sin(t\lambda^* \bar{a})\| = \sup_{x \in S} \|\sin(t\lambda^* a)x\| \leq 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$ ter po 1.13 (gl. 1.5 in 1.4(iii)) $\sigma(\bar{A}_e, \bar{a}) \subset \sigma(A, a) \subset \lambda \mathbb{R}$. Zato je po točki (1), po 3.2(v) in po 0.5.6.1 $\wp(a) = r(\bar{A}_e, \bar{a}) = \|\bar{a}\| = \sup_{x \in S} \|ax\|$.

3.8 Trditev Naj bo A kompleksna asociativna B -algebra (z enoto ali brez nje) z lastnostjo, da je $\text{co } \mathcal{G}(A, a) \supset \overline{\text{co}}V(A, a)$ za vsak $a \in A$. Potem je $r(a) = v(a)$ in $v(a^n) \leq (v(a))^n$ za vsak $a \in A$ in $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Enakost sledi iz 3.2(vii) in 3.1(ii) ter neenakost sledi iz 3.1(ii) in 2.3.17.

3.9 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna B -algebra (z enoto ali brez) in $a \in A$ tak element, da je $\sup_{x \in S} \|\lambda x + ax\| =$

$$= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|(\lambda + a)^n x\|^{1/n} \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|(\lambda + a)^n x\|^{1/n}, \text{ gl. 3.2(i)})$$

za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$... (*), kjer je $(\lambda + a)^n x := \lambda^n x + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} a^k x$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ in $a, x \in A$ ter $n \in \mathbb{N}$. Potem velja :

- (i) A je brez enote $\Rightarrow \text{co } \mathcal{G}(A, a) \supset \overline{\text{co}}V(A, a)$
- (i') A je brez leve enote $\Rightarrow \text{co } \mathcal{G}(A, a) = \overline{\text{co}}V(A, a)$
- (ii) A ima enoto $\Rightarrow \text{co } \mathcal{G}(A, a) \subset \overline{V(A, a)}$ in $\text{co}(\mathcal{G}(A, a) \cup \{0\}) \supset \overline{\text{co}}V(A, a)$.
- (ii') Če ima A enoto e in je $\|e\| = 1$, je $\text{co } \mathcal{G}(A, a) = V(A, a)$.

Dokaz: Algebri A enoto e formalno adjungiramo, ne glede na to ali A ima enoto ali ne - algebro A vložimo v A_e oz. v $\bar{A}_e$ (gl. 0.5.1 in 0.5.5). Po 1.7 je $q\text{-}\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A_e, \tilde{a})$... (1). Ker je preslikava $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ algebre A_e v algebro $\bar{A}_e$ homomorfizem, ki preslika enoto e algebre A_e v enoto $\bar{e}$ algebre $\bar{A}_e$, je $\mathcal{G}(A_e, \tilde{a}) \supset \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a})$... (2). Če ima A enoto, je po 1.3(ii) $q\text{-}\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A, a) \cup \{0\}$... (3) in če je A brez enote, je po definiciji 1.4(iii) $q\text{-}\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A, a)$... (4). Po 0.5.6.1 in definiciji 3.1(i) je $\sup_{x \in S} \|\lambda x + ax\| = \|\lambda \bar{e} + \bar{a}\|$ in $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|(\lambda + a)^n x\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|(\lambda \bar{e} + \bar{a})^n\|^{1/n} = r(\bar{A}_e, \lambda \bar{e} + \bar{a})$ in če velja pogoj (*), je zato $\|\lambda \bar{e} + \bar{a}\| = r(\bar{A}_e, \lambda \bar{e} + \bar{a})$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$. To zaradi 3.2(vii) in (x) pomeni enakost $v(\bar{A}_e, \lambda \bar{e} + \bar{a}) = r(\bar{A}_e, \lambda \bar{e} + \bar{a})$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ in je zato po /13, Izrek 6.1/ $V(\bar{A}_e, \bar{a}) = \text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a})$. To po 2.3.2 pomeni $\overline{\text{co}}V(A, a) = \text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a})$... (5). Trditev (i) sledi iz (4), (1), (2) in (5). Trditev (i') sledi iz (i) in 2.3.11.2. Trditev (ii) sledi iz 2.3.11.1 ter iz (3), (1), (2), in (5).

Če ima A enoto e in je $\|e\| = 1$, je zaradi predpostavke (*) $\|\lambda e + a\| = r(\lambda e + a)$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, kar po /13, Izrek 6.1/ dokazuje trditev (ii').

3.10 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem je $\sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| \leq e^{|\lambda| v(a)}$ za vsak $a \in A$ in $\lambda \in \mathfrak{F}$.

Dokaz: Po 2.3.7 in 2.1.4.4 je $\|e^{\lambda a} x\| \leq \|x\| \sup e^{\operatorname{Re} V(\lambda a)} \leq \|x\| e^{\sup |V(\lambda a)|} = \|x\| e^{|\lambda| \sup |V(a)|}$ za vsak $a, x \in A$ in $\lambda \in \mathfrak{F}$.

3.11 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $a \in A$ tak element, da je $r(a) = 0$. Potem velja ekvivalenca: $\sup_{t \in \mathbb{R}} \| \exp(ta) \| < \infty \iff a = 0$ (gl. 1.15).

Opomba: Glej še 6.7(xvii) !

Dokaz: /12, Lema 5.1/

3.12 IZREK Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna normirana algebra (z enoto ali brez nje). Potem za vsak $a, b \in A$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja ocena: $\|a^n b\| \leq [(e/n)^n n!] \cdot [v(A, a)]^n \|b\| \dots (*)$, kar po definiciji 2.1.3(ii) in 3.1 pomeni, da je levi anihilator algebre A , $\operatorname{lan} A = \{a \in A : v(A, a) = 0\}$, $e = \exp 1$.

Dokaz: Po /3, Teorem 1.4.8/ velja za kompleksno enotsko asociativno Banachovo algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ ocena $\|\bar{a}^n\| \leq [(e/n)^n n!] \cdot [v(\bar{A}_e, \bar{a})]^n$. Po 0.5.6.1 je $\|\bar{a}^n\| = \sup_{x \in S} \|a^n x\|$ in po

3.2(x) je $v(\bar{A}_e, \bar{a}) = v(A, a)$. Vse to skupaj dokazuje trditev.

3.12' Opomba Tudi, če A ni asociativna, da je le kompleksna normirana algebra, velja ocena $\|ab\| \leq e \|b\| v(a)$ in zato tudi $\|ab\| \leq e \min\{\|b\| v(a), \|a\| v_d(b)\}$ za vsak $a, b \in A$ (gl. 3.1(ii'), 2.1.3(iii) in 2.1.4.6).

Dokaz: Operator T_a , $T_a x = ax$ za vsak $x \in A$, je element kompleksne enotske normirane algebre $\mathfrak{B}(A)$ vseh linearnih omejenih operatorjev $T: A \rightarrow A$. Zato je po /13, Izrek 4.7/ $\|T_a\| \leq e v(\mathfrak{B}(A), T_a)$, kar po definiciji norme $\|T\|$ operatorja $T \in \mathfrak{B}(A)$ in po 2.1.4.2(ii) pomeni $\sup_{x \in S} \|ax\| \leq e v(A, a)$.

3.12'' Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna normirana algebra (z enoto ali brez nje). Potem velja za vsak $a, b \in A$ ocena $v(ab) \leq e^2 v(a)v(b)$.

Dokaz: Po 3.2(x) in 3.12' je $v(ab) \leq \sup_{x \in S} \|abx\| \leq$

$$\leq \left(\sup_{y \in S} \|ay\| \right) \left(\sup_{x \in S} \|bx\| \right) \leq (ev(a))(ev(b)).$$

3.13 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna, asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje). Potem veljata za vsak $a, b \in A$ ekvivalenci:

$$(i) \quad \left(\text{za vsak } x \in A \text{ je } \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} x\| < \infty \right) \iff (ab - ba) \in \text{lan}A$$

(gl. 0.5.0)

$$(ii) \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}\| < \infty \iff ab = ba.$$

Dokaz: (i) Zaradi 0.3(i) velja pri vsakem $x \in A$ za funkcijo

$$F_x(\lambda) := e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} x \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \text{ enakost}$$

$$\frac{1}{\mu} [F_x(\lambda + \mu) - F_x(\lambda)] = e^{\lambda a} \frac{e^{\mu a} b e^{-\mu a} - b}{\mu} e^{-\lambda a} x \text{ za vsak } \lambda \in \mathbb{C} \text{ in}$$

za vsak $\mu, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. S pomočjo ustreznih vrst od tod neposredno

ugotovimo, da je funkcija $F_x(\lambda)$ odvedljiva v vsaki točki $\lambda \in \mathbb{C}$

in da je njen odvod $F'_x(\lambda) = e^{\lambda a} (ab - ba) e^{-\lambda a} x$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ pri

poljubnem $x \in A$... (1). Če je F_x omejena na $\mathbb{C}$ za vsak $x \in A$, je

po Liouville-ovem izreku zaradi (1) konstantna na $\mathbb{C}$ in je zato

zaradi (1) $0 = F'_x(0) = (ab - ba)x$ pri poljubnem $x \in A$, t.j.

$(ab - ba) \in \text{lan}A$. Če je obratno $(ab - ba) \in \text{lan}A$, je

$(ab - ba)e^{-\lambda a} x = 0$ za vsak $x \in A$ in je zato po (1) $F_x(\lambda) =$

= konst. (odvisna od x) za vsak $x \in A$. S tem je dokazana trditev (i)

(ii) Podobne zaključke, kot smo jih dobili za funkcije $F_x(\lambda)$,

lahko dobimo za funkcijo $F(\lambda) := e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}$.

3.14 Trditev Če za kompleksno, asociativno normirano algebro $(A, \|\cdot\|)$ (ki ima enoto ali pa je brez nje) eksistira taka funkcija $M : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, da je $\|a\| \leq M(r(a))$ za vsak $a \in A$, potem je algebra A komutativna v dveh primerih:

(i) Če je $(A, \|\cdot\|)$ poln prostor ali

(ii) če je funkcija M (nestrogo) monotono naraščajoča

(t.j. če velja implikacija: $0 \leq r_1 < r_2 \Rightarrow M(r_1) \leq M(r_2)$).

Dokaz: (i) Po 3.4 je $\|e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}\| \leq M(r(e^{\lambda a} b e^{-\lambda a})) = M(r(b)) < \infty$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, kar po 3.13(ii) pomeni komutativnost algebre A .

(ii) Nopolno algebro $(A, \|\cdot\|)$ izpopolnimo do B-algebre $(\tilde{A}, \|\cdot\|)$, kjer označimo z i vložitev algebre A v $\tilde{A}$. Vzemimo poljubni $\xi \in \tilde{A}$. Ker je po 3.3' spektralni radij navzgor polzvezna funkcija, eksistira tak $\delta \in \mathbb{R}^+$, da je $r(\eta) < r(\xi) + 1$ za vsak $\eta \in A, \|\eta - \xi\| < \delta$... (1). Ker je $i(A)$ gosta v $\tilde{A}$, eksistira tak $x \in A$, da je $\|i(x) - \xi\| < \min\{1, \delta\}$... (2). Ker je vložitev i izometrija in je M monotona, veljajo zaradi (2), zaradi predpostavke trditve in zaradi (1) ocene: $\|\xi\| \leq \|\xi - i(x)\| + \|i(x)\| \leq 1 + \|x\| \leq 1 + M(r(x)) = 1 + M(r(i(x))) \leq 1 + M(r(\xi) + 1) := M'(r(\xi))$, t.j. $\|\xi\| \leq M'(r(\xi))$ za vsak $\xi \in \tilde{A}$. Zato je po (i) $\tilde{A}$ komutativna, t.j. A je komutativna.

3.14' Trditev (i) Če za kompleksno asociativno normirano algebro $(A, \|\cdot\|)$ (z enoto ali brez nje) eksistira taka pozitivna konstanta α , da je $r(a) \geq \alpha v(a)$ za vsak $a \in A$, potem je $(ab - ba) \in \text{lan} A$ za vsak $a, b \in A$ (gl. 0.5.0).

(ii) Če za kompleksno asociativno normirano algebro $(A, \|\cdot\|)$ (z enoto ali brez nje) eksistira taka pozitivna konstanta β , da je $r(a) \geq \beta \|a\|$ za vsak $a \in A$ (npr. če je $\|ab\| \geq \alpha \|a\| \|b\|$ za vsak $a, b \in A$, kjer je α pozitivna konstanta), potem je algebra A komutativna. (Zato je v vsaki nekomutativni kompleksni asociativni normirani algebri $\inf\{r(a)/\|a\| : a \in A \setminus \{0\}\} = 0$, t.j. za vsak $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ eksistira tak $a_\epsilon \in A \setminus \{0\}$, da je $r(a_\epsilon) < \epsilon \|a_\epsilon\|$).

Dokaz: (i) Zaradi predpostavke trditve (i) in 3.12 je $r(a) \geq \alpha v(a) \geq \alpha (1/\epsilon) \sup_{x \in S} \|ax\|$, t.j. $\|ax\| \leq (\epsilon/\alpha) \|x\| r(a)$ za vsak

$a, x \in A$. Zato je po 3.4 $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} x\| \leq (\epsilon/\alpha) \|x\| r(e^{\lambda a} b e^{-\lambda a}) = (e/\alpha) \|x\| r(b) < \infty$. To po 3.13(i) pomeni $(ab - ba) \in \text{lan} A$ za vsak $a, b \in A$.

(ii) Sledi iz 3.14(ii), kjer je $M(r) = r/\beta$.

3.14'' Opomba: (i) Če je $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna normirana algebra in je $\|\cdot\|$ multiplikativna norma ($\|ab\| = \|a\| \|b\|$ za vsak $a, b \in A$), je $r(a) = v(a) = \|a\|$ za vsak $a \in A$ in je zato po 3.14'(ii) algebra A komutativna brez kvazinilpotentnih elementov in norma $\|\cdot\|$ je zato hilbertska, t.j. izhaja iz skalarne produkta. V primeru, da ima A enoto, to pomeni, da je A izomorfna obsegu $\mathbb{C}$ (gl. npr. /6; IZREK 9,10 in 9,3/). Vprašanje je torej ali eksistira kompleksna asociativna komutativna normirana algebra brez enote z multiplikativno normo, ki izhaja iz skalarne produkta?

(ii) Eksistira realna asociativna normirana algebra z multiplikativno normo (in z enoto), ki ni komutativna (npr. kvaternioniska algebra /5, I.14.3/).

Dokaz: (i) Pokažimo, da je komutativna normirana algebra $(A, \|\cdot\|)$ z multiplikativno normo $\|\cdot\|$ predhilbertov prostor glede na skalarni produkt, ki ga generira ta norma $\|\cdot\|$. Res, ker je $\|\cdot\|$ multiplikativna norma in je A komutativna algebra, sledi po trikotniški neenakosti ocena $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = \|(a+b)^2\| + \|(a-b)^2\| \geq \|(a+b)^2 - (a-b)^2\| = \|4ab\| = 4\|a\|\|b\|$, t.j. $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 \geq 4$ za vsak $a, b \in S$, kar po /8, VII.3(E), str. 152/ pomeni, da naša norma $\|\cdot\|$ generira na A realen skalarni produkt in zato po /22, I.5, str. 39/ tudi kompleksen skalarni produkt.

3.15 Izrek Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna normirana algebra (z enoto ali brez nje) z lastnostjo, da je

$$\wp(\lambda, a) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|(\lambda + a)^n x\|^{1/n} = \sup |\lambda + v(A, a)| \quad \text{za vsak}$$

$(\lambda, a) \in \mathbb{C} \times A$ (kjer je po definiciji $(\lambda + a)^n x = \lambda^n x + \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} a^k x$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, za vsak $a, x \in A$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$).

Potem je $\wp(\lambda, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|(\lambda + a)^n x\|^{1/n}$ za vsak $(\lambda, a) \in \mathbb{C} \times A$ in velja:

- (i) $\wp(0, a) = r(a) = v(a)$ za vsak $a \in A$
- (ii) $v(a^n) = (v(a))^n$ za vsak $a \in A$ in $n \in \mathbb{N}$
- (iii) $(ab - ba) \in \text{lan} A$ za vsak $a, b \in A$ (gl. 0.5.0)
- (iv) $\sup_{x \in S} \|ax\| \leq (e/2)v(a)$ za vsak $a \in A$ (primerjaj 3.12 oz. 3.12')
- (v) Če je a_0 tak element algebre A , da je $v(A, a_0) \leq 1$ in če je p tak polinom (stopnje n) s kompleksnimi koeficienti $c_0, c_1, \dots, c_n$ ($p(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$), da je $\sup \{|p(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\} \leq 1$, potem je $\sup_{x \in S} \|p(a)x\| := \sup_{x \in S} \|c_0 x + (\sum_{k=1}^n c_k a^k)x\| \leq \frac{e}{2}$.
- (vi) Če je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra, velja:
 - (α) Če ima A levo enoto in je pri tem A brez desne enote, je $\wp(A, a) \setminus \{0\} \subset \overline{\text{co}} V(A, a) \subset \text{co } \wp(A, a)$ za vsak $a \in A$ in
 - (β) v vsakem drugem primeru (negacija predpostavke trditve (α)) pa je $\text{co } \wp(A, a) = \overline{\text{co}} V(A, a)$ za vsak $a \in A$.

Dokaz: Algebri A enoto formalno adjungiramo, t.j. algebro A vložimo v kompleksno asociativno enotsko normirano algebro $\hat{A}_e$

(gl. 0.5.4). Po 0.5.6.1 in def. 3.1(i) veljajo enakosti :

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|(\lambda + a)^n x\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|(\lambda \hat{e} + \hat{a})^n\|^{1/n} = r(\hat{A}_e, \lambda \hat{e} + \hat{a}) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda \hat{e} + \hat{a})^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|(\lambda + a)^n x\|^{1/n} \quad \text{za vsak } (\lambda, a) \in \mathbb{C} \times A \dots$$

...(1). Po 2.3.2 je $\sup |\lambda + V(A, a)| = \sup |\overline{\text{co}}(\lambda + V(A, a))| = \\ = \sup |\lambda + \overline{\text{co}}V(A, a)| = \sup |\lambda + V(\hat{A}_e, \hat{a})| = \sup |V(\hat{A}_e, \lambda \hat{e} + \hat{a})| = \\ = v(\hat{A}_e, \lambda \hat{e} + \hat{a})$ za vsak $(\lambda, a) \in \mathbb{C} \times A$... (2). Ker je po 0.5.4 in 0.5.1 vsak $\hat{\xi} \in \hat{A}_e$ oblike $\hat{\xi} = (\lambda, a) + \mathcal{N} = \lambda e + \tilde{a} + \mathcal{N} = \lambda \hat{e} + \hat{a}$, sledi iz predpostavke Izreka zaradi (1) in (2) enakost $r(\hat{A}_e, \hat{\xi}) = v(\hat{A}_e, \hat{\xi})$ za vsak $\hat{\xi} \in \hat{A}_e$... (3).

Vzemimo poljuben $\eta \in \bar{A}_e =$ izpopolnitev algebre $\hat{A}_e$... (4). Ker sta po 3.3 in 3.3' preslikavi $\xi \rightarrow v(\bar{A}_e, \xi)$ in $\xi \rightarrow r(\bar{A}_e, \xi)$ navzgor polzvezni, eksistira za predpisan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tak $\delta \in \mathbb{R}^+$, da velja za

vsak $\eta', \eta'' \in \bar{A}_e$ implikacija: $\|\eta'' - \eta'\| \leq \delta \Rightarrow v(\bar{A}_e, \eta'') \leq v(\bar{A}_e, \eta') + \varepsilon$ in $r(\bar{A}_e, \eta'') \leq r(\bar{A}_e, \eta') + \varepsilon$... (5). Ker je $\hat{A}_e$ gosta v $\bar{A}_e$, eksistira tak $\hat{\xi} \in \hat{A}_e$, da je $\|\hat{\xi} - \eta\| < \delta$ ($\hat{\xi} = \bar{\hat{\xi}} \in \bar{A}_e$) ...

(6). Zaradi (5), (6), 3.2(x), (3), 3.2(v) in ponovno (5) in (6) velja ocena $v(\bar{A}_e, \eta) \leq v(\bar{A}_e, \hat{\xi}) + \varepsilon = v(\hat{A}_e, \hat{\xi}) + \varepsilon = r(\hat{A}_e, \hat{\xi}) + \varepsilon = r(\bar{A}_e, \hat{\xi}) + \varepsilon \leq (r(\bar{A}_e, \eta) + \varepsilon) + \varepsilon$, t.j. $v(\bar{A}_e, \eta) \leq r(\bar{A}_e, \eta) + 2\varepsilon$ za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, kar pomeni $v(\bar{A}_e, \eta) \leq r(\bar{A}_e, \eta)$ in sledi zato po 3.2(vii) in (5) enakost $r(\bar{A}_e, \eta) = v(\bar{A}_e, \eta)$ za vsak $\eta \in \bar{A}_e$. Zato je po /13, 6.1 oz. po 6.5/ $\text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \eta) = V(\bar{A}_e, \eta)$ za vsak $\eta \in \bar{A}_e$... (7).

Točka (1) dokazuje začetek trditve Izreka. Točka (i) sledi iz 3.2(v) in 3.2(vii'). Točko (ii) potrjuje (i) in 3.2(iii). Točka (iii) sledi iz (i) in 3.14'(i).

(iv) Zaradi (7), 3.2(vii) in def. 3.1(ii) je $r(\bar{A}_e, \eta) = v(\bar{A}_e, \eta)$ za vsak $\eta \in \bar{A}_e$, kar po /4, Teorem 6.23.5/ pomeni $\|\eta\| \leq (e/2)v(\bar{A}_e, \eta)$ za vsak $\eta \in \bar{A}_e$. Zato je tudi $\|\bar{a}\| \leq (e/2)v(\bar{A}_e, \bar{a})$ za vsak $a \in A$, kar po 0.5.6.1 in 3.2(x) dokazuje oceno (iv).

(v) Po 3.2(x) je $v(\bar{A}_e, \bar{a}_0) \leq 1$ in je zato po /4, Korolar 6.23.6/ $\|p(\bar{a}_0)\| \leq e/2$, kar po 0.5.6.1 dokazuje oceno (v).

(vi) Zaradi 2.3.2, (7) in 1.19 je $\overline{\text{co}}V(A, a) = V(\bar{A}_e, \bar{a}) = \text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) \subset \text{co } \mathcal{G}(A, a)$, t.j. $\overline{\text{co}}V(A, a) \subset \text{co } \mathcal{G}(A, a)$ za vsak $a \in A$... (8), kar zaradi 2.3.11 že dokazuje trditev (vi)(α). Če ima A levo in desno enoto (t.j. enoto), ali pa če je A brez leve enote, je po 2.3.11.1 in 2 $\mathcal{G}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$, kar zaradi (8) dokazuje enakost (vi)(β).

3.16 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $a \in A$ tak element, da je $V(A, a) = \{\lambda_0\}$, $\lambda_0 \in \mathfrak{F}$. Potem velja:

- (i) A brez leve enote $\Rightarrow \lambda_0 = v(a) = 0$
- (i') (A brez leve enote, $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$) $\Rightarrow a \in \text{lan} A$ (t.j. $ax = 0$ za vsak $x \in A$).
- (ii) (A ima enoto e , $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$) $\Rightarrow a = \lambda_0 e$.

Dokaz: Pri dokazu lahko zaradi 2.2.9 privzamemo, da je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra.

- (i) Zaradi 2.3.11.2 je "tedaj" $\{0\} \subset \mathcal{G}_{\mathfrak{F}}(a) \subset \overline{\text{co}}V(a) = \{\lambda_0\}$, t.j. $\lambda_0 = 0 = v(a)$.
- (i') Ker je po (i) $v(a) = 0$, je po 3.12' $\|ax\| \leq e\|x\|v(a) = 0$ za vsak $x \in A$.
- (ii) Po 2.3.1 je $V(A_1, a) = \overline{\text{co}}V(A, a) = \{\lambda_0\}$ in ker je $(A_1, \|\cdot\|_1)$ kompleksna enotska B-algebra, je po 2.2.5(iii) in (vii') $V(A_1, a - \lambda_0 e) = V(A_1, a) - \{\lambda_0\} = \{0\}$. Od tod po 3.12 sledi $(a - \lambda_0 e) \in \text{lan} A = \{0\}$.

3.17 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna normirana algebra (z enoto ali brez nje). Potem velja za vsak $a \in A$ naslednje:

- (i) $\frac{1}{e} \sup_{x \in S} \|ax\| \leq v(a) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} [v(a^n)]^{1/n} \leq ev(a)$
- (ii) Eksistirata limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} := \wp(a)$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} [v(a^n)]^{1/n} := \wp(a)$ ter je $\wp(a) = v(a)$.
- (iii) $r(a) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} [v(a^n)]^{1/n}$.

Dokaz: (i) Prvi del neenakosti je po 3.12 očiteno. Po 3.2(x) in 3.12 je tudi $v(a^n) \leq \sup_{x \in S} \|a^n x\| \leq [(e/n)^{n!}] \cdot [v(a)]^n \leq e^n [v(a)]^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar dokazuje tudi drugi del neenakosti.

- (ii) Po 3.12 in 3.2(x) je $\sup_{x \in S} \|a^n x\| \leq ev(a^n) \leq e \sup_{x \in S} \|a^n x\|$ in zato tudi $\sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} \leq e^{1/n} [v(a^n)]^{1/n} \leq e^{1/n} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n}$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar zaradi 3.2(v) dokazuje (ii).

- (iii) Po 3.2(iii) in 3.2(vii') je $[r(a)]^n = r(a^n) \leq v(a^n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

3.18 Izrek Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ realna asociativna normirana algebra (z enoto ali brez nje). Po 3.2(v) eksistira $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} := \wp(a)$ in je $\wp(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n}$ ter velja:

- (i) Za poljubno sodo naravno število n in poljuben $a \in A$ velja ocena: $\wp(a) \leq r_n \max\{v(a), (v(a^n))^{1/n}\} \dots (*)$, kjer je $r_n^{-1} = \sin \psi_n$ in je ψ_n edini koren enačbe $(\sin \psi)^n = \cos(n\psi)$, ki leži na intervalu $(0, \pi/2n)$, t.j. r_n^{-1} je najmanjši koren enačbe $\lambda^n + \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} (-1)^{k+1} (1 - \lambda^2)^{n/2-k} \lambda^{2k} = 0$, ki leži na intervalu $(0, 1)$ (npr.: $r_2 = \sqrt{3}$, $r_4 = \sqrt{7}$). Ocena $(*)$ je eksaktna, t.j. eksistira taka enotska realna B-algebra, da je $\wp(a) = r(a) = r_n \max\{v(a), (v(a^n))^{1/n}\}$ za vsako sodo naravno število n .
- (ii) $\sup_{x \in S} \|ax\| \leq 4 \max\{v(a), (v(a^2))^{1/2}\}$ za vsak $a \in A$, kar po def. 2.1.3(ii) in 3.1 pomeni, da je levi anihilator $\text{lan} A = \{a \in A : v(A, a) = v(A, a^2) = 0\}$
- (iii) $\sup_{x \in S} \|ax\| \leq k_0 \sup_{n \in \mathbb{N}} (v(a^n))^{1/n}$, kjer je konstanta $k_0 = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} [e^t(2t - \text{sht})^{-1}] \in (2.89, 3.18)$

Opomba: Gl. še naprej 5.5(ii), lastnosti poševno-hermitskih elementov!

Dokaz: (i) Sledi iz 2.3.19.

(ii), (iii) Po /7, Primer 2.3 in Teorem 2.4/ veljata trditvi za realne enotske B-algebre (norma enote je = 1). Zato veljata tudi za realne enotske normirane algebre (upoštevamo, da je vložitev nepolne normirane algebre v njeno standardno izpopolnitev izometrični homomorfizem, pri čemer se zato po 2.2.9 numerični radij ohranja). Po 0.5.6 in 3.2(x) pa od tod že sledita naši trditvi.

3.19 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ (= $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $j^3 = j \in A \setminus \{0\}$. Potem je očitno $\|j\|, \|j^2\| \geq 1 = r(j)$ ter velja:

- (i) $v(j) \geq 1$ in $(1/\|j\|) \leq \sup_{x \in S} \|jx\| < e v(j)$ (primerjaj

3.15(i) in 3.17(i))

$$(ii) \operatorname{Re} V(j) \subset [-1, 1] \Rightarrow \sup_{x \in S} \|jx\|, \sup_{x \in S} \|j^2 x\| \in [1, 2]$$

$$(iii) v(j) \leq 1 \Rightarrow v(j) = 1$$

$$(iv) j^2 = j, \sup \operatorname{Re} V(j) \leq 1 \text{ (npr. } v(j) \leq 1) \Rightarrow r(j) = v(j) = \sup_{x \in S} \|jx\| = 1$$

Dokaz: Vse trditve veljajo za kompleksno enotsko B-algebro

/4, Teorem 23.11 in Teorem 23.12/, veljajo pa tudi za realno enotsko B-algebro in splošno za vsako enotsko normirano algebro nad obsegom $\mathfrak{F}$ /13, Izrek 7.1 in 7.2/. Na osnovi 0.5.6.1, 2.3.2 in 3.2(x) lahko ta rezultat posplošimo za normirane algebre, ki imajo enoto e , $\|e\| \neq 1$ in na normirane algebre brez enote.

3.20 Izrek Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna Banachova algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), a njen algebraičen element stopnje n (t.j. eksistira polinom p ,

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \lambda^k, \lambda_k \in \mathfrak{F}, \text{ da je } p(a) = 0, \text{ kjer je } \lambda_0 = 0, \text{ če}$$

je A brez enote), $r \in \mathbb{R}^+$ in naj bo spektralni radij $r(a) \leq r$. Naj bo potenčna vrsta $f(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \lambda^k$ ($\mu_k \in \mathfrak{F}$) konvergentna na odprti

množici v $\mathfrak{F}$, ki vsebuje "krog" $\{\lambda \in \mathfrak{F} : |\lambda| \leq r\}$, pri čemer je $\mu_k \leq 0$ za vse tiste k -je, za katere je $(n-k)$ sodo naravno število (≥ 2), kjer je $\mu_0 = 0$, če je A brez enote. Potem velja:

$$(i) \|f(a)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{k!} (r + \|a\|)^k f^{(k)}(r) \text{ in zato tudi}$$

$$(ii) \|a^m\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{k} (-1)^{n-1-k} (r(a) + \|a\|)^k (r(a))^{m-k} \text{ za vsak}$$

$$m \in \mathbb{N}, m \geq n$$

$$(iii) \text{ Če je } (A, \|\cdot\|) \text{ kompleksna } B^* \text{-algebra (zadošča že, da je pred-} B^* \text{-algebra, t.j., da je involutivna normirana algebra z lastnostjo } \|x^* x\| = \|x\|^2 \text{ za vsak } x \in A) \text{ in če je } \|a\| \leq 1, \text{ velja ocena: } \|a^m\| \leq \binom{m}{n-1} (r(a))^{m+1-n} \text{ za vsak } m \in \mathbb{N}, m \geq n.$$

Če je f polinom, velja ocena (i) tudi v primeru, če normirana algebra $(A, \|\cdot\|)$ ni poln prostor - izpopolnitev.

Dokaz: **I.** Ocena (i) je dokazana za primer, da je $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna enotska B-algebra /21, Teorem 1/. Ocena (iii) je dokazana za primer, da je A kompleksna B^* -algebra omejenih linearnih operatorjev $T: X \rightarrow X$, kjer je X kompleksen Hilbertov prostor.

II. Če je $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna B-algebra, ki je brez enote ali pa če ima A enoto e_0 in je $\|e_0\| \neq 1$, algeabri A enoto e formalno adjungiramo in na razširjeni algeabri A_e (gl. 0.5.1) uvedemo običajno normo $\|\cdot\|_e$, $\|(\lambda, a)\|_e := |\lambda| + \|a\|$ za vsak $(\lambda, a) \in A_e$. Torej je $(A_e, \|\cdot\|_e)$ kompleksna enotska B-algebra, pri čemer je vložitev $x \mapsto \tilde{x} := (0, x)$ algebre A v A_e izometrični homomorfizem. Zato se spektralni radij ohranja, $r(A_e, \tilde{a}) = r(A, a)$ ter je $\|f(\tilde{a})\| = \|(f(a))^\sim\| = \|f(a)\|$. To pomeni, da velja ocena (i) tudi v primeru II.

Če je $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna B^* -algebra brez enote, jo lahko izometrično homomorfno vložimo v kompleksno enotsko B^* -algebro $(A_e, \|\cdot\|)$, kjer je $\|(\lambda, a)\| := \sup_{x \in S} \|\lambda x + ax\|$ in $(\lambda, a)^* := (\lambda^*, a^*)$ za vsak $(\lambda, a) \in A_e$ (gl. 0.5.3(ii))[†]; spektralni radij in norma se torej tudi pri tej vložitvi ohranjata. Po Vidav-Palmer-jevem oz. po Gel'fand-Naimark-ovem teoremu /3, Teorem 2.6.9 oz. 2.7.1/ je zato $(A_e, \|\cdot\|)$ izometrično *-izomorfna kompleksni enotski B^* -algebri (t.j. C^* -algebri) linearnih omejenih operatorjev $T: X \rightarrow X$, X kompleksen Hilbertov prostor. To zaradi I dokazuje trditev (iii).

III. Realno B-algebro $(A, \|\cdot\|)$ lahko izometrično homomorfno vložimo v kompleksno B-algebro $(A_c, \|\cdot\|_c)$ (gl. 0.4.1). Zato je $\|f(\tilde{a})\|_c = \|(f(a))^\sim\|_c = \|f(a)\|$ in $r(A_c, \tilde{a}) = r(A, a)$, kjer je $x \mapsto \tilde{x} := (x, 0)$ vložitev algebre A v A_c . Od tod zaradi II spet sledi ocena (i).

[†] Ker je A B^* -algebra, je $\|a^*a\| = \|a\|^2$ za vsak $a \in A$... (1) in je zato $\text{lan} A = \{0\}$. Ker je A involutivna algebra brez enote, je A brez leve (in tudi brez desne) enote. Po 0.5.3(ii) je zato preslikava $(\lambda, a) \mapsto |(\lambda, a)| := \sup\{\|\lambda x + ax\| : x \in S\}$ algebrska norma na A_e ... (2). Zaradi (1) je $|\tilde{a}| = \|a\|$ za vsak $a \in A$... (3). Za vsak $t \in (0, 1)$ eksistira po def. norme $|\cdot|$ tak $x \in S$... (4), da je $t|(\lambda, a)| \leq \|\lambda x + ax\|$ in zato po (3) $t^2 |(\lambda, a)|^2 \leq \|\lambda x + ax\|^2 = \|(\lambda x + ax)^*(\lambda x + ax)\| = \|(\lambda \tilde{x} + \tilde{a} \tilde{x})^* \cdot (\lambda \tilde{x} + \tilde{a} \tilde{x})\| = \|\tilde{x}^*(\lambda e + \tilde{a})^*(\lambda e + \tilde{a}) \tilde{x}\| \leq |\tilde{x}^*| |(\lambda e + \tilde{a})^*(\lambda e + \tilde{a})| \cdot |\tilde{x}|$. Torej je zaradi (4) $t^2 |(\lambda, a)|^2 \leq |(\lambda, a)^*(\lambda, a)|$ za vsak $t \in (0, 1)$, t.j. $|(\lambda, a)^*(\lambda, a)| \geq |(\lambda, a)|^2$... (5). Iz (2) in (5) sledi $|(\lambda, a)^*| \cdot |(\lambda, a)| \geq |(\lambda, a)|^2$ in zato $|(\lambda, a)^*| = |(\lambda, a)|$, kar zaradi (2) in (5) pomeni $|(\lambda, a)^*(\lambda, a)| = |(\lambda, a)|^2$.

4. DISIPATIVNI ELEMENTI NORMIRANE ALGEBRE $(A, \|\cdot\|)$ NAD OBSEGOM $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$)

V tem odstavku je $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), ne nujno asociativna, z enoto ali brez nje.

4.1 Definicija Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ normirana algebra z enoto ali brez nje nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Element $a \in A$ imenujemo levo (desno)-disipativen, če je $\sup \operatorname{Re} V(A, a) \leq 0$ (oz. $\sup \operatorname{Re} V_d(A, a) \leq 0$). Množico vseh levo (desno) disipativnih elementov algebre A označimo z $D(A)$ (oz. z $D_d(A)$). Element $a \in A$ imenujemo levo (desno)-akretiven, če je $(-a) \in D(A)$ (oz. $(-a) \in D_d(A)$), t.j. če je $\inf \operatorname{Re} V(A, a) \geq 0$ (oz. $\inf \operatorname{Re} V_d(A, a) \geq 0$). Zaradi 2.1.4.6 je $D_d(A) = D(A^*)$ (gl. 0.1.3).

4.2 Trditev Če asociativni normirani algeбри $(A, \|\cdot\|)$ enoto formalno adjungiramo (ne glede na to ali A ima enoto ali ne - gl. 0.5.1), t.j. če jo vložimo v enotsko normirano algebro $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ oz. v enotsko B -algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.4 oz. 0.5.5), se levo-disipativni elementi ohranjajo, t.j. $(D(A))^\wedge \subset D(\hat{A}_e)$ in $(D(A))^\vee \subset D(\bar{A}_e)$, kjer je $x \mapsto \hat{x}$ vložitev algebre A v $\hat{A}_e$ in $x \mapsto \bar{x}$ vložitev algebre A v $\bar{A}_e$.

Dokaz: Gl. 4.1 in 2.3.2.

4.3 Trditev Če je $(A, \|\cdot\|)$ normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), potem velja:

- (i) $0 \in tD(A) \subset D(A)$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- (ii) $D(A) + D(A) \subset D(A)$
- (iii) $D(A)$ zaprta množica v $(A, \|\cdot\|)$
- (iv) Če je B netrivialna podalgebra asociativne algebre A , je $D(B) = B \cap D(A)$

Dokaz: (i), (ii) : Očitno zaradi 2.1.4.4 in 5.

(iii) Velja implikacija: $\{a_n \in D(A), \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\} \Rightarrow a \in D(A)$, saj je zaradi 2.1.4.5 in 3.2(x) $\sup \operatorname{Re} V(a) \leq \sup \operatorname{Re} [V(a-a_n) + V(a_n)] \leq \sup |V(a-a_n)| + \sup \operatorname{Re} V(a_n) \leq \|a-a_n\| + 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Sledi iz 2.3.3.

4.4 Izrek Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ normirana algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem so za vsak $a \in A$ ekvivalentne naslednje trditve:

- (i) $a \in D(A)$
- (ii) $\sup_{x \in S} \inf_{t \in R^+} \frac{\|x + tax\| - 1}{t} \leq 0$
- (ii-1) $\inf_{t \in R^+} \sup_{x \in S} \frac{\|x + tax\| - 1}{t} \leq 0$
- (ii-2) $\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} \frac{\|x + tax\| - 1}{t} \leq 0$
- (ii-3) $\sup_{x \in S} \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x + tax\| - 1}{t} \leq 0$

Če je nadalje $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ (= R ali C), potem je trditev (i) ekvivalentna tudi trditvi (iii):

- (iii) $\sup_{x \in S} \|e^{ta}x\| \leq 1$ za vsak $t \in R^+$.

Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ (= R ali C) in če ima A enoto e, je trditev (i) ekvivalentna trditvi (iv):

- (iv) Za vsak $t \in R^+$ eksistira resolventa $R(\lambda, a) := (\lambda e - a)^{-1}$ in je $\sup_{x \in S} \|R(t, a)x\| \leq t^{-1}$.

Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna B-algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ (= R ali C) in če je A brez leve enote, je trditev (i) ekvivalentna trditvi (v):

- (v) Za vsak $t \in R^+$ eksistira disolventa $D(t, a) := ((1/t)a)_{-1}$ (t.j. $R^+ \subset \mathfrak{F} \setminus \mathcal{O}_{\mathfrak{F}}(A, a)$; gl. 1.1) in je $\sup_{x \in S} \|D(t, a)x - x\| \leq 1$ za vsak $t \in R^+$.

Opomba: 1) Implikaciji " $(iv) \Rightarrow (i)$ " in " $(v) \Rightarrow (i)$ " veljata tudi v primeru, ko $(A, \|\cdot\|)$ ni poln prostor.

- 2) Če v točkah (i) - (v) zamenjamo neenakost " $\leq$ " z neenakostjo " $\geq$ ", dobimo karakterizacijo akretivnih elementov (gl. def. 4.1).

Dokaz: Ekvivalenca točk (i) - (ii-3) sledi iz 2.2.7.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) : Izrek 2.3.6(i).

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) : Po potrebi normirano algebro $(A, \|\cdot\|)$ renormiramo do enotske normirane algebre $(A, \|\cdot\|_1)$, $\|a\|_1 := \sup_{x \in S} \|ax\|$, ki jo na kratko označimo z A_1 . Zaradi 2.3.1 je

$D(A_1) = D(A)$, kar po /13, 8.7(iv)/ dokazuje ekvivalenco točk (i) in (iv).

(i) $\Rightarrow$ (v) : Trditev 2.3.18'(ii).

(v) $\Rightarrow$ (i) : Enako kot v dokazu točke 2.3.18'(i) eksistira "tedaj" za vsak $t \in R^+$ resolventa $R(t, \bar{a}) \in \bar{A}_e$

(gl. 0.5.5) in je $t\|R(t, \bar{a})\| = \sup_{x \in S} \|D(t, a)x - x\| \leq 1$. To zaradi

/13, 8.7(iv)/ pomeni, da je $\bar{a} \in D(\bar{A}_e)$ in zato po 2.3.2 tudi $a \in D(A)$.

5. POŠEVNO-HERMITSKI ELEMENTI NETRIVIALNE NORMIRANE ALGEBRE NAD OBSEGOM $\mathfrak{F}$ (= R ali C)

V tem odstavku je $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna normirana algebra (ne nujno asociativna) nad obsegom $\mathfrak{F}$ (= R ali C); A ima lahko enoto ali pa je brez nje.

5.1 DEFINICIJA Element $a \in A$ imenujemo levo (desno) - poševno hermitski, če je $\text{Re}V(A, a) = \{0\}$ (oz. $\text{Re}V_d(A, a) = \{0\}$). Množico vseh levo-poševno-hermitskih elementov algebre A označimo s $H'(A)$ in množico vseh desno-poševno-hermitskih elementov algebre A s $H_d'(A)$. Zaradi 2.1.4.6 je očitno $H_d'(A) = H'(A')$ (gl. 0.1.3).

5.2 IZREK Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ (= R ali C). (Ni treba, da je A asociativna, A ima lahko enoto ali pa je brez nje.) Potem so za vsak $a \in A$ ekvivalentne naslednje trditve:

- (i) $a \in H'(A)$
- (ii) Za vsak $x \in A$ eksistira funkcija $o_x: R \rightarrow R$ za lastnostjo $\|x + tax\| \leq \|x\|(1 + o_x(t))$ za vsak $t \in R$, kjer $\lim_{t \in R, t \rightarrow 0} (o_x(t)/t) = 0$ (dvostranska limita eksistira in je = 0)
- (iii) Za vsak $x \in A$ in $\varepsilon \in R^+$ eksistira tak $t_0 \in R^+$ (t_0 odvisen od ε in x), da je $\|x \pm t_0 ax\| \leq \|x\|(1 + t_0 \varepsilon)$
- (iv) $\inf_{t \in R^+} ((\|x \pm tax\| - 1)/t) \leq 0$ za vsak $x \in S$
- (v) $\sup_{x \in S} \inf_{t \in R^+} ((\|x \pm tax\| - 1)/t) = 0$, (v') $\inf_{t \in R^+} \sup_{x \in S} ((\|x \pm tax\| - 1)/t) = 0$

- (vi) $\sup_{x \in S} \lim_{t \downarrow 0} ((\|x \pm tax\| - 1)/t) = 0$, (vi') $\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} ((\|x \pm tax\| - 1)/t) = 0$
 (vii) $\lim_{t \downarrow 0} ((\|x \pm tax\| - 1)/t) \leq 0$ za vsak $x \in S$
 (viii) $\sup_{x \in S} \|x + tax\| = [1 + (t \sup_{x \in S} \|ax\|)^2]^{1/2}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Če je nadalje $(A, \|\cdot\|)$ asociativna Banachova algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), potem so za vsak $a \in A$ trditvi (i) ekvivalentne še naslednje trditve:

- (ix) $\sup_{x \in S} \|e^{ta}x\| \leq 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}$
 (x) $\sup_{x \in S} \|e^{ta}x\| = 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}$
 (xi) $\|e^{ta}x\| \leq \|x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ in za vsak $x \in A$
 (xii) $\|e^{ta}x\| = \|x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ in za vsak $x \in A$
 (xiii) $\|e^{\lambda a}x\| = \|e^{i(\operatorname{Im} \lambda)a}x\|$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$ in $x \in A$
 (xiv) $\|e^{\lambda a}x\| \leq \|x\| e^{|\operatorname{Im} \lambda|v(a)}$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$ in $x \in A$

Dokaz: (i) $\Rightarrow$ (ii) : Po 2.2.6 eksistira $\lim_{t \downarrow 0} ((\|x \pm tax\| - 1)/t) :=$

$= L_x(\pm a)$ za vsak $x \in S$... (1) in po 2.2.7 je zaradi (i) $L_x(\pm a) \leq \sup \operatorname{Re} V(\pm a) = 0$, t.j. $L_x(\pm a) \leq 0$ za vsak $x \in S$... (2).

Zaradi (1) funkcija $\delta_x(\pm t) := \left[\frac{\|x \pm tax\| - 1}{t} - L_x(\pm a) \right] \rightarrow 0$

za $t \downarrow 0$, pri čemer je zaradi (2) $\|x \pm tax\| = 1 + tL_x(\pm a) + t\delta_x(\pm t) \leq 1 + t\delta_x(\pm t)$ za vsak $x \in S$ in $t \in \mathbb{R}^+$. Iskana funkcija $o_x(t)$ je torej enaka $|t|\delta_x(t)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Ker zaradi (ii) funkcija $\delta_x(t) := o_x(t)/t \rightarrow 0$ za $t \rightarrow 0$, eksistira za predpisan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tak $t_0 \in \mathbb{R}^+$, da je $\delta_x(t_0) \leq \varepsilon$ in je zato $\|x \pm t_0 ax\| \leq \|x\|(1 + t_0 \delta_x(t_0)) \leq \|x\|(1 + t_0 \varepsilon)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Zaradi (iii) je $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|x \pm tax\| - 1)/t) \leq \varepsilon$

za vsak $x \in S$ in $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, torej po 2.2.7 $\sup \operatorname{Re} V(\pm a) \leq \varepsilon$ za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, t.j. $\sup \operatorname{Re} V(\pm a) \leq 0$, t.j. $\sup \operatorname{Re} V(a) \leq 0 \leq \inf \operatorname{Re} V(a)$, t.j. $\operatorname{Re} V(a) = \{0\}$, kar po 2.1.4.4 pomeni $\operatorname{Re} V(\pm a) = \{0\}$, t.j. $\sup \operatorname{Re} V(\pm a) = 0$. Od tod po 2.2.7 sledi (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v) : Zaradi (iv) je po 2.2.7 $\sup \operatorname{Re} V(\pm a) \leq 0$ in zato (kot zgoraj) $\operatorname{Re} V(\pm a) = \{0\}$, kar zaradi 2.2.7 implicira (v).

Trditve (v), (v'), (vi) in (vi') so zaradi 2.2.7 ekvivalentne. Iz (vi) očitno sledi (vii). Iz (vii) pa po 2.2.7 sledi

$\sup \operatorname{Re} V(\pm a) \leq 0$, t.j. $\operatorname{Re} V(a) = \{0\}$, t.j. trditev (i).

(i) $\Rightarrow$ (viii) : I. Naj bo $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ in $a \in H'(A)$. Operator $S := iT_a$, $T_a x = ax$ za vsak $x \in A$, je hermitski element asociativne kompleksne enotske normirane algebre $\mathcal{B}(A)$ vseh li-
nearnih omejenih operatorjev $T: A \rightarrow A$, saj je zaradi 2.1.4.4,
2.1.4.2(ii) in (i) $\operatorname{Im} V(\mathcal{B}(A), S) = \operatorname{Im}[iV(\mathcal{B}(A), T_a)] =$
 $= \operatorname{Re} V(\mathcal{B}(A), T_a) = \operatorname{Re} \overline{\operatorname{co}} V(A, a) = \operatorname{Re} \overline{\operatorname{co}} \{0\} = \{0\}$. Po /13, 9.10/ oz.
po /4, Korolar 6.26.6/ velja zato enakost ($\alpha = 1$, $\beta = -it$) :
 $\|I - itS\| = |t| [t^{-2} + \|0.I + S\|^2]^{1/2} = [1 + t^2 \|S\|^2]^{1/2}$, t.j.
 $\|I - it(iT_a)\| = [1 + t^2 \|iT_a\|^2]^{1/2}$, kar po definiciji norme ope-
ratorja $T \in \mathcal{B}(A)$ pomeni enakost $\sup_{x \in S} \|x + tax\| = [1 + t^2 (\sup_{x \in S} \|ax\|)^2]^{1/2}$
za vsak $t \in \mathbb{R}$.

II. Naj bo $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ in $a \in H'(A)$: Realno normirano algebro
($A, \|\cdot\|$) izometrično homomorfno vložimo v njeno kompleksifi-
kacijo $(A_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ (gl. 0.4.1). Po 2.2.10 je zato $\operatorname{Re} V(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a}) =$
 $= \overline{V(A, a)} = \overline{\{0\}} = \{0\}$, kjer je $x \mapsto \tilde{x} := (x, 0)$ omenjena vložitev
algebre A v $A_{\mathbb{C}}$. Ker je torej $\tilde{a} \in H'(A_{\mathbb{C}})$, to po že dokazanem (I)
pomeni enakost: $\sup_{\xi \in S(A_{\mathbb{C}})} \|\xi + t\tilde{a}\xi\|_{\mathbb{C}} = [1 + (t \sup_{\xi \in S(A_{\mathbb{C}})} \|\tilde{a}\xi\|)^2]^{1/2}$ za vsak
 $t \in \mathbb{R}$. To zaradi 0.4.3(ii) (gl. Opombo) spet implicira trditev (viii).

(viii) $\Rightarrow$ (ii) : Očitno.

(i) $\Rightarrow$ (ix) : Če velja (i), je $\sup \operatorname{Re} V(\pm a) = 0$ in je "te-
daj" zato po 2.3.7 $\sup_{x \in S} \|e^{\pm ta} x\| \leq e^0 = 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$.

(ix) $\Rightarrow$ (x) : Implikacijo potrjuje 0.3(viii) in 0.3(vii),
saj velja za poljubni realni števili α, β implikacija:
($0 < \alpha, \beta \leq 1, \alpha\beta \geq 1$) $\Rightarrow \alpha = \beta = 1$.

(x) $\Rightarrow$ (xi) : Očitno.

(xi) $\Rightarrow$ (xii) : Če velja (xi), je zaradi 0.3(ii)
 $\|e^{ta} x\| \leq \|x\| = \|e^{-ta}(e^{ta} x)\| \leq \|e^{ta} x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ in $x \in A$.

(xii) $\Rightarrow$ (xiii) : Zaradi (xii) in 0.3(i) velja za vsak
 $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) in za vsak $x \in A$ ocena $\|e^{\lambda a} x\| =$
 $= \|e^{\alpha a} e^{i\beta a} x\| = \|e^{i\beta a} x\|$.

(xiii) $\Rightarrow$ (xiv) : Zaradi (xiii) in 3.10 velja za vsak
 $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) in $x \in A$ ocena $\|e^{\lambda a} x\| = \|e^{i\beta a} x\| \leq$
 $\leq e^{|\beta| v(a)}$.

(xiv) $\Rightarrow$ (i) : Zaradi (xiv) je $\|e^{\pm ta} x\| \leq \|x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$
in je zato po 2.3.6(i) $\sup \operatorname{Re} V(\pm a) \leq 0$, kar pomeni
 $\operatorname{Re} V(a) = \{0\}$ (gl. dokaz implikacije "(iii) $\Rightarrow$ (iv)").

5.3 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), z enoto ali brez nje. Potem velja :

- (i) $\text{lan}A \subset H'(A)$ (gl. 0.5.0 in 5.1)
- (ii) $H'(A)$ je realen linearen, zaprt podprostor prostora $(A, \|\cdot\|)$
- (iii) Če je B netrivialna podalgebra (gl. 0.1.4) algebre A , je $H'(B) = B \cap H'(A)$ in zato (gl. (ii)) $\overline{H'(B)} \subset H'(\overline{B})$ (zaprtje glede na prostor $(A, \|\cdot\|)$)
- (iv) Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, velja pri formalni adjunkciji enote (gl. 0.5.4 in 0.5.5) za vsak $a \in A$ ekvivalenca: $a \in H'(A) \Leftrightarrow \hat{a} \in H'(\hat{A}_e) \Leftrightarrow \bar{a} \in H'(\bar{A}_e)$.
- (v) $\mathfrak{F} = \mathbb{C} \Rightarrow H'(A) \cap iH'(A) \subset \text{lan}A$
- (vi) Če je A brez leve enote, velja pri vložitvi $x \mapsto \hat{x}$ algebre A v enotsko algebro $\hat{A}_e$ (gl. 0.5.4) naslednje:
 - (a) $\mathfrak{F} = \mathbb{R} \Rightarrow H'(\hat{A}_e) = (H'(A))^\wedge$
 - (b) $\mathfrak{F} = \mathbb{C} \Rightarrow H'(\hat{A}_e) = (H'(A))^\wedge + iR\hat{e}$, pri čemer je vsota direktna (enolična izražava vsote), če je $\text{lan}A = \{0\}$ (gl. 0.5.0); tu pomeni $\hat{A} = \{\hat{a} : a \in A\}$ in $(H'(A))^\wedge = \{\hat{a} : a \in H'(A)\}$.
- (vi') Če ima A levo enoto e , velja ekvivalenca: $(\lambda, a)^\wedge \in H'(\hat{A}_e) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\lambda e + a) \in H'(A)$.

Opomba Iz dokaza je razvidno, da veljajo točke (i), (ii) in (v) tudi za neasociativno normirano algebro nad obsegom $\mathfrak{F}$.

Dokaz: (i) Očitno (po definiciji).

(ii) Realna linearnost sledi iz 2.1.4.4 in 2.1.4.5. Dokazimo še zaprtost prostora $H'(A)$! Naj bodo $a_n \in H'(A)$ in $a_n \rightarrow a$ za $n \rightarrow \infty$. Vzemimo poljuben $x \in S$ in $f \in D(x)$ in naj bo $\lambda = f(ax)$ ter $\lambda_n = f(a_n x)$. Torej je $\lambda_n \in V(a_n)$ in zato $\text{Re} \lambda_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar pomeni $|\text{Re} \lambda| = |\text{Re}(\lambda - \lambda_n)| \leq |\lambda - \lambda_n| = |f(ax - a_n x)| \leq \|f\| \|a - a_n\| \|x\| = \|a - a_n\| \rightarrow 0$ za $n \rightarrow \infty$, t.j. $\text{Re} \lambda = 0$ za vsak $\lambda \in V(a)$.

(iii) Po 2.3.3 je $\overline{\text{co}}V(A, b) = \overline{\text{co}}V(B, b)$ za vsak $b \in B$.

(iv) Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, velja po 2.3.2 ekvivalenca: $\text{Re}V(A, a) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Re}V(\hat{A}_e, \hat{a}) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Re}V(\bar{A}_e, \bar{a}) = \{0\}$.

(v) Naj bo $a \in H'(A)$ in $a = ib$, kjer je tudi $b \in H'(A)$.

Potem je $\text{Re}V(a) = \{0\}$ in po 2.1.4.4 tudi $\text{Im}V(a) = \text{Im}(iV(b)) = \text{Re}V(b) = \{0\}$, t.j. $V(a) = \{0\}$, kar po 3.12' pomeni $a \in \text{lan}A$.

(vi) Po 0.5.4 je poljuben $\hat{\xi} \in \hat{A}_e$ oblike $\hat{\xi} = (\lambda, a)^\wedge = (\lambda, a) + \mathcal{N} = (0, a) + \lambda(1, 0) + \mathcal{N} = \hat{a} + \lambda\hat{e}$ in je zato po 2.2.5(iii), 2.2.5(vii') ter 2.3.2 $V(\hat{A}_e, (\lambda, a)^\wedge) = V(\hat{A}_e, \hat{a}) + \{\lambda\} = \overline{\text{co}}V(A, a) + \{\lambda\}$, kar pomeni ekvivalenco: $\text{Re}V(\hat{A}_e, (\lambda, a)^\wedge) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Re}V(A, a) = \{-\text{Re}\lambda\} \dots (1)$. Ker je A brez leve enote, je zaradi 2.3.11.2 in 1.5 $0 \in \overline{V(A, a)}$, kar pomeni zaradi (1) ekvivalenco $(\lambda, a)^\wedge \in H'(\hat{A}_e) \Leftrightarrow \text{Re}\lambda = 0$ in $a \in H'(A) \dots (2)$.

Točka (2) dokazuje (a) in prvi del trditve (b).

Če je $(\lambda, a)^\wedge = (\lambda', a')^\wedge$ (t.j. $\hat{a} + \lambda\hat{e} = \hat{a}' + \lambda'\hat{e}$), je $\sup_{x \in S} \|(a - a')x + (\lambda - \lambda')x\| = 0$ in je torej $(a - a')x = (\lambda' - \lambda)x$ za vsak $x \in S$. Ker A nima leve enote, to pomeni $\lambda' - \lambda = 0$, t.j. $(a - a') \in \text{lan}A$. Če je torej $\text{lan}A = \{0\}$, je zato vsota $(H'(A))^\wedge + iR\hat{e}$ direktna.

(vi') Analogno kot v dokazu točke (vi) ugotovimo: $(\lambda, a)^\wedge \in H'(\hat{A}_e) \Leftrightarrow \text{Re}V(A, a) = \{-\text{Re}\lambda\} \Leftrightarrow \text{Re}V(A, a + \lambda e) = \{0\} \Leftrightarrow (a + \lambda e) \in H'(A)$.

5.4 IZREK (lastnosti levo-poševno-hermitskih elementov)

(i) Če je $(A, \|\cdot\|)$ normirana algebra (asociativna ali ne, z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $a \in H'(A)$, je $\sup_{x \in S} \|x + tax\| \geq 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $a \in H'(A)$, velja še:

(ii) (a) Eksistira $\lim_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \rightarrow \infty}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} := \wp(a)$ in je

$$\wp(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} = r(a) = \sup_{x \in S} \|ax\| \text{ ter je}$$

zato tudi

(b) $\sup_{x \in S} \|a^n x\| = \sup_{x \in S} \|ax\|^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Če je $a \neq 0$ in če eksistira tak $n \in \mathbb{N}$, da je $n \geq 2$ in $a^n = a$ (če je npr. a neničelni levo-poševno-hermitski idempotent), potem je $\sup_{x \in S} \|ax\| = 1$.

(iv) Če eksistira tak $n \in \mathbb{N}$, da je $a^n = 0$, je $a \in \text{lan}A$ (gl. 0.5.0)

(v) a^2 je levo-disipativen element algebre A , t.j. $a^2 \in D(A)$

(vi) Če je P polinom s koeficienti iz obsega $\mathfrak{F}$, ki ima le realne ničle, je $\sup_{x \in S} \|P(a)x\| = |P(\sup_{x \in S} \|ax\|)|$, kjer

za polinom $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \lambda^k$ definiramo $P(a)x =$

$$= \lambda_0 x + \sum_{k=1}^n \lambda_k a^k x.$$

(vii) $\mathfrak{F} = \mathbb{C} \Rightarrow r(a) = v(a) = \sup_{x \in S} \|ax\| = \rho(a)$ (gl. (ii))

(viii) Če je $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$), je $\mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R}$, kjer je $\mathcal{G}_R(A_R, a) \subset \{0\}$ (gl. 1.2.2 in 1.5).

(ix) Če je $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna Banachova algebra, velja:

(a) $\mathcal{G}(A, a) \subset \{0\} \cup V(A, a)$ in $\overline{V(A, a)} \subset \text{co } \mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R}$

(b) Če ima A enoto (dvostransko - njena norma je lahko $\neq 1$) ali pa je brez leve enote, je $\text{co } \mathcal{G}(A, a) = \overline{V(A, a)} \subset i\mathbb{R}$.

(b') Če je A brez leve enote, je $\text{co } \mathcal{G}(A, a) = \text{co } \mathcal{G}(\hat{A}_e, \hat{a}) = \text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \overline{V(A, a)} \subset i\mathbb{R}$.

(c) $(\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda \geq 0) \Rightarrow \sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = e^{(\text{Im } \lambda) \sup V(A, ia)}$

(c') $(\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda \leq 0) \Rightarrow \sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = e^{(\text{Im } \lambda) \inf V(A, ia)}$

(d) Če je B podalgebra algebre A in $a \in \bar{B} \neq \{0\}$, je $\mathcal{G}(\bar{B}, a) \subset \{0\} \cup \mathcal{G}(A, a)$.

(e) Če je A brez leve enote in je $\mathcal{G}(A, a) = \{\lambda_0\}$, je $\lambda_0 = 0$ in $a \in \text{lan } A$ (gl. 0.5.0).

Dokaz: (ix): Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna B -algebra, $a \in H'(a)$ in $h = ia$... (1).

I. Naj ima A enoto e : B -algebro $(A, \|\cdot\|)$ renormiramo do enotske normirane algebre $(A, \|\cdot\|_1)$, $\|b\|_1 := \sup_{x \in S} \|bx\|$ za vsak $b \in A$,

(ki jo kratko označimo z A_1) in jo nato po potrebi izpopolnimo do (kompleksne, asociativne) enotske B -algebre $(\bar{A}, \|\cdot\|_1)$, ki jo kratko označimo z $\bar{A}_1$. Ker je vložitev $x \mapsto \tilde{x}$ algebre A v $\bar{A}_1$ homomorfizem, ki preslika enoto e algebre A v enoto $\tilde{e}$ algebre $\bar{A}_1$, je

$\mathcal{G}(\bar{A}_1, \tilde{x}) \subset \mathcal{G}(A, x)$ za vsak $x \in A$... (2). Zaradi (1), 2.1.4.4, 2.2.5(i) in (vii'), 2.2.9 in 2.3.1 je $\text{Im } V(\bar{A}_1, \tilde{h}) = \text{Im}[iV(\bar{A}_1, \tilde{a})] = \text{Re } V(\bar{A}_1, \tilde{a}) = \text{Re } V(A_1, a) = \text{Re } \overline{\text{co } V(A, a)} = \text{Re } \overline{\{0\}} = \{0\}$, t.j. $\tilde{h}$ je hermitski element asociativne kompleksne enotske B -algebre $(\bar{A}_1, \|\cdot\|_1)$ in je zato po /3, Korolar 2.5.11/ $\text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_1, \tilde{h}) = V(\bar{A}_1, \tilde{h}) \subset \mathbb{R}$... (3) ter po /4, Teorem 6.26.2/ $r(\bar{A}_1, \tilde{h}) = \|\tilde{h}\|_1$... (4).

Zaradi 2.2.5(i) in (vii'), 2.2.9 in 2.3.1 je $R \supset V(\bar{A}_1, \bar{h}) = V(A_1, h) = \overline{\text{co}}V(A, h)$, kar zaradi (1), (3), spektralnega teorema in 2.1.4.4 pomeni $\text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_1, \bar{a}) = \overline{\text{co}}V(A, a) \subset iR \dots (5)$. Iz (2), (5) in 2.3.11.1 sledi $\overline{\text{co}}V(A, a) = \text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_1, \bar{a}) \subset \text{co } \mathcal{G}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V(A, a) \subset iR$, t.j. $\text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_1, \bar{a}) = \text{co } \mathcal{G}(A, a) = \overline{\text{co}}V(A, a) \subset iR \dots (6)$, kar zaradi 2.1.4.3 ($V(a)$ povezana množica) dokazuje prvi del trditve (ix)(b).

Ker je vložitev $x \mapsto \tilde{x}$ algebre A_1 v $\bar{A}_1$ izometrični homomorfizem, je zaradi (1) in (4) $r(A_1, a) = r(A_1, ia) = r(A_1, h) = r(\bar{A}_1, \bar{h}) = \|\bar{h}\|_1 = \|i\bar{a}\|_1 = \|a\|_1 \dots (7)$, kar po 3.2(v) in po definiciji norme $\|\cdot\|_1$ pomeni: $\wp(a) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} = r(A_1, a) = \|a\|_1 = \sup_{x \in S} \|ax\| \dots (8)$. Zaradi (6)

sledi po /5, Teorem I.5.8/ enakost $r(\bar{A}_1, \bar{a}) = \max |\mathcal{G}(\bar{A}_1, \bar{a})| = \max |\mathcal{G}(A, a)| = r(A, a) = \max |\overline{\text{co}}V(A, a)| = \sup |V(A, a)| = v(a) \dots (9)$. Iz (7), (8) in (9) sledi $\wp(a) = r(a) = \sup_{x \in S} \|ax\| = v(a) \dots (10)$.

II. Naj bo A brez enote: B-algebro $(A, \|\cdot\|)$ homomorfno vložimo v enotsko (kompleksno, asociativno) B-algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.5). Zaradi (1), 2.1.4.4 in 2.3.2 je zato $\text{Im} V(\bar{A}_e, \bar{h}) = \text{Im}[iV(\bar{A}_e, \bar{a})] = \text{Re} V(\bar{A}_e, \bar{a}) = \text{Re } \overline{\text{co}}V(A, a) = \text{Re } \overline{\text{co}}\{0\} = \{0\}$, t.j. $\bar{h}$ je hermitski element asociativne kompleksne enotske B-algebre $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ in je zato po /3, Korolar 2.5.11/ $\text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{h}) = V(\bar{A}_e, \bar{h}) \subset R \dots (11)$ ter po /4, Teorem 6.26.2/ $r(\bar{A}_e, \bar{h}) = \|\bar{h}\|$, kar zaradi (1) pomeni $r(\bar{A}_e, \bar{a}) = \|\bar{a}\| \dots (12)$. Iz (1) in (11) sledi po spektralnem teoremu in po točkah 2.1.4.4 ter 2.3.2 enakost $\text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \overline{\text{co}}V(A, a) \subset iR \dots (13)$. Po 1.13 je $\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) \subset \mathcal{G}(\hat{A}_e, \hat{a}) \subset \mathcal{G}(A, a) \dots (14)$ in po 2.3.11 je $\mathcal{G}(A, a) \subset \{0\} \cup \overline{\text{co}}V(A, a) \dots (15)$.

Točke (6), (13), (14) in (15) zaradi 2.1.4.3 dokazujejo trditve (ix)(a). Če je A brez leve enote, je po 2.3.11.2 $\mathcal{G}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$ in je zato po (13) in (14) $\text{co } \mathcal{G}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V(A, a) \stackrel{(14)}{=} \text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) \stackrel{(14)}{\subset} \text{co } \mathcal{G}(\hat{A}_e, \hat{a}) \subset \text{co } \mathcal{G}(A, a) \subset iR$, t.j. $\text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \text{co } \mathcal{G}(\hat{A}_e, \hat{a}) = \text{co } \mathcal{G}(A, a) = \overline{\text{co}}V(A, a) \subset iR \dots (16)$, kar zaradi 2.1.4.3 dokazuje trditve (ix)(b') in s tem tudi drugi del trditve (ix)(b).

Po 3.2(v), (12) in 0.5.6.1 je $\wp(a) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} = r(\bar{A}_e, \bar{a}) \stackrel{(12)}{=} \|\bar{a}\| = \sup_{x \in S} \|ax\| \dots (17)$.

Po /5, Teorem I.5.8/ slede iz (13) enakosti $r(\bar{A}_e, \bar{a}) = \max |\mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a})| = \sup |V(A, a)| = v(A, a) \dots (18)$ in analogno je zaradi (14) $r(\bar{A}_e, \bar{a}) \leq r(A, a) \dots (19)$. Zaradi (15) je $r(A, a) \leq v(A, a) \dots (20)$. Iz (17), (18), (19) in (20) sledi $\wp(a) = \sup_{x \in S} \|ax\| = r(\bar{A}_e, \bar{a}) = r(A, a) = v(A, a) \dots (21)$.

(c), (c'): Zaradi (1) in (11) je $\text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{ia}) = V(\bar{A}_e, \bar{ia})$, kar po 1.12, 2.3.6(i) in 0.5.7(ii) pomeni enakosti $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S(A)} \|e^{tia} x\|^{1/t} = \max_{t \in \mathbb{R}^+} \text{Re } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{ia}) = \max_{t \in \mathbb{R}^+} \text{Re } V(\bar{A}_e, \bar{ia}) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{\xi \in S(\bar{A}_e)} \|e^{tia} \xi\|^{1/t} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{tia}\|^{1/t} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \sup_{x \in S(A)} \|e^{tia} x\|^{1/t}$. Ker je torej $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} (\dots) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} (\dots)$, je po 2.3.2 $\ln \sup_{x \in S} \|e^{tia} x\|^{1/t} = \text{konst.} = \max_{t \in \mathbb{R}^+} \text{Re } V(\bar{A}_e, \bar{ia}) = \max_{t \in \mathbb{R}^+} \text{Re } \overline{\text{co}} V(A, ia) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \text{Re } V(A, ia)$, t.j. $\sup_{x \in S} \|e^{ita} x\| = e^{t \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \text{Re } V(A, ia)}$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \dots (22)$. Če ima A

enoto, je po točki (ix)(b), po spektralnem teoremu in po 2.1.4.4 $\text{co } \mathcal{G}(A, ia) = \overline{\text{co}} V(A, ia)$, kar zaradi 2.3.16.3 pomeni, da velja relacija (22) tudi v primeru, ko ima A enoto $\dots (23)$.

Naj bo $\lambda = \alpha + i\beta$, kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in $\beta \geq 0$. Potem sledi iz 5.2(xiii) enakost $\|e^{\lambda a} x\| = \|e^{i\beta a} x\|$ za vsak $x \in A$ in je zato po (22) in (23) $\sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = \sup_{x \in S} \|e^{i\beta a} x\| = e^{\beta \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \text{Re } V(A, ia)}$. To dokazuje točko (c).

Naj bo $\lambda = \alpha + i\beta$, kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in $\beta \leq 0$. Potem je $-\beta \geq 0$ in ker je po 5.3(ii) tudi $-a \in H'(A)$, je zato po pravkar dokazani točki (c) in po 2.1.4.4 $\sup_{x \in S} \|e^{\lambda a} x\| = \sup_{x \in S} \|e^{(-\lambda)(-a)} x\| = e^{(-\beta) \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \text{Re } V(A, -ia)} = e^{(-\beta)(-\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \text{Re } V(A, ia))}$, kar dokazuje trditev (c').

(d): Po 5.3(iii) je $H'(\bar{B}) = \bar{B} \cap H'(A)$ in je zato po spektralnem teoremu in po že dokazani točki (ix)(a) $\mathcal{G}(\bar{B}, ia) \subset \mathbb{R}$, kar zaradi 1.9.3 pomeni $\mathcal{G}(\bar{B}, ia) \subset \mathcal{G}(A, ia) \cup \{0\}$. Od tod sledi trditev (d) (spektralni teorem).

(e): Zaradi (ix)(b) je "tedaj" $V(A, a) = \{\lambda_0\}$, kar zaradi 3.16(i) in (i') pomeni $\lambda_0 = 0$ in $a \in \text{lan } A$.

(viii) Če je $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$, je po (ix)(a) $\mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R} \dots (24)$.

Naj bo $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$. Po definiciji 1.4(ii) in (iii) je $\mathcal{G}(A, a) = \mathcal{G}(A_{\mathbb{C}}, \tilde{a})$, kjer je $x \mapsto \tilde{x}$ vložitev algebre A v njeno kompleksifikacijo $A_{\mathbb{C}}$ $\dots (25)$. Ker je $a \in H'(A)$, je po 2.2.10

$\tilde{a} \in H'(A_C)$ in je zato po (24) $\mathcal{G}(A_C, \tilde{a}) \subset i\mathbb{R}$ ter zato po (25) tudi $\mathcal{G}(A, a) \subset i\mathbb{R}$.

Po 1.6(iii) je zato $\mathcal{G}_R(A_R, a) = \mathbb{R} \cap \mathcal{G}(A, a) \subset \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

(vii) Če je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra, dokazujeta našo trditev točki (10) in (21). Če algebra $(A, \|\cdot\|)$ ni poln prostor, jo izpopolnimo do B-algebre $(\bar{A}, \|\cdot\|)$, kjer je vložitev $x \mapsto \tilde{x}$ algebre A v $\bar{A}$ izometrični homomorfizem ... (26). Ker je $\tilde{A} := \{\tilde{x} : x \in A\}$ gosta v $\bar{A}$, je zato $S(\bar{A}) = \overline{S(A)}^\infty$ (gl. dokaz točke 2.2.9) ... (27). Ker je $a \in H'(A)$, je po 2.2.9 $\tilde{a} \in H'(\bar{A})$ in je zato po (10) in (21) $\rho(\tilde{a}) = \sup_{\xi \in S(\bar{A})} \|\tilde{a}\xi\| = r(\bar{A}, \tilde{a}) = v(\bar{A}, \tilde{a})$... (28).

Zaradi (26) in (27) je $\sup_{\xi \in S(\bar{A})} \|\tilde{a}^n \xi\| = \sup_{x \in S(A)} \|a^n x\|$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, kar pomeni $\rho(\tilde{a}) = \rho(a)$... (29). Zaradi (26) je $r(\bar{A}, \tilde{a}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|\tilde{a}^n\|^{1/n} =$

$= \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = r(A, a)$... (30) in po 2.2.9 je $v(\bar{A}, \tilde{a}) = v(A, a)$...

... (31). Točke (28), (29), (30) in (31) dokazujejo trditev (vii) tudi v primeru, če $(A, \|\cdot\|)$ ni poln prostor.

(vi) **I.** Naj bo $\mathcal{F} = \mathbb{C}$: Ker ima polinom P le realne ničle, ima polinom Q , $Q(\lambda) := P(i\lambda)$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, vse ničle na imaginarni osi ... (32). Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, vložimo (formalno) normirano algebro $(A, \|\cdot\|)$ v enotsko normirano algebro $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$, kjer pomeni $x \mapsto \tilde{x}$ vložitev algebre A v $\hat{A}_e$ (gl. 0.5.4). Po 0.5.6.1 je $\|\hat{a}\| = \sup_{x \in S} \|ax\|$ in $\|P(\hat{a})\| = \sup_{x \in S} \|P(a)x\|$...

... (33). Ker je $a \in H'(A)$, je po 2.1.4.4 in 2.3.2 (gl. dokaz trditve (ix) - točki (3) in (11)) $\text{Im}V(\hat{A}_e, -i\hat{a}) = \{0\}$, t.j. $-i\hat{a}$ je hermitski element asociativne kompleksne enotske normirane algebre $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$... (34). Po /13, Posledica 9.11'/ sledi iz (32) in (34) enakost $\|Q(-i\hat{a})\| = |Q(\|\hat{a}\|)|$, kar po definiciji polinoma Q pomeni $\|P(\hat{a})\| = |P(\|\hat{a}\|)|$... (35). Točki (33) in (35) dokazujeta trditev (vi) za primer, da je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$.

II. $\mathcal{F} = \mathbb{R}$: Realno algebro $(A, \|\cdot\|)$ lahko izometrično realno homomorfno vložimo v kompleksno algebro $(A_C, \|\cdot\|_C)$ (gl. 0.4.1). Če označimo z $\tilde{x}$ sliko elementa $x \in A$ pri tej vložitvi, je po 2.2.10 $\text{Re}V(A_C, \tilde{a}) = \overline{V(A, a)} = \{0\}$, t.j. $\tilde{a} \in H'(A_C)$. Po pravkar dokazanem je zato $\sup_{\xi \in S(A_C)} \|P(\tilde{a})\xi\|_C = |P(i \sup_{\xi \in S(A_C)} \|\tilde{a}\xi\|_C)|$, kar zaradi 0.4.3(ii) spet potrjuje trditev (vi).

(v) I. Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra: Ker je $a \in H'(A)$, velja zaradi 5.2(xii) za vsak $x \in S(A)$, $f \in D(A, x)$ in $t \in \mathbb{R}$ ocena

$$1 = \|e^{ta}x\| \geq |f(e^{ta}x)| = |f(x) + tf(ax) + (t^2/2)f(a^2x) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k}{k!} f(a^kx)| \geq |1 + ipt + \alpha t^2 + i\beta t^2| - t^3 \Phi(t) \dots (36),$$

kjer je $1 = f(x)$ (saj $f \in D(x)$), $f(ax) = ip \in i\mathbb{R}$ (saj je $a \in H'(A)$) in $f(a^2x) = 2(\alpha + i\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \dots (37)$ ter $\Phi(t) =$

$$= \left| \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^{k-3}}{k!} f(a^kx) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|a\|^{k+3} = \|a\|^3 e^{t\|a\|} \dots (38).$$

Iz (36), (37) in (38) sledi ocena $1 \geq [(1 + \alpha t^2)^2 + (pt + \beta t^2)^2]^{1/2} - t^3 \|a\|^3 e^{t\|a\|}$, t.j. $1 + 2t^3 \|a\|^3 e^{t\|a\|} + t^6 \|a\|^6 e^{2t\|a\|} \geq 1 + 2\alpha t^2 + \alpha^2 t^4 + p^2 t^2 + 2p\beta t^3 + \beta^2 t^4 \geq 1 + (2\alpha + p^2)t^2 + 2p\beta t^3$, t.j. (za $t \rightarrow 0$) $0 \geq 2\alpha + p^2$, t.j. $\text{Ref}(a^2x) = 2\alpha \leq -p^2 \leq 0$ za vsak $x \in S$ in $f \in D(x)$, t.j. $\text{Re}V(A, a^2) \subset (-\infty, 0]$.

II. Če algebra $(A, \|\cdot\|)$ ni poln prostor, jo izometrično homomorfno vložimo v njeno izpopolnitev $(\bar{A}, \|\cdot\|)$. Po 2.2.9 se pri tej vložitvi $x \mapsto \tilde{x}$ algebre A v $\bar{A}$ levo-poševno-hermitski elementi ohranjajo, t.j. $(H'(A))^{\sim} \subset H'(\bar{A})$. Ker je torej $\tilde{a} \in H'(\bar{A})$, je po že dokazanem $\tilde{a}^2 = \tilde{a}^2 \in D(\bar{A})$ in je zato po 2.2.9 tudi $a^2 \in D(A)$.

(iv) Ker je $a^n = 0$, je $r(a) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \|a^k\|^{1/k} = 0 \dots (39)$.

I. Če je $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$, je zaradi (39) in že dokazane točke (vii) $ax = 0$ za vsak $x \in S$, t.j. $a \in \text{lan}A$.

II. Če je $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$, vložimo algebro $(A, \|\cdot\|)$ izometrično homomorfno v njeno kompleksifikacijo $(A_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$. Ker je $a^n = 0$, je zato tudi $\tilde{a}^n = (a^n)^{\sim} = 0 \dots (40)$. Ker je $a \in H'(A)$, je po 2.2.10 tudi $\tilde{a} \in H'(A_{\mathbb{C}}) \dots (41)$. Po pravkar dokazanem je zaradi (40) in (41) $\tilde{a} \in \text{lan}A_{\mathbb{C}}$ in ker je vložitev $x \mapsto \tilde{x}$ homomorfizem, to pomeni $a \in \text{lan}A$.

(ii)(a) Po 3.2.(v) je $\wp(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} \dots (42)$.

I. Če je $\mathfrak{F} = \mathbb{C}$, je trditev (ii)(a) vsebovana v že dokazani točki (vii) $\dots (43)$.

II. $\mathfrak{F} = \mathbb{R}$: Naj bo $x \mapsto \tilde{x}$ izometrično homomorfna vložitev realne algebre $(A, \|\cdot\|)$ v njeno kompleksifikacijo $(A_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ (gl. 0.4.1). Zato je $r(\tilde{a}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|\tilde{a}^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n} = r(a) \dots (44)$

in po 0.4.3(ii) je $\sup_{\xi \in S(A_C)} \|\tilde{a}^n \xi\| = \sup_{x \in S(A)} \|a^n x\|$ za vsak $n \in \mathbb{N}$... (45).

Ker je $a \in H'(A)$, je po 2.2.10 tudi $\tilde{a} \in H'(A_C)$ in je zato po (43) $r(\tilde{a}) = \sup_{\xi \in S(A_C)} \|\tilde{a} \xi\|$... (46). Trditev (ii)(a) sledi iz (42), (44),

(45) in (46).

(b) Ker torej velja (ii)(a), je $\sup_{x \in S} \|a^n x\|^{1/n} \geq r(a) = \sup_{x \in S} \|ax\|$ in po drugi strani je tudi očitno $\sup_{x \in S} \|a^n x\| \leq (\sup_{x \in S} \|ax\|)^n$ (t.j. $\|T_a^n\| \leq \|T_a\|^n$, kjer je $T_a \in \mathcal{B}(A)$, $T_a x = ax$ za vsak $x \in A$).

(iii) Ker je $a^n = a \neq 0$, je $a^{n^k} = a \neq 0$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ in je zato po 3.2(i) $r(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{n^k}\|^{1/n^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|a\|^{n^{-k}} = 1$,

kar zaradi (ii) potrjuje (iii).

(i) Sledi iz 5.2(v').

5.5 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) z enoto ali brez nje. Potem velja:

(i) $v(a) = 0 \Rightarrow r(a) = \sup_{x \in S} \|ax\|$ in $\sup_{x \in S} \|a^n x\| = \sup_{x \in S} \|ax\|^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Če je P polinom s koeficienti iz obsega $\mathcal{F}$, $P(0) = 0$ in če sta $a, P(a) \in H'(A)$ (npr., če je $v(a) = v(P(a)) = 0$), je $\sup_{x \in S} \|ax\| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathcal{F}, P(i\lambda) \in i\mathcal{F}\}$.

Opomba: Ocena (ii) je eksaktna, saj eksistira polinom P z realnimi koeficienti in eksistira realna asociativna enotska B -algebra $(A, \|\cdot\|)$ in tak $a \in A$, da je $v(A, a) = v(A, P(a)) = 0$ ter $\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{R}, P(i\lambda) \in i\mathbb{R}\}$.

Dokaz: (i) Sledi iz 5.4(ii), saj je "tedaj" $a \in H'(A)$.

(ii) **I. Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ B -algebra.** Ker sta $a, P(a) \in H'(A)$, sta po 5.4(viii) $\mathcal{G}(a), \mathcal{G}(P(a)) \subset i\mathbb{R}$... (1) in po 5.4(ii) je $\sup_{x \in S} \|ax\| = r(a)$... (2). Če je $\mu \in \mathcal{G}(a)$, je po (1)

$\mu = i\lambda$, kjer je $\lambda \in \mathbb{R}$ in po spektralnem teoremu (kompleksifikacija, če je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$) je zato zaradi (1) tudi $P(i\lambda) = P(\mu) \in P(\mathcal{G}(a)) = \mathcal{G}(P(a)) \subset i\mathbb{R}$. Torej je $\mathcal{G}(a) \subset \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}, P(i\lambda) \in i\mathbb{R}\}$. To zaradi (2) in 3.2(vii) pomeni $\sup_{x \in S} \|ax\| = r(a) = \max |\mathcal{G}(a)| \leq$

$$\leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{R}, P(i\lambda) \in i\mathbb{R}\}.$$

II. Če $(A, \|\cdot\|)$ ni poln prostor, ga izometrično homomorfno vložimo v njegovo izpopolnitev $(\bar{A}, \|\cdot\|)$. Če označimo pri tej vložitvi z $\tilde{x}$ sliko elementa $x \in A$, veljata po 2.2.9 enakosti $\overline{\text{co}}V(A, \tilde{a}) = \overline{\text{co}}V(A, a)$ in $\overline{\text{co}}V(\bar{A}, P(\tilde{a})) = \overline{\text{co}}V(\bar{A}, (P(a))^{\sim}) = \overline{\text{co}}V(A, P(a))$. Ker sta $a, P(a) \in H'(A)$, sta zato tudi $\tilde{a}, P(\tilde{a}) \in H'(\bar{A})$. Torej je po **I.** $\sup_{\xi \in S(\bar{A})} \|\tilde{a}\xi\| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{R}, P(i\lambda) \in i\mathbb{R}\}$, pri čemer je $\sup_{\xi \in S(\bar{A})} \|\tilde{a}\xi\| \geq \sup_{x \in S(A)} \|\tilde{a}x\| = \sup_{x \in S(A)} \|ax\|$, saj je vložitev $x \mapsto \tilde{x}$ izometrični homomorfizem.

Utemeljimo opombo. Za A lahko vzamemo prostor $\mathbb{C}$ kompleksnih števil in za normo absolutno vrednost $|\cdot|$. Ker je $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ^{realna} enotska 2-dimenzionalna B -algebra z bazo $\{1, i\}$, je po 2.2.5 $V(\mathbb{C}, c) = \{f(c) : f \in D(\mathbb{C}, 1)\}$ za vsak $c \in \mathbb{C}$. Naj bo f linearen funkcional, $f(1) = \alpha$ in $f(i) = \beta$. Če je $f \in D(\mathbb{C}, 1)$, je $\alpha = 1$ in $\beta = 0$ (saj je tedaj $1 = \|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(e^{it})| = \max_{t \in \mathbb{R}} |\cos t + \beta \sin t| = (1 + \beta^2)^{1/2}$).

Zato element $a := i$ in polinom P , $P(\lambda) = \lambda^6 - \lambda^2$, ustrezata naši trditvi.

6. HERMITSKI ELEMENTI KOMPLEKSNE NORMIRANE ALGEBRE

V tem odstavku je $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna kompleksna normirana algebra (ne nujno asociativna), kjer ima lahko A enoto ali pa je brez nje.

6.1 DEFINICIJA Element $h \in A$ imenujemo levo (desno) - hermitski, če je $\text{Im}V(A, h) = \{0\}$ (oz. $\text{Im}V_d(A, h) = \{0\}$). Množico vseh levo (desno) - hermitskih elementov algebre A označimo s $H(A)$ (oz. s $H_d(A)$). Po 2.1.4.6 je očitno $H_d(A) = H(A^*)$ (gl. 0.1.3).

6.2 Trditev $H(A) = iH'(A)$ (gl. 5.1)

Dokaz: Po 2.1.4.4 je $\text{Im}V(A, h) = \text{Re}V(A, -ih)$.

6.3 Trditev Če je $(A, \|\cdot\|)$ realna normirana algebra in preslikava $x \mapsto \tilde{x}$ vložitev algebre $(A, \|\cdot\|)$ v njeno kompleksifikacijo (gl. 0.4.1), velja za vsak $a \in A$ ekvivalenca: $a \in H'(A) \Leftrightarrow \Leftrightarrow i\tilde{a} \in H(A_C)$. Torej je $(H'(A))^\infty \subset iH(A_C)$.

Dokaz: Po 2.1.4.4 in 2.2.10 velja za vsak $a \in A$ enakost $\text{Im}V(A_C, i\tilde{a}) = \text{Re}V(A_C, \tilde{a}) = \overline{V(A, a)}$.

6.4 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna normirana algebra z enoto ali brez nje. Potem velja :

- (i) $\text{lan}A \subset H(A)$ (gl. 0.5.0)
- (ii) $H(A)$ je realen linearen, zaprt podprostor prostora $(A, \|\cdot\|)$
- (iii) Če je B netrivialna podalgebra (gl. 0.1.4) algebre A , je $H(B) = B \cap H(A)$ in zato $\overline{H(B)} \subset H(\overline{B})$ (zaprtje glede na prostor $(A, \|\cdot\|)$)
- (iv) Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, velja pri formalni adjunkciji enote (gl. 0.5.4 in 0.5.5) za vsak $h \in A$ ekvivalenca: $h \in H(A) \Leftrightarrow \hat{h} \in H(\hat{A}_e) \Leftrightarrow \bar{h} \in H(\bar{A}_e)$.
- (v) $H(A) \cap iH(A) \subset \text{lan}A$
- (vi) Če je A brez leve enote, velja pri vložitvi $x \mapsto \hat{x}$ algebre A v enotsko algebro $\hat{A}_e$ (gl. 0.5.4) enakost $H(\hat{A}_e) = (H(A))^\wedge + R\hat{e}$, pri čemer je vsota direktna (enolična izražava vsote), če je $\text{lan}A = \{0\}$ (gl. 0.5.0).
- (vi') Če ima A levo enoto e , velja ekvivalenca: $(\lambda, a)^\wedge \in H(\hat{A}_e) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\lambda e + a) \in H(A)$, kjer je očitno $e \in H(A)$.

Opomba Točke (i), (ii) in (v) veljajo tudi za neasociativno kompleksno normirano algebro (gl. opombo k trditvi 5.3).

Dokaz: Upoštevamo trditvi 5.3 in 6.2.

6.5 Opomba Pri vložitvi $x \mapsto \tilde{x} := (0, x)$ kompleksne normirane algebre $(A, \|\cdot\|)$ brez enote v kompleksno enotsko normirano algebro $(A_e, \|\cdot\|_1)$, kjer je $A_e = \mathbb{C} \times A$ adjungirana algebra z enoto $e = (1, 0)$ in $\|(\lambda, a)\|_1 = |\lambda| + \|a\|$ za vsak $(\lambda, a) \in A_e$, se hermitski elementi ne ohranjajo, saj je $H(A_e) = \text{Re}$ in zato $(H(A))^\sim \cap H(A_e) = \{0\}$.

Opomba: glej 2.3.2' !

Dokaz: Po definiciji norme $\|\cdot\|_1$ velja za vsak $(\lambda, a) \in A_e$ enakost

$$\frac{\|e + it(\lambda, a)\|_1 - 1}{t} = \frac{\|(1 + it\lambda, ita)\|_1 - 1}{t} = \frac{|1 + it\lambda| + \|ita\| - 1}{t} \quad \text{za vsak } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ker je $(A_e, \|\cdot\|_1)$

kompleksna enotska normirana algebra, velja po /3, Lema 2.5.2/ oziroma po /13, Izrek 9.3.6(iv)/ ekvivalenca (asociativnost algebre A ni bistvena): $(\lambda, a) \in H(A_e) \Leftrightarrow \lim_{t \in \mathbb{R}, t \rightarrow 0} \frac{|1 + it\lambda| + \|it\lambda\| - 1}{t} = 0 \dots$

...(1). Ker je $\lim_{t \downarrow 0} \frac{|1 + it\lambda| + \|it\lambda\| - 1}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{|1 + it\lambda| - 1}{t} + \|a\|$ in $\lim_{t \uparrow 0} \frac{|1 + it\lambda| + \|it\lambda\| - 1}{t} = \lim_{t \uparrow 0} \frac{|1 + it\lambda| - 1}{t} - \|a\|$, sledi zaradi (1) ekvivalenca: $(\lambda, a) \in H(A_e) \Leftrightarrow \left[\lim_{t \downarrow 0} \frac{|1 + it\lambda| - 1}{t} = -\|a\| \text{ in } \lim_{t \uparrow 0} \frac{|1 + it\lambda| - 1}{t} = \|a\| \right] \dots (2)$. Naj bo $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potem je (dvostranska limita) $\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \rightarrow 0}} \frac{|1 + it\lambda| - 1}{t} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[(1 - t\beta)^2 + (t\alpha)^2]^{1/2} - 1}{t} = -\beta. \quad \text{To pomeni zaradi (2)}$$

ekvivalenco: $(\alpha + i\beta, a) \in H(A_e) \Leftrightarrow (-\beta = -\|a\| \text{ in } -\beta = \|a\|) \Leftrightarrow (\beta = 0, a = 0)$. Torej $H(A_e) = \text{Re}$.

6.6. IZREK (karakterizacija levo-hermitskih elementov) Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna normirana algebra z enoto ali brez nje (ni treba, da je A asociativna). Potem so za vsak $h \in A$ ekvivalentne naslednje trditve:

(i) $h \in H(A)$

(ii) $\text{Re}V(A, a+ih) = \text{Re}V(A, a)$ za vsak $a \in A$

(ii') $\text{Im}V(A, a+h) = \text{Im}V(A, a)$ za vsak $a \in A$

- (iii) Za vsak $x \in A$ eksistira funkcija $o_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z lastnostjo $\|x + it_h x\| \leq \|x\|(1 + o_x(t))$ za vsak $t \in \mathbb{R}$, kjer je $\lim_{t \rightarrow 0} [o_x(t)/t] = 0$ (dvostranska limita eksistira in je $= 0$).
- (iv) Za vsak $x \in A$ in $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eksistira tak $t_0 \in \mathbb{R}^+$ (odvisen od ε in x), da je $\|x \pm it_0 h x\| \leq \|x\|(1 + t_0 \varepsilon)$.
- (v) $\sup_{x \in S} \|x + it_h x\| = (1 + t^2 \sup_{x \in S} \|h x\|^2)^{1/2}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.
- (vi) $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} ((\|x \pm it_h x\| - 1)/t) \leq 0$ za vsak $x \in S$.
- (vii) $\sup_{x \in S} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\|x \pm it_h x\| - 1}{t} = 0$, (vii') $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} \frac{\|x \pm it_h x\| - 1}{t} = 0$.
- (viii) $\sup_{x \in S} \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x \pm it_h x\| - 1}{t} = 0$, (viii') $\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} \frac{\|x \pm it_h x\| - 1}{t} = 0$.
- (ix) $\lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x \pm it_h x\| - 1}{t} \leq 0$ za vsak $x \in S$.

Če je nadalje $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna B-algebra, potem so trditvi (i) za vsak $h \in A$ ekvivalentne še naslednje trditve:

- (x) $\sup_{x \in S} \|e^{it_h} x\| \leq 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.
- (xi) $\sup_{x \in S} \|e^{it_h} x\| = 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.
- (xii) $\|e^{it_h} x\| \leq \|x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ in za vsak $x \in A$.
- (xiii) $\|e^{it_h} x\| = \|x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ in za vsak $x \in A$.
- (xiv) $\|e^{\lambda h} x\| = \|e^{(\operatorname{Re} \lambda) h} x\|$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ in $x \in A$.
- (xv) $\|e^{\lambda h} x\| \leq \|x\| e^{|\operatorname{Re} \lambda| v(A, h)}$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ in $x \in A$ (gl. 3.1(ii)).

Dokaz: (i) $\Rightarrow$ (ii): Naj bo $h \in H(A)$. Potem je $iV(h) \subset i\mathbb{R}$ in je zato po 2.1.4.4 in 2.1.4.5 $\operatorname{Re} V(a + ih) \subset \operatorname{Re}[V(a) + iV(h)] = \operatorname{Re} V(a) = \operatorname{Re} V(a + ih - ih) \subset \operatorname{Re}[V(a + ih) - iV(h)] = \operatorname{Re} V(a + ih)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Za $a = 0$ dobimo po 2.1.4.4 enakost $\operatorname{Im} V(h) = -\operatorname{Re}[iV(h)] = -\operatorname{Re} V(ih) = -\operatorname{Re} V(0) = \{0\}$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (ii'): Po 2.1.4.4 je $\operatorname{Im} V(x) = \operatorname{Re} V(-ix)$ za vsak $x \in A$. Ekvivalenca točk (i), (iii), (iv), ..., (xv) sledi iz 6.2 in 5.2 ter 6.4(ii), če upoštevamo, da je $(\alpha + i\beta)h = (\beta - i\alpha)(ih)$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6.7 IZREK (lastnosti levo-hermitskih elementov) Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna normirana algebra (ne nujno asociativna) z enoto ali brez nje in $h \in H(A)$. Potem velja:

- (i) $\|x + itx\| \leq \|x\| (1 + t^2 \|h\|^2)^{1/2}$ za vsak $x \in A$ in $t \in \mathbb{R}$
 (ii) $\sup_{x \in S} \|x + itx\| \geq 1$ za vsak $t \in \mathbb{R}$

Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna kompleksna normirana algebra (z enoto ali brez nje) in $h \in H(A)$, velja še:

- (iii) $\sup_{x \in S} \|h^n x\| = \sup_{x \in S} \|hx\|^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$
 (iv)* $\sup_{x \in S} \|hx\| = v(h) = r(h)$ (gl. 3.1; lahko je $r(h) < \|h\|$)**
 (v) Za vsak $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eksistira $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|(1 + \lambda h)^n x\|^{1/n}$ in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|(1 + \lambda h)^n x\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|(1 + \lambda h)^n x\|^{1/n} =$$

$$= \sup_{x \in S} \|x + \lambda hx\| = (1/|\lambda|) [(Im \lambda)^2 + \sup_{x \in S} \|(Re \lambda)x +$$

$$+ |\lambda|^2 hx\|^2]^{1/2} \dots \text{karakterizacija leve-hermitskosti ele-}$$

$$\text{menta } h, \text{ kjer definiramo } (1 + \lambda h)^n x = x + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (\lambda h)^j x.$$

- (vi) Če je Q polinom s kompleksnimi koeficienti, ki ima ničle le na imaginarni osi ($Q(\lambda) = 0 \Rightarrow Re \lambda = 0$), je
 $\sup_{x \in S} \|Q(h)x\| = |Q(\sup_{x \in S} \|hx\|)| = |Q(r(h))|$, kjer za poli-

nom $Q(\lambda) := \sum_{j=0}^n c_j \lambda^j$ definiramo $Q(h)x = c_0 x + \sum_{j=1}^n c_j h^j x$.

- (vii) Če je P polinom s kompleksnimi koeficienti, $P(0) = 0$ in če je tudi $P(h) \in H(A)$, velja ocena: $r(h) = v(h) = \sup_{x \in S} \|hx\| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \in \mathbb{R}\}$.

- (viii) $-h^2$ je levo-disipativen element, t.j. $(-h^2) \in D(A)$

- (ix) Če je $h \neq 0$ in če eksistira tak $n \in \mathbb{N}$ in $\lambda \in \mathbb{C}$, da je $n \geq 2$, $|\lambda| = 1$ in $h^n = \lambda h$ (če je npr. h neničelni levo-hermitski idempotent), potem je $\sup_{x \in S} \|hx\| = 1$.

- (x) Če eksistira tak $n \in \mathbb{N}$, da je $h^n = 0$, je $h \in \text{lan} A$ (gl. 0.5.0).

- (xi) Če eksistira tak $n \in \mathbb{N}$, da je tudi $h^n \in H(A)$; je $\overline{V(h^n)} \subset [\overline{V(h)}]^n := \{\lambda^n : \lambda \in V(h)\}$.

- (xi') Če eksistira tak $\lim_{n \rightarrow \infty} n \in \mathbb{N}$, da je $h^n \in H(A)$, je $\overline{V(h^n)} = [\overline{V(h)}]^n := \{\lambda^n : \lambda \in V(h)\}$.

Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna, kompleksna, Banachova algebra (z enoto ali brez nje) in $h \in H(A)$, velja še:

* gl. OPOMBO na str. 81

**gl. 13.1.10(13), 13.2.4(17) in (17'), 13.2.5(25), 13.3.6(12), 13.4.7(16)

- (xii) $\mathcal{G}(A, h) \subset \{0\} \cup \overline{V(A, h)}$ in $\overline{V(A, h)} \subset \text{co } \mathcal{G}(A, h) \subset \mathbb{R}$
- (xiii) Če ima A enoto (dvostransko - njena norma je lahko $\neq 1$) ali pa je A brez leve enote, je $\text{co } \mathcal{G}(A, h) = \overline{V(A, h)} \subset \mathbb{R}$ in je tedaj zato $\min \mathcal{G}(A, h) = \inf V(A, h) = -\ln \sup_{x \in S} \|e^{-h}x\|$ ter $\max \mathcal{G}(A, h) = \sup V(A, h) = \ln \sup_{x \in S} \|e^h x\|$.
- (xiv) Če je A brez leve enote, je $\text{co } \mathcal{G}(A, h) = \text{co } \mathcal{G}(\hat{A}_e, \hat{h}) = \text{co } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{h}) = \overline{V(A, h)} \subset \mathbb{R}$ (gl. 0.5.4 in 0.5.5).
- (xv) $(\lambda \in \mathbb{C}, \text{Re } \lambda \geq 0) \Rightarrow \sup_{x \in S} \|e^{\lambda h} x\| = e^{(\text{Re } \lambda) \sup V(A, h)}$. Zato je $\sup V(A, h) = \ln \sup_{x \in S} \|e^h x\|$.
- (xv') $(\lambda \in \mathbb{C}, \text{Re } \lambda \leq 0) \Rightarrow \sup_{x \in S} \|e^{\lambda h} x\| = e^{(\text{Re } \lambda) \inf V(A, h)}$. Zato je $\inf V(A, h) = -\ln \sup_{x \in S} \|e^{-h} x\|$.
- (xvi) $\|ixp(th)x\| \leq 2\|x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ in $x \in A$ (gl. 1.15).
- (xvii) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in S} \|e^{th} x\| < \infty \Leftrightarrow h \in \text{lan } A$ (gl. 0.5.0)
- To v posebnem pomeni: $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|ixp(th)\| < \infty \Rightarrow h = 0$.
- Opomba: Primerjaj 3.11 !
- (xviii) Če je f funkcija $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ki je holomorfna na okolici spektra $\mathcal{G}(A, h)$ (npr. f cela funkcija) in je $f(0) = 0$ ter $f(h) \in H(A)$, je $\overline{V(A, f(h))} \subset \text{co}[\{0\} \cup \overline{f(V(A, h))}]$.
- (xix)** $|\sin r(h)| \leq r(\sinh) \leq v(\sinh) \leq \sup_{x \in S} \|(\sinh)x\| \leq 1$
- (xx) $r(h) \leq (\pi/2) \Rightarrow r(\sinh) = \sin r(h)$
- (xxi) $r(h) = (\pi/2) \Rightarrow r(\sinh) = v(\sinh) = \sup_{x \in S} \|(\sinh)x\| = 1$
- (xxii) Če je B podalgebra algebre A in $h \in \bar{B} \neq \{0\}$, je $\mathcal{G}(\bar{B}, h) \subset \{0\} \cup \mathcal{G}(A, h)$.
- (xxiii) Če je A brez leve enote in je $\mathcal{G}(A, h) = \{\lambda_0\}$, je $\lambda_0 = 0$ in $h \in \text{lan } A$ (gl. 0.5.0).

* OPOMBA: Tudi, če A ni asociativna, je $\sup_{x \in S} \|hx\| = v(h)$ (gl. (iv)), saj za operator T_h , $T_h x = hx$, velja $T_h \in H(\mathfrak{B}(A))$, ker je $V(\mathfrak{B}(A), T_h) = \overline{\text{co}} V(A, h)$.

Dokaz: (i), (ii): Sledita iz 6.6(v).

(iii), (iv): Po 6.2 in 6.4(ii) je $a := ih \in H'(A)$, kar zaradi 5.4(ii)(b) oziroma 5.4(vii) dokazuje naši trditvi.

(v): Po 6.4(iv) je $\hat{h} \in H(\hat{A}_e)$ in veljajo zato po /13, Izrek 9.10 -

*** Lahko je $\|\sinh\| > 1$; gl. 13.1.10(14), 13.3.6(13) in 13.4.7(17) !

postavimo $\alpha = 1$ in $\beta = \lambda / (g1. /4, \text{ Korolar } 6.26.6/)$ in po 0.5.6.1 enakosti $r(\hat{e} + \lambda \hat{h}) = \|\hat{e} + \lambda \hat{h}\| = |\lambda| [(\operatorname{Im} \lambda^{-1})^2 + \|(\operatorname{Re} \lambda^{-1})\hat{e} + \hat{h}\|^2]^{1/2} = (|\lambda|/|\lambda|^2) [(\operatorname{Im} \lambda^*)^2 + \|(\operatorname{Re} \lambda^*)\hat{e} + |\lambda|^2 \hat{h}\|^2]^{1/2} = |\lambda|^{-1} [(\operatorname{Im} \lambda)^2 + \|(\operatorname{Re} \lambda)\hat{e} + |\lambda|^2 \hat{h}\|^2]^{1/2} = |\lambda|^{-1} [(\operatorname{Im} \lambda)^2 + \sup_{x \in S} \|(\operatorname{Re} \lambda)x + |\lambda|^2 h_x\|^2]^{1/2} \dots (1)$. Po 0.5.6.1 je $\|\hat{e} + \lambda \hat{h}\| =$

$\sup_{x \in S} \|x + \lambda h_x\| \dots (2)$. Zaradi 3.1(i) in 0.5.6.1 je tudi

$$\begin{aligned} r(\hat{e} + \lambda \hat{h}) &= r((e + \lambda \tilde{h})^\wedge) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|[(e + \lambda \tilde{h})^\wedge]^n\|^{1/n} = \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \|[(e + \lambda \tilde{h})^n]^\wedge\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\| \left[e + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \lambda^j \tilde{h}^j \right]^\wedge \right\|^{1/n} = \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|x + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \lambda^j h^j_x\|^{1/n} := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} \|(1 + \lambda h)^n x\|^{1/n} \dots (3). \end{aligned}$$

Podobno sledi iz 3.2(i) in 0.5.6.1 enakost $r(\hat{e} + \lambda \hat{h}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \|(1 + \lambda h)^n x\|^{1/n} \dots (4)$. Točke (1), (2), (3) in (4)

dokazujejo trditev (v).

(vi) Polinom $P(\lambda) := Q(-i\lambda)$ ima le realne ničle in po 6.2 ter 6.4(ii) je $a := ih \in H'(A)$. To zaradi 5.4(vi) dokazuje trditev (vi).

(vii) Za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ naj bo $Q(\lambda) = iP(i\lambda) \dots (5)$. Potem je po predpostavki trditve (vii) tudi $Q(0) = 0 \dots (6)$. Po 6.2 in 6.4(ii) je $a := -ih \in H'(A) \dots (7)$ in po predpostavki trditve (vii) je zaradi (5) $Q(a) = iP(ia) = iP(h) \in iH(A) = H'(A) \dots (8)$. Iz (6), (7), (8) in 5.5(ii) sledi $\sup_{x \in S} \|Q(a)x\| \leq$

$$\leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{R}, Q(i\lambda) \in i\mathbb{R}\}, \text{ kar zaradi (5) in (7) pomeni } \sup_{x \in S} \|iP(h)x\| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{R}, iP(-\lambda) \in i\mathbb{R}\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \in \mathbb{R}\},$$

kar zaradi že dokazane trditve (iv) potrjuje trditev (vii).

(viii) Ker je po 6.2 in 6.4(ii) $a := ih \in H'(A)$, je po 5.4(v) $-h^2 = a^2 \in D(A)$.

(ix) Ker je $h^n = \lambda h \neq 0$ in $|\lambda| = 1$, eksistira za vsak $j \in \mathbb{N}$ tak $\lambda_j \in \mathbb{C}$, da je $h^{n^j} = \lambda_j h \neq 0$ in $|\lambda_j| = 1$. Zato je po 3.2(i) $r(h) = \lim_{j \rightarrow \infty} \|h^{n^j}\|^{n^{-j}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\lambda_j h\|^{n^{-j}} = 1$. To zaradi (iv)

dokazuje (ix).

(x) Po 6.2 in 6.4(ii) je $a := ih \in H'(A)$ in ker je $a^n = i^n h^n = 0$, je po 5.4(iv) $a \in \operatorname{lan} A$ in zato tudi $h \in \operatorname{lan} A$.

(xi), (xi'): Sledi iz 2.3.2, 0.5 in /13, Trditvev 9.7(i) oz. 9.7(ii)/.

(xii), (xiii), (xiv), (xv), (xv'), (xxii), (xxiii): za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ in $x \in A$ je $V(A, \lambda x) = \lambda V(A, x)$ in $\mathcal{G}(A, \lambda x) = \lambda \mathcal{G}(A, x)$... **(9)**. Po 6.2 in 6.4(ii) je $a := -ih \in H'(A)$... **(10)**. Naše trditve slede sedaj iz (9), (10) in po vrsti iz 5.4(ix)(a), (b), (b'), (c), (c'), (d) in (d'); dokaz trditve (xv) teče npr. takole: $\sup_{x \in S} \|e^{\lambda h} x\| = \sup_{x \in S} \|e^{(i\lambda)(-ih)} x\| = e^{\operatorname{Im}(i\lambda) \sup V(A, i(-ih))} = e^{(\operatorname{Re} \lambda) \sup V(A, h)}$. Drugi del trditve (xiii) sledi iz prvega dela te trditve in iz (xv) ter (xv').

(xvi) Ker je $e^{ith} x = x - [\operatorname{ixp}(ith)] x$, velja zaradi 6.6(xiii) za vsak $t \in \mathbb{R}$ in $x \in A$ ocena $\|x\| = \|e^{ith} x\| = \|x - [\operatorname{ixp}(ith)] x\| \geq \|[\operatorname{ixp}(ith)] x\| - \|x\|$.

(xvii) Naj bo $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in S} \|e^{th} x\| < \infty$, $m_1 = \inf V(h)$ in $m_2 = \sup V(h)$. Zaradi (xv') in (xv) je zato $e^{-m_1 t} \leq M$ in $e^{m_2 t} \leq M$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$. Torej je $-m_1 \leq 0$ in $m_2 \leq 0$, kar pomeni $\inf V(h) = m_1 \geq 0 \geq m_2 = \sup V(h)$, t.j. $m_1 = m_2 = 0$, t.j. $V(h) = \{0\}$. Po 3.12 od tod sledi $h \in \operatorname{lan} A$. Če je obratno $h \in \operatorname{lan} A$, je $h^j = 0$ za vsak $j \geq 2$, kar pomeni $e^{th} x = x + thx = x + t \cdot 0 = x$, t.j. $\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in S} \|e^{th} x\| = 1 < \infty$.

Naj bo $M' := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\operatorname{ixp}(th)\| < \infty$. Zaradi ocene $\|e^{th} x\| = \|x - \operatorname{ixp}(th)x\| \leq \|x\| + \|\operatorname{ixp}(th)\| \|x\|$ je zato $\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{x \in S} \|e^{th} x\| \leq 1 + M' < \infty$, kar po pravkar dokazanem pomeni $h \in \operatorname{lan} A$. Zato je $M' \geq \|\operatorname{ixp}(th)\| = \|-th\| = |t| \cdot \|h\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}$, t.j. $\|h\| = 0$.

(xviii) Ker je $f(h) \in H(A)$, je po točki (xii) in po spektralnem teoremu /11, Teorem 24.5.5/ $\overline{V(f(h))} \subset \operatorname{co} \mathcal{G}(f(h)) = \operatorname{cof}(\mathcal{G}(h)) \subset \operatorname{cof}(\{0\} \cup \overline{V(h)}) = \operatorname{co}[\{0\} \cup f(\overline{V(h)})] \subset \operatorname{co}[\{0\} \cup f(\overline{V(h)})]$.

(xix) Po 6.4(iv) je $\bar{h} \in H(\bar{A}_e)$, kjer je $\bar{A}_e$ kompleksna asociativna enotska B-algebra. Po /13, Izrek 9.5(ix)a) in 9.5(v)/ je zato $|\sin r(\bar{h})| \leq r(\sin \bar{h}) \leq \|\sin \bar{h}\| \leq 1$... **(11)**. Po 3.2(xi) je $r(\bar{h}) = r(h)$... **(12)**. Po 0.5.6.2(ii) in 3.2(xi) je tudi $r(\sin \bar{h}) = r((\sin h)^{-}) = r(\sin h)$... **(13)**. Po 3.2(vii) in 3.2(x) je $r(\sin h) \leq v(\sin h) \leq \sup_{x \in S} \|(\sin h)x\|$... **(14)**. Po 0.5.7(i) je

$\|\sin \bar{h}\| = \sup_{x \in S} \|(\sin h)x\|$... **(15)**. Trditve (xix) dokazujejo točke

(11), (12), (13), (14) in (15).

(xx) Ker je po 6.4(iv) $\bar{h} \in H(\bar{A}_e)$, kjer je $\bar{A}_e$ asociativna kompleksna enotska B-algebra, je po /13, Izrek 9.5(ix)b) in 9.5(v)/ $r(\sin \bar{h}) = \sin \|\bar{h}\| = \sin r(\bar{h})$, kar zaradi (13) in (12) dokazuje trditev (xx).

(xxi): Sledi iz (xix).

6.8 POSLEDICA Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna, kompleksna normirana algebra (z enoto ali brez nje) in $h \in H(A)$, je $\overline{V(A, h)} \subset \subset \text{co}(\{0\} \cup \overline{\text{co}V_d(A, h)})$ (gl. 2.1.3(iii)).

Dokaz: I. $(A, \|\cdot\|)$ je B-algebra: Po 6.7(xii), 2.3.11 in 2.1.4.6 je tedaj $\overline{V(A, h)} \subset \subset \text{co } \mathcal{G}(A, h) = \text{co } \mathcal{G}(A^*, h) \subset \subset \text{co}[\{0\} \cup \overline{\text{co}V(A^*, h)}] = \text{co}[\{0\} \cup \overline{\text{co}V_d(A, h)}]$.

II. Če normirana algebra $(A, \|\cdot\|)$ ni poln prostor, jo izometrično homomorfno vložimo $(x \mapsto \tilde{x})$ v njeno izpopolnitev $(\bar{A}, \|\cdot\|)$. Po 2.2.9 in 2.1.4.6 je tedaj $\overline{V(\bar{A}, \tilde{h})} = \overline{V(A, h)}$ in $\overline{\text{co}V_d(\bar{A}, \tilde{h})} = \overline{\text{co}V((\bar{A})^*, \tilde{h})} = \overline{\text{co}V(\bar{A}^*, \tilde{h})} = \overline{\text{co}V(A^*, h)} = \overline{\text{co}V_d(A, h)}$, kar zaradi I spet potrjuje posledico 6.8.

6.9 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna kompleksna B-algebra, $h \in H(A)$ in naj aksistira tak $t_0 \in \mathbb{R}^+$, da velja:

(i) $\|e^{t_0 h} x\| = \|x\| e^{t_0 \sup V(h)}$ za vsak $x \in A$

(ii) $\|e^{-t_0 h} x\| = \|x\| e^{-t_0 \inf V(h)}$ za vsak $x \in A$.

Potem vsebuje $V(h)$ eno samo točko, $V(h) = \{\tau_0\}$. Če ima pri tem A levo enoto e , je $hx = \tau_0 x$ za vsak $x \in A$ in če je A brez leve enote, je tedaj $V(h) = \{0\}$ in $h \in \text{lan} A$ (gl. 0.5.0).

Opomba: Primerjaj 6.7(xv) in (xv') !

Dokaz: Po 6.4(ii) je $k := t_0 h \in H(A)$... **(1)**. Naj bo $\alpha = \inf V(A, k)$ in $\beta = \sup V(A, k)$... **(2)**. Zaradi 0.3(ii), **(i)**, **(ii)**, (1) in (2) veljajo za $x := e^{-ky}$ enakosti $\|y\| = \|e^{ky} e^{-ky}\| = \|e^{-ky}\| e^{\beta} = \|y\| e^{-\alpha} e^{\beta}$ za vsak $y \in A$. Torej je $\beta = \alpha$, kar zaradi (2) pomeni, da vsebuje $V(k)$ eno samo točko in vsebuje zato po (1) in 2.1.4.4 tudi $V(h)$ eno samo točko, $V(h) = \{\tau_0\}$... **(3)**.

a) Če ima A levo enoto e , sledi neposredno po definiciji levega numeričnega zaklada (2.1.3(ii)) zaradi (3) enakost $V(h - \tau_0 e) = V(h) - \{\tau_0\} = \{\tau_0\} - \{\tau_0\} = \{0\}$, t.j. $v(h - \tau_0 e) = 0$. Zato je po 3.12 $(h - \tau_0 e) \in \text{lan} A$, t.j. $hx - \tau_0 x = 0$ za vsak $x \in A$.

b) Če je A brez leve enote, je zaradi (3) po 6.7(xiii) tudi $\mathcal{G}(h) = \{\tau_0\}$ in zato po 6.7(xxiii) $\tau_0 = 0$ ter $h \in \text{lan} A$.

6.10 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna kompleksna normirana algebra (z enoto ali brez nje) in $a^2 = a \in A$ (idempotenten element). Potem velja ekvivalenca: $a \in H(A) \iff$
 $\iff \sup_{x \in S} \|(a - \lambda a)x + \lambda x\| = 1$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Dokaz: Ne glede na to, če ima A enoto ali ne, algebro $(A, \|\cdot\|)$ vložimo homomorfno v asociativno kompleksno enotsko normirano algebro $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.4). Ker je $a^2 = a$, je $\hat{a}^2 = (a^2)^\wedge = \hat{a}$ in velja zato po /13, Trditev 10.4(iii)/ ekvivalenca: $\hat{a} \in H(\hat{A}_e) \iff \|\hat{a} + \lambda(\hat{e} - \hat{a})\| = 1$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Ker je po 0.5.4 $\|\hat{a} + \lambda(\hat{e} - \hat{a})\| = \|[(a - \lambda a)^\sim + \lambda e]^\wedge\| = \sup_{x \in S} \|(a - \lambda a)x + \lambda x\|$, je s tem trditev 6.10 dokazana.

6.11 IZREK Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna kompleksna normirana algebra (z enoto ali brez nje) in $h, k \in H(A)$. Potem velja:

- (i) $i(hk - kh) \in H(A)$, kjer je $i = \sqrt{-1}$
- (ii) $[a = h + ik, h_0 \in H(A), (ah_0 - h_0a) \in \text{lan}A] \Rightarrow [(hh_0 - h_0h), (kh_0 - h_0k) \in \text{lan}A]$ (gl. 0.5.0)
- (iii) $[hk \in H(A), h^2 \in H(A) \text{ ali } k^2 \in H(A)] \Rightarrow (hk - kh) \in \text{lan}A$
- (iv) $hk = kh \in H(A) \Rightarrow \overline{V(A, hk)} \subset \overline{V(A, h)}\overline{V(A, k)} := \{st : s \in \overline{V(A, h)}, t \in \overline{V(A, k)}\}$
- (v)[†] $\max\{v(h), v(k)\} \leq v(h + ik) \leq \sup_{x \in S} \|(h + ik)x\| \leq 2v(h + ik)$
- (vi) $hk = kh = 0 \Rightarrow v(h+k) = \max\{v(h), v(k)\}$ (gl. 7.6(ii))
- (vii) Če je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra, velja:
 - (a) $\sup_{x \in S} \|e^{h+ik}x\| \leq \sup_{x \in S} \|e^h x\| = e^{\sup V(A, h)}$
 - (b) $hk = kh \Rightarrow \|e^{h+ik}x\| = \|e^h x\|$ za vsak $x \in A$.

Dokaz: Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, homomorfno vložimo $(x \rightarrow \bar{x})$ algebro $(A, \|\cdot\|)$ v asociativno kompleksno enotsko B-algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.5) ... (1). Ker sta $h, k \in H(A)$, sta po 6.4(iv) $\bar{h}, \bar{k} \in H(\bar{A}_e)$... (2).

(i) Zaradi (1), (2) in /13, Izrek 9.15(a)/ je $[i(hk - kh)]^\sim = i(\bar{h}\bar{k} - \bar{k}\bar{h}) \in H(\bar{A}_e)$. To po 6.4(iv) pomeni $i(hk - kh) \in H(A)$.

(ii) Po predpostavki, po (i) in 6.4(i) ter 6.4(ii) je $hh_0 - h_0h = [(ah_0 - h_0a) - i(kh_0 - h_0k)] \in \text{lan}A - H(A) \subset H(A)$, t.j. $(hh_0 - h_0h) \in H(A)$ in po (i) tudi $i(hh_0 - h_0h) \in H(A)$, kar zaradi 6.4(v) pomeni $(hh_0 - h_0h) \in \text{lan}A$. To po zgornjem pomeni tudi $i(kh_0 - h_0k) \in \text{lan}A$, t.j. $(kh_0 - h_0k) \in \text{lan}A$.

[†] Trditev s križcem velja tudi za neasociativne algebre (gl. 2.1.4.2(ii)).

- (iii) Naj bodo $h, k, hk, h^2 \in H(A)$. Potem so po 6.4(iv) tudi $\bar{h}, \bar{k}, \bar{h}\bar{k}, \bar{h}^2 \in H(\bar{A}_e)$, kar po (1) in /13, Izrek 9.15(b)/ pomeni $\bar{h}\bar{k} = \bar{k}\bar{h}$ in zato $(hk - kh)^- = 0$. To zaradi 0.5.6.1 pomeni $(hk - kh) \in \text{lan} A$.
- (iv) Ker je po 6.4(iv) $\bar{h}\bar{k} = \bar{h}\bar{k} = \bar{k}\bar{h} = \bar{k}\bar{h} \in H(\bar{A}_e)$, velja zaradi (1) in /13, Izrek 9.15(e)/ inkluzija $V(\bar{A}_e, \bar{h}\bar{k}) = V(\bar{A}_e, \bar{h}\bar{k}) \subset V(\bar{A}_e, \bar{h}) \cdot V(\bar{A}_e, \bar{k})$, kar zaradi 2.3.2 in 6.1 dokazuje trditev.
- (v) Zaradi (1), (2) in /13, Izrek 9.15(c)/ je $\max\{v(\bar{h}), v(\bar{k})\} \leq v(\bar{h} + i\bar{k}) \leq \|\bar{h} + i\bar{k}\| \leq 2v(\bar{h} + i\bar{k}) \dots (3)$. Po 3.2(x) je $v(\bar{h}) = v(h)$ in $v(\bar{k}) = v(k) \dots (4)$. Zaradi 3.2(x) je tudi $v(\bar{h} + i\bar{k}) = v((h + ik)^-) = v(h + ik) \dots (5)$. Po 0.5.6.1 je $\|\bar{h} + i\bar{k}\| = \sup_{x \in S} \|(h + ik)x\| \dots (6)$. Točke (3), (4), (5) in (6) dokazujejo trditev (v).

(vi) LEMA: Za asociativno normirano algebro $(A, \|\cdot\|)$ nad obsegom $\mathfrak{F} (= \mathbb{R} \text{ ali } \mathbb{C})$ velja: $(a, b \in A, ab = ba = 0) \Rightarrow r(a+b) = \max\{r(a), r(b)\} \dots (7)$.
Dokaz leme: Naj bo $m = \max\{r(a), r(b)\} \dots (8.1)$. Po 3.1(i) in 3.2(i) eksistira za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da je zaradi (8.1) $(r(a))^n \leq \|a^n\| < (r(a) + \varepsilon)^n \leq (m + \varepsilon)^n$ in $\|b^n\| < (r(b) + \varepsilon)^n \leq (m + \varepsilon)^n$ za vsak $n \geq n_\varepsilon \dots (8.2)$. Ker je $ab = ba = 0$, je $(a+b)^n = a^n + b^n$ za vsak $n \in \mathbb{N} \dots (8.3)$ in zato po (8.2) $\|(a+b)^n\| \leq \|a^n\| + \|b^n\| < 2(m + \varepsilon)^n$ za vsak $n \geq n_\varepsilon$. Zato je po 3.2(i) $r(a+b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a+b)^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [2^{1/n} (m + \varepsilon)] = m + \varepsilon$ za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, t.j. $r(a+b) \leq m \dots (8.4)$.

Če je $r(a) > r(b)$, eksistira $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, da je $r(a) > r(b) + \varepsilon \dots (9.1)$. Zaradi (8.2) velja ocena $\|a^n + b^n\| \geq \|a^n\| - \|b^n\| > (r(a))^n - (r(b) + \varepsilon)^n$. To pomeni zaradi 3.2(i), (8.3), (9.1) in (8.1) oceno $r(a+b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n + b^n\|^{1/n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \{r(a) [1 - \frac{(r(b) + \varepsilon)^n}{(r(a))^n}]^{1/n}\} = r(a) = m \dots (9.1')$.

Če je $r(a) = r(b) > 0$, velja za elementa $a_t := ta$ in b relacija $a_t b = ba_t = 0$ in $r(a_t) > r(b)$ za vsak $t > 1 \dots (9.2)$. Po (9.1') in 3.2(ii) je zato $r(a_t + b) \geq r(a_t) = tr(a)$ za vsak $t > 1 \dots (9.2')$. Ker je po 3.3' preslikava $x \mapsto r(x)$ navzgor polzvezna, eksistira za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tak $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, da je $r(ta + b) < r(a+b) + \varepsilon$ za vsak $t, |t-1| < \delta_\varepsilon$. To pomeni zaradi (9.2) in (9.2') oceno $r(a+b) > tr(a) - \varepsilon$ za vsak $t \in (1, 1 + \delta_\varepsilon)$ in za vsak $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, t.j. $r(a+b) \geq r(a) = m \dots (9.2'')$.

Če je $r(a) = r(b) = 0$, je po (8.1) in (8.4) tudi $r(a+b) = 0 \dots (9.3)$. Lemo - točko (7) dokazujejo točke (8.1), (8.4), (9.1'), (9.2'') in (9.3). Trditev 6.11(vi) sledi iz (7) in 6.7(iv).

- (vii) (a) Zaradi (1), (2) in /13, Izrek 9.15(d)(i)/ velja ocena $\|e^{\bar{h} + i\bar{k}}\| \leq \|e^{\bar{h}}\| \dots (10)$. Po 0.5.6.2(ii) in 0.5.7(ii) je $\|e^{\bar{h} + i\bar{k}}\| = \|e^{(h+ik)^-}\| = \sup\{\|e^{h+ik}x\| : x \in S\}$ in $\|e^{\bar{h}}\| = \sup_{x \in S} \|e^h x\| \dots (11)$. Trditev (vii)(a) sledi iz (10), (11) in 6.7(xv).
- (b) Če je $hk = kh$, je po 0.3(i) in 6.6(xiv) $\|e^{h+ik}x\| = \|e^{ik}(e^h x)\| = \|e^h x\|$ za vsak $x \in A$.

6.12 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna kompleksna normirana algebra, $a \in A$ in $h_0, k_0 \in H(A)$. Potem velja:

$$(i) \quad \sup |\operatorname{Re} V(A, h_0 + ik_0)| = r(h_0) = v(h_0) = \sup_{x \in S} \|h_0 x\|$$

$$(i') \quad \sup |\operatorname{Im} V(A, h_0 + ik_0)| = r(k_0) = v(k_0) = \sup_{x \in S} \|k_0 x\|$$

$$(ii) \quad \sup |\operatorname{Im} V(A, a)| \leq \inf_{x \in S} \{ \sup \| (a-h)x \| : h \in H(A) \} \leq \\ \leq \inf_{h \in H(A)} \|a-h\| := d(a, H(A))$$

$$(iii) \quad \inf_{x \in S} \{ \sup \| (h+ik_0)x \| : h \in H(A) \} = r(k_0) = v(k_0) = \sup_{x \in S} \|k_0 x\|.$$

Opomba: Iz spodnjega dokaza je razvidno, da velja točka (ii) tudi v primeru, ko A ni asociativna algebra*!

Dokaz: (i), (i') Sledita iz 6.6(ii) in (ii') ter iz 6.7(iv).

(ii) Zaradi 6.4(ii), 6.6(ii') in 3.2(x) velja za vsak $h \in H(A)$ ocena $\sup |\operatorname{Im} V(A, a)| = \sup |\operatorname{Im} V(A, a-h)| \leq v(a-h) \leq \sup_{x \in S} \| (a-h)x \| \leq \|a-h\|$, ki dokazuje (ii).

(iii) Sledi iz 6.11(v) in 6.7(iv), če upoštevamo, da je $0 \in H(A)$.

6.13 OPOMBA Če ima kompleksna normirana algebra $(A, \|\cdot\|)$ enoto e (dvostransko), lahko hermitske elemente definiramo na štiri načine:

(i) $h \in H_1(A) \Leftrightarrow g(h) \in \mathbb{R}$ za vsak $g \in A'$, $g(e) = 1$, $\|g\| = \frac{1}{\|e\|}$, t.j. $\frac{1}{\|e\|} V'(A, h) \subset \mathbb{R}$; torej: $h \in H_1(A) \Leftrightarrow V'(A, h) \subset \mathbb{R}$ (gl. 2.2.5 in PRIMER 13.4.6(12) in 8(18), (19), (29), (30))

(ii) $h \in H(A) \Leftrightarrow V(A, h) \subset \mathbb{R}$ (gl. 2.1.3(ii))

(iii) $h \in H_d(A) \Leftrightarrow V_d(A, h) \subset \mathbb{R}$ (gl. 2.1.3(iii))

(iv) $h \in H_2(A) \Leftrightarrow g(h) \in \mathbb{R}$ za vsak $g \in A'$, $g(e) = 1$, $\frac{1}{\|e\|} \leq \|g\| \leq 1$; torej $h \in H_2(A) \Leftrightarrow V''(A, h) \subset \mathbb{R}$ (gl. 2.2.5).

Po 2.2.5(vi') je $H_2(A) \subset H(A) \cap H_d(A) \subset H(A) \cup H_d(A) \subset H_1(A)$ in če je $\|e\| = 1$, je po 2.2.5(vii') $H_2(A) = H(A) = H_d(A) = H_1(A)$.

*Tudi za neasociativno algebro veljajo enakosti:

$$(i) \quad \sup |\operatorname{Re} V(A, h_0 + ik_0)| = v(h_0) = \sup_{x \in S} \|h_0 x\|$$

$$(i') \quad \sup |\operatorname{Im} V(A, h_0 + ik_0)| = v(k_0) = \sup_{x \in S} \|k_0 x\|$$

$$(iii) \quad \inf_{x \in S} \{ \sup \| (h+ik_0)x \| : h \in H(A) \} = v(k_0) = \sup_{x \in S} \|k_0 x\|.$$

(Upoštevamo 2.1.4.2(ii) in /13, Izrek 9.15(c)/.)

7. POZITIVNI ELEMENTI kompleksne normirane algebre

V tem odstavku je $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna kompleksna normirana algebra, ne nujno asociativna, z enoto ali brez nje.

7.1 DEFINICIJA Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna normirana algebra (ne nujno asociativna) z enoto ali brez nje. Element $p \in A$ imenujemo levo (desno) pozitiven, če je $V(A, p) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (oz. $V_d(A, p) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$). Množico vseh levo (desno) pozitivnih elementov algebre A označimo s $H^+(A)$ (oz. s $H_d^+(A)$). Po 2.1.4.6. je očitno $H_d^+(A) = H^+(A^*)$ (gl. 0.1.3).

7.2 Trditev Po 4.1, 6.1 in 7.1 je očitno $0 \in H^+(A) = (-D(A)) \cap \cap H(A)$ in če ima A levo enoto e , je $e \in H^+(A)$.

7.3 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna normirana algebra .

(i) Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, velja pri formalni adjunkciji enote (gl. 0.5.4 in 0.5.5) za vsak $p \in A$ ekvivalenca: $p \in H^+(A) \Leftrightarrow \hat{p} \in H^+(\hat{A}_e) \Leftrightarrow \bar{p} \in H^+(\bar{A}_e)$.

(ii) Če je A brez leve enote, velja pri vložitvi $x \mapsto \hat{x}$ algebre A v enotsko algebro $\hat{A}_e$ (gl. 0.5.4) inkluzija : $H^+(\hat{A}_e) \supsetneq (H^+(A))^{\wedge} + (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})\hat{e}$.

Dokaz: (i) Izrek 2.3.2 .

(ii) Ker je $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ enotska normirana algebra, velja zaradi 2.2.5(iii) in 2.2.5(vii') za vsak $\xi = (\lambda, a)^{\wedge} = (\lambda, a) + \mathcal{N} = \lambda\hat{e} + \hat{a}$ enakost $V(\hat{A}_e, (\lambda, a)^{\wedge}) = \{\lambda\} + V(\hat{A}_e, \hat{a})$, t.j. po 2.3.2 $V(\hat{A}_e, (\lambda, a)^{\wedge}) = \overline{\text{co}}V(A, a) + \{\lambda\}$, kar dokazuje (ii).

7.4 IZREK (karakterizacija levo pozitivnih elementov)

Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna normirana algebra, ne nujno asociativna, z enoto ali brez nje. Potem so za vsak $p \in A$ ekvivalentne naslednje trditve:

(i) $p \in H^+(A)$

(ii) $(\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} \frac{\|x + tpx\| - 1}{t} \geq 0 \text{ ali } \sup_{x \in S} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\|x + tpx\| - 1}{t} \geq 0)$ in $(\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{x \in S} \frac{\|x \pm itpx\| - 1}{t} = 0 \text{ ali } \sup_{x \in S} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\|x \pm itpx\| - 1}{t} = 0)$

(iii) $(\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} \frac{\|x + tpx\| - 1}{t} \geq 0 \text{ ali } \sup_{x \in S} \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x + tpx\| - 1}{t} \geq 0)$ in

$$\left(\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} \frac{\|x + itpx\| - 1}{t} = 0 \quad \text{ali} \quad \sup_{x \in S} \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x + itpx\| - 1}{t} = 0 \right)$$

- (iv) $\sup_{x \in S} \|x + tpx\| = 1 + tv(p)$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$ (gl. 6.7(iv)) in
- $$\sup_{x \in S} \|x + itpx\| = [1 + (tv(p))^2]^{1/2} \quad \text{za vsak } t \in \mathbb{R}$$

Če je $(A, \|\cdot\|)$ asociativna kompleksna Banachova algebra, sta trditvi (i) ekvivalentni še naslednji trditvi:

- (v) $p \in H(A)$ in $G(A, p) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
 (vi) $\|e^{tp}x\| \geq \|x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$ in za vsak $x \in A$ ter
 $\|e^{itp}x\| = \|x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ in za vsak $x \in A$.

Dokaz: Ekvivalenca točk (i), (ii), (iii) in (vi) sledi iz 7.2, 4.4 in 6.6 (gl. še 2.2.7).

(i) $\Rightarrow$ (iv): Če je $p \in H^+(A)$, je zaradi 2.1.4.2(ii) operator T_p , $T_p x = px$ za vsak $x \in A$, pozitiven element asociativne enotske kompleksne normirane algebre $\mathcal{B}(A)$ vseh linearnih omejenih operatorjev $T: A \rightarrow A$. Ker je torej $T_p \in H^+(\mathcal{B}(A))$, je po /13, Izrek 10.2(xiv)/ $\|T_p + tI\| = \|T_p\| + t$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$ (I = enota = identična preslikava algebre A) in zato tudi $\|I + tT_p\| = 1 + t\|T_p\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$. To po definiciji norme operatorja $T \in \mathcal{B}(A)$ pomeni $\sup_{x \in S} \|x + tpx\| = 1 + t \sup_{x \in S} \|px\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$.

Ker je $p \in H^+(A) \subset H(A)$, od tod zaradi 6.7(iv) (gl. OPOMBO) in 6.6(v) sledi trditev (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Očitno.

(i) $\Leftrightarrow$ (v): Trditev 7.2 in izrek 6.7(xii).

7.5 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna normirana algebra, ne nujno asociativna, z enoto ali brez nje. Potem velja:

- (i) $\text{lan} A \subset H^+(A)$ (gl. 0.5.0)
 (ii) $H^+(A) + H^+(A) \subset H^+(A)$ (t.j. $p, q \in H^+(A) \Rightarrow p+q \in H^+(A)$)
 (iii) $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})H^+(A) \subset H^+(A)$ (t.j. $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, p \in H^+(A) \Rightarrow tp \in H^+(A)$)
 (iv) $[p, q \in H^+(A), (p+q) \in \text{lan} A] \Rightarrow p, q \in \text{lan} A$ (gl. 0.5.0)
 (v) $H^+(A)$ je zaprta množica, t.j. zaprt stožec.
 (vi) Če je B netrivialna podalgebra asociativne algebre A , je $H^+(B) = B \cap H^+(A)$.

Dokaz: (i), (ii), (iii): Sledi neposredno iz 2.1.3(ii), 2.1.4.4 in 5.

(iv) Ker sta $p, q \in H^+(A)$, sta po 2.1.4.2(ii) operatorja

$T_p, T_q \in H^+(\mathcal{B}(A))$, kjer je $\mathcal{B}(A)$ asociativna, kompleksna, enotska, normirana algebra vseh linearnih omejenih operatorjev $T: A \rightarrow A$. Ker je $(p+q) \in \text{lan} A$, je $T_p + T_q = T_{p+q} = 0 \in \mathcal{B}(A)$. Zato po /13, Izrek 10.2(iv)/ sledi $T_p = T_q = 0 \in \mathcal{B}(A)$, t.j. $px = qx = 0$ za vsak $x \in A$.

(v) Po 7.2, 6.4(ii) in 4.3(iii) je $H^+(A) = -D(A) \cap H(A)$ zaprta množica v prostoru $(A, \|\cdot\|)$.

(vi) Sledi iz 7.2, 4.3(iv) in 6.4(iii).

7.6 IZREK (lastnosti levo pozitivnih elementov) Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ asociativna kompleksna normirana algebra. Potem velja:

$$(i)^+ \quad p \in H^+(A) \Rightarrow r(p) = v(p) = \sup_{x \in S} \|px\| = \sup V(A, p)$$

$$(ii)^+ \quad p, q \in H^+(A) \Rightarrow r(p+q) = v(p+q) = \sup_{x \in S} \|(p+q)x\| \geq \\ \geq \max\{r(p), r(q)\} = \max\{v(p), v(q)\} = \sup_{x \in S} (\max\{\|px\|, \|qx\|\}) \quad (\text{gl. 6.11(vi)})$$

$$(ii') \quad [p, q \in H^+(A), pq = qp = 0] \Rightarrow v(p+q) = \max\{v(p), v(q)\}$$

$$(iii) \quad h, h^2 \in H(A) \Rightarrow h^2 \in H^+(A) \quad \text{in} \quad v(h^2) = (v(h))^2$$

$$(iv) \quad [n \in \mathbb{N}, p \in H^+(A), p^n \in H(A)] \Rightarrow [p^n \in H^+(A), \overline{V(A, p^n)} = \\ = [\overline{V(A, p)}]^n := \{\lambda^n : \lambda \in \overline{V(A, p)}\}, v(p^n) = (v(p))^n]$$

$$(v) \quad [a, b \in A, ab \in H^+(A), ba \in H(A)] \Rightarrow ba \in H^+(A).$$

(vi) Če je $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra in $p \in H^+(A)$, velja:

$$(a) \quad \mathcal{G}(A, p) \subset \{0\} \cup \overline{V(A, p)} \quad \text{in} \quad \overline{V(A, p)} \subset \text{co } \mathcal{G}(A, p) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(b) \quad A \text{ ima enoto ali pa je brez leve enote} \Rightarrow \overline{V(A, p)} = \\ = \text{co } \mathcal{G}(A, p).$$

$$(c) \quad r(p) = \max \mathcal{G}(A, p) = \sup V(A, p) = \ln \sup_{x \in S} \|e^p x\|.$$

Opomba: Iz dokaza je razvidno, da veljata točki (i) in (ii) - brez spektralnega radija $r(p)$ - tudi v primeru neasociativne algebre A !

Dokaz: (i) Sledi iz 7.1 in 6.7(iv).

(ii) Ker sta $p, q \in H^+(A)$, sta po 2.1.4.2(ii) operatorja

$$T_p, T_q \in H^+(\mathcal{B}(A)) \quad (T_p x := px, T_q x := qx \text{ za vsak } x \in A),$$

kjer je $\mathcal{B}(A)$ asociativna kompleksna enotska normirana algebra vseh linearnih omejenih operatorjev $T: A \rightarrow A$. To zaradi

/13, Izrek 10.2(viii) in (ix)/ pomeni $\|T_p + T_q\| \geq \max\{v(T_p), v(T_q)\}$. To po definiciji norme operatorja $T \in \mathcal{B}(A)$, po definiciji 3.1(ii)

$$\text{in po 2.1.4.2(ii) pomeni } \sup_{x \in S} \|(p+q)x\| = \|T_{p+q}\| = \|T_p + T_q\| \geq \\ \geq \max\{v(p), v(q)\}, \text{ kar zaradi 7.5(ii) in 7.6(i) dokazuje trditev.}$$

[†] Trditev s križcem, kjer spektralni radij $r(\cdot)$ nadomestimo z numeričnim radijem $v(\cdot)$, velja tudi za neasociativne algebre (gl. 2.1.4.2(ii)) !

(ii') Točka 6.11(vi).

(iii) Ker sta $h, h^2 \in H(A)$, sta po 7.3(i) $\hat{h}, \hat{h}^2 = (h^2)^\wedge \in H(\hat{A}_e)$ in je zato po /13, Izrek 10.2(x)/ tudi $(h^2)^\wedge = \hat{h}^2 \in H^+(\hat{A}_e)$, kar po 7.3(i) pomeni $h^2 \in H^+(A)$. To zaradi (i) in 3.2(iii) pomeni $v(h^2) = r(h^2) = (r(h))^2 = (v(h))^2$.

(iv) Analogno kot pri dokazu točke (iii) sta $\hat{p}, \hat{p}^n \in H(\hat{A}_e)$, kar po /13, Izrek 10.2(xi)/ pomeni $(p^n)^\wedge = (\hat{p})^n \in H^+(\hat{A}_e)$, $v(\hat{A}_e, \hat{p}^n) = (v(\hat{A}_e, \hat{p}))^n$ in $\|(p^n)^\wedge\| = \|\hat{p}^n\| = \|\hat{p}\|^n$. To zaradi 7.3(i), 2.3.2, 2.1.4.3(n. zaklad je povezana množica) in po 0.5.6.1 pomeni $p^n \in H^+(A) \dots (1)$, $\overline{V(A, p^n)} = (\overline{V(A, p)})^n \dots (2)$ in $\sup_{x \in S} \|p^n x\| = (\sup_{x \in S} \|p x\|)^n \dots (3)$. Iz (1), (3) in točke (i) sledi $v(p^n) = (v(p))^n \dots (4)$. Trditev (iv) dokazujejo točke (1), (2) in (4).

(v) Zaradi 7.3(i) in 6.4(iv) je $\hat{a}\hat{b} = (ab)^\wedge \in H^+(\hat{A}_e)$ in $\hat{b}\hat{a} = (ba)^\wedge \in H(\hat{A}_e)$, kar po /13, Izrek 10.2(xii)/ pomeni $(ba)^\wedge = \hat{b}\hat{a} \in H^+(\hat{A}_e)$ in je zato po 7.3(i) tudi $ba \in H^+(A)$.

(vi)(a) Sledi iz definicije 7.1 in iz 6.7(xii).

(b) Sledi iz 6.7(xiii).

(c) Zaradi (a) sta $V(p), \mathcal{G}(p) \subset R^+ \cup \{0\}$ in je zato $v(p) = \sup V(p)$ in po 3.2(vii) tudi $r(p) = \max \mathcal{G}(p)$. To zaradi (i) in 6.7(xv) dokazuje (c).

8. PROJEKTORJI KOMPLEKSNE ASOCIATIVNE NORMIRANE ALGEBRE

V tem odstavku je $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna kompleksna asociativna normirana algebra z enoto ali brez nje.

8.1 DEFINICIJA Element $p \in A$ imenujemo levi oz. desni projektor algebre A , če je $p^2 = p \in H(A) \setminus \{0\}$ oz. $p^2 = p \in H_d(A) \setminus \{0\}$.

Množico vseh levih oz. desnih projektorjev algebre A označimo s $P(A)$ oz. s $P_d(A)$. Po 2.1.4.6 je očitno $P_d(A) = P(A^*)$.

8.2 Opomba Eksistira kompleksna asociativna B-algebra A brez enote /3, Opomba 8.(5) na str. 77/, da je $H(A) = \{0\}$ in zato $P(A) = \emptyset$.

8.3 Trditev Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, velja zaradi 0.5.6 in 2.3.2 pri formalni adjunkciji enote (gl. 0.5.4 in 0.5.5) za vsak $p \in A$ ekvivalenca: $p \in P(A) \Leftrightarrow \hat{p} \in P(\hat{A}_e) \Leftrightarrow \bar{p} \in P(\bar{A}_e)$.

8.4 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna normirana algebra (z enoto ali brez nje). Potem velja:

(i) $P(A) \subset H^+(A) \setminus \text{lan}A$ (gl. 0.5.0)

(ii) $p \in P(A) \Rightarrow r(p) = v(p) = \sup_{x \in S} \|px\| = 1$

(iii) $p, q, pq \in P(A) \Rightarrow (pq - qp) \in \text{lan}A$ (gl. 0.5.0)

(iv) $[\{h^2: h \in H^+(A)\} \subset H(A), p, q \in P(A), pq \neq 0, (pq - qp) \in \text{lan}A]^+ \Rightarrow pq \in P(A)$.

Opomba: Gl. naprej 9.6(v) !

Dokaz: (i) Sledi iz 7.6(iii), če upoštevamo implikacijo: $a^2 = a \Rightarrow (a \in \text{lan}A \Leftrightarrow a = 0)$.

(ii) Ker je zaradi (i) $p \in H^+(A) \setminus \text{lan}A$, je po 7.6(i) $r(p) = v(p) = \sup_{x \in S} \|px\| \neq 0 \dots (1)$. Ker je $p^2 = p$,

je po 3.2(iii) $r(p) = r(p^2) = (r(p))^2$ in zato po (1) $r(p) = 1 \dots \dots (2)$. Točki (1) in (2) dokazujeta (ii).

$^+ \{h^2: h \in H^+(A)\} \subset H(A) \Leftrightarrow \{h^2: h \in H^+(A)\} \subset N(A) \Leftrightarrow \{h^2: h \in H^+(A)\} \subset H^+(A)$,
gl. 7.2, 9.3(i) in 9.6(vi)

(iii) Po predpostavki je zaradi 8.3 (gl. 0.5) $\hat{p}, \hat{q}, \hat{p}\hat{q} = (pq)^{\wedge}e \in P(\hat{A}_e)$ in zato po /13, Trditvev 10.4(ii)/ $\hat{p}\hat{q} = \hat{q}\hat{p}$, t.j. $(pq-qp)^{\wedge} = 0$, t.j. $(pq-qp) \in \text{lan}A$.

(iv) Ker je po predpostavki $n := (pq-qp) \in \text{lan}A$, je $pq = qp+n$, kjer je $nx = 0$ za vsak $x \in A$... (3). Zato je $(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq - n$, kar zaradi 7.5(ii), 6.4(i) in 6.4(ii) po predpostavki trditve 8.4(iv) pomeni $pq = \frac{1}{2}[(p+q)^2 - (p^2 + q^2) + n] \in \frac{1}{2}[H(A) - H(A) + H(A)] \subset H(A)$... (4). Zaradi (3) je tudi $(pq)^2 = (qp+n)(pq) = qp^2q + n(pq) = qpq + 0 = (qp)q = (pq-n)q = pq^2 - nq = pq - 0 = pq$... (5). Točki (4) in (5) dokazujeta implikacijo 8.4(iv).

9. NORMALNI ELEMENTI ASOCIATIVNE, KOMPLEKSNE NORMIRANE ALGEBRE

V tem odstavku je $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna, kompleksna, asociativna normirana algebra z enoto ali brez nje.

9.1 DEFINICIJA Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna normirana algebra.

Element $a \in A$ imenujemo levo (desno) normalen, če eksistira $h, k \in H(A)$ (oz. $h, k \in H_d(A)$), da je $a = h + ik$ in $(hk - kh) \in \text{lan} A$ (oz. $(hk - kh) \in \text{lan} A^* := \text{ran} A = \text{desni anihilator algebre } A$) (gl. 0.5.0). Množico vseh levo (oz. desno) normalnih elementov algebre A označimo z $N(A)$ (oz. $N_d(A)$). Po 2.1.4.6 je očitno $N_d(A) = N(A^*)$.

Takoimenovani realna komponenta h in imaginarna komponenta k levo (desno) normalnega elementa a algebre A v splošnem nista povsem enolično določeni, saj velja zaradi 6.4(v) implikacija: $[h + ik = h' + ik'; h, h', k, k' \in H(A)] \Rightarrow (h - h'), (k - k') \in \text{lan} A$.

9.2 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna normirana algebra z enoto ali brez nje. Potem velja pri formalni adjunkciji enote (gl. 0.5.4 in 0.5.5) naslednje :

(i) $a \in N(A) \Rightarrow \hat{a} \in N(\hat{A}_e) \Rightarrow \bar{a} \in N(\bar{A}_e)$

(ii) Če je izpolnjen eden izmed pogojev (a) in (b):

(a) A ima enoto (dvostransko)

(b) A je brez leve enote in je pri tem levi anihilator algebre A vsebovan v desnem anihilatorju algebre A (t.j. algebra A ima naslednjo lastnost: Če je b tak element algebre A , da je $bx = 0$ za vsak $x \in A$, je tudi $xb = 0$ za vsak $x \in A$),

potem velja za vsak $a \in A$ tudi obratna implikacija : $\hat{a} \in N(\hat{A}_e) \Rightarrow a \in N(A)$.

Dokaz: (i) Sledi iz 0.5.6 in 2.3.2 .

(ii) Če je $\hat{a} \in N(\hat{A}_e)$, eksistirata $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in H(\hat{A}_e)$... (1), da je $\hat{a} = \hat{\xi} + i\hat{\eta}$... (2) in $\hat{\xi}\hat{\eta} = \hat{\eta}\hat{\xi}$... (3). Ker sta $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in \hat{A}_e$, je $\hat{\xi} = (\lambda_1, a_1)^\wedge = \lambda_1 \hat{e} + \hat{a}_1$ in $\hat{\eta} = (\lambda_2, a_2)^\wedge = \lambda_2 \hat{e} + \hat{a}_2$, kjer sta $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ in $a_{1,2} \in A$... (4).

(a) Če ima A enoto e_0 , sledi iz (1), (4) in 6.4(vi'), da sta

$(\lambda_{1,2} e_0 + a_{1,2}) \in H(A)$... (5). Zaradi (2) in (4) je

$\hat{a} = (\lambda_1 + i\lambda_2) \hat{e} + (a_1 + ia_2)^\wedge$, t.j. $[\hat{a} - (a_1 + ia_2)^\wedge - (\lambda_1 + i\lambda_2) e]^\wedge = 0$, kar po 0.5.6.1 pomeni $\sup_{x \in S} \|[a - (a_1 + ia_2)]x -$

$-(\lambda_1 + i\lambda_2)x\| = 0$, t.j. $[a - (a_1 + ia_2)]x = (\lambda_1 + i\lambda_2)x$ za vsak $x \in A$. Zato velja (za $x = e_0$) enakost $a = (a_1 + \lambda_1 e_0) + i(a_2 + \lambda_2 e_0) = h + ik$, kjer sta po (5) $h := (\lambda_1 e_0 + a_1) \in H(A)$ in $k := (\lambda_2 e_0 + a_2) \in H(A)$... (6). Iz (3) in (4) sledi $\hat{a}_1 \hat{a}_2 = \hat{a}_2 \hat{a}_1$, t.j. $(a_1 a_2 - a_2 a_1)^\wedge = 0$, kar po 0.5.6.1 pomeni $(a_1 a_2 - a_2 a_1) \in \text{lan} A = \{0\}$. To zaradi (6) pomeni $hk = kh$... (7). Zaradi (6) in (7) je $a \in N(A)$.

(b) Če je A brez leve enote, eksistirata zaradi (1) in 6.4(vi) taka $t_{1,2} \in \mathbb{R}$ in $h_{1,2} \in H(A)$, da je $\hat{\xi} = t_1 \hat{e} + \hat{h}_1$ ter $\hat{\eta} = t_2 \hat{e} + \hat{h}_2$... (8). Iz (2) in (8) sledi $\hat{a} = (t_1 + it_2)\hat{e} + (\hat{h}_1 + i\hat{h}_2)$, t.j. $[\hat{a} - (h_1 + ih_2)^\wedge - (t_1 + it_2)e]^\wedge = 0$, kar zaradi 0.5.6.1 pomeni $[a - (h_1 + ih_2)]x = (t_1 + it_2)x$ za vsak $x \in A$... (9). Ker A nima leve enote, je po (9) $t_1 + it_2 = 0$, t.j. $t_1 = t_2 = 0$. Torej je zaradi (9) $h_0 := [a - (h_1 + ih_2)] \in \text{lan} A$... (10), kar pomeni $a = h + ik$, kjer sta $h := (h_1 + h_0) \in H(A)$ in $k := h_2 \in H(A)$... (11). Iz (3) in (8) tudi sledi $\hat{h}_1 \hat{h}_2 = \hat{h}_2 \hat{h}_1$, torej zaradi 0.5.6.1 $(h_1 h_2 - h_2 h_1) \in \text{lan} A$... (12). Ker je po predpostavki levi anihilator algebre A vsebovan v desnem anihilatorju algebre A , je zaradi (10), (11) in (12) $(hk - kh) \in \text{lan} A$... (13). Točki (11) in (13) potrjujeta našo implikacijo.

9.3 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna normirana algebra, z enoto ali brez nje (ni treba, da je A asociativna). Potem velja:

- (i) $H(A) \subset N(A)$ in $CN(A) \subset N(A)$
- (ii) Če je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra in če je preslikava $a \mapsto |a| := \sup_{x \in S} \|ax\|$ norma, ki je ekvivalentna prvotni normi $\|\cdot\|$, potem je množica $N(A)$ zaprta v $(A, \|\cdot\|)$.
- (iii) Če je B netrivialna podalgebra asociativne algebre A (gl. 0.1.4) in je $\text{lan} B = \text{lan} A$ (gl. 0.5.0), je $N(B) \subset B \cap N(A)$.

Dokaz: (i) Prvo inkluzijo dokazuje enakost $h = h + i0$, druga pa sledi iz 6.4(i) in 6.4(ii).

(ii) Vzemimo poljubno konvergentno zaporedje $a_n = (h_n + ik_n) \in N(A)$ ($h_n, k_n \in H(A)$), $(h_n k_n - k_n h_n) \in \text{lan} A$) in naj bo $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$... (1). Zato je $a_m - a_n = (h_m - h_n) + i(k_m - k_n)$, kjer so po 6.4(ii) $(h_m - h_n)$, $(k_m - k_n) \in H(A)$, kar pomeni zaradi 6.7(iv) in 6.11(v) oceno

$$\max\left\{\sup_{x \in S} \|(h_m - h_n)x\|, \sup_{x \in S} \|(k_m - k_n)x\|\right\} \leq \sup_{x \in S} \|(a_m - a_n)x\| \leq \\ \leq \|a_m - a_n\| \dots (2). \text{ Ker je po predpostavki preslikava } a \mapsto \sup_{x \in S} \|ax\|$$

norma, ki je ekvivalentna prvotni normi $\|\cdot\|$, sta zaradi (1) in (2) zaporedji (h_n) in (k_n) Cauchy-jevi v B-algebri $(A, \|\cdot\|)$. Zato zaradi (1) in 6.4(ii) $h_n \mapsto h \in H(A)$ in $k_n \mapsto k \in H(A)$ za $n \rightarrow \infty$, kar zaradi (1) pomeni $a = (h + ik) \in N(A)$.

(iii) Očitno zaradi 6.4(iii).

9.4 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna, asociativna, normirana algebra z enoto ali brez nje in $a = (h + ik) \in N(A)$

$(h, k \in H(A), (hk - kh) \in \text{lan}A)$. Če so pri tem $h^m, k^n, h^m k^n \in H(A)$ za vsak $m, n \in \mathbb{N}$ (element a lahko tedaj imenujemo "čisto levo normalen"), je $r(a) = v(a) = \sup_{x \in S} \|ax\|$.

Dokaz: V /15, Korolar 3/ je dokazana ta trditev za kompleksno asociativno enotsko B-algebro ... (1). Po predpostavki trditve je zaradi 0.5.6, 9.2(i) in 6.4(iv) $\bar{a} = \bar{h} + i\bar{k}$, $\bar{h}\bar{k} = \bar{k}\bar{h}$ in $(\bar{h})^m, (\bar{k})^n, (\bar{h})^m(\bar{k})^n \in H(\bar{A}_e)$ za vsak $m, n \in \mathbb{N}$, kjer je $x \mapsto \bar{x}$ formalna vložitev algebre $(A, \|\cdot\|)$ v enotsko B-algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.5). To zaradi (1) pomeni $r(\bar{a}) = \|\bar{a}\|$... (2). Po 0.5.6.1 je $\|\bar{a}\| = \sup_{x \in S} \|ax\|$ in po 3.2(xi) je $r(\bar{a}) = r(a)$, kar zaradi (2), 3.2(vii') in 3.2(x) dokazuje našo trditev.

9.5 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna, asociativna, normirana algebra z enoto ali brez nje, $a = (h + ik) \in N(A)$

$(h, k \in H(A), (hk - kh) \in \text{lan}A)$, $b \in A$ in $(ab - ba) \in \text{lan}A$. Potem sta tudi $(bh - hb), (bk - kb) \in \text{lan}A$.

Dokaz: Po /1, Teorem 1/ velja trditev za kompleksno enotsko B-algebro ... (1). Pri formalni vložitvi $x \mapsto \bar{x}$ algebre $(A, \|\cdot\|)$ v enotsko B-algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.5) je $\bar{a} = \bar{h} + i\bar{k}$, kjer sta po 6.4(iv) $\bar{h}, \bar{k} \in H(\bar{A}_e)$ in po 0.5.6.1 $\bar{h}\bar{k} = \bar{k}\bar{h}$ ter $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$. To po (1) pomeni $\bar{b}\bar{h} = \bar{h}\bar{b}$ in $\bar{b}\bar{k} = \bar{k}\bar{b}$. Torej je $(bh - hb)^- = 0$, t.j. po 0.5.6.1 $(bh - hb) \in \text{lan}A$. Analogno je tudi $(bk - kb) \in \text{lan}A$.

9.6 IZREK (lastnosti levo normalnih elementov) Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna asociativna normirana algebra z enoto ali brez nje in $a = (h + ik) \in N(A)$ $(h, k \in H(A), (hk - kh) \in \text{lan}A)$.

Potem velja:

- (i)[†] $\text{Re}V(A, a) = V(A, h)$
- (ii) $v(a) = r(a)$
- (iii) $\max\{v(h), v(k)\} \leq v(a) \leq [(v(h))^2 + (v(k))^2]^{1/2}$
- (iv) $\sup_{x \in S} \|ax\| \leq 2v(a)$ (gl. 3.17(i))
- (v) $[n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}, p_1, \dots, p_n \in P(A), p_j p_k \in \text{lan}A \text{ za}$
 $\text{vsak } j \neq k] \Rightarrow \sup_{x \in S} \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j x \right\| = v\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j p_j\right) = r\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j p_j\right) =$
 $= \max\{|\lambda_j| : j = 1, \dots, n\}$
- (vi) $[h \in H(A), h^2 \in N(A)] \Rightarrow h^2 \in H^+(A)$

Če je nadalje $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra, velja še:

- (vii) $\mathcal{G}(A, a) \subset \{0\} \cup \overline{\text{co}V(A, a)}$ in $\overline{\text{co}V(A, a)} \subset \text{co}\mathcal{G}(A, a)$
- (viii) Če je izpolnjen vsaj eden izmed naslednjih treh pogojev:
 - (a) A ima enoto (dvostransko)
 - (b) A je brez leve enote
 - (c) A je brez enote (dvostranske) in je a tak levo-normalen element, da je izpolnjen vsaj eden izmed naslednjih treh pogojev:
 - (α) $\mathcal{G}(A, a) = \{0\}$
 - (β) 0 ni izolirana točka spektra $\mathcal{G}(A, a)$
 - (γ) $\mathcal{G}(A, \lambda a) \cap (i\mathbb{R} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$,
 potem je $\overline{\text{co}V(A, a)} = \text{co}\mathcal{G}(A, a)$.
- (ix) $\mathcal{G}(A, h) \setminus \{0\} \subset \overline{V(A, h)} \subset \text{coRe}\mathcal{G}(A, a) \subset \text{co}[\{0\} \cup \overline{V(A, h)}] \subset$
 $\subset \text{co}[\mathcal{G}(A, h) \cup \{0\}]$
- (x) Če je izpolnjen vsaj eden izmed pogojev (a) in (b) iz točke (viii), je $\text{coRe}\mathcal{G}(A, a) = \overline{V(A, h)} = \text{co}\mathcal{G}(A, h)$
- (x') Če je izpolnjen pogoj (c) iz točke (viii), je $\text{coRe}\mathcal{G}(A, a) = \overline{V(A, h)} \subset \text{co}\mathcal{G}(A, h)$
- (xi) $hk = kh \Rightarrow \mathcal{G}(A, a) \subset \mathcal{G}(A, h) + i\mathcal{G}(A, k)$
- (xii) $\sup_{x \in S} \|e^{ta}x\| = \sup_{x \in S} \|e^{th}x\| = e^{t \sup V(A, h)} = e^{t \sup \text{Re}V(A, a)}$
 za vsak $t \in \mathbb{R}^+$
- (xii') $\sup_{x \in S} \|e^{-ta}x\| = \sup_{x \in S} \|e^{-th}x\| = e^{-t \inf V(A, h)} =$
 $= e^{-t \inf \text{Re}V(A, a)}$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$
- (xiii) Če je izpolnjen vsaj eden izmed pogojev (a) in (c) iz točke (viii), je $\sup_{x \in S} \|e^{\lambda a}x\| = e^{\max \text{Re}[\lambda \mathcal{G}(A, a)]} =$

[†]Trditev velja tudi za neasociativno algebro (gl. 2.1.4.2(ii)) !

$$= e^{\sup \operatorname{Re} [\lambda V(A, a)]} \quad \text{za vsak } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dokaz: (i) Trditev 6.6(ii).

(vii), (viii), (ix), (x): I. Če ima A enoto e , algebro $(A, \|\cdot\|)$ renormiramo do enotske B -algebre $(A, \|\cdot\|_1)$, $\|a\|_1 = \sup_{x \in S} \|ax\|$ za vsak $a \in A$ ($(1/\|e\|)\|a\| \leq \|a\|_1 \leq \|a\|$ za vsak $a \in A$).

Normirano algebro $(A, \|\cdot\|_1)$ kratko označimo z A_1 . Po 2.3.1 je $H(A_1) = H(A)$ in zato $N(A_1) = N(A)$. Ker je $a \in N(A)$, je zato tudi $a \in N(A_1)$. Po /3, Teorem 2.5.14/ je $V(A_1, a) = \operatorname{co} \mathcal{G}(A_1, a) \dots (1)$ in po /13, Trditev 11.5/ je $\operatorname{Reco} \mathcal{G}(A_1, a) = \operatorname{co} \mathcal{G}(A_1, h) = V(A_1, h) \dots (2)$. Ker se pri renormiranju spekter očitno ne spremeni, je zaradi (1), (2) in 2.3.1 $\overline{\operatorname{co}}V(A, a) = \operatorname{co} \mathcal{G}(A, a) \dots (3)$ ter $\operatorname{Reco} \mathcal{G}(A, a) = \operatorname{co} \mathcal{G}(A, h) = \overline{\operatorname{co}}V(A, h) \dots (4)$.

II. Če je A brez enote, B -algebro $(A, \|\cdot\|)$ homomorfno vložimo $(x \mapsto \bar{x})$ v enotsko B -algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.5). Ker je $a \in N(A)$, je po 9.2(i) in 0.5.6 $\bar{a} = (\bar{h} + i\bar{k}) \in N(\bar{A}_e)$, kjer sta $\bar{h}, \bar{k} \in H(\bar{A}_e)$. Po /3, Teorem 2.5.14/ je zato $V(\bar{A}_e, \bar{a}) = \operatorname{co} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) \dots (5)$ ter po /13, Trditev 11.5/ $\operatorname{Reco} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \operatorname{co} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{h}) = V(\bar{A}_e, \bar{h}) \dots (6)$.

Iz (5), 2.3.2 in 1.19.1 sledi $\overline{\operatorname{co}}V(A, a) = V(\bar{A}_e, \bar{a}) \stackrel{(5)}{=} \operatorname{co} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) \subset \operatorname{co} \mathcal{G}(A, a)$, kar zaradi 2.3.11 in točke (3) dokazuje trditev (vii).

(viii)(b) Če je A brez leve enote, je po 2.3.11.2 $\mathcal{G}(A, a) \subset \overline{\operatorname{co}}V(A, a) \dots (7)$. Iz (7), 2.3.2, (5) in 1.19.1 sledi $\operatorname{co} \mathcal{G}(A, a) \subset \overline{\operatorname{co}}V(A, a) = V(\bar{A}_e, \bar{a}) = \operatorname{co} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) \subset \operatorname{co} \mathcal{G}(A, a)$, t.j. $\operatorname{co} \mathcal{G}(A, a) = \overline{\operatorname{co}}V(A, a) \dots (8)$.

(viii)(c) Če je izpolnjen pogoj (c) iz točke (viii), je po 1.19.2 $\operatorname{co} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = \operatorname{co} \mathcal{G}(A, a)$ in slede zato po (5) in 2.3.2 enakosti $\operatorname{co} \mathcal{G}(A, a) = \operatorname{co} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) = V(\bar{A}_e, \bar{a}) = \overline{\operatorname{co}}V(A, a) \dots (9)$.

Točke (3), (8) in (9) dokazujejo trditev (viii).

(ix) Če je A brez enote, veljajo zaradi 1.19.1, (6), 2.3.2, 2.3.11, 9.6(i) in 6.7(xii) inkluzije $\mathcal{G}(A, h) \setminus \{0\} \stackrel{1.19.1}{\subset} \operatorname{co} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{h}) \stackrel{(6)}{=} V(\bar{A}_e, \bar{h}) = \overline{V(A, h)}$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Reco} \mathcal{G}(\bar{A}_e, \bar{a}) \stackrel{1.19.1}{\subset} \operatorname{Reco} \mathcal{G}(A, a) = \operatorname{coRe} \mathcal{G}(A, a) \stackrel{2.3.7}{\subset} \operatorname{coRe} [\{0\} \cup \overline{\operatorname{co}}V(A, a)] = \operatorname{co} [\{0\} \cup \overline{\operatorname{co}}\operatorname{Re} V(A, a)] = \\ &\stackrel{9.6(i)}{=} \operatorname{co} [\{0\} \cup \overline{V(A, h)}] \stackrel{6.7(xii)}{\subset} \operatorname{co} [\{0\} \cup \operatorname{co} \mathcal{G}(A, h)] = \\ &= \operatorname{co} [\operatorname{co} \mathcal{G}(A, h)] = \operatorname{co} \mathcal{G}(A, h), \text{ saj je} \end{aligned}$$

$0 \in \mathcal{G}(A, h)$, ker je po predpostavki A brez enote. To zaradi (4) dokazuje trditev (ix).

(x), (x') Če je izpolnjen eden izmed pogojev (a), (b) in (c) iz točke (viii), je po (viii) $\overline{\text{coV}}(A, a) = \text{co } \mathcal{G}(A, a)$ in veljajo zato po točki (i) in po 2.1.4.3(povezanost) enakosti: $\text{coRe } \mathcal{G}(A, a) = \text{Reco } \mathcal{G}(A, a) = \text{Re } \overline{\text{coV}}(A, a) = \overline{\text{coReV}}(A, a) \stackrel{(i)}{=} \overline{\text{coV}}(A, h) = \overline{V(A, h)}$... **(10)**. Če velja vsaj eden izmed pogojev (a) in (b) iz točke (viii), je po 6.7(xiii) $\overline{V(A, h)} = \text{co } \mathcal{G}(A, h)$... **(11)**, sicer pa je po 6.7(xii) $\overline{V(A, h)} \subset \text{co } \mathcal{G}(A, h)$... **(12)**. Točki (10) in (11) dokazujeta trditve (x), trditev (x') pa sledi iz (10) in (12).

(xi) Sledi iz 1.8 .

(xii), (xii') **I.** Naj ima A enoto. Po (viii)(a) je $\text{coV}(A, \pm a) = \text{co } \mathcal{G}(A, \pm a)$, kar zaradi 2.3.16.3, (i) in 6.7(xv) pomeni enakosti: $\sup_{x \in S} \|e^{t(\pm a)} x\| = e^{\sup \text{Re}[tV(A, \pm a)]} = e^{t \sup \text{ReV}(A, \pm a)} \stackrel{(i)}{=} e^{t \sup V(A, \pm h)} \stackrel{6.7(xv)}{=} \sup_{x \in S} \|e^{t(\pm h)} x\|$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$... **(13)**. Ker velja

za vsako neprazno omejeno podmnožico V realnih števil enakost $\sup(-V) = -\inf V$, točka (13) potrjuje trditvi (xii) in (xii').

II. Če je A brez enote, vložimo $(x \mapsto \bar{x})$ B-algebro $(A, \|\cdot\|)$ v enotsko B-algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.5). Iz (5) in /3, Teorem 3.4 in 3.8/ slede enakosti $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{t(\pm \bar{a})}\|^{1/t} = \sup \text{ReV}(\bar{A}_e, \pm \bar{a}) = \sup \text{Reco } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \pm \bar{a}) = \sup \text{Re } \mathcal{G}(\bar{A}_e, \pm \bar{a}) = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \ln \|e^{t(\pm \bar{a})}\|^{1/t}$, kar pomeni $\ln \|e^{\pm t \bar{a}}\|^{1/t} = \text{konst.} = \sup \text{ReV}(\bar{A}_e, \pm \bar{a})$ za vsak $t \in \mathbb{R}^+$. To zaradi 0.5.7(ii), 2.3.2, (i) in 6.7(xv) pomeni $\ln \sup_{x \in S} \|e^{\pm t a} x\|^{1/t} = \sup \text{Re } \overline{\text{coV}}(A, \pm a) = \sup \text{ReV}(A, \pm a) \stackrel{(i)}{=} \sup V(A, \pm h) \stackrel{6.7(xv)}{=} \ln \sup_{x \in S} \|e^{\pm t h} x\|^{1/t}$... **(14)**.

Ker velja za vsako neprazno omejeno podmnožico V realnih števil enakost $\sup(-V) = -\inf V$, točki (13) in (14) dokazujeta trditvi (xii) in (xii').

(xiii) Sledi iz (viii), 2.3.16.3 in 2.3.16.4 .

(ii) Če je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra, sledi trditev iz (vii) in 3.2(vii) ... **(15)**. Ker je vložitev nepolne normirane algebre v njeno izpopolnitev izometrični homomorfizem, sledi iz (15) in 2.2.9, da velja (ii) tudi v primeru, ko $(A, \|\cdot\|)$ ni poln prostor.

(iii) Zaradi 2.2.9 zadošča dokazati trditev za primer, da je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra. Vzemimo torej, da je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra.

I. Če ima A enoto, algebro $(A, \|\cdot\|)$ renormiramo do enotske

B-algebre $(A, \|\cdot\|_1)$ (gl. I v dokazu točk (vii) - (x)). Zaradi 2.3.1 se pri omenjenem renormiranju numerični radij ne spremeni, kar po /13, Izrek 11.9(iii) in Izrek 9.5(v)/ potrjuje točko (iii).

II. Če je B-algebra $(A, \|\cdot\|)$ brez enote, jo homomorfno vložimo $(x \mapsto \bar{x})$ v enotsko B-algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.5).

Ker je po 9.2(i) $\bar{a} = (\bar{h} + i\bar{k}) \in N(\bar{A}_e)$, je po /13, Izrek 11.9(iii)/ $r(\bar{a}) \leq (\|\bar{h}\|^2 + \|\bar{k}\|^2)^{1/2} \dots (16)$. Po 3.2(xi) je $r(\bar{a}) = r(a) \dots$

(17) in zaradi 0.5.6.1 ter 6.7(iv) je $\|\bar{h}\| = \sup_{x \in S} \|hx\| = v(h) =$

$= r(h)$ in analogno $\|\bar{k}\| = v(k) = r(k) \dots (18)$. Zaradi 6.11(v) točke (16), (17) in (18) potrjujejo trditev (iii) tudi v primeru, da je A brez enote.

(iv) Trditev 6.11(v).

(v) Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, algebro $(A, \|\cdot\|)$ formalno vložimo v enotsko B-algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.5).

Ker so $p_j p_k \in \text{lan} A$ za vsak $j \neq k$, so po 0.5.6.1 in po 8.3

$\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ (neničelni) paroma ortogonalni (disjunktni) projektorji asociativne, kompleksne, enotske B-algebre $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ in velja zato po /15, Korolar 4 - dokaz/ enakost:

$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{p}_j \right\| = r\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{p}_j \right) = \max\{|\lambda_j| : j = 1, \dots, n\} \dots (19)$. Ele-

ment $a := \sum_{j=1}^n \lambda_j p_j = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j p_j \right) + i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j p_j \right)$ ($\alpha_j = \text{Re} \lambda_j$,

$\beta_j = \text{Im} \lambda_j$) $\dots (20)$ je normalen (saj so po predpostavki

$p_j p_k \in \text{lan} A$ za vsak $j \neq k$) in je zato po (ii) $r(a) = v(a) \dots (21)$.

Po 3.2(xi) je $r(\bar{a}) = r(a) \dots (22)$ in po 0.5.6.1 je $\|\bar{a}\| =$

$= \sup_{x \in S} \|ax\| \dots (23)$. Zaradi (23), (20), (19) in (22) je $\sup_{x \in S} \|ax\| =$

$= \|\bar{a}\| = r(\bar{a}) = r(a) = \max\{|\lambda_j| : j = 1, \dots, n\}$. To zaradi (20) in (21) dokazuje našo trditev.

(vi) Ne glede na to ali ima A enoto ali ne, algebro $(A, \|\cdot\|)$

formalno vložimo v enotsko B-algebro $(\bar{A}_e, \|\cdot\|)$ (gl. 0.5.5).

Po 6.4(iv) je $\bar{h} \in H(\bar{A}_e)$ in po 0.5.6 ter 9.2(i) je $\bar{h}^2 = (h^2)^- \in$

$\in N(\bar{A}_e)$, kar zaradi /13, Posledica 11.7/ pomeni $(h^2)^- = \bar{h}^2 \in$

$\in H^+(\bar{A}_e)$. To zaradi 7.3(i) pomeni $h^2 \in H^+(A)$.

9.7 POSLEDICA Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ kompleksna, asociativna, normirana algebra z enoto ali brez nje, $h, k \in H(A)$ in $h^2, k^2 \in N(A)$.

Če je pri tem izpolnjena ena izmed zahtev (i) in (ii):

(i) $hk = 0 = kh$

(ii) $hk = 0$, $\text{lan}A = \{0\}$,

potem je $v(h \pm k) = r(h \pm k) = \max\{r(h), r(k)\} = \max\{v(h), v(k)\}$
in $v(h^2 + k^2) = r(h^2 + k^2) = (\max\{r(h), r(k)\})^2 = (\max\{v(h), v(k)\})^2$.

Dokaz: Po 9.6(vi) sta $h^2, k^2 \in H^+(A) \subset H(A) \dots (1)$. Iz zahteve (ii) sledi (i), saj je "tedaj" $h, k \in H(A)$, $hk = 0 \in H(A)$ in po (1) tudi $h^2, k^2 \in H(A)$, kar vse po 6.11(iii) pomeni $kh \in \text{lan}A = \{0\}$, t.j. $kh = 0$. Vzemimo torej, da velja (i).

Zaradi (i) je $h(\pm k) = (\pm k)h = 0$ in $h^2k^2 = k^2h^2 = 0$, kar po (1) in 6.11(vi) pomeni $v(h \pm k) = \max\{v(h), v(k)\}$ in $v(h^2 + k^2) = \max\{v(h^2), v(k^2)\} \dots (2)$. Iz (1), 6.7(iv) in 3.2(iii) sledi $v(h^2) = r(h^2) = (r(h))^2 = (v(h))^2$ in analogno $v(k^2) = (r(k))^2 = (v(k))^2 \dots (3)$. Zaradi (1) in 6.4(ii) so $(h \pm k), (h^2 + k^2) \in H(A)$, kar po 6.7(iv) pomeni enakosti $r(h \pm k) = v(h \pm k)$ in $r(h^2 + k^2) = v(h^2 + k^2) \dots (4)$. Trditve dokazujejo točke (2), (3) in (4).

9.8 Trditev Naj bosta $(A, \|\cdot\|)$ in $(B, \|\cdot\|)$ asociativni normirani algebri nad obsegom $\mathcal{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) z enoto ali brez nje in naj bo $\Phi: A \rightarrow B$ linearna omejena preslikava z normo $\|\Phi\| \leq 1$ in z lastnostjo, da je $\overline{\Phi(S(A))} \supset S(B)$, kjer sta $S(A)$ in $S(B)$ enotski sferi v $(A, \|\cdot\|)$ oz. $(B, \|\cdot\|)$. Potem je očitno $\|\Phi\| = 1$ in velja:

(i) $\Phi(D(A)) \subset D(B)$ in $\Phi(H'(A)) \subset H'(B)$ (gl. 4.1 in 5.1)

(ii) $\mathcal{F} = \mathbb{C} \Rightarrow \Phi(H(A)) \subset H(B)$ in $\Phi(H^+(A)) \subset H^+(B)$ (gl. 6.1 in 7.1)

(iii) Če je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ in Φ algebrski homomorfizem, je $\Phi(N(A)) \subset N(B)$ in če je pri tem Φ tudi injektiven, je $\Phi(P(A)) \subset P(B)$ (gl. 9.1 in 8.1).

Dokaz: Trditvi (i) in (ii) sledita neposredno iz 2.3.4 in trditev (iii) sledi neposredno iz (ii).

10. PROSTOR $J(A) = H(A) + iH(A)$

V tem odstavku je $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna kompleksna asociativna normirana algebra z enoto ali brez nje.

10.1 Trditev (i) Pri vložitvi $a \mapsto \hat{a}$ algebre A , ki je brez leve enote, v enotsko normirano algebro $(\hat{A}_e, \|\cdot\|)$ velja enakost $J(\hat{A}_e) = (J(A))^{\wedge} + \mathbb{C}\hat{e}$, kjer je vsota na desni direktna, če je $\text{lan}A = \{0\}$.

(ii) Če ima algebra A enoto in če algebro $(A, \|\cdot\|)$ renormiramo do enotske normirane algebre $(A, \|\cdot\|_1)$, ki jo kratko označimo z A_1 ($\|a\|_1 = \sup_{x \in S} \|ax\|$ za vsak $a \in A$), velja

enakost $J(A_1) = J(A)$.

(iii) Ne glede na to ali ima algebra A enoto ali ne, velja pri formalni vložitvi $x \mapsto \hat{x}$ oz. $x \mapsto \bar{x}$ algebre A v $\hat{A}_e$ oz. v $\bar{A}_e$ (gl. 0.5.4 oz. 0.5.5) za vsak $a \in A$ ekvivalenca: $a \in J(A) \Leftrightarrow \hat{a} \in J(\hat{A}_e) \Leftrightarrow \bar{a} \in J(\bar{A}_e)$.

Dokaz: **(i)** Po 6.4(vi) je $H(\hat{A}_e) = (H(A))^{\wedge} + \mathbb{R}\hat{e}$, kar zaradi 6.4(ii), 6.4(vi) in 0.5 dokazuje (i).

(ii) Sledi iz 2.3.1.

(iii) Sledi iz 6.4(iv).

10.2 TRDITEV[†] (i) $J(A)$ je kompleksen linearen prostor

(ii) Če je $(A, \|\cdot\|)$ B-algebra in je preslikava

$a \mapsto |a| := \sup_{x \in S} \|ax\|$ norma, ki je ekvivalentna

prvotni normi $\|\cdot\|$, je $(J(A), \|\cdot\|)$ Banachov prostor.

(iii) Naj bosta $h, k \in H(A)$, $a = h + ik$ in $a^* = h - ik$.

Potem je:

(a) $\sup_{x \in S} \|a^*x\| \leq 2v(a) \leq 2\sup_{x \in S} \|ax\|$ in

(b) $V(A, a^*) = (V(A, a))^* := \{\lambda^* : \lambda \in V(A, a)\}$, kjer pomeni $*$ konjugiranje kompleksnega števila (v enačbi na desni).

Dokaz: **(i)** Sledi iz 6.4(ii).

(ii) Dokažemo enako kot 9.3(ii).

(iii)(a) Zaradi 6.7(iv), 6.11(v) in 3.2(x) je

[†]Trditev velja tudi za neasociativno algebro (gl. 2.1.4.2(ii)) !

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S} \|a^* x\| &= \sup_{x \in S} \|(h - ik)x\| \leq \sup_{x \in S} \|hx\| + \sup_{x \in S} \|kx\| \stackrel{6.7(iv)}{=} v(h) + \\ &+ v(k) \stackrel{6.11(v)}{\leq} 2v(h + ik) = 2v(a) \leq 2 \sup_{x \in S} \|ax\|. \end{aligned}$$

(b) Ker sta $h, k \in H(A)$, sta $f(hx), f(kx) \in \mathbb{R}$ za vsak $x \in S$ in $f \in D(x)$, kar po 2.1.3(ii) pomeni $V(A, a^*) = \{f(a^*x) : x \in S, f \in D(x)\} = \{f(hx) - if(kx) : x \in S, f \in D(x)\} = \{(f(hx) + if(kx))^* : x \in S, f \in D(x)\} = \{(f(ax))^* : x \in S, f \in D(x)\} = (V(A, a))^*$.

10.3 Trditev Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra, B netrivialna podalgebra algebre A ($B \neq \{0\}$) in $B = H(B) + iH(B)$. Če eksistira nadalje taka konstanta $c \in \mathbb{R}^+$, da je $\sup_{x \in S(B)} \|hx\| \geq c\|h\|$ za vsak $h \in H(B)$...(*), potem je tudi $\bar{B} = H(\bar{B}) + iH(\bar{B})$ (zaprtja v prostoru $(A, \|\cdot\|)$); ta vsota je direktna, če je $\text{lan } \bar{B} = \{0\}$.

Dokaz: Po 6.4(iii) je $\overline{H(B)} \subset H(\bar{B})$...**(1)**. Vzemimo poljuben $b \in \bar{B}$. Potem eksistira zaporedje $b_n = (h_n + ik_n)$ iz B , ki konvergira proti b , kjer so $h_n, k_n \in H(B)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$...**(2)**. Ker je zaporedje b_n Cauchy-jevo, sta zaradi 6.4(ii), predpostavke (*), 6.7(iv) in 6.11(v) Cauchy-jevi tudi zaporedji $h_n, k_n \in H(B)$. Zato po (2) $h_n \rightarrow h \in \overline{H(B)}$ in $k_n \rightarrow k \in \overline{H(B)}$ za $n \rightarrow \infty$, kar zaradi (1) pomeni $b = (h + ik) \in \overline{H(B)} + i\overline{H(B)} \subset H(\bar{B}) + iH(\bar{B})$. Torej $\bar{B} \subset H(\bar{B}) + iH(\bar{B})$. Obratna inkluzija je očitna.

Če je $h + ik = h' + ik'$, kjer so $h, k, h', k' \in H(\bar{B})$, je po 6.4(ii) $h_0 := (h - h') \in H(\bar{B})$, $k_0 := (k' - k) \in H(\bar{B})$ in $h_0 = ik_0$. Po 6.4(v) je zato $h_0 \in \text{lan } \bar{B}$ in če je $\text{lan } \bar{B} = \{0\}$, to pomeni $h_0 = 0$ in zato tudi $k_0 = 0$.

10.4 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna, kompleksna, asociativna, normirana algebra brez leve enote ali pa $\underline{z}$ (dvostransko) enoto. Potem so ekvivalentne naslednje trditve:

- (i) $J(A)$ je podalgebra algebre A , t.j. $J(A)$ je za množenje zaprta množica
- (ii) Za vsak $h \in A$ velja implikacija: $h \in H(A) \Rightarrow h^2 \in J(A)$
- (iii) Za vsak $h \in A$ velja implikacija: $h \in H(A) \Rightarrow h^2 \in H(A)$

(iv) Za vsak $h, k \in A$ velja implikacija: $h, k \in H(A) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (hk + kh) \in H(A)$

Če velja ena izmed zgornjih štirih točk (i)-(iv), velja naslednje:

(v) $[h, k \in H(A), a = h + ik, a^* := h - ik, -a^*a \in H^+(A)] \Rightarrow$
 $\Rightarrow a \in \text{lan}A$ (gl. 0.5.0)

(vi) $[h, k \in H(A), a = h + ik, a^* := h - ik] \Rightarrow aa^*, a^*a \in H^+(A)$

(vii) $[h, k \in H(A), a = h + ik, a^* := h - ik, p \in H^+(A)] \Rightarrow$
 $\Rightarrow apa^* \in H^+(A)$.

Dokaz: I. Naj bo A brez leve enote: Zaradi 10.1(i), 10.1(iii) in

10.2(i) velja ekvivalenca: $J(A)$ podalgebra algebre $A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J(\hat{A}_e)$ podalgebra algebre $\hat{A}_e$... (1). Zaradi 0.5.6,

6.4(vi) ter 10.1(i) in 10.1(iii) velja ekvivalenca: $[h \in H(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 \in J(A)] \Leftrightarrow [\hat{\xi} \in H(\hat{A}_e) \Rightarrow \hat{\xi}^2 \in J(\hat{A}_e)]$... (2). Zaradi 0.5.6,

6.4(vi) in 6.4(iv) veljata ekvivalenci: $[h \in H(A) \Rightarrow h^2 \in H(A)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\hat{\xi} \in H(\hat{A}_e) \Rightarrow \hat{\xi}^2 \in H(\hat{A}_e)]$... (3) in $[h, k \in H(A) \Rightarrow (hk + kh) \in H(A)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\hat{\xi}, \hat{\eta} \in H(\hat{A}_e) \Rightarrow (\hat{\xi}\hat{\eta} + \hat{\eta}\hat{\xi}) \in H(\hat{A}_e)]$... (4). Ker je $\hat{A}_e$ kompleksna,

asociativna, enotska, normirana algebra, točke (1), (2), (3) in

(4) zaradi /13, Izrek 12.2/ dokazujejo ekvivalenco trditev (i)-(iv).

II. Naj ima A enoto: Algebro $(A, \|\cdot\|)$ renormiramo do enotske

normirane algebre A_1 (gl. 2.3.1) in je zato po 2.3.1

$H(A) = H(A_1)$ in $J(A) = J(A_1)$, kar po /13, Izrek 12.2/ spet dokazuje ekvivalenco točk (i)-(iv).

(v) Zaradi 6.4(iv), 7.3(i) in 0.5.6 je $\bar{a} \in J(\bar{A}_e)$, $\bar{a}^* = \overline{a^*}$ in
 $-(\bar{a})^*\bar{a} = -(a^*a)^- \in H^+(\bar{A}_e)$, kar po /13, Izrek 12.5(i)/ pomeni $\bar{a} = 0$, t.j. $a \in \text{lan}A$ (gl. 0.5.6.1).

(vi) Analogno kot v točki (v) je zaradi /13, Izrek 12.5(ii)/
 $\overline{aa^*} = \bar{a}(\bar{a})^* \in H^+(\bar{A}_e)$ in zato po 7.3(i) $aa^* \in H^+(A)$.

Podobno je tudi $a^*a \in H^+(A)$.

(vii) Podobno kot v točkah (v) in (vi) je zaradi /13, Izrek

12.6(ii)/ $(apa^*)^- = \bar{a}\bar{p}\bar{a}^* \in H^+(\bar{A}_e)$, kar po 7.3(i) pomeni $apa^* \in H^+(A)$.

10.5 Izrek Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna, kompleksna (ne nujno asociativna) normirana algebra z enoto (dvostransko) ali brez leve enote in naj bo $\text{lan}A = \{0\}$ (gl. 0.5.0). Potem

velja:

(i) $J(A) = H(A) \oplus iH(A)$, t.j. vsak element $a \in J(A)$ lahko na en sam način zapišemo v obliki vsote $a = h + ik$, kjer sta $h, k \in H(A)$.

(ii) Preslikava $(h + ik) \mapsto (h + ik)^* := h - ik$ prostora $J(A)$ vase je zato enolična in je očitno linearna involucija, t.j. velja $(\alpha a + \beta b)^* = \alpha^* a^* + \beta^* b^*$ in $(a^*)^* = a$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ in za vsak $a, b \in A$. Involucija $*$ je zvezna glede na operatorsko normo $|\cdot|$, $|a| := \sup_{x \in S} \|ax\|$ za vsak

$a \in A$; velja namreč $|a^*| \leq 2|a|$ za vsak $a \in A$.

(iii) Če je A asociativna algebra in je prostor $J(A)$ zaprt za množenje, t.j. če je $J(A)$ podalgebra algebre A (gl. 10.4; npr. če je $A = J(A)$), je v točki (ii) omenjena linearna involucija algebrska (imenujemo jo Vidavova involucija ali kratko V -involucija), t.j. velja enakost $(ab)^* = b^* a^*$ za vsak $a, b \in A$. Še več, $J(A)$ je kompleksna, involutivna, normirana algebra glede na V -involucijo in glede na operatorsko normo $|\cdot|$ (točka (ii)) z lastnostjo $|a^* a| = |a|^2$ za vsak $a \in J(A)$ (t.j. $(J(A), *, |\cdot|)$ je pred- B^* -algebra). Zato velja:

(α) $|a^*| = |a|$ za vsak $a \in J(A)$

(β) $v(A, a^n) \leq (v(A, a))^n$ za vsak $a \in J(A)$, kjer pomeni $v(\cdot, \cdot)$ numerični radij glede na prvotno normo $\|\cdot\|$!

Opomba: (a) Če uporabimo točko (iii)(β) za normirano algebro $(J(A), |\cdot|)$, dobimo tudi oceno $v_1(J(A), a^n) \leq (v_1(J(A), a))^n$ za vsak $a \in J(A)$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$, kjer označuje $v_1(\cdot, \cdot)$ numerični radij glede na novo normo $|\cdot|$.

(b) Ocena iz točke (a) bi sledila tudi iz (β) in iz domnevne enakosti $\overline{\text{co}}V(J(A), a) = \overline{\text{co}}V_1(J(A), a) = V_1(J(A), a)$, kjer označuje $V_1(\cdot, \cdot)$ numerični zaklad glede na normo $|\cdot|$. Ta enakost bi zaradi 2.2.7 veljala, če bi za vsak $a \in J(A)$ bil $\sup_{\|x\|=1} \|x + ax\| = \sup_{|x|=1} |x + ax|$. (Očitno je $\sup_{\|x\|=1} \|ax\| = |a| = \sup_{|x|=1} |ax|$) za vsak $a \in A$.)

Dokaz: (i) Sledi iz 6.4(v) (gl. Opombo).

(ii) Sledi iz 10.2(iii)(a).

(iii) Ker je množica $J(A)$ zaprta za množenje, je po 10.2(i) prostor $J(A)$ podalgebra algebre A ... (1).

I. Naj ima A enoto: Ker je $H(A_1) = H(A)$ (gl. točko II v dokazu trditve 10.4), je $J(A_1) = H(A_1) + H(A_1) (= J(A))$ kompleksna, asociativna, enotska, normirana algebra glede na normo $\|\cdot\|_1$, $\|a\|_1 := \sup_{x \in S} \|ax\| = |a|$ in je zato po /3, Teorem 2.8.2/

$(J(A), *, | \cdot |) = (J(A_1), *, \| \cdot \|_1)$ pred- B^* -algebra glede na V -involucijo $*$, $(h + ik)^* := h - ik$ za vsak $h, k \in H(A)$... (2).

II. Naj bo A brez leve enote: Zaradi (1), 10.1(i) in 6.4(vi) je $J(\hat{A}_e)$ kompleksna, asociativna, enotska, normirana algebra z lastnostjo $J(\hat{A}_e) = H(\hat{A}_e) + iH(\hat{A}_e)$ in je zato spet po /3, Teorem 2.8.2/ $(J(\hat{A}_e), *, \| \cdot \|)$ pred- B^* -algebra glede na V -involucijo $*$, $(\hat{\xi} + i\hat{\eta})^* = \hat{\xi} - i\hat{\eta}$ za vsak $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in H(J(\hat{A}_e))$... (3). Po 6.4(iv) je $a^* = (\hat{a})^*$ za vsak $a \in J(A)$ in zato po 0.5.6 $[(ab)^* - (b^*a^*)]^{\wedge} = (\hat{a}\hat{b})^* - (\hat{b})^*(\hat{a})^* = 0$ za vsak $a, b \in J(A)$, t.j. $[(ab)^* - b^*a^*] \in \text{lan} A = \{0\}$, t.j. $(ab)^* = b^*a^*$ za vsak $a, b \in J(A)$... (4). Po 0.5.6.1 in točki (3) je $|a^*a| = \|(a^*a)^{\wedge}\| = \|\hat{a}^*\hat{a}\| = \|(\hat{a})^*\hat{a}\| = \|\hat{a}\|^2 = |a|^2$ za vsak $a \in J(A)$... (5).

Iz (1), (2), (4) in (5) lahko torej povzamemo, da je $(J(A), *, | \cdot |)$ pred- B^* -algebra glede na V -involucijo.

Dokažimo še oceno (β).

I. V primeru, da ima A enoto, izpopolnimo enotsko pred- B^* -algebro $(J(A_1), *, \| \cdot \|_1)$ (gl. točko (2)) do B^* -algebre $\mathcal{J}$. Če pomeni preslikava $b \mapsto \bar{b}$ vložitev algebre $J(A_1)$ v izpopolnjeno algebro $\mathcal{J}$, je zaradi 2.3.1, 2.3.3, 2.2.5(i), (ii) in (vii') ter 2.2.9 $\overline{\text{co}}V(A, b) = V(A_1, b) = V(J(A_1), b) = V(\mathcal{J}, \bar{b})$ za vsak $b \in J(A) = J(A_1)$... (6). Ker je $\mathcal{J}$ kompleksna, asociativna, enotska B^* -algebra, velja po /4, Korolar 6.23.10/ ocena $v(\mathcal{J}, \bar{a}^n) \leq (v(\mathcal{J}, \bar{a}))^n$ za vsak $a \in J(A) = J(A_1)$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$... (7). Ker je vložitev $a \mapsto \bar{a}$ algebre $J(A_1)$ v $\mathcal{J}$ homomorfizem, točki (6) in (7) po def. 3.1(ii) dokazujeta trditev (β).

II. V primeru, da je A brez leve enote, izpopolnimo enotsko pred- B^* -algebro $(J(\hat{A}_e), *, \| \cdot \|)$ do B^* -algebre $\mathcal{J}$. Če pomeni $\hat{b} \mapsto \bar{b}$ vložitev algebre $J(\hat{A}_e)$ v njeno izpopolnitev $\mathcal{J}$, veljajo zaradi 2.3.2, 2.3.3, 2.2.5(i), (ii) in (vii') ter 2.2.9 enakosti $\overline{\text{co}}V(A, b) = V(\hat{A}_e, \hat{b}) = V(J(\hat{A}_e), \hat{b}) = V(\mathcal{J}, \bar{b})$ za vsak $b \in J(A)$, kjer je po 10.1(i) $J(\hat{A}_e) = (J(A))^{\wedge} + C\hat{e}$... (8). Ker je J kompleksna, asociativna, enotska B^* -algebra, je po /4, Korolar 6.23.10/ spet $v(\mathcal{J}, \bar{a}^n) \leq (v(\mathcal{J}, \bar{a}))^n$ za vsak $a \in J(A)$ in $n \in \mathbb{N}$... (9). Kot v primeru I, točki (8) in (9) spet dokazujeta trditve (β).

Trditev (α) je očitna, saj je $| \cdot |$ B^* -norma in $(a^*)^* = a$ za vsak $a \in J(A)$.

11 DVOSTRANSKI ELEMENTI NETRIVIALNE NORMIRANE ALGEBRE $(A, \|\cdot\|)$ NAD OBSEGOM $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$)

11.1 DEFINICIJA Element $a \in A$ imenujemo dvostranski, če je $\overline{\text{co}}V(A, a) = \overline{\text{co}}V_d(A, a)$. Množico vseh dvostranskih elementov algebre A označimo z $\mathfrak{D}(A)$. Očitno je $0 \in \mathfrak{D}(A)$.[†]

11.2 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna normirana algebra (z enoto ali brez nje, ne nujno asociativna) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Za vsak $a, x \in A$ naj bo $f(a, x) = \|x + ax\|$, $f^*(a, x) = \|x + xa\|$, $v_1(a) = \sup_{x \in S} \inf_{t > 0} [t^{-1}(f(ta, x) - 1)]$
 $v_2(a) = \inf_{t > 0} \sup_{x \in S} \frac{f(ta, x) - 1}{t}$, $v_3(a) = \lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in S} \frac{f(ta, x) - 1}{t}$ in
 $v_4(a) = \sup_{x \in S} \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(ta, x) - 1}{t}$ (gl. 2.2.6 in 2.2.7) ter
 $v_1^*(a) = \sup_{x \in S} \inf_{t > 0} \frac{f^*(ta, x) - 1}{t}$ in analogno definiramo še v_2^* , v_3^* , in v_4^* . Potem velja:

- (i) $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$ in $v_1^* = v_2^* = v_3^* = v_4^*$
- (ii) [eksistirata taka $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, da je $v_j(\lambda a) = v_k^*(\lambda a)$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$, $|\lambda| = 1$] $\Rightarrow a \in \mathfrak{D}(A)$
- (iii) $a \in \mathfrak{D}(A) \Rightarrow v_j(\lambda a) = v_k^*(\lambda a)$ za vsak $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ in za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$.

Dokaz: Izrek 2.2.7 in trditve 2.1.4.4 ter 6 (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.19)

11.3 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna normirana algebra (z enoto ali brez nje, ne nujno asociativna) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in a tak element algebre A , da je $\sup_{x \in S} \|x + \lambda ax\| = \sup_{x \in S} \|x + \lambda xa\|$ za vsak $\lambda \in \mathfrak{F}$, $|\lambda| = 1$. Potem je zaradi 11.2(ii) $a \in \mathfrak{D}(A)$.

11.4 Posledica Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna normirana algebra (z enoto ali brez nje, ne nujno asociativna) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in naj bo $\sup_{x \in S} \|x + ax\| = \sup_{x \in S} \|x + xa\|$ za

vsak $a \in A$ (npr., če je A komutativna ali pa če vsebuje A enoto e in je $\|e\| = 1$). Potem je zaradi 11.3 $\mathfrak{D}(A) = A$.

[†]gl. naprej 12.3(iv) in 12.7

11.5 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathcal{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in za vsak $a \in A$ naj bo $e_1(a) = \sup_{t>0} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t}$ (gl. 0.3),

$$e_2(a) = \lim_{t \downarrow 0} \ln \sup_{x \in S} \|e^{ta} x\|^{1/t} \quad (\text{gl. 2.3.6}) \quad \text{ter analogno}$$

$$e_1^*(a) = \sup_{t>0} \ln \sup_{x \in S} \|xe^{ta}\|^{1/t} \quad \text{in} \quad e_2^*(a) = \lim_{t \downarrow 0} \ln \sup_{x \in S} \|xe^{ta}\|^{1/t}.$$

Potem velja: (i) $e_1 = e_2$ in $e_1^* = e_2^*$

(ii) [eksistirata taka $j, k \in \{1, 2\}$, da je $e_j(\lambda a) = e_k^*(\lambda a)$ za vsak $\lambda \in \mathcal{F}$, $|\lambda| = 1$] $\Rightarrow a \in \mathcal{D}(A)$

(iii) $a \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow e_j(\lambda a) = e_k^*(\lambda a)$ za vsak $j, k \in \{1, 2\}$ in za vsak $\lambda \in \mathcal{F}$.

Dokaz: Izrek 2.3.6(i) in trditev 2.1.4.4 ter 2.1.4.6 (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.19) .

11.6 TRDITEV Naj bo $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna asociativna B-algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathcal{F}$ ($=\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem je $\mathcal{F}$ -spekter $G_{\mathcal{F}}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V(A, a)$ za vsak $a \in \mathcal{D}(A)$ (gl. 1.5).

Dokaz: Izrek 2.3.11 (točke 1, 2 in 2').

11.7 OPOMBA Če je $(A, \|\cdot\|)$ netrivialna kompleksna asociativna normirana algebra, je v splošnem $H(A) \cap \mathcal{D}(A) \subsetneq H(A) \cap H_d(A)$ (inkluzija je očitna, možnost neenakosti pa kaže primer 13.1.9(8) na str. 114).

12 INVOLUTIVNE NORMIRANE ALGEBRE

V tem odstavku je $(A, *, \|\cdot\|)$ netrivialna, involutivna, normirana algebra (z enoto ali brez nje, ne nujno asociativna) nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Involucijo na prostoru $\mathbb{C}$ (konjugiranje kompleksnih števil) bomo tudi označevali z zvezdico " $*$ ".

12.1 DEFINICIJA (i) Element $a \in A$ imenujemo poševno $*$ -hermitski, če je $a^* = -a$. Množico vseh poševno $*$ -hermitskih elementov algebre A označimo s ${}^*H'(A)$, ${}^*H'(A) = \{a \in A : a^* = -a\}$.

(ii) Element $a \in A$ imenujemo $*$ -hermitski, če je $a^* = a$. S ${}^*H(A)$ označimo množico vseh $*$ -hermitskih elementov algebre A , ${}^*H(A) = \{a \in A : a^* = a\}$.

12.1' Če je A kompleksna algebra, je očitno ${}^*H(A) = i {}^*H'(A)$.

12.2 TRDITEV Naj bo $(A, *, \|\cdot\|)$ netrivialna asociativna involutivna B -algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$). Potem je $\mathcal{F}$ -spekter $G_{\mathcal{F}}(A, a) \subset \overline{\text{co}}V(A, a) \cap \overline{\text{co}}V_d(A, a)$ za vsak $a \in A$ in če je pri tem $\mathcal{F} = \mathbb{C}$, je $\overline{\text{co}}V(A, a) \subset \overline{\text{co}}V_d(A, a)$ za vsak $a \in N(A)$.

Dokaz: Ker je A involutivna algebra, ima enoto (dvostransko) ali pa je brez leve in hkrati brez desne enote. Prvi del trditve sledi zato iz 2.3.11, drugi del pa iz 9.6(viii) in 2.3.11.

12.3 TRDITEV Naj bo $(A, *, \|\cdot\|)$ netrivialna, involutivna, normirana algebra (z enoto ali brez nje, ne nujno asociativna) nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in za vsak $a \in A$ naj velja enakost $\|a^*\| = \|a\|$, t.j. involucija $*$ je izometrija. Potem velja:

(i) $\mathcal{F} = \mathbb{R} \implies \overline{\text{co}}V(A, a) = \overline{\text{co}}V_d(A, a^*)$ za vsak $a \in A$ (gl. def. 2.1.3)

(ii) $\mathcal{F} = \mathbb{C} \implies \overline{\text{co}}V(A, a) = \overline{\text{co}}[V_d(A, a^*)]^*$ za vsak $a \in A$

(iii) $v(A, a) = v_d(A, a^*)$ za vsak $a \in A$ (gl. def. 3.1)

(iv) $\mathcal{F} = \mathbb{R} \implies {}^*H(A) \subset \mathcal{J}(A)$ (gl. 11.1).

Dokaz: (i), (ii): Ker je $\sup_{x \in S} \|x + tax\| = \sup_{x \in S} \|(x + tax)^*\| = \sup_{x \in S} \|x^* + tx^*a^*\| = \sup_{y \in S} \|y + tya^*\|$ za vsak $a \in A$ in $t \in \mathbb{R}^+$,

je po 2.2.7 $\sup \text{Re}V(a) = \sup \text{Re}V_d(a^*)$ za vsak $a \in A$... (1). Od tod zaradi 2.1.4.4 in 2.1.4.6 (gl. točko (1) v dokazu trditve 1.19) že sledi trditev (i).

Če je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$, velja zaradi (1) in 2.1.4.4 ter 2.1.4.6 enakost

$\sup \operatorname{Re}[\lambda V(a)] = \sup \operatorname{Re} V(\lambda a) = \sup \operatorname{Re} V_d(\lambda^* a^*) = \sup \operatorname{Re}[\lambda^* V_d(a^*)] =$
 $= \sup \operatorname{Re}[\lambda (V_d(a^*))^*]^* = \sup \operatorname{Re}[\lambda (V_d(a^*))^*]$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.
 Od tod po 2.1.4.4 in 2.1.4.6 (gl. (1) v dokazu trditve 1.19) sledi trditev (ii).

Točka (iii) sledi iz (i) in (ii) (gl. def. 3.1), trditev (iv) pa sledi iz (i).

12.4 TRDITEV Naj bo $(A, *, \|\cdot\|)$ netrivialna kompleksna involutivna normirana algebra z enoto ali brez nje (ne nujno asociativna) in naj bo ${}^*H(A) \subset H(A)$. Potem velja:

(i) $A = H(A) + iH(A)$ in $H(A) \subset {}^*H(A) + i({}^*H(A) \cap \operatorname{lan} A \cap \operatorname{lan} A^*)$

(ii) $V(A, a^*) = (V(A, a))^*$ za vsak $a \in A$

(iii) Če je A asociativna algebra (z enoto ali brez nje) in je

$\operatorname{lan} A = \{0\}$ (gl. 0.5.0), je ${}^*H(A) = H(A)$ in preslikava

$|\cdot| : a \mapsto |a| := \sup_{x \in S} \|ax\|$ je pred- B^* -norma (t.j. algebrska norma z lastnostjo, da je $|a^*a| = |a|^2$ za vsak $a \in A$).

Torej je $(A, *, |\cdot|)$ kompleksna pred- B^* -algebra in je zato:

(α) $|a^*| = |a|$ za vsak $a \in A$ ter

(β) $v(A, a^n) \leq (v(A, a))^n$ za vsak $a \in A$ in $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: (i) Ker je A involutivna algebra in ${}^*H(A) \subset H(A)$, je $A = {}^*H(A) + i{}^*H(A) = H(A) + iH(A)$. Zato lahko vsak $h \in H(A)$ zapišemo v obliki $h = u + iv$, kjer sta $u, v \in {}^*H(A)$... (1). Ker je ${}^*H(A) \subset H(A)$, sta zato $V(u), V(v) \in \mathbb{R}$... (2). Iz (1), (2) ter 2.1.4.4 in 5 sledi $iV(v) = V(h - u) \subset V(h) - V(u) \subset \mathbb{R}$ in zato po (2) $V(v) = \{0\}$. Torej je po 3.1(ii) in 3.12' $v \in \operatorname{lan} A$ (3). Točke (1), (2) in (3) dokazujejo (i).
 (ii) Poljuben $a \in A$ lahko zaradi (i) zapišemo v obliki $a = h + ik + n$, kjer sta $h, k \in {}^*H(A) \subset H(A)$ in je $nx = 0 = n^*x (= xn = xn^*)$ za vsak $x \in A$. Po def. 2.1.3(ii) je zato $V(a) = V(h + ik)$ in $V(a^*) = V(h - ik)$, kar po trditvi 10.2(iii)(b) dokazuje trditev (ii).

(iii) Zaradi (i) je "tedaj" $H(A) \subset {}^*H(A)$ in zaradi (i) se tudi lahko skličemo na izrek 10.5(iii).

12.5 TRDITEV Naj bo $(A, *, \|\cdot\|)$ netrivialna, asociativna, involutivna, normirana algebra (z enoto ali brez nje) nad obsegom $\mathfrak{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in za vsak $a \in A$ naj velja enakost

$\|a^*a\| = \|a\|^2$ (t.j. $(A, *, \|\cdot\|)$ je pred- B^* -algebra). Potem je očitno $\operatorname{lan} A = \{0\}$ in velja:

(i) ${}^*H'(A) \subset H'(A) \cap H_d'(A)$ (gl. def. 5.1)

(ii) $\mathfrak{F} = \mathbb{C} \Rightarrow H(A) = H_d(A) = {}^*H(A)$ (gl. def. 6.1)

(iii) $\mathfrak{F} = \mathbb{C} \Rightarrow v(A, a^n) = v_d(A, a^n) \leq (v_d(A, a))^n = (v(A, a))^n$

za vsak $a \in A$ in $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: (i) Vzemimo poljuben $t \in \mathbb{R}$ in $a \in {}^*H'(A)$. Potem je

$(x + tax)^*(x + tax) = (x^* - tx^*a)(x + tax) = x^*x + t^2(ax)^*(ax)$ in zato $\|x + tax\|^2 = \|x^*x + t^2(ax)^*(ax)\|$ za vsak $x \in A$... (1). Ker je $\|x\|^2 - t^2\|a\|^2\|x\|^2 \leq \|x\|^2 - t^2\|ax\|^2 = \|x^*x\| - t^2\|(ax)^*(ax)\| \leq \|x^*x + t^2(ax)^*(ax)\| \leq \|x\|^2 + t^2\|a\|^2\|x\|^2$, sledi iz (1) ocena

$$\frac{\|x\|(1 - t^2\|a\|^2)^{1/2} - 1}{|t|} \leq \frac{\|x + tax\| - 1}{|t|} \leq \frac{\|x\|(1 + t^2\|a\|^2)^{1/2} - 1}{|t|}$$

za vsak $x \in A$ in $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, t.j. $\lim_{\substack{t \in \mathbb{R}^+ \\ t \rightarrow 0}} \frac{\|x + tax\| - 1}{t} = 0$ za vsak $x \in S(A)$

$x \in S$. To zaradi 5.2(vi) pomeni $a \in H'(A)$. Torej je ${}^*H'(A) \subset H'(A)$ in zato tudi ${}^*H'(A) = {}^*H'(A^\circ) \subset H'(A^\circ) = H_d(A)$ (gl. 0.1.3).

(ii) Zaradi (i), 12.1' in 6.2 je ${}^*H(A) = i^*H'(A) \subset iH'(A) = H(A)$, t.j. ${}^*H(A) \subset H(A)$, kar po 12.4(i) pomeni $H(A) = {}^*H(A)$ in zato tudi $H_d(A) = H(A^\circ) = {}^*H(A^\circ) = {}^*H(A)$, saj je tudi $\|a^*.a\| = \|aa^*\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2$ za vsak $a \in A$ (gl. 0.1.3).

(iii) Ker ima involutivna algebra dvostransko enoto ali pa nima niti leve, niti desne enote, je zaradi (ii) po izreku 10.5(iii)(β) $v(a^n) \leq (v(a))^n$ za vsak $a \in A$ in $n \in \mathbb{N}$... (2). Po 12.3(iii) in 12.4(ii) je $v_d(b) = v(b^*) = v(b)$ za vsak $b \in A$... (3). Točki (2) in (3) dokazujeta (iii).

12.6 IZREK Naj bo $(A, *, \|\cdot\|)$ netrivialna, kompleksna, asociativna, involutivna, normirana algebra (z enoto ali brez nje) in naj bo $\|a\| = \sup_{x \in S} \|ax\|$ za vsak $a \in A$ ali pa naj bo

$\|a\| = \sup_{x \in S} \|xa\|$ za vsak $a \in A$. Potem so ekvivalentne naslednje

trditve:

- (i) ${}^*H(A) \subset H(A)$
- (ii) ${}^*H(A) \subset H_d(A)$
- (iii) ${}^*H(A) = H(A) = H_d(A)$
- (iv) $\|a^*.a\| = \|a\|^2$ za vsak $a \in A$.

Opomba: Eksistira taka kompleksna, involutivna, enotska B-algebra $(A, *, \|\cdot\|)$, da je $H(A) \subset {}^*H(A)$, pri čemer $(A, *, \|\cdot\|)$ ni B^* -algebra (gl. /6, str. 198/).

Dokaz: I. Naj bo $\|a\| = \sup_{x \in S} \|ax\|$ za vsak $a \in A$. Ker je A involutivna algebra, ima enoto ali pa je brez leve in desne enote.

(i) $\Rightarrow$ (ii), (iii): Če velja (i), je po 12.4(i) ${}^*H(A) = H(A)$ in velja zato po izreku 10.5(iii) enakost $|a^*a| = |a|^2$ za vsak $a \in A$. Ker je po predpostavki $|a| := \sup_{x \in S} \|ax\| = \|a\|$,

je zato $\|a^*a\| = \|a\|^2$ za vsak $a \in A$. To po 12.5 pomeni (iii) in (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Trditev 12.4(iii).

(iv) $\Rightarrow$ (i): Trditev 12.5(ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iv): Ker je ${}^*H(A^*) = {}^*H(A) \subset H_d(A) = H(A^*)$ (gl. 0.1.3 in 6.1), velja po 12.4(iii) enakost $|a^*.a| = |a|^2$, t.j. $|aa^*| = |a|^2$ za vsak $a \in A$, kar pomeni točko (iv).

II. V primeru, da je $\|a\| = \sup_{x \in S} \|xa\|$ za vsak $a \in A$, upoštevamo

enakosti ${}^*H(A^*) = {}^*H(A)$, $H(A^*) = H_d(A)$, $H_d(A^*) = H(A)$ in $\|a\| = \sup_{x \in S} \|a.x\|$ in se s tem primer II reducira na primer I.

12.7 TRDITEV Naj bo $(A, *, \|\cdot\|)$ netrivialna kompleksna involutivna normirana algebra z enoto ali brez nje (ne nujno asociativna) in naj bo ${}^*H(A) \subset H(A)$ ter $\|a^*\| = \|a\|$ za vsak $a \in A^+$. Potem je $A = \mathcal{D}(A)$.
Dokaz: Zaradi 12.3(ii) in 12.4(ii) je $\overline{co}V_d(a) = (\overline{co}V(a^*))^* = (\overline{co}(V(a))^*)^* = \overline{co}V(a)$ za vsak $a \in A$.

13. PRIMERI dvodimenzionalnih asociativnih normiranih algebr

13.1 NEKOMUTATIVNA NORMIRANA ALGEBRA BREZ ENOTE S HILBERTSKO NORMO

1. Naj bo A dvodimenzionalna asociativna algebra nad obsegom $\mathcal{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) z bazo $\{a, b\}$, $A = \{\alpha a + \beta b : \alpha, \beta \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}a \oplus \mathcal{F}b$, kjer je $a \in \text{lan}A$ in b leva enota algebre A (primer 1.16).
2. Algebra A je Hilbertov prostor glede na skalarni produkt $\langle, \rangle$, $\langle \alpha a + \beta b, \alpha' a + \beta' b \rangle := \alpha \alpha'^* + \beta \beta'^*$ za vsak $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathcal{F}$ in je zato $\{a, b\}$ ortonormirana baza prostora A . Norma $\|\cdot\|$, ki jo inducira ta skalarni produkt, $\|\alpha a + \beta b\| := (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2}$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, je algebrska norma (ustreza točki 0.2.1(iv)) in $(A, \|\cdot\|)$ je B -algebra (natančneje HB -algebra). Oznaka: $S = S(A) = \{x \in A : \|x\| = 1\}$.
3. Za vsak $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ je po 13.1.1 $|\alpha a + \beta b| := \sup_{x \in S(A)} \|(\alpha a + \beta b)x\| = \sup \{\|(\alpha a + \beta b)(\alpha' a + \beta' b)\| : \alpha', \beta' \in \mathcal{F}, |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1\} = \sup \{\|\beta \alpha' a + \beta \beta' b\| : \alpha', \beta' \in \mathcal{F}, |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1\} = |\beta| \sup \{(|\alpha'|^2 + |\beta'|^2)^{1/2} : \alpha', \beta' \in \mathcal{F}, |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1\} =$

[†]npr. netrivialna kompleksna asociativna pred- B^* -algebra

$= |\beta|$. Torej leva operatorska polnorma ni norma.

- 3'. Po drugi strani pa je po 13.1.1 za vsak $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ $|\alpha a + \beta b|_d := \sup_{x \in S} \|x(\alpha a + \beta b)\| = \sup\{\|(\alpha' a + \beta' b)(\alpha a + \beta b)\| : \alpha', \beta' \in \mathcal{F}, |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1\} = \sup\{\|\alpha \beta' a + \beta \beta' b\| : \alpha', \beta' \in \mathcal{F}, |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1\} = \sup\{|\beta'| (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2} : \alpha', \beta' \in \mathcal{F}, |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1\} = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2} = \|\alpha a + \beta b\|$, t.j.

$|x|_d = \|x\|$ za vsak $x \in A$. Torej je desna operatorska polnorma norma, ki sovпада s prvotno normo.

4. Za vsak $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ in $n \in \mathbb{N}$ je zaradi (i) po indukciji $(\alpha a + \beta b)^n = \beta^{n-1}(\alpha a + \beta b)$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ in $n \in \mathbb{N}$. Če je $\beta \neq 0$, je zato $\|(\alpha a + \beta b)^n\|^{1/n} = |\beta|^{1-(1/n)} (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2n}$.

Torej je spektralni radij $r(\alpha a + \beta b) = |\beta| \leq (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2} = \|\alpha a + \beta b\|$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$. To pomeni, da je $r(x) = \|x\|$ za vsak $x \in \mathcal{F}b$ in $r(x) < \|x\|$ za vsak $x \in (\mathcal{F} \setminus \{0\})a + \mathcal{F}b$.

5. Ker je $a \in \text{lan} A$ in je b leva enota algebre A , je $(\alpha a + \beta b)x = \alpha 0 + \beta x = \beta x$ in zato $f((\alpha a + \beta b)x) = \beta f(x)$ za vsak $f \in A'$, kar po definiciji 2.1.3(ii) pomeni, da je levi numerični zaklad $V(A, \alpha a + \beta b) := \{f((\alpha a + \beta b)x) : x \in S, f \in D(A, x)\} = \{\beta\}$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$... (1). To velja splošno, neodvisno od tega ali je algebrska norma hilbertska ali ne ... (1').

- 5'. Zaradi 2.1.4.6, 13.1.2 in trditve 2.2.4 je desni numerični zaklad $V_d(A, \alpha a + \beta b) = V(A', \alpha a + \beta b) = \{\langle (\alpha a + \beta b) \cdot x, x \rangle : x \in S(A)\} = \{\langle x(\alpha a + \beta b), x \rangle : x \in S(A)\} = \{\langle (\alpha' a + \beta' b)(\alpha a + \beta b), \alpha' a + \beta' b \rangle : \alpha', \beta' \in \mathcal{F}, |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1\} = \{\alpha \beta' \alpha'^* + \beta |\beta'|^2 : \alpha', \beta' \in \mathcal{F}, |\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1\}$... (2).

Če je $|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1$, lahko $|\alpha'|$ in $|\beta'|$ zapišemo v obliki $|\alpha'| = \cos(t/2)$ in $|\beta'| = \sin(t/2)$, kjer je $t/2 \in [0, \pi/2]$. Torej lahko poljubni števili $\alpha', \beta' \in \mathcal{F}$, ki ustrezata enakosti $|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1$, zapišemo v kompleksni obliki $\alpha' = (\cos(t/2))e^{i\varphi}$ in $\beta' = (\sin(t/2))e^{i\psi}$, kjer sta $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$... (3).

Če je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$, je zaradi (2) in (3) desni numerični zaklad $V_d(A, \alpha a + \beta b) = \{\alpha (\sin(t/2))e^{i\psi} (\cos(t/2))e^{-i\varphi} + \beta (\sin(t/2))^2 : t \in [0, \pi], \varphi, \psi \in [0, 2\pi]\} = (1/2)\{|\alpha|e^{i\xi} \cdot \sin t + \beta(1 - \cos t) : \xi \in [0, 2\pi], t \in [0, \pi]\}$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$... (4).

Če je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ ($\varphi, \psi \in \{0, \pi\}$) je zaradi (2) in (3) analogno

$V_d(A, \alpha a + \beta b) = (1/2) \{ |\alpha| e^{i\xi} \sin t + \beta(1 - \cos t) : t \in [0, \pi], \xi \in [0, \pi] \} = (1/2) \{ \pm \alpha \sin t + \beta(1 - \cos t) : t \in [0, \pi] \}$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$... (4'). Če je $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, je zato npr. $V_d(A, a) = [-1/2, 1/2]$, $V_d(A, b) = [0, 1]$ in $V_d(A, a+b) = (1/2) \{ 1 - (\cos t \pm \sin t) : t \in [0, \pi] \} = [(1-\sqrt{2})/2, (1+\sqrt{2})/2]$.

6. Naj bo $\mathcal{F} = \mathbb{C}$. Zaradi 13.1.5(1) je $H(A) = \mathbb{C}a + \mathbb{R}b$... (5). Če je $(\alpha a + \beta b) \in H_d(A)$, je zaradi 13.1.5'(4) $\text{Im} [|\alpha| e^{i\xi} \sin t + \beta(1 - \cos t)] = 0$ za vsak $\xi \in [0, 2\pi]$ in za vsak $t \in [0, \pi]$ in je zato (za $\xi = 0$) $\beta \in \mathbb{R}$, kar pomeni (za $t = \pi/2$) $|\alpha| \text{Im} e^{i\xi} = 0$ za vsak $\xi \in [0, 2\pi]$, t.j. $\alpha = 0$. Zato je $H_d(A) \subset \mathbb{R}b$ in zaradi 13.1.5'(4) velja očitno tudi obratna inkluzija, torej $H_d(A) = \mathbb{R}b$... (6).

7. Če je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$, je zaradi 13.1.6(5) $J(A) := H(A) + iH(A) = A$.

8. Če je $\mathcal{F} = \mathbb{C}$, je preslikava $(\alpha a + \beta b) \mapsto (\alpha a + \beta b)^* := \alpha^* a + \beta^* b$ linearna involucija na algebri A (ki ni algebrska, gl. 12.2) z lastnostjo, da velja za skalarni produkt $\langle, \rangle$ enakost $\langle xy, z \rangle = \langle y, x^* z \rangle$ za vsak $x, y, z \in A$, kar lahko neposredno preverimo. (Zato lahko rečemo, da je $(A, *, \langle, \rangle)$ leva pol- H^* -algebra.)[†] Očitno je množica ${}^*H(A) := \{x \in A : x^* = x\} = \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$ in zaradi 13.1.6(5) in (6) torej velja:

$$H_d(A) = \mathbb{R}b \subsetneq \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b = {}^*H(A) \subsetneq \mathbb{C}a + \mathbb{R}b = H(A) \quad \dots (7).$$

9. Zaradi 13.5(1), 13.5'(4) in (4') je $\mathcal{D}(A) = \{0\}$ (gl. 11.1) in je torej po (7) $H(A) \cap H_d(A) = H_d(A) = \mathbb{R}b \not\subset \{0\} = \mathcal{D}(A) = H(A) \cap \mathcal{D}(A)$, t.j. $H(A) \cap H_d(A) \not\subset H(A) \cap \mathcal{D}(A)$... (8).

10. Po 13.1.6(5) je $h := (a+b) \in H(A)$... (9). Ker je po 13.1.1 $ax = 0$ in $bx = x$ za vsak $x \in A$, je $hx = x$ za vsak $x \in A$... (10).

Zato je $\sup_{x \in S} \|hx\| = 1 < \sqrt{2} = \|h\|$... (11). Zaradi (10) je

$h^j = h \neq 0$ za vsaj $j \in \mathbb{N}$... (12), kar pomeni $r(h) = 1$ in je zato po (11) $r(h) < \|h\|$... (13). Iz (9) in (12) sledi

$$\|\sinh\| = \|(\sin 1)h\| = (\sin 1)\|h\| > (\sin \pi/4)\sqrt{2} = 1, \text{ t.j.}$$

$$\|\sinh\| > 1 \quad \dots (14).$$

[†] Involutivno B -algebro $(A, *, \|\cdot\|)$ imenujemo H^* -algebro, če je A Hilbertov prostor glede na nek skalarni produkt $\langle, \rangle$, pri čemer velja: (i) $\|a\|^2 = \langle a, a \rangle$ za vsak $a \in A$

(ii) $\langle ax, y \rangle = \langle x, a^* y \rangle$ za vsak $a, x, y \in A$

(iii) $\langle xa, y \rangle = \langle x, ya^* \rangle$ za vsak $a, x, y \in A$.

13.2 NEKOMUTATIVNA KOMPLEKSNA NORMIRANA ALGEBRA BREZ ENOTE Z NEHILBERTSKO NORMO

1. Kartezični produkt $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ je kompleksen linearen prostor z bazo $\{a, b\}$ ($a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$), kjer definiramo $(\alpha a + \beta b) + (\alpha' a + \beta' b) = (\alpha + \alpha')a + (\beta + \beta')b$ in $\lambda(\alpha a + \beta b) = (\lambda\alpha)a + (\lambda\beta)b$ za vsak $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$. Vsaka linearna normalizirana absolutna norma $\|\cdot\|$ na A , t.j. linearna norma $\|\cdot\|$, za katero veljajo enakosti $\|a\| = \|b\| = 1$ in $\|\alpha a + \beta b\| = \|\alpha a + \beta b\|$ za vsak $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, določa funkcijo $\psi(t) := \|(1-t)a + tb\| \dots (1)$, ki je konveksna na intervalu $[0, 1]$ z lastnostjo, da je $\psi(0) = \psi(1) = 1$ in $\max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$ za vsak $t \in [0, 1]$.
2. Po /4, 5.21 - str. 38, 39/ oz. po /13, 0.0.8.46.4.8(ii)/ je enotska sfera $S := \{x \in A : \|x\| = 1\} = \{z_1\alpha(t)a + z_2\beta(t)b : z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1| = |z_2| = 1, t \in [0, 1]\}$, kjer je $\alpha(t) = (1-t)/\psi(t)$ in $\beta(t) = t/\psi(t)$ za vsak $t \in [0, 1]$... (2).
Po /13, 0.0.8.46.4.8(iii)/ je zapis enotske sfere v obliki (2) enoličen, t.j. za vsak $x \in S$ eksistira natanko določena trojica $(t, z_1, z_2) \in [0, 1] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, da je $|z_1| = |z_2| = 1$ in $x = z_1\alpha(t)a + z_2\beta(t)b \dots (2')$.
3. Naj bo $\psi'_1(t)$ oz. $\psi'_d(t)$ levi oz. desni odvod funkcije ψ v točki t , $G(0) = \{g \in \mathbb{R} : -1 \leq g \leq \psi'_d(0)\}$, $G(t) = \{g \in \mathbb{R} : \psi'_1(t) \leq g \leq \psi'_d(t)\}$ za vsak $t \in (0, 1)$ in $G(1) = \{g \in \mathbb{R} : \psi'_1(1) \leq g \leq 1\} \dots (3)$. Za vsak $t \in [0, 1]$ naj bo $x(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = \alpha(t)a + \beta(t)b \dots (4)$. Potem je zaradi (2) $x(t) \in S$ in po /4, Lema 5.21.4/ oz. po /13, 0.0.8.46.4.10(i), (ii) in (iii)/ je $D(x(0)) = \{(1, z(1+g)) : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, g \in G(0)\}$, $D(x(t)) = \{(\psi(t)-gt, \psi(t)-gt+g) : g \in G(t)\}$ za vsak $t \in (0, 1)$ ter $D(x(1)) = \{(z(1-g), 1) : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, g \in G(1)\}$, kjer urejeno dvojico $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ identificiramo z linearnim funkcionalom f , za katerega veljata enakosti $f(a) = \alpha$ in $f(b) = \beta \dots (5)$. Vsak $x := z_1\alpha(t)a + z_2\beta(t)b \in S$ enolično določa $t \in [0, 1]$ in po /4, 5.21 - str. 39/ oz. po /13, 0.0.8.46.4.10(iv)/ je ustrezna množica $D(x)$ nosilnih funkcionalov enotske sfere S dana z enačbo $D(x) = \{(z_1^*\alpha, z_2^*\beta) : (\alpha, \beta) \in D(x(t))\} \dots (6)$, kjer urejene dvojice identificiramo s funkcionali, kot je bilo omenjeno v točki (5).

4. Naj bo množenje v $A (= \mathbb{C} \times \mathbb{C})$ definirano z enačbo $(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') = \beta(\alpha', \beta')$, t.j. enako kot v 13.1.1 : $a^2 = 0 = ab$, $b^2 = b$ in $ba = a$... (7). To množenje je asociativno in preslikava $(\alpha a + \beta b) \mapsto \|\alpha a + \beta b\|_1 := |\alpha| + |\beta|$ je zaradi (7) algebrska norma, ki je očitno normalizirana in absolutna ... (8). Normirano algebro A glede na normo $\|\cdot\|_1$ označimo z A_1 . Po (1) ustreza normi $\|\cdot\|_1$ funkcija ψ , $\psi(t) = 1$ za vsak $t \in [0, 1]$... (9). Zato je po (2) $\alpha(t) = 1-t$ in $\beta(t) = t$ za vsak $t \in [0, 1]$... (10) ter po (3) $G(0) = [-1, 0]$, $G(t) = \{0\}$ za vsak $t \in (0, 1)$ in $G(1) = [0, 1]$... (11). Iz (5), (9) in (11) sledi: $D(x(0)) = \{(1, z) : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, r \in [0, 1]\}$, $D(x(t)) = \{(1, 1)\}$ za vsak $t \in (0, 1)$ in $D(x(1)) = \{(z, 1) : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, r \in [0, 1]\}$... (12).

Za poljuben $x = z_1 \alpha(t) a + z_2 \beta(t) b \in S_1 = S(A_1)$ ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2| = 1$, $t \in [0, 1]$) in poljuben $(\lambda a + \mu b) \in A_1$ je zaradi (7) $x(\lambda a + \mu b) = z_2 \beta(t)(\lambda a + \mu b)$ in velja zato za vsak $f \in D_1(x) = D(A_1, x)$ ($f = (z_1^* \alpha, z_2^* \beta)$, $(\alpha, \beta) \in D_1(x(t))$ - gl. (5) in (6)) enakost $f(x(\lambda a + \mu b)) = z_2 \beta(t)(\lambda(z_1^* \alpha) + \mu(z_2^* \beta)) = (\lambda(z_1^* z_2) \alpha + \mu \beta) \beta(t)$. Torej je zaradi (10) desni numerični zaklad $V_d(A_1, \lambda a + \mu b) = \{(\lambda(z_1^* z_2) \alpha + \mu \beta) \beta(t) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1| = |z_2| = 1, t \in [0, 1], (\alpha, \beta) \in D_1(x(t))\} = \{(|\lambda|z \alpha + \mu \beta)t : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, t \in [0, 1], (\alpha, \beta) \in D_1(x(t))\}$ in je zato po (12) $V_d(A_1, \lambda a + \mu b) = \{0\} \cup \{(|\lambda|z + \mu)t : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, t \in (0, 1)\} \cup \{(|\lambda|z(z'r) + \mu : z, z' \in \mathbb{C}, |z| = |z'| = 1, r \in [0, 1]\} = \{(|\lambda|z + \mu)t : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, t \in [0, 1]\} \cup \{|\lambda|\xi + \mu : \xi \in \mathbb{C}, |\xi| \leq 1\} = \text{co}(\{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z - \mu| = |\lambda|\})$ za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$... (13). Po drugi strani je zaradi (7) in 13.1.5(1) in (1') levi numerični zaklad $V(A_1, \lambda a + \mu b) = \{\mu\}$ za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$... (14).

Torej po (13) in (14) eksistira kompleksna asociativna nekomutativna B-algebra brez enote z lastnostjo, da sta levi in desni numerični zaklad vsakega elementa algebre konveksni podmnožici prostora $\mathbb{C}$, čeprav norma ni hilbertska, t.j. ne izhaja iz skalarne produkta (t.j. ne zadošča paralelogramski enačbi) in čeprav enotska sfera algebre ni gladka ... (15).

Zaradi (14) je $H(A_1) = \mathbb{C}a + \mathbb{R}b$... (16) in zaradi (13) je $H_d(A_1) = \mathbb{R}b$... (16'). Ker je $a \in \text{lan} A$ in je b leva enota, je zaradi (16) $r(h) < \|h\|_1$ za vsak $h \in \{\lambda a + \beta b : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} H(A_1)$... (17). Ker je b leva enota, pa je zaradi (16') $r(h) = \|h\|_1 (= \sup_{x \in S_1} \|xh\|_1)$ za vsak $h \in H_d(A_1)$... (17').

5. Preslikava $(\alpha a + \beta b) \mapsto \|\alpha a + \beta b\|_\infty := \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ je tudi absolutna normalizirana algebrska norma na A glede na množenje, ki je definirano v točki (7). Normirano algebro A glede na normo $\|\cdot\|_\infty$ označimo z A_∞ . Za funkcijo ψ , ki jo po (1) določa norma $\|\cdot\|_\infty$ velja enakost $\psi(t) = 1-t$ za vsak $t \in [0, 1/2]$ in $\psi(t) = t$ za vsak $t \in [1/2, 1]$... (18). Zato je po (2) $\beta(t) = t/(1-t)$ za vsak $t \in [0, 1/2]$ ter $\beta(t) = 1$ za vsak $t \in [1/2, 1]$... (19). Zaradi (3) in (18) je $G(t) = \{-1\}$ za vsak $t \in [0, 1/2)$, $G(1/2) = [-1, 1]$ in $G(t) = \{1\}$ za vsak $t \in (1/2, 1]$... (20). Iz (5), (18) in (20) sledi $D(x(t)) = \{(1, 0)\}$ za vsak $t \in [0, 1/2)$, $D(x(1/2)) = \{(1/2 - \xi(1/2), 1/2 - \xi(1/2) + \xi) : \xi \in [-1, 1]\} = \{(1-r, r) : r \in [0, 1]\}$ in $D(x(t)) = \{(0, 1)\}$ za vsak $t \in (1/2, 1]$... (21).

Analogno kot v 13.2.4 je zaradi (19) in (21) desni numerični zaklad $V_d(A_\infty, \lambda a + \mu b) = \{(\lambda(z_1^* z_2) \alpha + \mu \beta) \beta(t) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1| = |z_2| = 1, t \in [0, 1], (\alpha, \beta) \in D(x(t))\} = \{(|\lambda|z_1 + \mu \cdot 0)t/(1-t) : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, t \in [0, 1/2)\} \cup \{|\lambda|z(1-r) + \mu r : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, r \in [0, 1]\} \cup \{|\lambda|z \cdot 0 + \mu \cdot 1 : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| \leq |\lambda|\} \cup \{(1-r)|\lambda|z + r\mu : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, r \in [0, 1]\} = \text{co}(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |\lambda|\} \cup \{\mu\})$ za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$... (22). Po drugi strani je zaradi (7) in 13.1.5(1) in (1') spet $V(A_\infty, \lambda a + \mu b) = \{\mu\}$ za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$... (23).

Točki (22) in (23) ponovno potrjujeta točko (15) ... (24).

Enako kot prej je zaradi (22) in (23) $H(A_\infty) = \mathbb{C}a + \mathbb{R}b$ in $H_d(A_\infty) = \mathbb{R}b$ ter zato $r(h) < \|h\|_\infty$ za vsak $h \in \{\lambda a + \beta b : \lambda \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}, |\beta| < |\lambda|\} \subset H(A_\infty)$ in $r(h) = \|h\|_\infty$ za vsak $h \in H_d(A)$... (25).

6. Glede na množenje, ki je definirano v točki (7), je absolutna normalizirana algebrska norma na A tudi preslikava $(\alpha a + \beta b) \mapsto \|\alpha a + \beta b\| := \max\{|\alpha|, |\beta|, 3/\sqrt{10}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2}\}$. Po (1) je $\psi(t) = \max\{1-t, t, 3/\sqrt{10}(2t^2 - 2t + 1)^{1/2}\}$ za vsak $t \in [0, 1]$, t.j. $\psi(t) = 1-t$ za vsak $t \in [0, 1/4]$, $\psi(t) = 3/\sqrt{10}(2t^2 - 2t + 1)^{1/2}$ za vsak $t \in [1/4, 3/4]$ in $\psi(t) = t$ za vsak $t \in [3/4, 1]$... (26). Po (3) je zato $G(t) = \{-1\}$ za vsak $t \in [0, 1/4)$, $G(1/4) = [-1, -3/5]$, $G(t) = \{\psi'(t)\} = \{3/\sqrt{10}(2t-1)(2t^2 - 2t + 1)^{-1/2}\}$ za vsak $t \in (1/4, 3/4)$, $G(3/4) = [3/5, 1]$ in $G(t) = \{1\}$ za vsak $t \in (3/4, 1]$... (27). Iz (5) in (27) sledi $D(x(t)) = \{(1, 0)\}$ za vsak $t \in [0, 1/4)$, $D(x(1/4)) = \{(1-r/3, r) : r \in [0, 3/10]\}$, $D(x(t)) = \{(\psi(t) - t\psi'(t), \psi(t) + (1-t)\psi'(t))\}$ za vsak $t \in (1/4, 3/4)$, $D(x(3/4)) = \{(r, 1-(r/3)) : r \in [0, 3/10]\}$ ter $D(x(t)) = \{(0, 1)\}$ za vsak $t \in (3/4, 1]$... (28). Iz (6), (26)

in (28) dobimo enakost $V_d(A, \lambda a + \mu b) = \{(1/3)|\lambda| rz : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, r \in [0, 1]\} \cup \{t(|\lambda|/3)z + (1-t)\mu : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, t (= 1-r/3) \in [9/10, 1]\} \cup \{|\lambda|z(t-t^2)(2t^2 - 2t + 1)^{-1} + \mu t^2(2t^2 - 2t + 1)^{-1} : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, t \in [1/4, 3/4]\} \cup U\{t.3|\lambda|z + (1-t)\mu : z \in \mathbb{C}, |z| = 1, t(=r/3) \in [0, 1/10]\} \dots (29).$
 Iz (29) spet sledi $H_d(A) = Rb$, pri čemer je po 13.1.5(1) in (1') $H(A) = Ca + Rb \dots (30).$

13.3 KOMUTATIVNA KOMPLEKSNA NORMIRANA ALGEBRA BREZ ENOTE

1. Prostor $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ z bazo $\{a, b\}$ ($a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$) in z običajno linearno strukturo (gl. 13.2.1) je kompleksna asociativna komutativna algebra brez enote glede na množenje, ki je definirano z enačbo $(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') = (\alpha\alpha', 0)$ za vsak $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{C}$, t.j. z enačbami $a^2 = a$, $ab = ba = b^2 = 0 \dots (1)$. Glede na to množenje so algebrske vse tri absolutne normalizirane norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ in $\|\cdot\|_\infty$, $\|\alpha a + \beta b\|_1 = |\alpha| + |\beta|$, $\|\alpha a + \beta b\|_2 = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2}$ in $\|\alpha a + \beta b\|_\infty = \max\{|\alpha|, |\beta|\} \dots (2)$. Očitno je $\text{lan} A = \mathbb{C}b \dots (2')$.

Vsaka teh norm določa po 13.2.1(1) funkcijo $\psi(t)$ in ta po 13.2.2(2) funkciji $\alpha(t)$ in $\beta(t)$. Po 13.2.2(2) je vsak $x \in S(A)$ oblike $x = z_1\alpha(t)a + z_2\beta(t)b$, kjer so $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2| = 1$ in $t \in [0, 1]$ enolično določeni; za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ je zato $f((\lambda a + \mu b)x) = (\lambda z_1\alpha(t))(z_1^*\alpha)$ za vsak $f = (z_1^*\alpha, z_2^*\beta) \in D(x)$, kjer je $(\alpha, \beta) \in D(x(t)) \dots (3)$. Iz (3), 13.2.2(2) in 13.2.3(6) sledi enakost $V(A, \lambda a + \mu b) = \lambda\{\alpha\alpha(t) : t \in [0, 1], (\alpha, \beta) \in D(x(t))\} \dots (4)$.

2. Norma $\|\cdot\|_1$ določa funkcijo ψ , ki je na intervalu $[0, 1]$ identično enaka 1. Po 13.2.2(2) je zato $\alpha(t) = 1-t$ za vsak $t \in [0, 1]$ in po 13.2.4(12) sledi zato iz (4) enakost $V(A_1, \lambda a + \mu b) = \lambda(\{1.1\} \cup \{1.(1-t) : t \in (0, 1)\} \cup \{0\}) = \lambda[0, 1] = \text{co}\{0, \lambda\} \dots (5)$.
3. Norma $\|\cdot\|_2$ izvira iz skalarne produkta $\langle, \rangle$, $\langle \lambda a + \mu b, \alpha a + \beta b \rangle := \lambda\alpha^* + \mu\beta^*$ za vsak $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ in je zato po (1) in 2.2.4 $V(A_2, \lambda a + \mu b) = \{\langle (\lambda a + \mu b)(\alpha a + \beta b), \alpha a + \beta b \rangle : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} = \{\lambda|\alpha|^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} = \text{co}\{0, \lambda\} \dots (6)$.
4. Norma $\|\cdot\|_\infty$ določa funkcijo ψ , $\psi(t) = \max\{1-t, t\}$ za vsak $t \in [0, 1]$. Po 13.2.2(2) je zato $\alpha(t) = 1$ za vsak $t \in [0, 1/2]$ in sledi zato iz (4) in 13.2.5(21) enakost $V(A_\infty, \lambda a + \mu b) = \lambda(\{1.1\} \cup \{(1-r).1 : r \in [0, 1]\} \cup \{0.\alpha(t) : t \in (1/2, 1]\}) = \lambda[0, 1] = \text{co}\{0, \lambda\} \dots (7)$.

5. Ker je zaradi (1) za vsak $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in za vsak $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{C}$ komutativen kvazi-produkt $((1/\alpha)(\lambda a + \mu b)) \circ (\lambda' a + \mu' b) = (1/\alpha)(\lambda + (\alpha - \lambda)\lambda')a + (\mu/\alpha + \mu')b$ (gl. 1.1, str. 10), je spekter $\mathcal{G}(A, \lambda a + \mu b) = \{0, \lambda\} \dots (8)$.

Iz (5), (6), (7) in (8) sledi $V(A_1, x) = V(A_2, x) = V(A_\infty, x) = \text{co } \mathcal{G}(A, x)$ za vsak $x \in A \dots (9)$. Tu imamo torej primer, ko različne algebrske norme (dve sta nehilbertski!) določajo numerične zaklade, ki so konveksni in sovpadajo na vseh elementih algebre $\dots (9')$. Točka (9) tudi pomeni, da eksistira kompleksna asociativna komutativna B-algebra brez enote in z netrivialnim množenjem z lastnostjo, da je numerični zaklad vsakega elementa algebre konveksna množica - enaka konveksni ogrinjači spektra danega elementa, čeprav norme ne generira skalarni produkt $\dots (9'')$.

6. Iz (5) in (9) slede enakosti $H(A_1) = H(A_2) = H(A_\infty) = Ra + Cb \dots (10)$. Za vsak $x = (\lambda a + \mu b) \in A$ je zaradi (1) $x^n = \lambda^n a$ za vsak $n \in \mathbb{N} \dots (11)$ in je zato $r(x) = |\lambda| < \|x\|_j$ za vsak $j \in \{1, 2, \infty\}$ in za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < |\mu|$. Torej eksistira zaradi (10) za vsak $j \in \{1, 2, \infty\}$ tak $h \in H(A_j)$, da je $r(h) < \|h\|_j \dots (12)$. Zaradi (11) je tudi $\sin x = (\sin \lambda)a + \mu b$ in eksistira zato po (10) za vsak $r \in \mathbb{R}^+$ in za vsak $j \in \{1, 2, \infty\}$ tak $h_r \in H(A_j)$ (h_r neodvisen od j), da je $\|\sin h_r\|_j > r \dots (13)$.

Zaradi (10) je $A_j = H(A_j) + iH(A_j)$ in zaradi komutativnosti algebre A je zato vsak element algebre A j -normalen ($j \in \{1, 2, \infty\}$), kar po 9.6(viii)(b) pomeni, da je $\overline{\text{co}}V(A_j, x) = \text{co } \mathcal{G}(A, x)$ za vsak $x \in A$. To zaradi (5), (6) in (7) spet potrjuje točko (9)!

13.4 KOMUTATIVNA KOMPLEKSNA NORMIRANA ALGEBRA Z ENOTO

- Na kompleksnem linearnem prostoru $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ z bazo $\{a, b\}$ ($a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$; gl. 13.2.1) lahko definiramo asociativno komutativno množenje z enačbo $(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') = (\alpha\alpha', \beta\beta')$ za vsak $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{C}$, t.j. z enačbami $a^2 = a$, $ab = ba = 0$ in $b^2 = b \dots (1)$. Algebra A ima enoto $e = (1, 1) = a + b \dots (2)$. Absolutne normalizirane norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ in $\|\cdot\|_\infty$ (gl. 13.3.1) so algebrske norme in je $\|e\|_1 = 2$, $\|e\|_2 = \sqrt{2}$ ter $\|e\|_\infty = 1 \dots (3)$.
- Po 13.2.1(1) določa norma $\|\cdot\|_1$ funkcijo $\psi(t) \equiv 1$ in po 13.2.2(2) tudi funkciji $\alpha(t) \equiv 1-t$ in $\beta(t) \equiv t$. Po 13.2.2(2) je zato vsak $x \in S_1 = S(A_1)$ oblike $x = z_1(1-t)a + z_2tb$, kjer so $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2| = 1$ in $t \in [0, 1]$ enolično določeni;

zaradi (1) je $(\lambda a + \mu b)x = \lambda z_1(1-t)a + \mu z_2tb$, kar pomeni enakost $f((\lambda a + \mu b)x) = \lambda(z_1(1-t))(z_1^*\alpha) + \mu(z_2t)(z_2^*\beta) =$
 $= \lambda\alpha(1-t) + \mu\beta t$ za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ in za vsak $f = (z_1^*\alpha, z_2^*\beta) \in D_1(x)$, kjer je $(\alpha, \beta) \in D_1(x(t))$. Iz 13.2.2(2) in 13.2.3(6) sledi zato enakost $V(A_1, \lambda a + \mu b) = \{\lambda\alpha(1-t) + \mu\beta t : t \in [0, 1], (\alpha, \beta) \in D_1(x(t))\}$, kar po 13.2.4(12) pomeni, da je
 $V(A_1, \lambda a + \mu b) = \{\lambda \cdot 1 \cdot (1-0) + 0\} \cup \{\lambda \cdot 1 \cdot (1-t) + \mu \cdot 1 \cdot t : t \in (0, 1)\} \cup \{0 + \mu \cdot 1 \cdot 1\} = \text{co}\{\lambda, \mu\}$ za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$... (4).

3. Norma $\|\cdot\|_2$ izvira iz skalarnega produkta $\langle, \rangle$ (gl. 13.3.3) in sledi zato iz (1) in 2.2.4 enakost $V(A_2, \lambda a + \mu b) =$
 $= \{\langle(\lambda a + \mu b)(\alpha a + \beta b), \alpha a + \beta b\rangle : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} =$
 $= \{\lambda|\alpha|^2 + \mu|\beta|^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} = \text{co}\{\lambda, \mu\}$ za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$... (5).

V primeru hilbertske norme $\|\cdot\|_2$ je $A = Ca \oplus Cb$, direktna ortogonalna vsota podalgebr Ca in Cb , pri čemer je tudi $(Ca)(Cb) = \{0\}$... (6).

4. Ker je $(A_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ enotska B-algebra z enoto e ($\|e\|_\infty = 1$), je po 2.2.5(vii') $V(A_\infty, \lambda a + \mu b) = \{f(\lambda a + \mu b) : f \in D_\infty(e)\}$... (7). Ker je $e = x(1/2)$ (gl. 13.2.3(4)), je po 13.2.5(21) $D_\infty(e) =$
 $= \{(1-r, r) \in \mathbb{C}^2 : r \in [0, 1]\}$ (gl. 13.2.3(5)) ... (8). Iz (7) in (8) sledi $V(A_\infty, \lambda a + \mu b) = \{\lambda(1-r) + \mu r : r \in [0, 1]\} =$
 $= \text{co}\{\lambda, \mu\}$... (9).

5. Zaradi (4), (5) in (9) je torej $V(A_1, x) = V(A_2, x) = V(A_\infty, x) =$
 $= \text{co}\{\lambda, \mu\}$ za vsak $x = (\lambda a + \mu b) \in A$... (10).

Točke (1), (2), (3) in (4) pomenijo, da eksistira kompleksna asociativna komutativna B-algebra, ki ni izomorfna obsegu $\mathbb{C}$, ki ima enoto in ki ima lastnost, da je numerični zaklad vsakega elementa te algebre konveksna množica, čeprav norma ne izhaja iz skalarnega produkta in čeprav norma enote ni enaka 1 ... (11).

6. Iz (4), (5) in (9) sledijo enakosti $H(A_1) = H(A_2) = H(A_\infty) =$
 $= Ra + Rb$... (12) in je zato $A_j = H(A_j) + iH(A_j)$ za vsak $j \in \{1, 2, \infty\}$. Torej so zaradi komutativnosti algebre A vsi njeni elementi j -normalni in je zato po 9.6(viii)(a) $\overline{\text{co}}V(A_j, x) =$
 $= \text{co } \mathcal{G}(A, x)$ za vsak $x \in A$ in za vsak $j \in \{1, 2, \infty\}$. Zato je po (9) $\text{co } \mathcal{G}(A, \lambda a + \mu b) = \text{co}\{\lambda, \mu\}$, t.j. $\mathcal{G}(A, \lambda a + \mu b) = \{\lambda, \mu\}$ za vsak $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$... (13).

7. Zaradi (12) je $A_j = H(A_j) \oplus iH(A_j)$ za vsak $j \in \{1, 2, \infty\}$, kar po 10.5(iii) pomeni, da je A kompleksna komutativna enotska B^* -algebra glede na j -to operatorsko normo $|\cdot|_j$, $|x|_j :=$
 $:= \sup_{y \in S_j} \|xy\|_j$ za vsak $x \in A$ in glede na V -involucijo $*$,

$(h + ik)^* := h - ik$ za vsak $h, k \in H(A_j)$. Ker je B^* -norma kompleksne asociativne algebre enolično določena, je $\| \cdot \|_j$ neodvisna od j in je zato $\|x\|_j = \|x\|_\infty$ za vsak $x \in A$ in za vsak $j \in \{1, 2\}$ (saj je $\|e\|_\infty = 1$) ... (14).

Ker je $(A, \| \cdot \|_\infty)$ kompleksna komutativna B^* -algebra, je $r(x) = \|x\|_\infty$ za vsak $x \in A$, pri čemer seveda vse tri algebrske norme $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ in $\| \cdot \|_\infty$ določajo isti spektralni radij r ... (15).

Zaradi (12) in (15) je $r(h) = \|h\|_\infty < \|h\|_2 < \|h\|_1$ za vsak $h \in \{\alpha a + \beta b : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subset Ra + Rb = H(A_1) = H(A_2) = H(A_\infty)$... (16). Ker je $\text{sine} = (\sin 1)e$, je $\|\text{sine}\|_1 = (\sin 1)\|e\|_1 > (\sin(\pi/4)) \cdot 2 = \sqrt{2}$ in $\|\text{sine}\|_2 = (\sin 1)\|e\|_2 > (\sqrt{2}/2) \cdot \sqrt{2} = 1$. Torej je $\|\text{sine}\|_j > 1$ za vsak $j \in \{1, 2\}$, čeprav je enota $e = (a+b) \in H(A_1) = H(A_2)$... (17).

8. Cedilnik je v /6; 7,1/ definiral C -numerični zaklad $V_C(A, x)$ elementa x normirane algebre $(A, \| \cdot \|)$, kjer ima A enoto e , z enačbo $V_C(A, x) = \{f(x) : f \in A', f(e) = 1, \|f\| = 1/\|e\|\}$... (18).

Definiral je množico $H_C(A)$ vseh C -hermitskih elementov algebre A , $H_C(A) = \{h \in A : V_C(A, h) \subset \mathbb{R}\}$... (19) in podal karakterizacijo C -hermitskih elementov /6; 7,13/ : $h \in H_C(A) \iff$

$$\iff \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|e + it h\| - \|e\|}{t} = 0 \quad \dots (20).$$

Očitno je $V_C(A, x) = \{(1/\|e\|)g(x) : g \in A', g(e) = \|e\|, \|g\| = 1\} = (1/\|e\|)\{g(x) : g \in A', g(e/\|e\|) = 1 = \|g\|\} = (1/\|e\|)\{g(x) : g \in \mathcal{D}(A, e/\|e\|)\} := (1/\|e\|)V'(A, x) \subset V(A, x) \cap V_d(A, x)$ (gl. 2.2.5(vi')), t.j. $V_C(A, x) = (1/\|e\|)V'(A, x)$ za vsak $x \in A$... (21). Po 2.2.5(i) in (ii) je zato $V_C(A, x)$ vedno neprazna, kompaktna in konveksna množica ... (22).

Izračunajmo $V_C(A_1, x)$ za poljuben $x = (\lambda a + \mu b) \in A$, kjer označuje A_1 normirano algebro A glede na normo $\| \cdot \|_1$ (gl. 13.3.1). Ker je funkcija $\psi(t)$, ki jo določa $\| \cdot \|_1$ (gl. 13.2.1.(1)) na intervalu $[0, 1]$ identično enaka 1, je po 13.2.2(2) in 13.2.3(4) $x(1/2) = (1/2)a + (1/2)b = (1/2)(a+b) = e/\|e\|_1$. Zato je po 13.2.4(12) $D_1(e/\|e\|_1) = D_1(x(1/2)) = \{(1, 1)\}$, kar pomeni enakost $V'(A_1, \lambda a + \mu b) = \{\lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1\}$ in je zato po (21) $V_C(A_1, \lambda a + \mu b) = \{(1/2)(\lambda + \mu)\}$... (23).

Izračunajmo še $V_C(A_2, x)$ za poljuben $x = (\lambda a + \mu b) \in A_2$ (gl. 13.3.3) ! Norma $\| \cdot \|_2$ določa po 13.2.1(1) funkcijo ψ , $\psi(t) = ((1-t)^2 + t^2)^{1/2}$ za vsak $t \in [0, 1]$... (24). Po 13.2.2(2) in 13.2.3(4) je zato $x(1/2) = \alpha(1/2)a + \beta(1/2)b =$

$= (\sqrt{2}/2)(a+b) = e/\|e\|_2 \dots (25)$. Zaradi (24) in 13.2.3(3)

je $G(1/2) = \{0\}$ in je zato po (25) in 13.2.3(5)

$$D(e/\|e\|_2) = D(x(1/2)) = \{(\psi(1/2), \psi(1/2))\} = \{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}.$$

Zato je $V'(A_2, \lambda a + \mu b) = \{\lambda(\sqrt{2}/2) + \mu(\sqrt{2}/2)\}$, t.j. po (21)

$$V_G(A_2, \lambda a + \mu b) = (1/\sqrt{2})(\sqrt{2}/2)\{\lambda + \mu\} = \{(1/2)(\lambda + \mu)\} \dots (26).$$

Ker je $\|e\|_\infty = 1$, je po (21), 2.2.5(vii') in (9)

$$V_G(A_\infty, \lambda a + \mu b) = V'(A_\infty, \lambda a + \mu b) = V(A_\infty, \lambda a + \mu b) = \\ = \text{co}\{\lambda, \mu\} \dots (27).$$

Torej je po (23), (26) in (27) $V_G(A_1, x) = V_G(A_2, x) \subsetneq \\ \subsetneq V_G(A_\infty, x)$ za vsak $x \in A \setminus \text{Ce}$... (28).

Po (27) je $H_G(A_\infty) = H(A_\infty) = Ra + Rb \dots (29)$ in iz (23)

$$\text{in (26) sledi } H_G(A_1) = H_G(A_2) = Ra + Rb + iR(a-b) \dots (30)$$

in zato po (12) $H(A_1) \subsetneq H_G(A_1)$ (gl. 6.13) ... (31).

Po (30) je $h := i(a-b) \in H_G(A_1) \dots (32)$ in veljajo zara-

di (1) enakosti $h^{4j} = e$ za vsak $j \in \mathbb{N}$ ter $h^{4j+1} = h$,

$h^{4j+2} = -e$ in $h^{4j+3} = -h$ za vsak $j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. To pomeni, da

je $e^{ith} := e^{ith}e = (\text{sht})e + (\text{cht})(ih) = (\text{sht} - \text{cht})a +$

$+ (\text{sht} + \text{cht})b$ in je zato $\|e^{ith}\|_1 = |\text{sht} - \text{cht}| + |\text{sht} + \text{cht}| =$

$$= 2\text{cht} \text{ za vsak } t \in \mathbb{R}, \text{ kar pomeni } \lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ |t| \rightarrow \infty}} \|e^{ith}\|_1 = +\infty \dots (33).$$

Če pa bi bil $h \in H(A_1)$, bi imeli zaradi 6.6(xiii) enakost

$$\|e^{ith}\|_1 = \|e^{ith}e\|_1 = \|e\|_1 = 2 \text{ za vsak } t \in \mathbb{R}.$$

Po (12) in (30) je $(a-b) \in H(A_1) \subset H_G(A_1) \dots (34)$. Zara-

di (13) je $\mathcal{G}(A_1, a-b) = \{1, -1\} \dots (35)$ in je zato po (4)

$$V(A_1, a-b) = \text{co}\{1, -1\} = \text{co } \mathcal{G}(A_1, a-b) \text{ (gl. (34), 2.2.3 in}$$

6.7(xiii)!) ... (36). Zaradi (23) je $V_G(A_1, a-b) =$

$$= \{(1/2)(1-1)\} = \{0\} \text{ in zato po (35) } \mathcal{G}(A_1, a-b) \not\subset V_G(A_1, a-b) =$$

$$= \overline{\text{co}}V_G(A_1, a-b) \text{ (primerjaj 2.3.11 !)} \dots (37).$$

Po (30) je $k := i(a-b) \in H_G(A) \dots (38)$ in je zato po (35) spekter $\mathcal{G}(A_1, k) =$

$$= i\mathcal{G}(A_1, a-b) = \{\pm i\} \not\subset \mathbb{R} \dots (39).$$

C-numerični zaklad je torej v splošnem (t.j., če je norma enote $\neq 1$) preskromen in zato prostor $H_G(A)$ preobsežen, da bi C-hermitski elementi imeli običajne lastnosti, značilne za hermitske elemente kompleksne asociativne enotske ($\|e\| = 1$) B-algebre - npr. da bi bila funkcija $t \rightarrow \|e^{ith}\|$ omejena na realni osi, konveksna ogrinjača spektra hermitskega elementa enaka zaprtju numeričnega zaklada (oz. splošno, da bi bil spekter vsebovan v zaprtju numeričnega zaklada) ali da bi bil spekter hermitskega elementa vsaj realen (gl. (32), (33), (34), (37), (38) in (39)).

ODPRTA VPRAŠANJA

1. Okarakterizirati elemente neskončnodimenzionalne kompleksne asociativne Banachove algebre brez enote, ki imajo skalar 0 za izolirano točko svojega spektra.
2. Če je B netrivialna podalgebra normirane algebre A , ki je gosta v A , ali potem velja enakost $\overline{V(B,b)} = \overline{V(A,b)}$ za vsak $b \in B$? Na primer ali pri standardni vložitvi $a \mapsto \tilde{a}$ (izometrični homomorfizem) nepolne normirane algebre A v njeno izpopolnitev $\bar{A}$ velja enakost $\overline{V(A,a)} = \overline{V(\bar{A},\tilde{a})}$ za vsak $a \in A$?
3. Ali eksistira neskončno-dimenzionalna, asociativna, normirana algebra brez enote nad obsegom $\mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) z lastnostjo, da je numerični zaklad vsakega elementa te algebre zaprta množica? Okarakterizirati take algebre?
4. Kako vpliva refleksivnost neenotske normirane algebre na numerični zaklad elementov te algebre?
5. Poiskati (preprost) primer kompleksne, asociativne, normirane algebre A brez enote s takim elementom $a \in A$, da numerični zaklad $V(A,a)$ ni konveksna množica?
- 5'. Primer kompleksne, asociativne B^* -algebre A brez enote, ki vsebuje tak element a , da $V(A,a)$ ni konveksna množica?
- 5''. Primer enotske, asociativne, kompleksne, normirane algebre A , ki vsebuje netrivialno podalgebro B brez enote in tak $b \in B$, da $V(B,b)$ ni konveksna množica?
6. Okarakterizirati kompleksne asociativne normirane algebre (z enoto ali brez nje) z lastnostjo, da je numerični zaklad vsakega elementa algebre konveksna množica (gl. primere 13.2.4(15), 13.2.5(24), 13.3(9') in 13.4.5(11)).
7. Relacije med levim in desnim numeričnim zakladom in med levo in desno hermitskimi elementi?
8. Lastnosti dvostranskih elementov?
9. Poiskati vse realne in kompleksne asociativne normirane algebre, katerih vsak element je dvostranski (gl. npr. 12.7).
10. Če je $\mathcal{N} = \{p_\mu : \mu \in \Gamma\}$ družina vseh med seboj ekvivalentnih algebrskih norm na asociativni, kompleksni B -algebri A brez enote, ali je potem $\bigcap_{\mu \in \Gamma} \overline{\text{co}} V_\mu(A,a) = \text{co } \mathcal{G}(A,a)$ za vsak

$a \in A$, kjer je $V_p(A, a)$ numerični zaklad elementa a algebre A glede na normo $p_p \in \mathcal{N}$?

11. Ali bi trditev izreka 10.5 veljala tudi v primeru, če bi imela algebra A levo enoto in bi bila hkrati brez desne enote?
12. Ali velja ocena $v(A, a^n) \leq (v(A, a))^n$ za vsak $a \in A$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$, tudi v primeru, če je A realna pred- B^* -algebra (gl. 12.4(iii)(β))?

L I T E R A T U R A

- /1/ Berkson-Dowson-Elliott: On Fuglende's theorem and scalar-type operators
Bull. London Math. Soc. 4(1972)13-16
- /2/ Bollobás: The power inequality on Banach spaces
Proc. Cambr. Phil. Soc. 69(1971)411-415
- /3/ Bonsall-Duncan: Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras
London Math. Soc. Lect. Note Ser. 2(1971)
- /4/ Bonsall-Duncan: Numerical ranges II
London Math. Soc. Lect. Note Ser. 10(1973)
- /5/ Bonsall-Duncan: Complete normed algebras
Ergeb. Math. Bd. 80 Springer 1973
- /6/ Cedilnik: Banachove kvadratne algebre
Disertacija, Ljubljana 1981 (MK 10921/24)
- /7/ Crabb-Duncan-McGregor: Mapping theorems and the numerical radius
Proc. London Math. Soc. 25(1972)3, 486-502
- /8/ Day: Normed linear spaces
Ergeb. Math. Bd. 21 Springer 1973
- /9/ Garnir-De Wilde-Schmets: L'analyse fonctionnelle (Theorie constructive ...)
Birkhäuser Verlag, Basel 1968 (Bd 36)
- /10/ Grasselli: Sebi adjungirani elementi v Banachovi algeabri brez enote
Disertacija, Ljubljana 1961 (MK II 550)
- /11/ Hille-Phillips: Functional analysis and semigroups
Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31(1957)
- /12/ Ingelstam: Real Banach algebras
Arkiv för matematik Bd 5/16(1964)
- /13/ Lampret: Numerični zaklad elementa realne ali kompleksne enotske normirane algebre
Magistrsko delo, Ljubljana 1979
- /14/ Lumer: Complex methods and estimation of operator norms and spectra from real numerical ranges
J. Funct. Analysis 10(1972), 482-495



- /15/ Plafker: The spectral theorem in B-algebras
Glasgow Math. J. 13(1972)1, 49-55
- /16/ Rhodius: Über zu Halbnormen gehörende numerische
Wertebereiche linearer Operatoren
Math. Nachr. 86(1978), 181-185
- /17/ Rickart: General theory of Banach algebras
Van Nostrand 1960
- /18/ Sims: A characterization of Banach-star-algebras by
numerical range
Bull. Austral. Math. Soc. 4(1971)193-200
- /19/ Tomšič: Skew-symmetric operators on real Banach spaces
Glasnik Mat. 12(1977), 93-97
- /20/ Vidav: Banachove algebre
Postdiplomski seminar, Ljubljana 1978
- /21/ Young: Norm and spectral radius for algebraic elements
of B-algebra
Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 88(1980), 129-133
- /22/ Yosida: Functional analysis
Ergeb. Math. Bd 123 Springer 1971